Changements de base, éléments propres

Exercice 1 Polynômes

On se place dans l'espace E des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On définit les deux bases :

$$e = \left\{e_1(X) = 1,\ e_2(X) = X,\ e_3(X) = X^2,\ e_4(X) = X^3\right\}$$

$$e' = \left\{e'_1(X) = X,\ e'_2(X) = 1 - X,\ e'_3(X) = X^3,\ e'_4(X) = (1 - X)^3\right\}$$

On appelle d l'application qui dérive un polynôme :

$$\begin{aligned} d : \quad E \quad &\longrightarrow E \\ \mathbf{p}(X) &\longmapsto \mathbf{p}'(X) \end{aligned}$$

1. Montrer que d est une application linéaire de E dans E.
2. Calculer la matrice D qui représente d dans la base e.
3. Calculer $Ker(d)$, le noyau de d.
4. Calculer $P_{e' \to e}$ la matrice de passage de e' dans e.
5. Calculer la matrice D' qui représente d dans la base e'. *(Question optionnelle)*

Exercice 2 – Éléments propres

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Calculer les vecteurs propres de A.
3. Écrivez la diagonalisation de A.
4. Calculez A^9.
5. Supposons maintenant que l'on cherche à calculer A^p pour $p > 0$ et M de taille $n \times n$. On suppose A diagonalisable. Donnez la complexité du calcul de A^p de deux manières : classique et sous forme diagonalisée (sans compter le coût de la mise sous forme diagonale).