Inversion de matrices et résolution de systèmes

Exercice 1 – Inversion de matrice

1. La méthode de Gauss peut être utilisée pour obtenir l'inverse d'une matrice carrée inversible. Soit le système suivant :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

   En appliquant les règles du pivot de Gauss en descente puis en remontée, on peut obtenir la matrice identité à gauche, et le système suivant :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array} \right)$$

   Appliquez cela à la matrice suivante et vérifiez le résultat obtenu.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 12 \\ -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Donnez le nombre d'additions/soustractions et le nombre de multiplications/divisions nécessaires à l'inversion d'une matrice $n \times n$ par cette méthode. En déduire l'ordre de grandeur de l'algorithme sous-jacent.

Exercice 2 – Décomposition LU

La méthode du pivot de Gauss permet de transformer une matrice A en une matrice triangulaire supérieure U. Cette transformation passe par une suite de matrices que l'on note ici $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k = U$. Le passage de A_i à A_{i+1} correspond à une étape élémentaire de la méthode et consiste à combiner linéairement deux lignes. Il y a $k = n(n-1)/2$ étapes.

Dans la suite, on exprimera les combinaisons sous la forme $L_j \leftarrow L_j + m_{ij} L_i$ avec $i < j$ (L_i sera la ligne contenant le pivot, L_j la ligne dont un élément est mis à zéro).

1. Prenons pour A_0 la matrice A de l'exercice précédent. La matrice A_1 s'obtient par combinaison des lignes 1 et 2. Donnez la matrice $E_{1,2}$ (appelée matrice élémentaire) telle que $E_{1,2}.A_0 = A_1$.
2. Trouvez ensuite la matrice $E_{1,3}$ puis $E_{2,3}$. On obtient ainsi $E_{2,3}.E_{1,3}.E_{1,2}.A = U$.
3. Dans une matrice correspondant à la matrice identité avec une seule valeur $a_{ij} = m$ hors diagonale, la matrice inverse est la même matrice avec $a_{ij} = -m$. Ainsi par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminez la matrice $E_{1,2}^{-1}$. Donnez ensuite $E_{1,3}^{-1}$ et $E_{2,3}^{-1}$.

4. On cherche la matrice L telle que $A = L.U$. À partir de la relation $E_{2,3}.E_{1,3}.E_{1,2}.A = U$, déduisez-en la forme de la matrice L en fonction des $E_{i,j}$.
   Donnez finalement L pour la matrice A.
5. Donnez la complexité de l'algorithme suggéré dans les questions précédentes et qui produit une décomposition LU. À l'aide de la relation $A = L.U$, résolvez $A.X = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Idem avec $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -24 \end{pmatrix}$.
6. Dans la cas général d'une matrice A de taille $n \times n$ dont on connait une décomposition LU, donnez le nombre d'additions/soustractions et de multiplications/divisions requises pour résoudre un système $AX = B$. Déduisez-en la complexité de l'algorithme sous-jacent.
7. Écrivez en pseudo-code l'algorithme de résolution d'un système $AX = B$ connaissant une décomposition LU de A.
8. Comment la décomposition LU d'une matrice A peut permettre de calculer A^{-1}. Comparez, en terme de complexité, les deux méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice (méthode de Gauss comme dans l'exercice 1, décomposition LU).