Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Travaux Dirigés de Logique

Calcul des prédicats de premier ordre : Formes normales, Unification et Résolution avec variables

Rappels : Transformations par équivalence des formules de CP1

Les propriétés qui sont rappelées dans ce paragraphe seront utilisées pour transformer, par équivalence, les formules des prédicats de premier ordre (CP1) notamment pour les mettre sous formes prénexe, de Skolem ou clausale.
À chaque étape de transformation, nous indiquerons le numéro de la règle utilisée (les numéros des règles sont indiqués en **rouge** ci-dessous).

Par exemple, si je met $A \equiv_{\mathbf{II.2)}} B$ cela veut dire que je passe de la formule A à la formule B en appliquant la règle **II.2)**

I. Affaiblissement universel/existentiel

I.1) $\models (\forall x\ A(x) \Rightarrow \exists y\ A(y))$

II. Ordre des quantificateurs

II.1) $\models (\forall x \forall y\ A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\ A(x,y))$
II.2) $\models (\exists x \exists y\ A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\ A(x,y))$
II.3) $\models (\exists x \forall y\ A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\ A(x,y))$

III. Internalisation/externalisation des quantificateurs

On suppose dans cette partie que $x \notin Varlib(B)$.

III.1) $\models (\forall x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow (A \vee \forall x\ B(x)))$
III.2) $\models (\forall x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow (A \wedge \forall x\ B(x)))$
III.3) $\models (\exists x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow (A \vee \exists x\ B(x)))$
III.4) $\models (\exists x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow (A \wedge \exists x\ B(x)))$

IV. Mise en facteur des quantificateurs

N.B. : la première et la dernière formule ne sont pas des équivalences.

IV.1) $\models ((\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)))$
IV.2) $\models ((\forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x)) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x)))$
IV.3) $\models ((\exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x)) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x)))$
IV.4) $\models (\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x\ A(x) \wedge \exists x\ B(x)))$

V. Quantificateurs et implication

On suppose dans cette partie que $x \notin Varlib(B)$.

V.1) $\models ((\forall x\ A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \Rightarrow B))$
V.2) $\models ((\exists x\ A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow B))$
V.3) $\models ((B \Rightarrow \forall x\ A(x)) \Leftrightarrow \forall x(B \Rightarrow A(x)))$
V.4) $\models ((B \Rightarrow \exists x\ A(x)) \Leftrightarrow \exists x(B \Rightarrow A(x)))$

VI. Négation

VI.1) $\models \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
VI.2) $\models \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
VI.3) $\models \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
VI.4) $\models \neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$
VI.5) $\models \neg(\forall x\ A) \Leftrightarrow \exists x\ \neg A$
VI.6) $\models \neg(\exists x\ A) \Leftrightarrow \forall x\ \neg A$

1 Mise sous forme(s) normale(s)

1.1 Formes prénexes

Faire « remonter » les quantificateurs en tête de formule en utilisant les formules vues en cours (et sans forcément modifier les connecteurs).

(a) $\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists z\ (\neg\forall y\ (q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge \forall y\ (q(x,y) \Rightarrow p(x))))$

Réponse :

$$\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists z\ (\underline{\neg\forall y\ (q(x,y) \Rightarrow p(f(a))}) \wedge \forall y\ (q(x,y) \Rightarrow p(x))))$$

$$\equiv_{V.5)}$$

$$\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists z\ \underline{(\exists y\ \neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge \forall y\ (q(x,y) \Rightarrow p(x)))})$$

$$\text{commmutativité de } \wedge \ + \ \equiv_{V.3)}$$

$$\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists z \exists y\ \underline{(\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge \forall y\ (q(x,y) \Rightarrow p(x)))})$$

$$\text{renommage de } y : [y \leftarrow y_1] \ + \ \equiv_{V.2)}$$

$$\forall x\ \underline{(p(x) \Rightarrow \exists z \exists y \forall y_1\ (\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge (q(x,y_1) \Rightarrow p(x))))}$$

$$\equiv_{IV.4)}$$

$$\forall x \exists z\ \underline{(p(x) \Rightarrow \exists y \forall y_1\ (\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge (q(x,y_1) \Rightarrow p(x))))}$$

$$\equiv_{IV.4)}$$

$$\forall x \exists z \exists y\ \underline{(p(x) \Rightarrow \forall y_1\ (\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge (q(x,y_1) \Rightarrow p(x))))}$$

$$\equiv_{IV.3)}$$

$$\forall x \exists z \exists y \forall y_1 \ (p(x) \Rightarrow \ (\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge (q(x,y_1) \Rightarrow p(x))))$$

(b) $\neg((\forall x \exists y \ p(x,y) \wedge \forall y \exists x \ q(y,z)) \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))$

Réponse :

$$\neg(\underline{(\forall x \exists y \ p(x,y) \wedge \forall y \exists x \ q(y,z))} \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))$$

$$\equiv_{II.2)}$$

$$\neg(\forall y \ \underline{(\forall x \exists y \ p(x,y) \wedge \exists x \ q(y,z))} \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))$$

$$\equiv_{II.4)}$$

$$\neg(\forall y \exists x \ \underline{(\forall x \exists y \ p(x,y) \wedge \ q(y,z))} \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))$$

$$\text{commmutativité de } \wedge \ + \equiv_{II.2)}$$

$$\neg(\forall y \exists x \forall x \ \underline{(\exists y \ p(x,y) \wedge \ q(y,z))} \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))$$

$$\text{commmutativité de } \wedge \ + \equiv_{II.4)}$$

$$\neg\underline{(\forall y \exists x \forall x \exists y_1 \ (p(x,y_1) \wedge \ q(y,z)) \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))}$$

$$\equiv_{IV.1)}$$

$$\neg \forall y \underline{(\exists x \forall x \exists y_1 \ (p(x,y_1) \wedge \ q(y,z)) \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))}$$

$$\equiv_{IV.2)}$$

$$\neg \forall y \exists x \underline{(\forall x \exists y_1 \ (p(x,y_1) \wedge \ q(y,z)) \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))}$$

$$\equiv_{IV.1)}$$

$$\neg \forall y \exists x \forall x \underline{(\exists y_1 \ (p(x,y_1) \wedge \ q(y,z)) \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))}$$

$$\equiv_{IV.2)}$$

$$\neg \forall y \exists x \forall x \exists y_1 \ \underline{((p(x,y_1) \wedge \ q(y,z)) \Rightarrow \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \wedge q(y,z)))}$$

$$\text{renommage de } x,y,z : [x \leftarrow x_2][y \leftarrow y_2][z \leftarrow z_2] \ + \ \equiv_{IV.3)\ ;\ IV.4)\ ;\ IV.4)}$$

$$\underline{\neg \forall y \exists x \forall x \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \exists z_2 \ ((p(x,y_1) \wedge \ q(y,z)) \Rightarrow \ (p(x_2,y_2) \wedge q(y_2,z_2))))}$$

$$\equiv_{V.5)\ ;\ V.6)\ ;\ V.5)\ ;\ V.6)\ ;\ V.5)\ ;\ V.6)\ ;\ V.6)}$$

$$\exists y \forall x \exists x \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \forall z_2\ \neg((p(x,y_1) \wedge\ q(y,z)) \Rightarrow\ (p(x_2,y_2) \wedge q(y_2,z_2))))$$

(c) $\exists y \forall z\ (p(z,y) \Leftrightarrow \neg \exists x\ (p(z,x) \wedge p(x,z)))$

Réponse :

$$\exists y \forall z\ (p(z,y) \Leftrightarrow \underline{\neg \exists x (p(z,x) \wedge p(x,z))})$$

$$\equiv_{V.6)}$$

$$\exists y \forall z \underline{(p(z,y) \Leftrightarrow \forall x\ \neg(p(z,x) \wedge p(x,z)))}$$

$$A \Leftrightarrow B\ \equiv\ (A \Rightarrow B)\ \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$\exists y \forall z \underline{((p(z,y) \Rightarrow \forall x\ \neg(p(z,x) \wedge p(x,z)))}\ \wedge\ (\forall x\ \neg(p(z,x) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(z,y)))$$

$$\text{renommage de } x : [x \leftarrow x_1]\ +\ \equiv_{IV.3)}$$

$$\exists y \forall z (\forall x_1\ (p(z,y) \Rightarrow\ \neg(p(z,x_1) \wedge p(x_1,z)))\ \wedge\ \underline{(\forall x\ \neg(p(z,x) \wedge p(x,z) \Rightarrow p(z,y)))}$$

$$\text{renommage de } x : [x \leftarrow x_2]\ +\ \equiv_{IV.1)}$$

$$\exists y \forall z \underline{(\forall x_1\ (p(z,y) \Rightarrow\ \neg(p(z,x_1) \wedge p(x_1,z)))\ \wedge\ \exists x_2(\neg(p(z,x_2) \wedge p(x_2,z)) \Rightarrow p(z,y)))}$$

$$\text{commmutativité de } \wedge\ +\ \equiv_{II.1)}$$

$$\exists y \forall z \forall x_1 \underline{(\ (p(z,y) \Rightarrow\ \neg(p(z,x_1) \wedge p(x_1,z)))\ \wedge\ \exists x_2(\neg(p(z,x_2) \wedge p(x_2,z)) \Rightarrow p(z,y)))}$$

$$\equiv_{II.4)}$$

$$\exists y \forall z \forall x_1 \exists x_2\ (\ (p(z,y) \Rightarrow \neg(p(z,x_1) \wedge p(x_1,z)))\ \wedge\ (\neg(p(z,x_2) \wedge p(x_2,z)) \Rightarrow p(z,y)))$$

1.2 Formes de Skolem

Mettre sous forme prénexe, puis sous forme de clausale de Skolem, les formules suivantes.

(a) $(\exists x\ p(x) \Rightarrow (r(x) \vee \forall y\ p(y))) \wedge \forall x\ \exists y\ (r(y) \Rightarrow p(x))$

Réponse :

$$\underline{(\exists x\ p(x) \Rightarrow (r(x) \vee \forall y\ p(y)))} \wedge \forall x\ \exists y\ (r(y) \Rightarrow p(x))$$

$$\text{renommage de } x : [x \leftarrow x_1]\ +\ \equiv_{IV.2)}$$

$$\forall x_1\ (\ p(x_1) \Rightarrow \underline{(r(x) \vee \forall y\ p(y)))} \wedge \forall x\ \exists y\ (r(y) \Rightarrow p(x))$$

$$\equiv_{II.1)}$$

$$\underline{(\forall x_1 \forall y \ (\ p(x_1) \Rightarrow (r(x) \vee \ p(y))) \wedge \forall x \ \exists y \ (r(y) \Rightarrow p(x))})$$

commmutativité de $\wedge$ $+$ $\equiv_{II.2)\ ;\ II.4)}$

$$\forall x_1 \forall y \ (\underline{(\ p(x_1) \Rightarrow (r(x) \vee \ p(y))) \wedge \forall x \ \exists y \ (r(y) \Rightarrow p(x))})$$

renommage de x, y : $[x \leftarrow x_2][y \leftarrow y_2]$ $+$ $\equiv_{II.2)\ ;\ II.4)}$

$$\forall x_1 \forall y \forall x_2 \ \exists y_2 \ ((\ p(x_1) \Rightarrow (r(x) \vee \ p(y))) \wedge \ (r(y_2) \Rightarrow p(x_2)))$$

substitution de y_2 : $[y_2 \leftarrow f_{y_2}(x_1, y, x_2)]$

$$\forall x_1 \forall y \forall x_2 \ ((\ p(x_1) \Rightarrow (r(x) \vee \ p(y))) \wedge \ (r(f_{y_2}(x_1, y, x_2)) \Rightarrow p(x_2)))$$

$$A \ \Rightarrow \ B \ \equiv \ \neg A \ \vee \ B$$

$$\forall x_1 \forall y \forall x_2 \ ((\ \neg p(x_1) \vee r(x) \vee \ p(y)) \wedge \ (\neg r(f_{y_2}(x_1, y, x_2)) \vee p(x_2)))$$

$$\{ \ \neg p(x_1) \vee r(x) \vee \ p(y), \ \ \neg r(f_{y_2}(x_1, y, x_2)) \vee p(x_2) \ \}$$

(b) $((p_1(x_1) \Rightarrow \exists x_2 \ p_2(x_2)) \Rightarrow \exists x_3 \ p(x_3)) \Rightarrow \exists x_4 \ q(x_4)$

Réponse :

$$\underline{((p_1(x_1) \Rightarrow \exists x_2 \ p_2(x_2)) \Rightarrow \exists x_3 \ p(x_3)) \Rightarrow \exists x_4 \ q(x_4)}$$

$$\equiv_{IV.4)\ ;\ IV.4)\ ;\ IV.4)}$$

$$\exists x_4 \ \exists x_3 \ \exists x_2 \ ((p_1(x_1) \Rightarrow \ p_2(x_2)) \Rightarrow \ p(x_3)) \Rightarrow \ q(x_4)$$

substitution dex_4 : $[x_4 \leftarrow a_{x_4}]$

$$\exists x_3 \ \exists x_2 \ ((p_1(x_1) \Rightarrow \ p_2(x_2)) \Rightarrow \ p(x_3)) \Rightarrow \ q(a_{x_4})$$

substitution dex_3 : $[x_3 \leftarrow a_{x_3}]$

$$\exists x_2 \ ((p_1(x_1) \Rightarrow \ p_2(x_2)) \Rightarrow \ p(a_{x_3})) \Rightarrow \ q(a_{x_4})$$

substitution dex_2 : $[x_2 \leftarrow a_{x_2}]$

$$((p_1(x_1) \Rightarrow \ p_2(a_{x_2})) \Rightarrow \ p(a_{x_3})) \Rightarrow \ q(a_{x_4})$$

$$A \ \Rightarrow \ B \ \equiv \ \neg A \ \vee \ B$$

$$\neg(\neg(\neg p_1(x_1) \vee\ p_2(a_{x_2})) \vee\ p(a_{x_3})) \vee\ q(a_{x_4})$$

$$\equiv\ :\ \text{propriétés de } \neg, \vee, \wedge$$

$$(\ \neg p_1(x_1) \vee p_2(a_{x_2}) \vee q(a_{x_4})\ )\quad \wedge \quad (\ p(a_{x_3})) \vee q(a_{x_4})\ )$$

$$\{\ \neg p_1(x_1) \vee p_2(a_{x_2}) \vee q(a_{x_4}),\quad p(a_{x_3}) \vee q(a_{x_4})\ \}$$

(c) $(\forall x\ (p(x) \wedge \exists y\ q(x, y))) \wedge (\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ r(y))$

Réponse :

$$(\forall x\ \underline{(p(x) \wedge \exists y\ q(x, y)))} \wedge \underline{(\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ r(y))}$$

$$\equiv_{II.3)\ ;\ IV.1)\ ;\ IV.4)}$$

$$((\forall x\ \exists y\ (p(x) \wedge q(x, y))) \wedge \exists x\ \exists y\ (p(x) \Rightarrow r(y)))$$

$$\equiv_{II.4)\ ;\ II.4)}\ ;\text{renommage de } x, y : [x \leftarrow x_1][y \leftarrow y_1]\ \ +\ \ +2 \text{ fois commmutativité de} \wedge\ + \equiv_{II.2)\ ;\ II.4)}$$

$$\exists x\ \exists y\ \forall x_1\ \exists y_1\ (\ (p(x_1) \wedge q(x_1, y_1)) \wedge\ (p(x) \Rightarrow r(y))\ )$$

$$\text{substitution de} x : [x \leftarrow a_x]$$

$$\exists y\ \forall x_1\ \exists y_1\ (\ (p(x_1) \wedge q(x_1, y_1)) \wedge\ (p(a_x) \Rightarrow r(y))\ )$$

$$\text{substitution de} y : [y \leftarrow a_y]$$

$$\forall x_1\ \exists y_1\ (\ (p(x_1) \wedge q(x_1, y_1)) \wedge\ (p(a_x) \Rightarrow r(a_y))\ )$$

$$\text{substitution de} y_1 : [y \leftarrow f_{y_1}(x_1)]$$

$$\forall x_1\ (\ (p(x_1) \wedge q(x_1, f_{y_1}(x_1))) \wedge\ (p(a_x) \Rightarrow r(a_y))\ )$$

$$A\ \Rightarrow\ B\ \ \equiv\ \ \neg A\ \vee\ B$$

$$\forall x_1\ (\ (p(x_1) \wedge q(x_1, f_{y_1}(x_1))) \wedge\ (\neg p(a_x) \vee r(a_y))\ )$$

$$\{\ (\ (p(x_1),\quad q(x_1, f_{y_1}(x_1))),\quad \neg p(a_x) \vee r(a_y)\ \}$$

2 Unification

Unifier les atomes suivants lorsque c'est possible :

(a) $A = p(x, f(x), g(f(x), x))$ et $B = p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$;

Réponse :

$$p(\underline{x}, f(x), g(f(x), x)) \stackrel{?}{=} p(\underline{z}, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$$

$$[x \leftarrow z]$$

$$p(z, f(\underline{z}), g(f(z), z)) \stackrel{?}{=} p(z, f(\underline{f}(a)), g(f(g(a, z)), v))$$

$$[z \leftarrow f(a)]$$

$$p(f(a), f(f(a)), g(f(\underline{f}(a)), f(a))) \stackrel{?}{=} p(f(a), f(f(a)), g(f(\underline{g}(a, f(a))), v))$$

$f \neq g$ donc A et B ne sont pas unifiable.

(b) $A = p(f(g(x, y)), g(v, w), y)$ et $B = p(f(z), x, f(x))$;

Réponse :

$$p(f(\underline{g}(x, y)), g(v, w), y) \stackrel{?}{=} p(f(\underline{z}), x, f(x))$$

$$[z \leftarrow g(x, y)]$$

$$p(f(g(x, y)), \underline{g}(v, w), y) \stackrel{?}{=} p(f(g(x, y)), \underline{x}, f(x))$$

$$[x \leftarrow g(u, v)]$$

$$p(f(g(g(u, v), y)), g(v, w), \underline{y}) \stackrel{?}{=} p(f(g(g(u, v), y)), g(u, v), \underline{f}(g(u, v)))$$

$$[y \leftarrow f(g(u, v))]$$

$$p(f(g(g(u, v), f(g(u, v)))), g(v, w), f(g(u, v))) = p(f(g(g(u, v), f(g(u, v)))), g(u, v), f(g(u, v)))$$

Donc A et B sont unifiables et il ont pour unificateur le plus général

$$\sigma = [z \leftarrow g(x, y)][x \leftarrow g(u, v)][y \leftarrow f(g(u, v))].$$

(c) $A = p(x, f(x), f(f(x)))$ et $B = p(u, w, w)$;

Réponse :

$$p(\underline{x}, f(x), f(f(x))) \stackrel{?}{=} p(\underline{u}, w, w)$$

$$[x \leftarrow u]$$

$$p(u, \underline{f}(u), f(f(u))) \stackrel{?}{=} p(u, \underline{w}, w)$$

$$[w \leftarrow f(u)]$$

$$p(u, f(u), f(\underline{f}(u))) \stackrel{?}{=} p(u, f(u), f(\underline{u}))$$

u est une variable de $f(u)$. Donc A et B ne sont pas unifiables.

(d) $A = p(x, f(x), f(f(x)))$ et $B = p(f(f(y)), y, f(y))$.

Réponse :

$$p(\underline{x}, f(x), f(f(x))) \stackrel{?}{=} p(\underline{f}(f(y)), y, f(y))$$

$$[x \leftarrow f(f(y))]$$

$$p(f(f(y)), \underline{f}(f(f(y))), f(f(f(f(y))))) \stackrel{?}{=} p(f(f(y)), \underline{y}, f(y))$$

y est une variable de $f(f(f(y)))$. Donc A et B ne sont pas unifiables.

3 Résolution

Déduire la clause vide des trois formules suivantes :
$\neg p(x) \vee p(f(x))$; $p(a)$; $\neg p(f(z))$.

Réponse :

(1) $p(a)$ Hypothèse

(2) $\neg p(x) \vee p(f(x))$ Hypothèse

(3) $p(f(a))$ RAV entre (1) et (2) en utilisant la substitution $[x \leftarrow a]$

(4) $\neg p(f(z))$ Hypothèse

(5) $\square$ RAV entre (3) et (4) en utilisant la substitution $[z \leftarrow a]$

Idem avec les six formules suivantes :
$\neg q(f(z), y)$; $q(a, y) \vee \neg p(f(y), f(y))$; $p(f(x), f(y)) \vee \neg p(x, y) \vee \neg r(x)$; $r(b)$; $p(b, b)$; $\neg q(x, y) \vee q(f(x), f(x))$.

Réponse :

(1) $p(f(x), f(y)) \vee \neg p(x, y) \vee \neg r(x)$ Hypothèse

(2) $r(b)$ Hypothèse

(3) $p(f(b), f(y)) \vee \neg p(b, y)$ RAV entre (1) et (2) en utilisant la substitution $[x \leftarrow b]$

(4) $p(b, b)$ Hypothèse

(5) $p(f(b), f(b))$ RAV entre (3) et (4) en utilisant la substitution $[y \leftarrow b]$

(6) $q(a, y) \vee \neg p(f(y), f(y))$ Hypothèse

(7) $q(a, b)$ RAV entre (5) et (6) en utilisant la substitution $[y \leftarrow b]$

(8) $\neg q(x, y) \vee q(f(x), f(x))$ Hypothèse

(9) $q(f(b), f(b))$ RAV entre (7) et (8) en utilisant la substitution $[x \leftarrow a][y \leftarrow b]$

(10) $\neg q(f(z), y)$ Hypothèse

(11) $\square$ RAV entre (9) et (10) en utilisant la substitution $[z \leftarrow b][y \leftarrow f(b)]$

4 Conséquences

Dans cet exercice nous allons utiliser le système formel du calcul des prédicats de premier ordre basé sur la résolution CP1-RAV. Pour ce faire, la stratégie de raisonnement par l'absurde : pour démontrer une formule A à partir d'un ensemble d'Hypothèses $\mathcal{H}$ nous allons ajouter la négation $\neg A$ de A à $\mathcal{H}$ et on transforme après l'ensemble $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cup \{\neg A\}$ en un ensemble $\mathcal{C}$ de clauses et on utilise CP1-RAV sur $\mathcal{C}$ pour essayer d'obtenir la clause vide $\square$.

Montrer dans les cas suivants que la formule F est une conséquence des axiomes A_i.
(a) $F = \forall u \; q(u)$ est une conséquence de :
$A_1 = \forall x \exists y \; p(x, y)$; et $A_2 = \forall z_1 \forall z_2 \; (p(z_1, z_2) \Rightarrow q(z_1))$.

Réponse :

Nous commençons par mettre les formules A_1, A_2 et $\neg F$ sous forme clausale :

- $A_1 = \forall x \exists y \; p(x, y) \equiv \forall x p(x, f_y(x))$ ce qui donne l'ensemble des clauses : $\{ \; p(x, f_y(x)) \; \}$
- $A_2 = \forall z_1 \forall z_2 \; (p(z_1, z_2) \Rightarrow q(z_1)) \equiv \forall z_1 \forall \; (\neg p(z_1, z_2) \vee q(z_1))$ ce qui donne l'ensemble des clauses : $\{ \; \neg p(z_1, z_2) \vee q(z_1)) \; \}$
- $\neg F = \neg \forall u \; q(u) \equiv \exists u \neg q(u) \equiv q(a_u)$ ce qui donne l'ensemble des clauses : $\{ \; q(a_u) \; \}$

On obtient alors l'ensemble de clauses $\mathcal{C} = \{ \; p(x, f_y(x)), \;\; \neg p(z_1, z_2) \vee q(z_1), \;\; q(a_u) \; \}$

Montrons maintenant que l'on peut déduire $\square$ à partir de $\mathcal{C}$

(1) $\neg p(z_1, z_2) \vee q(z_1)$ Hypothèse

(2) $q(a_u)$ Hypothèse

(3) $\neg p(a_u, z_2)$ RAV entre (1) et (2) en utilisant la substitution $[z_1 \leftarrow a_u]$

(4) $p(x, f_y(x))$ Hypothèse

(5) $\square$ RAV entre (3) et (4) en utilisant la substitution $[z_2 \leftarrow f(x)][x \leftarrow a_u]$

(b) $F = \forall x \; (p(x) \Rightarrow p(f(f(x))))$ est une conséquence de :
$A_1 = \forall x \; (p(x) \Rightarrow r(f(x)))$; et $A_2 = \forall x \; (r(x) \Rightarrow p(f(x)))$.

Réponse :

Nous commençons par mettre les formules A_1, A_2 et $\neg F$ sous forme clausale :

- $A_1 = \forall x \; (p(x) \Rightarrow r(f(x))) \equiv \forall x \; (\neg p(x) \vee r(f(x)))$ ce qui donne l'ensemble des clauses : $\{ \; \neg p(x) \vee r(f(x)) \; \}$

- $A_2 = \forall x \ (r(x) \Rightarrow p(f(x))) \equiv \forall x \ (\neg r(x) \vee p(f(x)))$ ce qui donne l'ensemble des clauses : $\{ \neg r(x) \vee p(f(x)) \}$

- $\neg F = \neg \forall x \ (p(x) \Rightarrow p(f(f(x)))) \equiv \exists x \ \neg(p(x) \Rightarrow p(f(f(x)))) \equiv (p(a_x) \wedge \neg p(f(f(a_x))))$ ce qui donne l'ensemble des clauses : $\{ p(a_x), \ \ \neg p(f(f(a_x))) \}$

On obtient alors l'ensemble de clauses $\mathcal{C} = \{ \neg p(x) \vee r(f(x)), \ \ \neg r(y) \vee p(f(y)), \ \ p(a_x), \ \ p(f(f(a_x))) \}$
Montrons maintenant que l'on peut déduire $\square$ à partir de $\mathcal{C}$

(1) $\neg p(x) \vee r(f(x))$ Hypothèse

(2) $p(a_x)$ Hypothèse

(3) $r(f(a_x))$ RAV entre (1) et (2) en utilisant la substitution $[x \leftarrow a_x]$

(4) $\neg r(y) \vee p(f(y))$ Hypothèse

(5) $p(f(f(a_x)))$ RAV entre (3) et (4) en utilisant la substitution $[y \leftarrow f(a_x)]$

(6) $\neg p(f(f(a_x)))$ Hypothèse

(5) $\square$ RAV entre (5) et (6) en utilisant la substitution : ε.

(c) $F =$ « Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés » est une conséquence de :
$A_1 =$ « Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis » ;
$A_2 =$ « Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes » ;
$A_3 =$ « Ne sont arrêtés que les gens malhonnêtes » ;
$A_4 =$ « Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes » ;
$A_5 =$ « Il y a des crimes ».

Réponse :

Nous commençons tout d'abord par traduire ce texte dans le calcul des prédicats de premier ordre !

Prédicats :

crime : symbole de prédicat d'arité 1 *(i.e.* $crime(x)$ *: x est un crime)*
malhonnête : symbole de prédicat d'arité 1 *(i.e.* $malhonnête(x)$ *: x est malhonnête)*
commet : symbole de prédicat d'arité 2 *(i.e.* $commet(x, y)$ *: x commet y)*
arrêté : symbole de prédicat d'arité 1 *(i.e.* $arrêté(x)$ *: x est arrêté)*

$A_1 = \forall x \ (crime(x) \Rightarrow \exists y \ commet(y, x))$

$A_2 = \forall x \ \forall y \ ((crime(x) \wedge commet(y, x)) \Rightarrow malhonnête(y))$

$A_3 = \forall x \ (arrêté(x) \Rightarrow malhonnête(x))$

$A_4 = \forall x \ (malhonnête(x) \wedge arrêté(x)) \Rightarrow \forall y \ (crime(y) \wedge \neg commet(x, y))$

$A_5 = \exists x \ crime(x)$

$F = \exists x \ (malhonnête(x) \wedge \neg arrêté(x))$.

Nous mettons maintenant les formules A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et $\neg F$ sous forme clausale :

- $A_1 = \forall x \ (crime(x) \Rightarrow \exists y \ commet(y, x)) \equiv \forall x \ \exists y \ (\neg crime(x) \vee commet(y, x)) \equiv$

$\forall x\ (\neg crime(x) \vee commet(f_y(x), x))$
ce qui donne l'ensemble des clauses :

$$\{\ \neg crime(x) \vee commet(f_y(x), x)\ \}$$

- $A_2 = \forall x\ \forall y\ ((crime(x) \wedge commet(y, x)) \Rightarrow malhonnête(y)) \equiv \forall x\ \forall y\ (\neg crime(x) \vee \neg commet(y, x) \vee malhonnête(y))$
ce qui donne l'ensemble des clauses :

$$\{\ \neg crime(x) \vee \neg commet(y, x) \vee malhonnête(y)\ \}$$

- $A_3 = \forall x(arrêté(x) \Rightarrow malhonnête(x)) \equiv \forall x(\neg arrêté(x) \vee malhonnête(x))$
ce qui donne l'ensemble des clauses :

$$\{\ \neg arrêté(x) \vee malhonnête(x)\ \}$$

- $A_4 = \forall x\ (malhonnête(x) \wedge arrêté(x)) \Rightarrow \forall y\ (crime(y) \wedge \neg commet(x, y)) \equiv \forall x\ \forall y\ (\neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x)) \vee (crime(y) \wedge \neg commet(x, y)) \equiv \forall x\ \forall y\ ((\neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x) \vee crime(y)) \wedge (\neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x) \vee \neg commet(x, y)))$
ce qui donne l'ensemble des clauses :

$$\{\ \neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x) \vee crime(y)),\ \ \neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x) \vee \neg commet(x, y)\ \}$$

- $A_5 = \exists x\ crime(x) \equiv crime(a_x)$ ce qui donne l'ensemble des clauses :

$$\{\ crime(a_x)\ \}$$

- $\neg F = \neg \exists x\ (malhonnête(x) \wedge \neg arrêté(x)) \equiv \forall x\ (\neg malhonnête(x) \vee arrêté(x))$
ce qui donne l'ensemble des clauses :

$$\{\ \neg malhonnête(x) \vee arrêté(x)\ \}$$

On obtient alors l'ensemble de clauses :

$\mathcal{C} = \{\ \neg crime(x) \vee commet(f_y(x), x),\ \ \neg crime(x) \vee \neg commet(y, x) \vee malhonnête(y),\ \ \neg arrêté(x) \vee malhonnête(x),\ \ \neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x) \vee crime(y),\ \ \neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x) \vee \neg commet(x, y),\ \ crime(a_x),\ \ \neg malhonnête(x) \vee arrêté(x)\ \}$

Montrons maintenant que l'on peut déduire $\square$ à partir de $\mathcal{C}$

(1) $\neg crime(x) \vee commet(f_y(x), x)$ Hypothèse

(2) $crime(a_x)$ Hypothèse

(3) $commet(f_y(a_x), a_x)$ RAV entre (1) et (2) en utilisant la substitution $[x \leftarrow a_x]$

(4) $\neg crime(x) \vee \neg commet(y, x) \vee malhonnête(y)$ Hypothèse

(5) $\neg crime(a_x) \vee malhonnête(f(a_x))$ RAV entre (3) et (4) en utilisant la substitution $[y \leftarrow f(x)][x \leftarrow a_x]$

(6) $malhonnête(f(a_x))$ RAV entre (2) et (5) en utilisant la substitution vide ε

(7) $\neg malhonnête(x) \vee arrêté(x)$ Hypothèse

(8) $arrêté(f(a_x))$ RAV entre (2) et (5) en utilisant la substitution $[x \leftarrow f(a_x)]$

(9) $\neg malhonnête(x) \vee \neg arrêté(x) \vee \neg commet(x, y)$ Hypothèse

(10) $\neg arrêté(f(a_x)) \vee \neg commet(f(a_x), y)$ RAV entre (6) et (9) en utilisant la substitution $[x \leftarrow f(a_x)]$

(11) $\neg commet(f(a_x), y)$ RAV entre (6) et (9) en utilisant la substitution vide ε

(12) $\square$ RAV entre (3) et (11) en utilisant la substitution $[y \leftarrow a_x]$