Exercices d'analyse, feuille 3

Licence d'Informatique

2ème année, semestre 3

1 Exemples

Exercice 1. Soit $u_n := \frac{n+1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}_{>0}) \ : \ (n \geq n_0) \Longleftrightarrow (|u_n - 1| < \varepsilon)$$

2. En déduire un certificat de convergence de u, ainsi que sa limite.

Exercice 2. Expliciter un certificat de convergence pour la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{2x^2+2} = 0.$$

Exercice 3. Écrire un certificat de continuité pour f en x_* dans les cas suivants.

1. $f \ : \ x \mapsto x^2$ et $x_* = 2$.
2. $f \ : \ x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x_* = -3$.

Exercice 4. Prouver la continuité des fonctions suivantes en les points considérés.

1. $f \ : \ x \mapsto \frac{x+1}{2x-3}$ et $x_* := 5$.
2. $f \ : \ x \mapsto \sqrt{x}$ et $x_* := 3$.

Exercice 5. Discuter la continuité en chaque point de $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x < 0 & \longmapsto & \dfrac{x}{x+1} \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ x > 0 & \longmapsto & x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x < 1 & \longmapsto & \dfrac{x^2-1}{x-1} \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ x > 1 & \longmapsto & \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x < 1 & \longmapsto & \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} \\ x \geq 1 & \longmapsto & x+2 \end{array}$$

Exercice 6. Étant fixé $a \in \mathbb{R}$ on se donne la fonction réelle définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \geq 3 & \longmapsto & \sqrt{x-3} - \sqrt{x^2-9} \\ x < 3 & \longmapsto & (x-3)\sin x + ax^2. \end{array}$$

1. Calculer les limites à gauche et à droite de f en 3.
2. Discuter la continuité de f en 3.
3. Discuter la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et vérifiant la relation fonctionnelle :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad f(x) = f(2x).$$

Montrer que f est constante.
Indication : on cherchera à prouver $f(x) = f(0)$ pour tout x.

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$|f(x)-f(y)| \leq (x-y)^2, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

1. Est-ce que f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer f.

Exercice 9. Soit $f : x \mapsto x + e^x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque.
2. Montrer que g est deux fois dérivable. Calculer $g(1)$, $g'(1)$ et $g''(1)$.

Exercice 10.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.
2. La fonction $g : x \mapsto \begin{cases} xf(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Calculer $g'(x)$ en tout point x où g est dérivable.

Exercice 11. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{1+x^2\sin^2(x)},\ x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1},\ x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right),\ x \mapsto \cos(x^{\sin x}).$$

2 Propriétés générales

Exercice 12. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose de plus que f est monotone. Montrer que f converge vers $\sup f([a,b[)$.

Exercice 13. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I, $t \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(t) \neq \lambda$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ qui contient t tel que $f(x) \neq \lambda$ pour tout $x \in J$.

Exercice 14. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, une fonction continue. Démontrer le résultat suivant : f est injective si, et seulement si, f est strictement monotone. Dans ce cas

$$f([a,b]) = \begin{cases} [f(a)\ ,\ f(b)] & \text{si } f \text{ est croissante} \\ [f(b)\ ,\ f(a)] & \text{si } f \text{ est décroissante} \end{cases}.$$

Exercice 15. Soit $f : I \to \mathbb{Z}$ une fonction continue sur un intervalle et à valeurs entières. Montrer que f est constante.

Exercice 16. Soient I un intervalle réel, $a \in I$ et f une fonction définie sur I.

1. On suppose que f est dérivable en a. Montrer qu'alors $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est finie.
2. La réciproque est-elle vraie ?

3 Fonctions continues sur un intervalle fermé

Exercice 17. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \leq b \in \mathbb{R}$, et notons $A := f([a,b])$ l'image de f.

1. Pourquoi $\sup A$ et $\inf A$ sont-ils réels ?
2. Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse. Si une assertion est fausse, donner une hypothèse supplémentaire sur f garantissant qu'elle devient vraie.
   (a) $A = [\inf A, \sup A]$.
   (b) $A = [f(a), f(b)]$.
   (c) $A = [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$.
   (d) Il existe x_m, $x_M \in [a,b]$ tels que $A = [f(x_m), f(x_M)]$.
   (e) Il existe x_m, $x_M \in]a,b[$ tels que $A = [f(x_m), f(x_M)]$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que les deux limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est bornée. Les bornes sont-elles atteintes ?

Exercice 19. Démontrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair a toujours au moins une racine réelle. Est-ce vrai pour les polynômes de degré pair ?
Indication : comparer les deux limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Exercice 20. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue, $a,\ b \in \mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans I.

Exercice 21. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(2) = 10$. Montrer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(1+t) = 5 + f(t)$.

Exercice 22. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où $a < b$. On suppose que $f(a) < a^2$ et $f(b) > b^2$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c^2$.

Exercice 23. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel a tel que $f \circ f(a) = a$. Prouver que f admet un point fixe.

Exercice 24. Prenons une fonction continue $g : [0,1] \to [0,1]$. Établir l'existence de $s \in [0,1]$ pour lequel $f(s) = \sqrt{s}$.

Exercice 25. On suppose l'existence d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0, telle que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pour tous réels a et b.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Établir que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4 Suites définies par itération

Exercice 26. Étudier la convergence, et le cas échéant déterminer la limite, des suites définies par $u_{n+1} := f(u_n)$ dans les situations suivantes.

1. $f : x \mapsto -x$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x^2$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \frac{a}{x}$ avec $u_0 := a > 0$.

Exercice 27. Soit f la fonction polynomiale définie par $f : x \mapsto \frac{x^3}{6} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$. On définit la suite $(u_n)_n$ en posant $u_0 := 0$ et $u_{n+1} := f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante. Montrer que l'on a $f\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{3}{4}$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{3}{4}$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ admet une limite l telle que $l = f(l)$ et $0 \le l \le \frac{3}{4}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le l - u_{n+1} \le \frac{2}{3}(l - u_n)$. En déduire l'encadrement $0 \le l - u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
4. Comment peut-on choisir l'entier n pour que u_n soit une valeur approchée de l à 10^{-2} près ?
5. Soit le polynôme $P = X^3 - 4X + 2$. Montrer que l est la seule racine de P dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 28. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4 - \frac{1}{4}\ln x \end{array}.$$

1.
   (a) Étudier les variations de $g : x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α.
   (c) Justifier l'unicité de cette solution.
   (d) On note $I =]3,4[$. Montrer que α appartient à I.
2. Montrer que $f(I)$ est inclus dans I.
3.
   (a) Montrer que f' est croissante sur I. En déduire que
   $$(\forall x \in I) \qquad |f'(x)| \le \frac{1}{12}.$$
   (b) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
   (c) Conclure que
   $$(\forall x \in I)(\forall y \in I), \qquad |f(x) - f(y)| \le \frac{1}{12}|x - y|.$$
4. Soit $u_0 \in I$. On considère la suite (u_n) définie par
   $$(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} := f(u_n).$$
   (a) Montrer par récurrence que
   $$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_n \in I.$$
   (b) Justifier que si (u_n) converge, alors sa limite est α.
   (c) En utilisant la question 3), montrer que (u_n) converge vers α.

5 Fonctions dérivables sur un intervalle

Exercice 29. Soient I un intervalle réel, $a \in I$ et f une fonction définie sur I.

1. On suppose que f est dérivable en a. Montrer qu'alors $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est finie.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 30. Démontrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré pair atteint un maximum ou un minimum en un point de $\mathbb{R}$.

Exercice 31. Soient x, y, z des réels tels que $0 < y < z$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]y,z[$ tel que $z^x - y^x = x(z-y)c^{x-1}$.
2. Résoudre l'équation $10^x - 7^x - 5^x + 2^x = 0$.

Exercice 32. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = (1-c)f'(c)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,\pi/2[$ tel que $f(c)\tan(c) = f'(c)$.

Exercice 33. Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f\ :\ x \mapsto \sqrt{\sin(x)} + x$.

1. Montrer que f définit une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Justifier que $f^{\circ -1}$ est continue sur J.
3. Étudier la dérivabilité de $f^{\circ -1}$ sur J.
4. Calculer $\left(f^{\circ -1}\right)'$ au point $1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 34. Montrer que

$$(\forall x \neq 0) \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{signe}(x)\ .$$

Exercice 35. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0, f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. On définit
$$\begin{array}{rcl} g\ :\ ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{x} \end{array}.$$
   (a) Montrer que g est dérivable sur $]0,1]$.
   (b) Montrer que g est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0.
2. On note h le prolongement par continuité de g. Montrer que $h(0) = 0$ et $h(1) = 0$.
3. Énoncer le théorème de Rolle.
4. En appliquant le théorème de Rolle à h, montrer que
$$(\exists c \in]0,1[) \quad : \quad f(c) = cf'(c)\ .$$

Exercice 36. Donnons-nous :

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(\sin^2(x)\right) \end{array}.$$

1.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire que
$$x \longmapsto \frac{\exp\left(\sin^2(x)\right) - 1}{x}$$
   admet une limite en 0 que l'on calculera.
2. On note g la restriction de f à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
   (a) Montrer soigneusement que g est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un ensemble J à déterminer. On note h sa réciproque.
   (b) Sur quel ensemble h est-elle continue ?
   (c) Sur quel ensemble h est-elle dérivable ? Donner la valeur de $h'(\mathrm{e})$.
   (d) Déterminer $\sin \circ h$ sur J.

Exercice 37. On suppose l'existence d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0, telle que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pour tous réels a et b.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Établir que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. Montrer que f est en fait une application linéaire.

6 Problèmes

Exercice 38. Prenons $a \leq b \in \mathbb{R}$ et notons $I := [a,b]$. Soit $f : I \to I$ une fonction contractante :

$$(\exists k \in [0,1[) \ (\forall (x,y) \in I \times I) \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq k\left|x-y\right| .$$

On va démontrer le résultat fondamental suivant :

Théorème du point fixe. *Soit $f : I \to I$ contractante. Pour tout $x_0 \in I$ la suite $(x_n)_n$, définie par l'itération $x_{n+1} := f(x_n)$, converge vers l'unique point fixe de f dans I.*

1.
   (a) Montrer que f est continue sur I.
   (b) En déduire qu'elle admet un point fixe x_*.
   (c) Démontrer que celui-ci est unique.
2. On se donne $x_0 \in I$ et $x_{n+1} := f(x_n)$.
   (a) Justifier que cette suite est bien définie.
   (b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|.$$
   (c) Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $n > N$ un entier. Démontrer par récurrence sur n que :
   $$|x_n - x_N| \quad \leq \quad |x_1 - x_0| \sum_{j=N}^{n-1} k^j$$
   Indication : utiliser l'inégalité triangulaire.
   (d) En déduire l'estimation
   $$|x_n - x_N| \quad \leq \quad \frac{k^N}{1-k} |x_1 - x_0| .$$
   (e) Donner un certificat de convergence de $(x_n)_n$. Quelle est la limite ?

Exercice 39.

1. Montrer que, pour tout nombre $x > 0$, on a
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n).$$
3. Posons, pour $n \geq 1$ entier, $u_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
4. Prouver finalement que (u_n) est convergente. Sa limite est la constante d'Euler-Mascheroni, noté en général γ.

Exercice 40.

Définition. Une fonction $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la *propriété des valeurs intermédiaires* lorsque pour tout intervalle $I \subset A$ l'image $g(I)$ de I par g est un intervalle.

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant (dû à G. Darboux) :

Théorème (de Darboux). *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Alors sa dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

A. Un exemple

On considère ici la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \neq 0 & \longmapsto & x^2 \cos \dfrac{1}{x} \\ & 0 & \longmapsto & 0 . \end{array}$$

1.
   (a) Prouver que f est continue en tout point de $\mathbb{R}_{\neq 0}$.
   (b) Montrer ensuite que f est continue en 0.
2.
   (a) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_{\neq 0}$, et calculer sa dérivée.
   (b) Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. *Indication :* écrire le taux d'accroissement de f relativement à 0.
3. Établir que la fonction f' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

B. Discussion

1. Donner un exemple (simple) de fonction g qui ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.
2. Quelle condition générale portant sur g est suffisante pour qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ?
3. Cette condition est-elle nécessaire ?

C. Démonstration du théorème de Darboux

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle sur lequel f est dérivable. Définissons $J := f'(I)$ et prenons $y_1 < y_2$ deux points de J.

1. Pourquoi existe-t-il $a \neq b \in I$ tels que $y_1 = f'(a)$ et $y_2 = f'(b)$? Dans la suite on supposera $a < b$. Cette hypothèse n'enlève pas de généralité au raisonnement quitte à remplacer f par $-f$.
2. Expliquer en quoi la propriété

$$(\forall y \in]y_1, y_2[\,)\ (\,\exists c \in]a, b[\,)\ :\ f'(c) = y \qquad (\star)$$

   permet de prouver que J est un intervalle, si elle est vraie pour tout choix de y_1, y_2. C'est cette propriété que nous allons démontrer.
3. Fixons $y \in]y_1, y_2[$ et considérons la fonction auxiliaire

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - yx . \end{array}$$

   (a) Démontrer que φ est dérivable sur $[a\ ,\ b]$.

   (b) Pourquoi φ est-elle minimale en au moins un point $c \in [a, b]$?

   (c) Quel est le signe de $\varphi'(a)$ et $\varphi'(b)$? Prouver alors qu'il existe $0 < \delta < b - a$ tel que

$$\begin{array}{rcl} (a < x < a + \delta) & \Longrightarrow & \varphi(a) > \varphi(x) \\ (b - \delta < x < b) & \Longrightarrow & \varphi(b) > \varphi(x) . \end{array}$$

   (d) En déduire $c \in]a, b[$. Combien vaut $\varphi'(c)$?

4. Finalement démontrer $(\star)$.