Correction TD 4 : Couples de variables aléatoires & convergence

Exercice 1.

1. Pour avoir une loi de probabilité, on doit avoir la probabilité jointe positive $\forall (i,j) \in \{1, 2, \cdots, n\}$, i.e.,

$$A\, C_{n-1}^{i-1} C_{n-1}^{j-1} \geq 0 \tag{1}$$

et la double somme égale à 1, i.e.

$$\begin{aligned} 1 &= A \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} C_{n-1}^{j-1} \\ &= A \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} \\ &= A\, 2^{n-1}\, 2^{n-1} \end{aligned}$$

car $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$ et il suffit de faire $x = y = 1$.
Par conséquent $A = 4^{-(n-1)}$ et donc (1) est bien satisfaite.

2. La loi marginale de X vaut $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= A \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} C_{n-1}^{j-1} \\ &= 4^{-(n-1)}\, C_{n-1}^{i-1} \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} \\ &= 2^{-(n-1)}\, C_{n-1}^{i-1}. \end{aligned}$$

De façon similaire la loi marginale de Y vaut $\forall j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= 2^{-(n-1)}\, C_{n-1}^{j-1}. \end{aligned}$$

3. On a $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j).$$

Par conséquent X et Y sont indépendantes.

4. On a

$$\mathbb{P}(X = i | Y = j) = \frac{\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(Y = j)} = \frac{\mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j)}{\mathbb{P}(Y = j)} = \mathbb{P}(X = i),$$

en utilisant l'indépendance entre X et Y.
5. En utilisant la question 2, on a clairement

$$\mathbb{P}(X-1=i)=\mathbb{P}(X=i+1)=2^{-(n-1)}\,C_{n-1}^{i}=C_{n-1}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-i}$$

ce qui signifie que $X-1$ suit une loi binomiale de paramètre $(n-1,1/2)$. Pour rappel, nous avons vu (même démontré en cours et TD) que si Z est de loi Binomiale(m,p), alors $\mathbb{E}(Z)=mp$ et $Var(Z)=mp(1-p)$. Donc $\mathbb{E}(X-1)=(n-1)/2$, i.e., $\mathbb{E}(X)=(n+1)/2$ et $Var(X-1)=Var(X)=(n-1)/4$.

Exercice 2. De façon évidente on a $Y=n-X$. Donc Y est de la forme $aX+b$ avec $a<0$. Par conséquent $\rho(X,Y)=-1$.
On retrouve aussi ce résultat par le calcul direct

$$\begin{aligned}Cov(X,Y) &= Cov(X,n-X)\\ &= Cov(X,n)-Cov(X,X)\\ &= 0-Var(X)\end{aligned}$$

car la covariance entre une variable aléatoire et une constante est nulle (par définition de la covariance). Par ailleurs, on a aussi $Var(Y)=Var(n-X)=Var(X)$. Donc $\rho(X,Y)=Cov(X,Y)/\sqrt{Var(X)Var(Y)}=-1$.