**Специальные методы моделирования**
**Типовой расчет № 2**
**«Моделирование непрерывных распределений»**

Следуя **Указаниям** выполнить следующие **Задания.**

**Задание 1.** Моделирование показательного распределения.

Получить две выборки из $N = 200$ псевдослучайных чисел, распределенных по показательному закону с параметром $\lambda$:

1) используя метод обратной функции распределения и псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0,1)$;

2) используя одну из функций Python, например, numpy.random.exponential(1/**λ**, *N*).

Полученные выборки упорядочить по возрастанию, построить по ним группированные выборки в форме таблицы 1 из **Указания**.

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезы о соответствии каждой выборки теоретическому распределению.

**Задание 2.** Моделирование гиперпоказательного распределения.

Получить выборку из $N = 200$ псевдослучайных чисел, распределенных по гиперпоказательному закону с параметрами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, q_1, q_2, q_3)$, используя метод дискретной суперпозиции, псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0,1)$ и формулы из лекций.

Полученную выборку упорядочить по возрастанию, построить по ней группированную выборку в форме таблицы 1 из **Указания**.

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о соответствии выборки теоретическому распределению.

## Указания

В разделе отчета **Краткие теоретические сведения** для каждого распределения привести выражения для функции распределения, плотности, математического ожидания, дисперсии. В этом разделе должны быть описаны используемые методы моделирования непрерывных распределений (метод обратной функции распределения на примере показательного распределения, метод дискретной суперпозиции на примере гиперпоказательного распределения).

В **Задании 1** рассмотреть показательное распределение:

функция распределения $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, x>0;\end{cases}$

плотность распределения $f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0;\end{cases}$

математическое ожидание $\frac{1}{\lambda}$;

дисперсия $\frac{1}{\lambda^2}$.

В **Задании 2** рассмотреть гиперпоказательное распределение:

функция распределения $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ 1-q_1 e^{-\lambda_1 x}-q_2 e^{-\lambda_2 x}-q_3 e^{-\lambda_3 x}, x>0;\end{cases}$

$\lambda_i>0, q_i>0,\ q_1+q_2+q_3=1$;

плотность распределения $f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ q_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}+q_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}+q_3\lambda_3 e^{-\lambda_3 x}, x\ge 0;\end{cases}$

математическое ожидание $q_1\lambda_1^{-1}+q_2\lambda_2^{-1}+q_3\lambda_3^{-1}$;

дисперсия $q_1\lambda_1^{-2}+q_2\lambda_2^{-2}+q_3\lambda_3^{-2}$.

В разделе отчета **Результаты расчетов** для каждого задания и каждой выборки должны иметься 2 таблицы $20\times 10$ (20 строк, 10 столбцов): с полученной выборкой и упорядоченной по возрастанию выборкой. Затем нужно

1) составить группированную выборку в форме следующей таблицы:

| Интервал | $n_i$ | $w_i$ | $p_i$ | $\lvert w_i-p_i\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| $[a_0, a_1]$ | | | | |
| $(a_1, a_2]$ | | | | |
| … | | | | |
| $[a_{m-1}, a_m]$ | | | | |
| | $\sum_{i=1}^{m} n_i$ | $\sum_{i=1}^{m} w_i$ | $\sum_{i=1}^{m} p_i$ | $\Delta_{\max}$ |

Таблица 1. Сравнение относительных частот и теоретических вероятностей

где $m=1+[\log_2 N]$, $n_i$ – число значений выборки $x_j$, попавших в $i$-ый интервал; границы интервалов находятся по формулам $a_0=0$, $a_m=\max\{x_j\}$, $a_i-a_{i-1}=\frac{a_m-a_0}{m}$, $i=1,...,m$;

$w_i$ – относительная частота попадания в $i$-ый интервал $w_i=\frac{n_i}{N}$, $N=\sum_{i=1}^{m} n_i$,

$p_i$ – теоретическая вероятность попадания в $i$-ый интервал $p_i=F(a_i)-F(a_{i-1})$ ($F(x)$–теоретическая функция распределения, при этом положить $F(a_m)=1$), $\Delta_{\max}=\max\{|w_i-p_i|\ ,\ i=1,...,m\}$;

2) построить гистограммы относительных частот (площадь $i$-ого столбца гистограммы равна $w_i$), с наложенными на них графиками плотностей соответствующих теоретических распределений;

3) построить таблицу вида

| $i$ | $a_i$ | $F(a_i)$ | $w_i$ | $p_i$ | $\frac{N(w_i-p_i)^2}{p_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $a_0$ | 0 | – | – | – |
| 1 | $a_1$ | $F(a_1)$ | $w_1$ | $p_1$ | $\frac{N(w_1-p_1)^2}{p_1}$ |
| … | | | … | … | … |
| $m-1$ | $a_{m-1}$ | $F(a_{m-1})$ | $w_{m-1}$ | $p_{m-1}$ | $\frac{N(w_{m-1}-p_{m-1})^2}{p_{m-1}}$ |
| $m$ | $a_m$ | 1 | $w_m$ | $p_m$ | $\frac{N(w_m-p_m)^2}{p_m}$ |
| | | | $\sum_{i=1}^{m} w_i$ | $\sum_{i=1}^{m} p_i$ | $\sum_{i=0}^{m}\frac{N(w_i-p_i)^2}{p_i}$ |

Таблица 2. Расчёт значения критерия $\chi_B^2=\sum_{i=0}^{m}\frac{N(w_i-p_i)^2}{p_i}$

4) сравнить найденное значение критерия $\chi_B^2=\sum_{i=0}^{m}\frac{N(w_i-p_i)^2}{p_i}$ с критическим значением $\chi_{кр,\alpha}^2(l)$, где $\alpha$ – уровень значимости, $\alpha=0{,}05$, $l=m-1$ – число степеней свободы и сделать вывод о возможности принятия гипотезы:

если $\chi^2_B \le \chi^2_{кр,\alpha}(l)$, то гипотеза о соответствии выборки теоретическому распределению не противоречит экспериментальным данным при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

если $\chi^2_B > \chi^2_{кр,\alpha}(l)$, то гипотеза о соответствии выборки теоретическому распределению противоречит экспериментальным данным при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Критические значений $\chi^2_{кр,\alpha}(l)$ можно найти с помощью функции Python scipy.stats.chi2.ppf$(1-\alpha, l)$.

## Данные к типовому расчету № 2

| **Вариант** | $\lambda$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,99 | 0,79 | 1,49 | 1,09 | 0,21 | 0,32 | 0,47 |
| 2 | 1,68 | 0,86 | 0,88 | 0,82 | 0,24 | 0,45 | 0,31 |
| 3 | 1,51 | 0,27 | 1,31 | 0,93 | 0,34 | 0,29 | 0,37 |
| 4 | 1,5 | 0,55 | 1,45 | 1,22 | 0,55 | 0,31 | 0,14 |
| 5 | 0,53 | 1,24 | 1,64 | 1,21 | 0,37 | 0,45 | 0,18 |
| 6 | 1,09 | 1,13 | 1,33 | 0,59 | 0,22 | 0,47 | 0,31 |
| 7 | 1,49 | 1,14 | 1,25 | 1,39 | 0,51 | 0,33 | 0,16 |
| 8 | 0,81 | 0,55 | 1,87 | 0,32 | 0,34 | 0,43 | 0,23 |
| 9 | 1,37 | 1,36 | 1,04 | 0,58 | 0,38 | 0,23 | 0,39 |
| 10 | 1,48 | 0,43 | 1,03 | 0,84 | 0,27 | 0,32 | 0,41 |
| 11 | 1,61 | 1,25 | 0,85 | 0,63 | 0,38 | 0,33 | 0,29 |
| 12 | 1,31 | 0,31 | 0,67 | 0,48 | 0,18 | 0,37 | 0,45 |
| 13 | 1,93 | 0,73 | 1,75 | 1,67 | 0,29 | 0,32 | 0,39 |
| 14 | 1,31 | 1,33 | 0,95 | 0,55 | 0,39 | 0,25 | 0,36 |
| 15 | 1,87 | 0,79 | 1,05 | 1,45 | 0,28 | 0,34 | 0,38 |
| 16 | 1,96 | 1,15 | 1,59 | 0,33 | 0,36 | 0,33 | 0,31 |