Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Travaux Dirigés de Logique

Calcul des prédicats

1 Syntaxe

Dans la logique des prédicats du premier ordre, on considère la formule suivante :

$$\forall x(\forall y((\exists z R(f(x,b),g(y,z))) \Longrightarrow (S(x,y) \vee T(z,a)))).$$

Quels en sont les symboles fonctionnels, les symboles prédicatifs, les variables et les constantes ?

Réponse :

$$\forall x(\forall y((\exists z R(f(x,b),g(y,z))) \Longrightarrow (S(x,y) \vee T(z,a)))).$$

- Les symboles fonctionnels de la formule ci-dessus sont : f et g.
- Les symboles prdicatifs de la formule ci-dessus sont : R, S et T.
- Les variables de la formule ci-dessus sont : x, y et z.
- Les constantes de la formule ci-dessus sont : a et b.

Déterminer l'ensemble des variables libres et l'ensemble des variables liées dans les expressions suivantes. Effectuer ensuite les substitutions indiquées sur les variables libres (après avoir éventuellement renommé certaines variables).

(E_1) $\forall x \forall y\ (p(x,a,t) \Longrightarrow \exists t\ p(x,y,t))$; substitution de t par $f(x,y)$.

Réponse :

$$A_1 = \forall x \forall y\ (p(x,a,t) \Longrightarrow \exists t\ p(x,y,t))$$

- Les occurrences des variables liées : Les occurrences de x, y et t.
- Les occurrences des variables libres : Les occurrences de t.

Comme les variables du terme $T_1 = f(x,y)$ ont des occurrences liées dans la formule A_1, alors en effectuant directement la substitution du terme T_1 dans la formule A_1 ces variables deviendraient liées !, par conséquent, il faut d'abord commencer par renommer les occurrences liées de ces variables dans la formule A_1, on obtient alors la formule A_1' telle que

$$A_1' = \forall x_1 \forall y_1\ (p(x_1,a,t) \Longrightarrow \exists t\ p(x_1,y_1,t))$$

Comme il n y a plus de conflit de variables entre A'_1 et T_1 nous pouvons alors effectuer la substitution $A'_1[t \longleftarrow T_1]$:

$$A'_1[t \longleftarrow f(x,y)] = \forall x_1 \forall y_1 \ (p(x_1, a, f(x,y)) \Longrightarrow \exists t \ p(x_1, y_1, t))$$

(E$_2$) $(\forall x \exists v \ (p(x,v) \Longrightarrow r(a)) \Longrightarrow \forall u \forall v \ p(t,b,f(x)))$; substitution de x par $f(g(t,v),u)$.

Réponse :

$$A_2 = (\forall x \exists v \ (p(x,v) \Longrightarrow r(a)) \Longrightarrow \underline{\forall u \forall v \ p(t,b,f(x))})$$

- Les occurrences des variables liées : Les occurrences de x, v et u.
- Les occurrences des variables libres : Les occurrences de t et x.

Comme les variables v et u du terme $T_2 = f(g(t,v),u)$ ont des occurrences liées dans la sous formule soulignée de A_2 sur laquelle porte la substitution, alors en effectuant directement la substitution du terme T_2 dans la formule A_2 ces variables deviendraient liées!, par conséquent, il faut d'abord commencer par renommer les occurrences liées de ces variables dans la sous formule soulignée de A_2 et on obtient alors on la formule A'_2 telle que

$$A'_2 = (\forall x \exists v \ (p(x,v) \Longrightarrow r(a)) \Longrightarrow \forall u_1 \forall v_1 \ p(t,b,f(x)))$$

Comme il n y a plus de conflit de variables entre A'_2 et T_2 nous pouvons alors effectuer la substitution $A'_2[x \longleftarrow T_2]$:

$$A'_2[x \longleftarrow f(g(t,v),u)] = (\forall x \exists v \ (p(x,v) \Longrightarrow r(a)) \Longrightarrow \forall u_1 \forall v_1 \ p(t,b,f(f(g(t,v),u))))$$

(E$_3$) $(\forall y \ (p(x,y) \vee p(y,x)) \Longrightarrow \forall x \ p(x,x))$; substitution de x par $f(x,y)$.

Réponse :

$$A_3 = (\underline{\forall y \ (p(x,y) \vee p(y,x))} \Longrightarrow \forall x \ p(x,x))$$

- Les occurrences des variables liées : Les occurrences de x et y.
- Les occurrences des variables libres : Les occurrences de x.

Comme la variable y du terme $T_3 = f(x,y)$ a des occurrences liées dans la sous formule soulignée de A_3 sur laquelle porte la substitution, alors en effectuant directement la substitution du terme T_3 dans la formule A_2 cette variable deviendrait liée!, par conséquent, il faut d'abord commencer par renommer les occurrences liées de cette variable dans la sous formule soulignée de A_3 et on obtient alors la formule A'_3 telle que

$$A'_3 = (\underline{\forall y_1 \ (p(x,y_1) \vee p(y_1,x))} \Longrightarrow \forall x \ p(x,x))$$

Comme il n y a plus de conflit de variables entre A'_3 et T_3 nous pouvons alors effectuer la substitution $A'_3[x \longleftarrow T_3]$:

$$A'_3[x \longleftarrow f(x,y)] = (\underline{\forall y_1 \ (p(f(x,y),y_1) \vee p(y_1,f(x,y)))} \Longrightarrow \forall x \ p(x,x))$$

2 Théorèmes de CP1

Rappels : Système formel CP1 de Hilbert

1. L'ensemble A_{CP1} des axiomes du système formel CP1 est composé des cinq schémas d'axiomes suivants :

   $\mathcal{SA}_1$: $(A \to (B \to A))$ où $A, B \in F_{CP1}$.

   $\mathcal{SA}_2$: $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ où $A, B, C \in F_{CP1}$.

   $\mathcal{SA}_3$: $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$ où $A, B \in F_{CP1}$.

   $\mathcal{SA}_4$: $(\forall x A(x) \to A[x \leftarrow t])$ où $A \in F_{CP1}$ et $t \in Terme$.

   $\mathcal{SA}_5$: $((A \to B) \to (A \to \forall x B))$ où $A, B \in F_{CP1}$ et $x \notin Varlib(A)$ *(i.e. x n'est pas une variable libre de la formule A).*

2. L'ensemble $R_{CP1} = \{m.p., g.\}$ des règles d'inférence pour le système formel CP1 de Hilbert est composé de règles d'inférences : le modus ponens (m.p.) et la généralisation (g.) :

   $m.p.$: $A, (A \to B) \ \vdash_{m.p.} \ B$ où $A, B \in F_{CP1}$ *(règle d'inférence du modus ponens).*

   $m.p.$: $A \ \vdash_{g.} \ \forall x A$ où $A \in F_{CP1}$ et $x \in V$ *(règle d'inférence de généralisation).*

3. **Théorème de complétude de CP1 :** Soient $E \subset F_{CP1}$ et $A \in F_{CP1}$ tels que toutes les formules de l'ensemble E et la formule A ont leurs symboles dans Σ'_{CP1}. Alors

$$E \models A \quad \text{si et seulement si} \quad E \vdash A.$$

Montrer que dans CP1, on a les théorèmes suivants.

(i) $\vdash (\forall x\ p(x) \longrightarrow \forall y\ p(y))$

Réponse :

En utilisant le Système formel CP1 de Hilbert on a déduction suivante :

(1) $(\forall x\ p(x) \longrightarrow\ p(y))$ $\quad \mathcal{SA}_4$
(2) $((\forall x\ p(x) \longrightarrow\ p(y)) \longrightarrow (\forall x\ p(x) \longrightarrow\ \forall y\ p(y)))$ $\quad \mathcal{SA}_5$
(3) $(\forall x\ p(x) \longrightarrow \forall y\ p(y))$ $\quad$ m.p.(1) et (2)

(ii) $\neg p(y) \vdash \neg(\forall x\ p(x))$

Réponse :

En utilisant le Système formel CP1 de Hilbert on a déduction suivante :

(1) $((\forall x\ p(x) \longrightarrow\ p(y)) \longrightarrow (\neg p(y) \longrightarrow \neg \forall x\ p(x))$ $\quad \mathcal{SA'}_3$
(2) $((\forall x\ p(x) \longrightarrow\ p(y))$ $\quad \mathcal{SA}_4$
(3) $(\neg p(y) \longrightarrow \neg \forall x\ p(x))$ $\quad$ m.p.(1) et (2)
(4) $\neg p(y)$ $\quad$ Hypothèse
(5) $\neg \forall x\ p(x))$ $\quad$ m.p.(3) et (5)

(iii) $\forall x\ p(x) \vdash \exists y\ p(y)$

Réponse :

En utilisant le Système formel CP1 de Hilbert on a déduction suivante :

(1) $((\forall y\ \neg p(y) \longrightarrow\ \neg p(x)) \longrightarrow (p(x) \longrightarrow \neg \forall y\ negp(y))$ $\quad \mathcal{SA'}_3$

(2) $((\forall y\ negp(y) \longrightarrow\ \neg p(x))$ $\mathcal{SA}_4$
(3) $(p(x) \longrightarrow \neg\forall y\ negp(y))$ m.p.(1) et (2)
(4) $(\forall x\ p(x) \longrightarrow\ p(x))$ $\mathcal{SA}_4$
(5) $\forall x\ p(x)$ Hypothèse
(6) $p(x)$ Hypothèse
(7) $\neg\forall y\ \neg p(y)$ m.p.(3) et (6)

(iv) $\vdash \exists x\forall y\ p(x,y) \Longrightarrow \exists x\ p(x,x)$
Réponse :

Pour cette question nous allons utilisé le Théorème de complétude de CP1 :

Soit I une interprétation d'univers U_I. Alors,

$$I(\exists x\forall y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x)) = \exists x \in\ U_I\forall y \in U_I\ I_P(p)(x,y) \Longrightarrow \exists x \in U_I\ I_P(p)(x,x)).$$

Alors, deux cas son possibles :

(Cas 1) : $\exists x \in U_I\ \forall y \in U_I\ I_P(p)(x,y) = vrai$ et donc
il existe $x_0 \in U_I$ tel que $\forall y \in U_I\ I_P(p)(x_0,y) = vrai$ et donc on a en particulier
$I_P(p)(x_0,x_0) = vrai$, par conséquent, $\exists x \in U_I\ I_P(p)(x,x)) = vrai$ ce qui implique que
$I(\exists x\ \forall y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x)) = vrai.$

(Cas 2) : $\exists x \in U_I\ \forall y \in U_I\ I_P(p)(x,y) = faux$ ce qui implique que
$I(\exists x\ \forall y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x)) = vrai.$

Donc $\exists x\forall y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x))$ est une tautologie et par conséquent, d'après le Théorème de complétude de CP1 $\exists x\forall y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x))$ est donc un théorème de CP1 d'Hilbert.

3 Tautologies

Indiquer pour chacune des formules suivantes, s'il s'agit d'une tautologie.

(f_1) $\forall x\exists y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x)$.

Réponse :

Considérons l'interprétation I_0 telle que $U_{I_0} = \mathbb{Z}$ et $I_{0_P}(p)(x,y) = x < y$.
Pour tout entier x, si on prend $y = x+1$, alors on a $x < y$ et donc $I_0(\forall x\exists y\ p(x,y)) = vrai$. Par contre, pour tout entier x, $x < x = faux$ par conséquent, $I_0(\exists x\ p(x,x))$ et donc
$I_0(\forall x\exists y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x)) = faux$. Ce qui implique que
la formule $\forall x\exists y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x)$ n'est pas une tautologie.

Remarque : L'interprétation I_0 a été construite en "pensant" aux ensembles et relations usuelles.

(f_2) $\exists x\forall y\ p(x,y) \longrightarrow \exists x\ p(x,x)$

Réponse :

Cette formule est une tautologie : Démontrer dans l'exercice précédent 2. *iv*.

(f_3) $(\exists y\forall x\ (p(x,y) \longrightarrow r(x))) \longrightarrow \exists z\ r(z)$

Réponse :

Considérons une interprétation I_0 telle que $I_{0_P}(p)(x,y) = faux$ et $I_{0_P}(r) = faux$ pour tout $x,y \in U_{I_0}$ *(par exemple,* $U_{I_0} = \mathbb{N}$, $I_{0_P}(p)(x,y) = 0 > x+y = faux$ *! et* $I_{0_P}(r)(x) = 0 > x = faux$ *!).*
Alors,

$$I_0((\exists y \forall x\ (p(x,y) \longrightarrow r(x))) \longrightarrow \exists z\ r(z)) =$$

$((\exists y \in U_{I_0}\ \forall x \in U_{I_0}\ (I_{0_P}(p)(x,y) \Longrightarrow r(x))) \Longrightarrow \exists z \in U_{I_0}\ I_{0_P}(r)(z)) = (faux \Longrightarrow faux) \Longrightarrow faux = faux.$

Par conséquent, la formule $(\exists y \forall x\ (p(x,y) \longrightarrow r(x))) \longrightarrow \exists z\ r(z)$ n'est pas une tautologie.

(f_4) $\forall x \forall y\ (p(x,y) \vee p(y,x)) \longrightarrow \forall x\ p(x,x)$

Réponse :

Soit I une interprétation d'univers U_I. Alors,

$$I(\forall x \forall y\ (p(x,y) \vee p(y,x)) \Longrightarrow \forall x\ p(x,x)) =$$

$$\forall x \in U_I\ \forall y \in U_I\ (I(p)(x,y) \vee I(p)(y,x)) \Longrightarrow \forall x \in U_I\ I(p)(x,x).$$

Alors, deux cas sont possibles :

(Cas 1) : $\forall x \in U_I\ \forall y \in U_I\ (I(p)(x,y) \vee I(p)(y,x)) = vrai$ ce qui implique que
$\forall x \in U_I\ (I(p)(x,x) \vee I(p)(x,x)) = vrai = \forall x \in U_I\ I(p)(x,x))$. Donc on a dans ce cas

$$I(\forall x \forall y\ (p(x,y) \vee p(y,x)) \Longrightarrow \forall x\ p(x,x)) = vrai.$$

(Cas 2) : $\forall x \in U_I\ \forall y \in U_I\ (I(p)(x,y) \vee I(p)(y,x)) = faux$ et donc on a dans ce cas aussi

$$I(\forall x \forall y\ (p(x,y) \vee p(y,x)) \Longrightarrow \forall x\ p(x,x)) = vrai.$$

Donc la formule $\forall x \forall y\ (p(x,y) \vee p(y,x)) \longrightarrow \forall x\ p(x,x)$ est une tautologie.

(f_5) $\forall x \exists y \forall z\ p(x,y,z) \longrightarrow \exists y \forall z\ p(z,y,z)$

Réponse :

Considérons l'interprétation I_0 telle que : $U_{I_0} = \mathbb{Z}$ et $I_{0_P}(p)(x,y,z) = x < y$.
Alors,

$$I_0(\forall x \exists y \forall z\ p(x,y,z) \longrightarrow \exists y \forall z\ p(z,y,z)) =$$

$$I_0(\forall x \exists y \forall z\ p(x,y,z)) \Longrightarrow I_0(\exists y \forall z\ p(z,y,z))$$

Pour tout entier x, si on prend $y = x+1$, alors on a $x < y$ et donc $I_0(\forall x \exists y \forall z\ p(x,y,z)) = vrai$.
Par contre, il n'existe pas un entier z tel que $y < z$ pour tout entier y car
si un tel entier z existe en prenant $y = z+1$ on aura $z+1 < z$
ce qui est absurde et donc $I_0(\exists y \forall z\ p(z,y,z)) = faux$.
Donc,

$$I_0(\forall x \exists y \forall z\ p(x,y,z)) \Longrightarrow I_0(\exists y \forall z\ p(z,y,z)) = vrai \Longrightarrow faux = faux$$

Par conséquent, la formule $\forall x \exists y \forall z\ p(x,y,z) \longrightarrow \exists y \forall z\ p(z,y,z)$ n'est pas une tautologie.

(f_6) $(\forall x\ (p(x) \Longrightarrow r(x)) \wedge \exists y\ \neg r(y)) \Longrightarrow \exists z\ \neg p(z)$

Réponse :

Soit I une interprétation d'univers U_I. Alors,

$$I((\forall x\ (p(x) \longrightarrow r(x)) \wedge \exists y\ \neg r(y)) \longrightarrow \exists z\ \neg p(z)) =$$

$$(\forall x \in U_I\ (I_P(p)(x) \Longrightarrow I_P(r)(x)) \wedge \exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y)) \Longrightarrow \exists z \in U_I\ \neg I_P(p)(z).$$

Alors, quatre cas sont possibles :

(Cas 1) : $\exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y) = faux$ et $\exists z \in U_I\ \neg I_P(p(z) = faux.$
Alors, dans ce cas on a

$$(\forall x \in U_I\ (I_P(p)(x) \Longrightarrow I_P(r)(x)) \wedge \exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y)) \Longrightarrow \exists z \in U_I\ \neg I_P(p)(z) = vrai.$$

(Cas 2) : $\exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y) = faux$ et $\exists z \in U_I\ \neg I_P(p(z) = vrai.$
Alors, dans ce cas on a aussi

$$(\forall x \in U_I\ (I_P(p)(x) \Longrightarrow I_P(r)(x)) \wedge \exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y)) \Longrightarrow \exists z \in U_I\ \neg I_P(p)(z) = vrai.$$

(Cas 3) : $\exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y) = vari$ et $\exists z \in U_I\ \neg I_P(p(z) = vrai.$
Alors, dans ce cas on a aussi

$$(\forall x \in U_I\ (I_P(p)(x) \Longrightarrow I_P(r)(x)) \wedge \exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y)) \Longrightarrow \exists z \in U_I\ \neg I_P(p)(z) = vrai.$$

(Cas 4) : $\exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y) = vrai$ et $\exists z \in U_I\ \neg I_P(p(z) = vrai.$

Alors, dans ce cas on a

d'une part, pour tout x dans U_I on a $I_P(p)(x) = vrai$ et

d'autre part, il existe y_0 dans U_I tel que $I_P(r)(y_0) = faux.$

et donc $I_P(p)(y_0) \Longrightarrow I_P(r)(y_0) = faux$, et par conséquent on a dans ce cas aussi

$$(\forall x \in U_I\ (I_P(p)(x) \Longrightarrow I_P(r)(x)) \wedge \exists y \in U_I\ \neg I_P(r)(y)) \Longrightarrow \exists z \in U_I\ \neg I_P(p)(z) = vrai.$$

Donc la formule $(\forall x\ (p(x) \Longrightarrow r(x)) \wedge \exists y\ \neg r(y)) \Longrightarrow \exists z\ \neg p(z)$ est une tautologie

4 Modèles

On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ comprenant les formules :
$(\mathcal{A}_1)$: $\forall x \forall y \forall z\ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \longrightarrow p(x,z))$;
$(\mathcal{A}_2)$: $\forall x\ (p(a,x) \wedge p(x,b))$; a et b étant des constantes ;
$(\mathcal{A}_3)$: $\forall x\ p(x, f(x))$;
et la théorie (qu'on note encore $\mathcal{A}$) étendant CP1 en ajoutant ces trois formules aux axiomes.

1 - Proposer un modèle $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$. Calculer, étape par étape, l'application $\mathcal{I}(B)$ de D dans $\{0,1\}$ associée à la formule B : $\forall y\ (p(x,y) \longrightarrow p(x, f(x)))$.

Réponse :

Considérons l'interprétation $\mathcal{I}$ telle que $U_{\mathcal{I}} = [0,1]$, $\mathcal{I}_C(a) = 0, \mathcal{I}_C(b) = 1, \mathcal{I}_P(p)(x,y) = x \leq y$ pour tout $x, y \in [0,1]$ et $\mathcal{I}_F(f)(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

- Pour tout $x, y, z \in [0,1]$ on a
$$(x \leq y \wedge y \leq z) \Longrightarrow x \leq z.$$
Donc $\mathcal{I}(\mathcal{A}_1) = vrai.$

- pour tout $x \in [0,1]$ on a
$$0 \leq x \leq 1.$$
Donc $\mathcal{I}(\mathcal{A}_2) = vrai.$

- pour tout $x \in [0,1]$ on a
$$x \leq 1 (= \mathcal{I}_F(f)(x))$$
Donc $\mathcal{I}(\mathcal{A}_3) = vrai.$

Par conséquent, $\mathcal{I}$ est un modèle de l'ensemble des axiomes $\mathcal{A}$.

Calculons maintenant $\mathcal{I}(\forall y\ (p(x,y) \longrightarrow p(x, f(x))))$:

$$\mathcal{I}(\forall y\ (p(x,y) \longrightarrow p(x,f(x)))) = (\forall y \in U_{\mathcal{I}}\ (\mathcal{I}_P(p)(x,y) \Longrightarrow \mathcal{I}_P(p)(x, \mathcal{I}_F(f)(x)))) =$$
$$\forall y \in [0,1]((x \leq y) \Longrightarrow (x \leq 1)) = \forall y \in [0,1]((x \leq y) \Longrightarrow vrai) = vrai$$

2 - Montrer qu'il n'est pas vrai que : $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \models \exists x\ p(f(x), a)$. Pour cela, proposer un modèle $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{I}(\exists x\ p(f(x), a)) = 0$.

Réponse :

Reprenons l'interprétation $\mathcal{I}$ utilisée dans la question précédente. Alors,

$$\mathcal{I}(\exists x \in\ \ p(f(x), a)) = (\exists x \in U_{\mathcal{I}}\ \mathcal{I}_P(p)(\mathcal{I}_F(f)(x), \mathcal{I}_C(a))) = (\exists x \in [0,1]\ 1 \leq 0) = faux.$$

D'où le résultat.