Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Travaux Dirigés de Logique

Calcul des propositions

1 Expressions valides et satisfiables

Déterminez parmi les expressions de $CP0$ suivantes, celles qui sont valides, celles qui sont satisfiables et celles qui sont insatisfiables.

1. $e_1 = (p \longrightarrow (q \longrightarrow p))$.

   Réponse :

   Comme cette expression contient deux variables p et q, il y a donc 4 interprétations possibles :

   - $I_1 : \{p, q\} \mapsto \mathbb{B}$ avec $I_1(p) = 0,\ \ I_1(q) = 0$. Donc
     $$I_1((p \longrightarrow (q \longrightarrow p))) = (I_1(p) \Longrightarrow (I_1(q) \Longrightarrow I_1(p))) = 0 \Longrightarrow \underline{(0 \Longrightarrow 0)} = 0 \Longrightarrow \underline{1} = 1).$$
     Donc l'interprétation I_1 est un modèle de la formule $(p \longrightarrow (q \longrightarrow p))$ et par conséquent, cette formule est satisfiable.
   - $I_2 : \{p, q\} \mapsto \mathbb{B}$ avec $I_2(p) = 0,\ \ I_2(q) = 1$. Donc
     $$I_2((p \longrightarrow (q \longrightarrow p))) = (I_2(p) \Longrightarrow (I_2(q) \Longrightarrow I_2(p))) = (0 \Longrightarrow \underline{1 \Longrightarrow 0)} = 0 \Longrightarrow \underline{0} = 1).$$
     Donc l'interprétation I_2 est aussi un modèle de la formule $(p \longrightarrow (q \longrightarrow p))$.
   - $I_3 : \{p, q\} \mapsto \mathbb{B}$ avec $I_3(p) = 1,\ \ I_3(q) = 0$. Donc
     $$I_3((p \longrightarrow (q \longrightarrow p))) = (I_3(p) \Longrightarrow (I_3(q) \Longrightarrow I_3(p))) = (1 \Longrightarrow \underline{0 \Longrightarrow 1)} = 1 \Longrightarrow \underline{1} = 1).$$
     Donc l'interprétation I_3 est aussi un modèle de la formule $(p \longrightarrow (q \longrightarrow p))$.
   - $I_4 : \{p, q\} \mapsto \mathbb{B}$ avec $I_4(p) = 1,\ \ I_4(q) = 0$. Donc
     $$I_4((p \longrightarrow (q \longrightarrow p))) = (I_4(p) \Longrightarrow (I_4(q) \Longrightarrow I_4(p))) = (1 \Longrightarrow \underline{1 \Longrightarrow 1)} = 1 \Longrightarrow \underline{1} = 1).$$
     Donc l'interprétation I_4 est aussi un modèle de la formule $(p \longrightarrow (q \longrightarrow p))$.

   Comme toutes les interprétations sont des modèles pour la formule $(p \longrightarrow (q \longrightarrow p))$ alors cette formule est valide.

2. $e_2 = ((p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r)))$.

   Réponse :

   Comme cette expression contient trois variables p, q et r, il y a donc 8 interprétations possibles :
   On pourrait suivre la même démarche qui a été utilisée dans la question précédente. Il suffit donc de faire les calculs pour les 8 interprétations possibles ce qui permettrait d'arriver au but. Mais pour cette question on va utiliser une autre méthode :
   On va chercher s'il existe une interprétation $I : \{p, q\} \mapsto \mathbb{B}$ telle que $I(e_2) = 0$?

   Supposons qu'une telle interprétation I existe. On aurait alors

$I(e_2) = ((I(p) \Longrightarrow (I(q) \Longrightarrow I(r))) \Longrightarrow (I(p) \Longrightarrow I(q)) \Longrightarrow (I(p) \Longrightarrow I(r)))) = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} I(p) \Longrightarrow (I(q) \Longrightarrow I(r)) & = & 1 \\ (I(p) \Longrightarrow I(q)) \Longrightarrow (I(p) \Longrightarrow I(r)) & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} (I(p) \Longrightarrow (I(q) \Longrightarrow I(r))) & = & 1 \\ I(p) \Longrightarrow I(q) & = & 1 \\ I(p) \Longrightarrow I(r) & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} I(p) \Longrightarrow (I(q) \Longrightarrow I(r)) & = & 1 \\ I(p) \Longrightarrow I(q) & = & 1 \\ I(p) & = & 1 \\ I(r) & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} I(p) \Longrightarrow (I(q) \Longrightarrow I(r)) & = & 1 \\ I(q) & = & 1 \\ I(p) & = & 1 \\ I(r) & = & 0 \end{cases}$$

Et donc $I(p) \Longrightarrow (I(q) \Longrightarrow I(r)) = 1 \Longrightarrow \underline{(1 \Longrightarrow 0)} = 1 \Longrightarrow \underline{0} = 0$, ce qui est absurde et donc on a $I(e_2) = 1$ pour toute interprétation I et par conséquent l l'expression e_2 est valide et donc bien évidement e_2 est satisfiable.

3. $e_3 = ((\neg p \longrightarrow \neg q) \longrightarrow (q \longrightarrow p))$.

   Réponse :

   Utilisons la même démarche que celle utilisée pour la question précédente :

   Supposons qu'il existe une interprétation I telle que $I(e_3) = 0$. On aurait alors :

   $I(e_3) = ((\overline{I(p)} \Longrightarrow \overline{I(q)}) \Longrightarrow (I(q) \Longrightarrow I(p))) = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \overline{I(p)} \Longrightarrow \overline{I(q)} & = & 1 \\ I(q) \Longrightarrow I(p) & = & 0 \end{cases}$$

   Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \overline{I(p)} \Longrightarrow \overline{I(q)} & = & 1 \\ I(q) & = & 1 \\ I(p)) & = & 0 \end{cases}$$

   Et donc $\overline{I(p)} \Longrightarrow \overline{I(q)} = 1 \Longrightarrow 0 = 0$, ce qui est absurde et donc on a $I(e_3) = 1$ pour toute interprétation I, et par conséquent, l'expression e_3 est valide et donc bien évidement e_3 est satisfiable.

4. $e_4 = ((p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow q)$.

   Réponse :

   Utilisons la même démarche que la question précédente :

   Supposons qu'il existe une interprétation I telle que $I(e_4) = 0$. On aurait alors :

   $I(e_3) = (I(p).(I(p) \Longrightarrow I(q))) \Longrightarrow I(q) = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} I(p).(I(p) \Longrightarrow I(q)) & = & 1 \\ I(q) & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} I(p) & = & 1 \\ I(p) \Longrightarrow I(q) & = & 1 \\ I(q) & = & 0 \end{cases}$$

Et donc $I(p) \Longrightarrow I(q) = 1 \Longrightarrow 0 = 0$, ce qui est absurde et donc on a $I(e_4) = 1$ pour toute interprétation I, et par conséquent, l'expression e_3 est valide et donc bien évidement e_3 est satisfiable.

5. $e_5 = ((\neg\neg p \longrightarrow \neg q) \longrightarrow (m \longrightarrow p))$.

   Réponse :

   Soit I_0 une interprétation telle que
   $I_0(m \longrightarrow p) = I_0(m) \longrightarrow I_0(p) = 1$.
   Comme e_5 est de la forme $(X \longrightarrow Y)$ avec $Y = (m \longrightarrow p)$, alors $I_0(e_5) = 1$
   et par conséquent, I_0 est un modèle de e_5 et donc l'expression e_5 est satisfiable *(i.e. Il suffit de prendre I_0 telle que $I_0(p) = I_0(q) = I_0(m) = 1$!)* .

   Soit I_1 une interprétation telle que
   $I_1(m \longrightarrow p) = I_1(m) \Longrightarrow I_1(p) = 0$ *(i.e. donc on a $I_1(m) = 1$ et $I_1(p) = 0$)*, alors on a nécessairement
   $I_1((\neg\neg p \longrightarrow \neg q) = \overline{\overline{I_1(p)}} \Longrightarrow \overline{I_1(q)} = 0 \Longrightarrow \overline{I_1(q)} = 1$ indépendement de la valeur de $I_1(q)$, par conséquent, on a $I_1(e_5) = 0$ et donc l'expression e_5 n'est pas valide.

2 Déduction dans le système formel CP0 de Hilbert

Montrez, de différentes façons, que les formules suivantes sont des théorèmes pour le système CP0 de Hilbert vu en cours :

1. $(\neg A \longrightarrow (A \longrightarrow C))$ (Directement).

   Réponse :

   Rappelons tout d'abord le système formel CP0 d'Hilbert vue en cours
   Les Schémas d'axiomes :

   - $SA1 : (A \longrightarrow (B \longrightarrow A))$
   - $SA2 : ((A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$
   - $SA3 : ((\neg A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow A))$

   Les régles d'inférence (Une seul règle d'inférence : le modus ponens (m.p.) :

   $$A,\ (A \longrightarrow \neg B) \vdash_{m.p.}\ B$$

   En utilisant le système formel CP0 de Hilbert, on a la déduction suivante :
   (1) $((\neg C \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow C))$ $\quad SA3$
   (2) $(((\neg C \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow ((\neg C \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow C)))$ $\quad SA1$
   (3) $(\neg B \longrightarrow ((\neg C \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow C)))$ $\quad$ m.p. (1) et (2)
   (4) $((\neg B \longrightarrow ((\neg C \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow C))) \longrightarrow ((\neg B \longrightarrow (\neg C \longrightarrow \neg B)) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow (B \longrightarrow C))))$ $\quad SA2$
   (5) $((\neg B \longrightarrow (\neg C \longrightarrow \neg B)) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow (B \longrightarrow C)))$ $\quad$ m.p. (3) et (4)
   (6) $(\neg B \longrightarrow (\neg C \longrightarrow \neg B))$ $\quad SA1$
   (7) $(\neg B \longrightarrow (B \longrightarrow C))$ $\quad$ m.p. (6) et (5)

2. $(B \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow C))$ (En utilisant le Méta-Théorème de la déduction).

   Réponse :

   Rappel : Le Méta-Théorème de la déduction de CP0

Soient $\{A_1, ..., A_{n-1}, A_n\}$ un ensemble de formules de CP0 aven $n > 0$ et B une formule de CP0. Alors

$$\{A_1, ..., A_{n-1}, A_n\} \vdash_{CP0} B \quad \text{si et seulement si} \quad \{A_1, ..., A_{n-1}\} \vdash_{CP0} (A_n \longrightarrow B).$$

On appliquant plusieurs fois le Méta-Théorème de la déduction de CP0 on a : $\vdash_{CP0} (B \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow C))$ est équivalent à
$\{B\} \vdash_{CP0} ((B \longrightarrow C) \longrightarrow C)$ est équivalent à

$\{B, (B \longrightarrow C)\} \vdash_{CP0} C$
D'autre part, on a la déduction suivante qui montre que l'on a $\{B, (B \longrightarrow C)\} \vdash_{CP0} C$
(1) B Hypothèse
(2) $(B \longrightarrow C)$ Hypothèse
(3) C m.p. (1) et (2)
Par conséquent, la formule $(B \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow C))$ est donc un théorème dans le système formel CP0 de Hilbert.

3. $((A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$ (En utilisant le Méta-Théorème de la déduction).
Réponse :

On appliquant plusieurs fois le Méta-Théorème de la déduction de CP0 on a : $\vdash_{CP0} ((A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$ est équivalent à
$\{(A \longrightarrow B)\} \vdash_{CP0} ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$ est équivalent à
$\{(A \longrightarrow B), (B \longrightarrow C)\} \vdash_{CP0} (A \longrightarrow C)$ est équivalent à
$\{(A \longrightarrow B), (B \longrightarrow C), A\} \vdash_{CP0} C$

D'autre part, on a la déduction suivante qui montre que l'on a $\{(A \longrightarrow B), (B \longrightarrow C), A\} \vdash_{CP0} C$
(1) A Hypothèse
(2) $(A \longrightarrow B)$ Hypothèse
(3) B m.p. (1) et (2)
(4) $(B \longrightarrow C)$ Hypothèse
(5) C m.p. (3) et (4)
Par conséquent, la formule $((A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$ est donc un théorème dans le système formel CP0 de Hilbert.

4. $(\neg A \longrightarrow (A \longrightarrow B))$ (En utilisant l'Équivalence Syntaxe-Sémantique).

Réponse :

la formule $(\neg A \longrightarrow (A \longrightarrow B))$ est un un théorème dans le système formel CP0 de Hilbert car elle est obtenue à partir de la formule $(\neg A \longrightarrow (A \longrightarrow C))$ de la question 1. en remplaçant B par C !

5. $(A\neg\neg \longrightarrow A)$ (En utilisant l'Équivalence Syntaxe-Sémantique).

Réponse :

Soit I une interprétation. Alors, $I(\neg\neg A \longrightarrow A) = \overline{\overline{I(A)}} \Longrightarrow I(A) = I(A) \Longrightarrow I(A) = 1$
par conséquent, la formule $(\neg\neg A \longrightarrow A)$ est valide donc c'est un théorème du système formel CP0 d'Hilbert.

6. $(A \longrightarrow \neg\neg A)$ (En utilisant l'Équivalence Syntaxe-Sémantique).

Réponse :

Soit I une interprétation. Alors, $I(A \longrightarrow \neg\neg A) = I(A) \Longrightarrow \overline{\overline{I(A)}} = I(A) \Longrightarrow I(A) = 1$
par conséquent, la formule $(A \longrightarrow \neg\neg A)$ est valide donc c'est un théorème du système formel CP0 d'Hilbert.

7. $((A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A))$ (En utilisant l'Équivalence Syntaxe-Sémantique).

Réponse :

Soit I une interprétation. Alors, $I((A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A)) = (I(A) \Longrightarrow I(B)) \Longrightarrow (\overline{I(B)} \Longrightarrow \overline{I(A)})) = 1$ par conséquent, la formule $((A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A))$ est valide

donc c'est un théorème du système formel CP0 d'Hilbert.
Remarque : À un renommage près des variables, la formule traitée dans cette question à la même forme que la formule $((\neg p \longrightarrow \neg q) \longrightarrow (q \longrightarrow p))$ traitée dans l'exercice 1 en utilisant l'équivalence $\neg\neg X \equiv X$ ...

8. $(A \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg(A \longrightarrow B)))$ (En utilisant l'Équivalence Syntaxe-Sémantique).

Réponse :

Supposons qu'il existe une interprétation I telle que

$I(A \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg(A \longrightarrow B))) = 0.$

Ce qui équivalent à

$I(A) \Longrightarrow (\overline{I(B)} \Longrightarrow \overline{I(A) \Longrightarrow I(B)}) = 0.$

Ce qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I(A) & = & 1 \\ \overline{I(B)} \Longrightarrow \overline{I(A) \Longrightarrow I(B)} & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I(A) & = & 1 \\ \overline{I(B)} & = & 1 \\ \overline{I(A) \Longrightarrow I(B)} & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I(A) & = & 1 \\ I(B) & = & 1 \\ I(A) \Longrightarrow I(B) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce qui est impossible car $1 \Longrightarrow 1 = 1$ et donc la formule $(A \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg(A \longrightarrow B)))$ est valide et est donc un théroème du système formel CP0 d'Hilbert.

9. $((B \longrightarrow A) \longrightarrow ((\neg B \longrightarrow A) \longrightarrow A))$ (En utilisant l'Équivalence Syntaxe-Sémantique).

Réponse :

Supposons qu'il existe une interprétation I telle que

$I((B \longrightarrow A) \longrightarrow ((\neg B \longrightarrow A) \longrightarrow A)) = 0.$

Ce qui équivalent à

$(I(B) \Longrightarrow I(A)) \Longrightarrow ((\overline{I(B)} \Longrightarrow I(A)) \Longrightarrow I(A)) = 0.$

Ce qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I(B) \Longrightarrow I(A) & = & 1 \\ (\overline{I(B)} \Longrightarrow I(A)) \Longrightarrow I(A) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce qui est équivalent à *(i.e. en utilisant le fait $X \Longrightarrow 0 = \overline{X}$)*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I(B) \Longrightarrow I(A) & = & 1 \\ \overline{I(B)} \Longrightarrow I(A) & = & 1 \\ I(A) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} I(B) & = & 1 \\ \overline{I(B)} & = & 1 \\ I(A) & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui est absurde et donc la formule $((B \longrightarrow A) \longrightarrow ((\neg B \longrightarrow A) \longrightarrow A))$ est valide et est donc un théroème du système formel CP0 d'Hilbert.

3 Résolution Sans Variables (RSV).

3.1 RSV directement sur des formules de calcul de propositions.

- **RSV.**
  En utilisant le système formel RSV montrer que :

  1. $\{\ p_1 \vee p_2,\ \neg p_1 \vee p_2,\ p_1 \vee \neg p_2,\ \neg p_1 \vee \neg p_2\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad \square.$

     Réponse :

     La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV vu en cours donne le résultat demandé :
     (1) p_1 Hypothèse
     (2) $\neg p_1 \vee p_2$ Hypothèse
     (3) $simplification(p_2 \vee p_2) = p_2$ RSV (1) et (2)
     (4) $p_1 \vee \neg p_2$ Hypothèse
     (5) p_1 RSV (3) et (4)
     (6) $\neg p_1 \vee \neg p_2$ Hypothèse
     (7) $\neg p_2$ RSV (5) et (6)
     (7) $\square$ RSV (2) et (7)

  2. $\{\ p_1,\ \neg p_1 \vee p_2,\ \neg p_2 \vee p_3\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad p_3.$

     Réponse :

     La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :
     (1) $p_1 \vee p_2$ Hypothèse
     (2) $\neg p_1 \vee p_2$ Hypothèse
     (3) p_2 RSV (1) et (2)
     (4) $\neg p_1 \vee \neg p_2$ Hypothèse
     (5) p_3 RSV (3) et (4)

  3. $\{\ p_1,\ \neg p_1 \vee p_2,\ \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad p_3.$

     Réponse :

     La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :
     (1) $p_1 \vee p_2$ Hypothèse
     (2) $\neg p_1 \vee p_2$ Hypothèse
     (3) p_2 RSV (1) et (2)
     (4) $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$ Hypothèse
     (5) $\neg p_2 \vee p_3$ RSV (3) et (4)
     (5) p_3 RSV (3) et (5)

- **Mise en forme normale et stratégie du raisonnement par l'absurde pour RSV.**
  En mettant les formules sous forme normale et en utilisant le raisonnement par l'absurde avec le système formel RSV montrer que :

  Rappel :

  Soient H un ensemble de formules de CP0 et C une formule de CP0.

Pour démonter que

$H \quad \vdash_{RSV} \quad C$

- Il faut transformer l'ensemble de formules H en un ensemble de clauses $\mathcal{C}(H)$ en utilisant les équivalences logiques

- Il faut transformer le singleton $\{\neg C\}$ en un ensemble de clauses $\mathcal{C}(\{\neg C\})$ en utilisant les équivalences logiques
(i.e. ATTENTION : On consdère dans cette partie la négation de la conclusion C)

- On utilise en fin la résolution sans variable (RSV) en partant des clauses de l'ensemble $\mathcal{C}(H) \cup \mathcal{C}(\{\neg C\}$.

- Si en utilisant la RSV on tombe à un moment sur la clause vide $\square$, alors on a démontré le résultat demandé

- Par contre, si on faisant toutes les combinaisons possibles de RSV entre $\mathcal{C}(H) \cup \mathcal{C}(\{\neg C\}.)$ et celles produites RSV tout au long de ce processus on n'arrive pas à la clause vide $\square$, alors le résultat est faux !

  ATTENTION : Sur n variables propositionnelles il y a seulement 3^n clauses possibles et donc le procédé termine toujours !

1. $\{ \ p_1 \ \} \quad \vdash_{RSV} \quad (p_2 \longrightarrow p_1)$.

   Réponse :

   Transformations des formules sous forme de clauses :
   - p_1 Hypothèse déjà sous forme de clause

   - $\neg(p_2 \longrightarrow p_1)) \equiv \neg(\neg p_2 \vee p_1) \equiv \neg\neg p_2 \wedge \neg p_1 = p_2 \wedge \neg p_1$
   ce qui correspond à un ensemble de 2 clauses $\{p_2, \neg p_1\}$

   Et donc $\{p_1, p_2, \neg p_1\}$ est l'ensemble des clauses obtenues par les transformations des hypothèses (dans ce cas il y a une seule hypothèse) et la négation de la conclusion.
   Montrons maintenant que

   $$\{p_1, p_2, \neg p_1\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square$$

   La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :

   (1) p_1 Hypothèse
   (2) $\neg p_1$ Hypothèse
   (3) $\square$ RSV (1) et (2)

   Et donc on a bien

   $$\{ \ p_1 \ \} \quad \vdash_{RSV} \quad (p_2 \longrightarrow p_1).$$

2. $\{ \ (p_1 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_3)) \ \} \quad \vdash_{RSV} \quad ((p_1 \longrightarrow p_2) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_3))$.

   Réponse :

   Transformations des formules sous forme de clauses :

   - $(p_1 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_3)) \equiv \neg p_1 \vee (\neg p_2 \vee p_3) = \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$

- $\neg((p_1 \longrightarrow p_2) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_3)) \equiv \neg(\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \vee p_3))$
  $\equiv (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge \neg p_3$
  ce qui correspond à un ensemble de 3 clauses $\{p_1, \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2\}$

Et donc $\{p_1, \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3\}$ est l'ensemble des clauses obtenues par les transformations des hypothèses (dans ce cas il y a une seule hypothèse) et la négation de la conclusion. Montrons maintenant que

$$\{p_1, \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square$$

La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé : (1) p_1 Hypothèse
(2) $\neg p_1 \vee p_2$ Hypothèse
(3) p_2 RSV (1) et (2)
(4) $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$ Hypothèse
(5) $\neg p_2 \vee p_3$ RSV (1) et (4)
(6) p_3 RSV (3) et (5)
(7) $\neg p_3$ Hypothèse
(8) $\square$ RSV (6) et (7)

Et donc on a bien

$$\{\ (p_1 \longrightarrow (p_2 \longrightarrow p_3))\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad ((p_1 \longrightarrow p_2) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_3)).$$

3. $\{\ (\neg p_2 \longrightarrow \neg p_1)\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad ((\neg p_2 \longrightarrow p_1) \longrightarrow p_2)$.

Réponse :

Transformations des formules sous forme de clauses :
- $(\neg p_2 \longrightarrow \neg p_1) \equiv p_2 \vee \neg p_1$
- $\neg((\neg p_2 \longrightarrow p_1) \longrightarrow p_2) \equiv \neg(\neg(p_2 \vee p_1) \vee p_2) \equiv \neg((\neg p_2 \wedge \neg p_1) \vee p_2) \equiv (p_2 \vee p_1) \wedge \neg p_2$
  ce qui correspond à un ensemble de 2 clauses $\{p_2 \vee p_1, \neg p_2\}$

Et donc $\{p_2 \vee p_1, \neg p_2, p_2 \vee \neg p_1\}$ est l'ensemble des clauses obtenues par les transformations des hypothèses (dans ce cas il y a une seule hypothèse) et la négation de la conclusion.
Montrons maintenant que

$$\{p_2 \vee p_1, \neg p_2, p_2 \vee \neg p_1\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square$$

La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé : (1) $p_2 \vee p_1$ Hypothèse
(2) $p_2 \vee \neg p_1$ Hypothèse
(3) p_2 RSV (1) et (2)
(4) $\neg p_2$ Hypothèse
(5) $\square$ RSV (2) et (4)

Et donc on a bien

$$\{\ (\neg p_2 \longrightarrow \neg p_1)\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad ((\neg p_2 \longrightarrow p_1) \longrightarrow p_2).$$

4. $\{\ (p_1 \longrightarrow p_2)\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad ((p_2 \longrightarrow p_3) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_3))$.

Réponse :

Transformations des formules sous forme de clauses :
- $(p_1 \longrightarrow p_2) \equiv \neg p_1 \vee p_2$

- $\neg((p_2 \longrightarrow p_3) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_3)) \equiv \neg(\neg(\neg p_2 \vee p_3) \vee (negp_1 \vee p_3))$
  $\equiv \neg((p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \vee p_3)) \equiv ((\neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \wedge \neg p_3))$
  ce qui correspond à un ensemble de 3 clauses $\{\neg p_2 \vee p_3, p_1, \neg p_3\}$

Et donc $\{\neg p_2 \vee p_3, p_1, \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2\}$ est l'ensemble des clauses obtenues par les transformations des hypothèses (dans ce cas il y a une seule hypothèse) et la négation de la conclusion.
Montrons maintenant que

$$\{\neg p_2 \vee p_3, p_1, \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square$$

La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé : (1) $\neg p_1 \vee p_2$ Hypothèse
(2) p_1 Hypothèse
(3) p_2 RSV (1) et (2)
(4) $\neg p_2 \vee p_3$ Hypothèse
(5) p_3 RSV (3) et (4)
(6) $\neg p_3$ Hypothèse
(7) $\square$ RSV (5) et (6)

Et donc on a bien

$$\{\ (p_1 \longrightarrow p_2)\ \} \quad \vdash_{RSV} \quad ((p_2 \longrightarrow p_3) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_3)).$$

5. $\vdash_{RSV} \quad ((\neg p_2 \longrightarrow \neg p_1) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_2))$.

Réponse :

Transformations des formules sous forme de clauses :
- Il n'y a pas d'hypothèses !

- $\neg((\neg p_2 \longrightarrow \neg p_1) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_2)) \equiv \neg(\neg(p_2 \vee \neg p_1) \vee (negp_1 \vee p_2)) \equiv \neg((\neg p_2 \wedge p_1) \vee (\neg p_1 \vee p_2)) \equiv (p_2 \vee \neg p_1) \wedge (p_1 \wedge \neg p_2)$
  ce qui correspond à un ensemble de 3 clauses $\{\neg p_1 \vee p_2, p_1, \neg p_2\}$

Montrons maintenant que

$$\{\{\neg p_1 \vee p_2, p_1, \neg p_2\}\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square$$

La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé : (1) $\neg p_1 \vee p_2$ Hypothèse
(2) p_1 Hypothèse
(3) p_2 RSV (1) et (2)
(4) $\neg p_2$ Hypothèse
(5) $\square$ RSV (3) et (4)

Et donc on a bien

$$\vdash_{RSV} \quad ((\neg p_2 \longrightarrow \neg p_1) \longrightarrow (p_1 \longrightarrow p_2)).$$

6. $\vdash_{RSV} \quad (p_1 \longrightarrow (\neg p_2 \longrightarrow \neg(p_1 \longrightarrow p_2)))$.

Réponse :

Transformations des formules sous forme de clauses :
- Il n'y a pas d'hypothèses !

- $\neg(p_1 \longrightarrow (\neg p_2 \longrightarrow \neg(p_1 \longrightarrow p_2))) \equiv \neg(\neg p_1 \vee (p_2 \vee \neg(\neg p_1 \vee p_2))) \equiv \neg(\neg p_1 \vee (p_2 \vee (p_1 \wedge \neg p_2))) \equiv p_1 \wedge (\neg p_2 \wedge (\neg p_1 \vee p_2))$
  ce qui correspond à un ensemble de 3 clauses $\{p_1, \neg p_2, \neg p_1 \vee p_2\}$

Montrons maintenant que
$$\{p_1, \neg p_2, \neg p_1 \vee p_2\} \quad \vdash_{RSV} \quad \Box$$
La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé : (1) $\neg p_1 \vee p_2$ Hypothèse
(2) p_1 Hypothèse
(3) p_2 RSV (1) et (2)
(4) $\neg p_2$ Hypothèse
(5) $\Box$ RSV (3) et (4)

Et donc on a bien

$$\vdash_{RSV} \quad (p_1 \longrightarrow (\neg p_2 \longrightarrow \neg(p_1 \longrightarrow p_2))).$$

4 Résolution [1]

4.1 Problème de Bill

Hypothèses :

1. Si Bill Prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill manquera son rendez-vous.
2. Bill n'ira pas à la maison si il manque son rendez-vous et si il est déprimé.
3. Si Bill n'obtient pas de travail alors Bill sera déprié et Bill ira à la maison.

Réponse :

Transductions des hypothèses précédentes en CP0 et puis les traduire sous forme de clauses (c'est-à-dire sous la forme des formules bien formées du système formel RSV) :

Commençons tout d'abord à associer des variables propositionnelles aux faits atomiques contenus dans texte en français qui décrit les hypothèses de cet exercice :

- a : Bill prend l'autobus.
- r : l'autobus est en retard.
- m : Bill manque son rendez-vous.
- i : Bill ira à la maison.
- d : Bill est déprié.

Donnons maintenant la traduction des hypothèses en utilisant les variables propositionnelles précdentes :

- La phrase "Si Bill Prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill manquera son rendez-vous." se traduit alors par $((a \wedge r) \longrightarrow m)$.
- La phrase "Bill n'ira pas à la maison si il manque son rendez-vous et si il est déprimé." se traduit alors par $((m \wedge d) \longrightarrow \neg i)$.
- La phrase "Si Bill n'obtient pas de travail alors Bill sera déprié et Bill ira à la maison." se traduit alors par $(\neg o \longrightarrow (d \wedge i))$.

1. Exercices inspiré du livre de Raymond Smullyan "Quel est le titre de ce livre ?"

Transformations des formules sous forme de clauses :

- $((a \wedge r) \longrightarrow m) \;\equiv\; \neg a \vee \neg r \vee m.$

- $((m \wedge d) \longrightarrow i) \;\equiv\; \neg m \vee \neg d \vee \neg i.$

- $(\neg o \longrightarrow (d \wedge i)) \;\equiv\; o \vee (d \wedge i) \;\equiv\; (o \vee d) \wedge (o \vee i).$

Donc l'ensemble des hypothèses contient 4 clauses $\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i\}$.

Peut-on en déduire des hypothèse les affirmations suivantes ?

1. Si Bill prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill obtient du travail.

   Réponse :

   La négation de la phrase "Si Bill Prend l'autobus et si l'autobus est en retard, alors Bill manquera son rendez-vous." se traduit alors par $\neg((a \wedge r) \longrightarrow o)$ et

   $$\neg((a \wedge r) \longrightarrow o) \equiv \neg(\neg(a \wedge r) \vee o) \equiv \neg((\neg a \vee \neg r) \vee o) \equiv a \wedge r \wedge \neg o.$$

   On ajoutant ces 3 clauses à l'ensemble des clauses correspondants aux hypothèses on obtient $\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, a, r, \neg o\}$
   Montrons maintenant que

   $\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, a, r, \neg o\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square.$

   La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :

   (1) a Hypothèse
   (2) $\neg a \vee \neg r \vee m$ Hypothèse
   (3) $\neg r \vee m$ RSV (1) et (2)
   (4) r Hypothèse
   (5) m RSV (3) et (4)
   (6) $\neg o$ Hypothèse
   (7) $o \vee d$ Hypothèse
   (8) d RSV (6) et (7)
   (9) $o \vee i$ Hypothèse
   (10) i RSV (6) et (9)
   (11) $\neg m \vee \neg d \vee \neg i$ Hypothèse
   (12) $\neg d \vee \neg i$ RSV (5) et (11)
   (13) $\neg i$ RSV (8) et (12)
   (14) $\square$ RSV (10) et (10)

2. Bill obtiendra du travail s'il manque son rendez-vous et s'il va à la maison.

   Réponse :

   La négation de la phrase "Bill obtiendra du travail s'il manque son rendez-vous et s'il va à la maison." se traduit alors par $\neg((m \wedge i) \longrightarrow o)$ et

   $$\neg((m \wedge i) \longrightarrow o) \equiv \neg(\neg(m \wedge i) \vee o) \equiv \neg((\neg m \vee \neg i) \vee o) \equiv m \wedge i \wedge \neg o.$$

   On ajoutant ces 3 clauses à l'ensemble des clauses correspondants aux hypothèses on obtient $\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, m, i, \neg o\}$
   Montrons maintenant que

   $\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, m, i, \neg o\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square.$

   La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :

   (1) m Hypothèse

(2) $\neg m \vee \neg d \vee \neg i$ Hypothèse
(3) $\neg d \vee \neg i$ RSV (1) et (2)
(4) i Hypothèse (5) $\neg d$ RSV (3) et (4)
(6) $\neg o$ Hypothèse
(7) $o \vee d$ Hypothèse
(8) d RSV (6) et (7)
(9) $\square$ RSV (3) et (8)

3. Si l'autobus est en retard, Bill ne prendra pas l'autobus ou Bill manquera son rendez-vous.

Réponse :

La négation de la phrase "Si l'autobus est en retard, Bill ne prendra pas l'autobus ou Bill manquera son rendez-vous." se traduit alors par $\neg(r \longrightarrow (\neg a \vee m))$ et

$$\neg(r \longrightarrow (\neg a \vee m)) \equiv \neg(\neg r \vee \neg a \vee m) \equiv r \wedge a \wedge \neg m.$$

On ajoutant ces 3 clauses à l'ensemble des clauses correspondants aux hypothèses on obtient $\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, r, a, \neg m\}$
Montrons maintenant que

$\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, r, a, \neg m\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square.$

La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :

(1) a Hypothèse
(2) $\neg a \vee \neg r \vee m$ Hypothèse
(3) $\neg r \vee m$ RSV (1) et (2)
(4) r Hypothèse (5) m RSV (3) et (4)
(6) $\neg m$ Hypothèse
(7) $\square$ RSV (5) et (6)

4. Si Bill prend l'autobus et va à la maison, alors Bill ne sera pas déprimé si l'autobus est en retard.

Réponse :

La négation de la phrase "Si Bill prend l'autobus et va à la maison, alors Bill ne sera pas déprimé si l'autobus est en retard." se traduit alors par $\neg((a \wedge i) \longrightarrow (r \longrightarrow \neg d))$ et

$$\neg((a \wedge i) \longrightarrow (r \longrightarrow \neg d)) \equiv \neg(\neg(a \wedge i) \vee (\neg r \vee \neg d)) \equiv (a \wedge i) \wedge (r \wedge d).$$

On ajoutant ces 3 clauses à l'ensemble des clauses correspondants aux hypothèses on obtient $\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, a, i, r, d\}$
Montrons maintenant que

$\{\neg a \vee \neg r \vee m, \neg m \vee \neg d \vee \neg i, o \vee d, o \vee i, a, i, r, d\} \quad \vdash_{RSV} \quad \square.$

La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :

(1) a Hypothèse
(2) $\neg a \vee \neg r \vee m$ Hypothèse
(3) $\neg r \vee m$ RSV (1) et (2)
(4) r Hypothèse (5) m RSV (3) et (4)
(6) $\neg m \vee \neg d \vee \neg i$ Hypothèse
(7) $\neg d \vee \neg i$ RSV (5) et (6)
(8) d Hypothèse (9) $\neg i$ RSV (7) et (8)
(10) i Hypothèse
(11) $\square$ RSV (9) et (10)

4.2 Problème des trois coffrets

Dans le marchand de Venise de Shakespeare. Portia a trois coffrets : un en or, un en argent et un en plomb, et dans l'un d'eux, elle a caché son portrait. Quand un de ses soupirants se présente, elle lui fait choisir l'un des coffrets, et c'est celui qui a la chance (au l'astuce) de trouver le coffret contenant son portrait qui peut l'épouser.
Mais le couvercle de chaque coffret porte une inscription pour guider le choix du soupirant, car Portia ne veut pas choisir un époux pour sa vertu mais pour son intelligence.

Transductions du problème en CP0 et puis traduction sous forme de clauses (c'est-à-dire sous la forme des formules bien formées du système formel RSV) :

Commençons tout d'abord à associer des variables propositionnelles aux faits atomiques contenus dans texte en français qui décrit ce problème :

- o : Le portrait se trouve dans le coffret en or.
- a : Le portrait se trouve dans le coffret en argent.
- p : Le portrait se trouve dans le coffret en plomb.

D'autre part, le portrait se trouve dans un et un seul coffret donc il ne peut pas être simultanément dans deux ou trois coffrets ou nul part !

Donc on a l'hypothèse

$$\neg(\ (a \wedge o \wedge \neg p) \vee (a \wedge \neg o \wedge p) \vee (\neg a \wedge o \wedge p) \vee (a \wedge o \wedge p) \vee (\neg a \wedge \neg o \wedge \neg p)\ ) \equiv$$

$$(\neg a \wedge \neg o \vee p) \wedge (\neg a \vee o \vee \neg p) \wedge (a \vee \neg o \vee \neg p) \wedge (\neg a \vee \neg o \vee \neg p) \wedge (a \vee o \vee p).$$

On a donc l'ensemble des clauses $\{\neg a \vee \neg o \vee p, \neg a \vee o \vee \neg p, a \vee \neg o \vee \neg p, \neg a \vee \neg o \vee \neg p, a \vee o \vee p\}$ correspondant aux contraintes du problème.

Elle traça un jour les inscriptions suivantes :

- `Sur le coffret en or : Le portrait est dans ce coffret.`
- `Sur le coffret en argent : Le portrait n'est pas dans ce coffret.`
- `Sur le coffret en plomb : Le portrait n'est pas dans le coffret en or.`

Transductions en CP0 des affirmations sur les coffrets :

- Affirmation sur le coffret en or : o
- Affirmation sur le coffret en argent : $\neg a$
- Affirmation sur le coffret en plomb : $\neg o$

Elle expliqua à son soupirant que, `de ces trois affirmations, une seule, au plus, était vraie.`

Traduisons en CP0 l'information ci-dessus :

Au plus une seule des trois affirmations sur les coffrets est vraie On ne peut pas avoir simultanément deux ou trois affirmations vraies ! Donc on a

$$\neg(\ (o \wedge a \wedge \neg o) \vee (o \wedge \neg a \wedge o) \vee (\neg o \wedge \neg a \wedge \neg o) \vee (o \wedge \neg a \wedge \neg o)\ ) \equiv \neg(\ (\neg o \wedge \neg a) \vee (o \wedge \neg a)\ ) \equiv (o \vee a) \wedge (\neg o \vee a).$$

En ajoutant ces deux nouvelles clauses aux hypothèses aux précédentes on obtient

$\{\neg a \vee \neg o \vee p, \neg a \vee o \vee \neg p, a \vee \neg o \vee \neg p, \neg a \vee \neg o \vee \neg p, a \vee o \vee p, o \vee a, \neg o \vee a\}$.

Quel coffret le soupirant devait-il choisir pour obtenir la main de Portia ?

Réponse :

(1) $o \vee a$ Hypothèse
(2) $\neg o \vee a$ Hypothèse
(3) a RSV (1) et (2)
Donc le portrait est dans le coffret d'argent !

Le soupirant choisit le bon coffret. Ils se marièrent et furent heureux - pour un temps. Puis un jour, Portia pensa : "*Bien que mon époux ait montré quelque intelligence en prenant le bon coffret, je pense que le problème n'était pas vraiment difficile, et si j'avais construit un problème plus difficile, j'aurai probablement trouvé un mari plus malin que le mien.*".
Séance tenante elle entreprit de divorcer et se mit en compagne d'un mari plus astucieux. Voici ce qu'elle inscrivit cette fois sur les coffrets :

— `Sur le coffret en or : Le portrait n'est pas dans le coffret en argent.`
— `Sur le coffret en argent : Le portrait n'est pas dans ce coffret.`
— `Sur le coffret en plomb : Le portrait est dans ce coffret.`

Transductions en CP0 des affirmations sur les coffrets :

- Affirmation sur le coffret en or : $\neg a$
- Affirmation sur le coffret en argent : $\neg a$
- Affirmation sur le coffret en plomb : p

Elle révéla à ses nouveaux soupirants qu'`une au moins de ces inscriptions était vraie et qu'un au moins était fausse`.

Traduisons en CP0 de l'information ci-dessus :

Au moins de ces inscriptions était vraie et qu'un au moins était fausse. On ne peut pas avoir les trois affirmations simultanément vraies ou simultanément fausses !
On a donc

$$\neg(\ (\neg a \wedge \neg a \wedge p) \vee (\neg\neg a \wedge \neg\neg a \wedge \neg p)\ ) \equiv \neg(\ (\neg a \wedge \neg a \wedge p) \vee (a \wedge a \wedge \neg p)\ ) \equiv (a \vee a \vee \neg p) \wedge (\neg a \vee \neg a \vee p) \equiv (a \vee \neg p) \wedge (\neg a \vee p).$$

Remarque : Les deux clauses $a \vee \neg p$ et $\neg a \vee p$ traduisant les informations concernant les affirmations de Portia jouent un rôle interchangeables *(i.e. si on remplace a par o et o par a en retrouve les mêmes deux clauses)* et donc à priori le portrait est ni dans le coffret d'argent, ni dans le coffret de plomb. On va montrer dans la suite que le portrait est dans le coffret d'or.

En ajoutant ces deux nouvelles clauses aux hypothèses aux précédentes on obtient

$$\{\neg a \vee \neg o \vee p, \neg a \vee o \vee \neg p, a \vee \neg o \vee \neg p, \neg a \vee \neg o \vee \neg p, a \vee o \vee p, a \vee \neg p, \neg a \vee p\}$$

Où avait t-elle caché son portrait ?

Montrons que le portrait est dans le coffret d'or en ajoutant $\neg o$ à l'ensemble des hypothèses et en montrant avec le système formel CP0 avec RSV que :

$$\{\neg a \vee \neg o \vee p, \neg a \vee o \vee \neg p, a \vee \neg o \vee \neg p, \neg a \vee \neg o \vee \neg p, a \vee o \vee p, a \vee \neg p, \neg a \vee p, \neg o\} \quad \vdash_{RSV} \quad \Box$$

La déduction suivante dans le système formel CP0 RSV donne le résultat demandé :

Réponse :

(1) $\neg a \vee o \vee \neg p$ Hypothèse
(2) $\neg o$ Hypothèse
(3) $\neg a \vee \neg p$ RSV (1) et (2)
(4) $\neg a \vee p$ Hypothèse
(5) $\neg a$ RSV (3) et (4)
(6) $a \vee o \vee p$ Hypothèse

(7) $a \vee p$ RSV (2) et (4)
(8) $a \vee \neg p$ Hypothèse
(9) a RSV (7) et (8)
(10) $\square$ RSV (5) et (9)
Donc le portrait est bien dans le coffret d'or !