

# Analyse réelle

Loïc Teyssier

UFR Math-Info – Université de Strasbourg

2<sup>ème</sup> année (S3) Licence Informatique

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La droite des nombres réels</b>	<b>3</b>
1.1	Hiérarchie des nombres calculables	4
1.1.1	Construction de $\mathbb{N}$ (entiers naturels)	4
1.1.1.1	Axiomatique de Peano	4
1.1.1.2	Opérations arithmétiques	5
1.1.1.3	Numération positionnelle	6
1.1.2	Construction de $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)	7
1.1.3	Construction de $\mathbb{Q}$ (rationnels)	8
1.1.4	Nombres décimaux	10
1.1.5	Nombres algébriques et transcendants	10
1.2	Construction des nombres réels	11
1.2.1	Écriture décimale infinie	11
1.2.2	L'ordre lexicographique	12
1.2.3	La droite des nombres réels	12
1.2.4	Opérations arithmétiques et plongement $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	13
1.2.5	Nombres approximables	13
1.3	L'ordre standard sur $\overline{\mathbb{R}}$	14
1.3.1	Construction et opérations	14
1.3.2	Parties entières	15
1.3.3	L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$	15
1.3.4	Intervalles	16
1.4	Bornes supérieures et inférieures	16
1.4.1	Majorants et minorants	16
1.4.2	Bornes supérieures et inférieures	17
1.5	Convexité	19
<b>2</b>	<b>Suites numériques réelles</b>	<b>20</b>
2.1	Convergence et limite	21
2.1.1	Notion de convergence	21
2.1.2	Notion de limite finie	22
2.1.3	Limite dans $\overline{\mathbb{R}}$	24
2.1.4	Passage d'une inégalité à la limite	25
2.2	Propriété des limites	25
2.2.1	Opérations arithmétiques	25
2.2.2	Convergence par encadrement	26
2.3	Suites particulières	26
2.3.1	Caractérisation des bornes supérieures et inférieures	26
2.3.2	Suites majorées et minorées	27
2.3.3	Suites monotones	27
2.3.4	Suites adjacentes	28

<b>3 Fonctions réelles continues et dérivables</b>	<b>29</b>
3.1 Limite d'une fonction en un point	29
3.1.1 Définition	29
3.1.2 Propriétés générales	30
3.1.3 Fonctions monotones	31
3.2 Fonction continue	32
3.2.1 Définition	32
3.2.2 Propriétés générales	32
3.2.3 Prolongement par continuité	32
3.3 Théorèmes fondamentaux des fonctions continues	33
3.3.1 Le cas d'un intervalle fermé	33
3.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires	33
3.3.3 Fonctions monotones	34
3.4 Suites définies par récurrences	34
3.4.1 Points fixes	34
3.4.2 Suites définies par itération	34
3.5 Fonctions réelles dérivables	35
3.5.1 Généralités	35
3.5.2 Aspects algébriques et calculatoires	36
3.6 Théorèmes fondamentaux des fonctions dérivables	37
3.6.1 Dérivée et extrema	37
3.6.2 Théorème des accroissements finis	38
3.6.3 Dérivée et variations	39
3.6.4 Prolongement de la dérivée	39
3.7 Dérivées d'ordre supérieur et classes de dérivabilité	40
3.8 Application : primitives	40
3.9 Application : formule de Taylor-Lagrange	40
<b>4 Fonctions usuelles</b>	<b>42</b>
4.1 Une construction de l'exponentielle complexe	43
4.1.1 L'exponentielle réelle	43
4.1.2 Les fonctions sinus et cosinus	45
4.1.3 Application aux équations différentielles affines	46
4.2 Construction des réciproques des fonctions standards	47
4.2.1 Les racines $n^{\text{ème}}$	47
4.2.2 Le logarithme népérien	47
4.2.3 Les fonctions hyperboliques inverses	47
4.2.4 Les fonctions circulaires inverses	48
4.3 La classe des fonctions usuelles	49
4.4 Propriétés fondamentales des fonctions usuelles	50
4.4.1 La continuité	50
4.4.2 La dérivabilité	51
4.4.3 Calcul de limites	51
4.5 Plan d'étude d'une fonction usuelle	53