Correction TD 4 : Couples de variables aléatoires & convergence

Exercice 3 :

1. X est de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ donc
$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$
avec k entier de 0 à l'infini.
2. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$ on en déduit que
$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = 1 \Rightarrow e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$
3. On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \\
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \mathbb{E}(X) = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \mathbb{E}(X) \\
&= \lambda^2\, e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathbb{E}(X) = \lambda^2\, e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$
ce qui implique que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda$.
4. Lorsque X est fixé égal à k, F compte le nombre de succès (obtenir face) de la répétition de k expériences aléatoires indépendantes ayant chacune une probabilité q de succès. Donc la loi de F sachant $X = k$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k, q)$. On en déduit que
$$\mathbb{P}(F = a | X = k) = C_k^a q^a p^{k-a}$$
si $0 \leq a \leq k$ et 0 sinon.
5. Par la formule de Bayes
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F = a, X = k) &= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(F = a | X = k) \\
&= C_k^a q^a p^{k-a}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{k!}{a!(k-a)!} q^a p^{k-a}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{1}{a!(k-a)!}(p\lambda)^k \left(\frac{q}{p}\right)^a e^{-\lambda}
\end{aligned}$$
si $0 \leq a \leq k$ et 0 sinon.

6. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F=a) &= \sum_{k=a}^{\infty} \mathbb{P}(F=a, X=k) \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^{a} \frac{1}{a!} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{k}}{(k-a)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^{a} \frac{1}{a!}(\lambda p)^{a} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{k-a}}{(k-a)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^{a} \frac{1}{a!}(\lambda p)^{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{k}}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{q}{p}\right)^{a} \frac{1}{a!}(\lambda p)^{a}\, e^{\lambda p} \\
&= e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^{a}}{a!}.
\end{aligned}$$

   Par conséquent F suit une loi de Poisson de paramètre $q\lambda$.
7. Le problème posé est symétrique à celui résolu à la question 6., les piles et les faces intervertissant leur rôle. La valeur p devient alors q, et par conséquent P suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.
8. L'événement $\{F=a\}\cap\{P=b\}$ est le même que l'événement $\{F=a\}\cap\{X=a+b\}$, par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{F=a\}\cap\{P=b\}) &= \mathbb{P}(\{F=a\}\cap\{X=a+b\}) \\
&= \mathbb{P}(X=a+b)\mathbb{P}(F=a|X=a+b) \\
&= C_{a+b}^{a} q^{a} p^{b}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^{a+b}}{(a+b)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{a+b}}{a!b!} q^{a} p^{b}.
\end{aligned}$$

   D'autre part

$$\mathbb{P}(F=a)\times\mathbb{P}(P=b) = e^{-\lambda q}\frac{(\lambda\, q)^{a}}{a!} e^{-\lambda\, p}\frac{(\lambda\, p)^{b}}{b!}.$$

   Ces deux quantités étant égales, P et F sont indépendantes.
9. Par indépendance de P et F, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(PF) &= \mathbb{E}(P)\mathbb{E}(F) = \lambda^{2} pq \\
Var(P+F) &= Var(P) + Var(F) = \lambda,
\end{aligned}$$

   ce que l'on pouvait aussi retrouver en remarquant plus simplement que $P+F=X$.

Exercice 4 :

1. Pour une loi de Poisson(1), on a

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-1}}{k!}, k=0,1,...$$

2. En utilisant l'indépendance des X_i

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(t^{X_i}) = \prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(X_i = k) = \prod_{i=1}^n e^{t-1} = e^{(t-1)n},$$

qui est la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre n. Comme la fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise la loi de cette variable aléatoire, on en déduit que $\sum_{i=1}^n X_i$ est de loi de Poisson de paramètre n.

3. On dit que X_n converge en probabilité vers X si $\forall \epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

4. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi, de carré intégrable, donc on peut appliquer la loi faible des grands nombres qui dit que, quand $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = 1.$$

5. On veut montrer une convergence en probabilité, donc on repart naturellement de la définition. On utilise ensuite l'inégalité de Tchébychev : $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1\right| \geq \varepsilon\right) \quad &\leq \quad \frac{\operatorname{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)}{\epsilon^2} \\
&= \quad \frac{\operatorname{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2\epsilon^2} \\
&= \quad \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i)}{n^2\epsilon^2} \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\
&= \quad \frac{\operatorname{Var}(X_i)}{n\epsilon^2} \text{ car les } X_i \text{ ont même loi, et donc ont toute la même variance} \\
&= \quad \frac{1}{n\epsilon^2}.
\end{aligned}$$

Le membre de droite de l'inégalité converge vers 0, donc on a démontré le résultat.

6. Théorème Central Limite : Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable. Alors, quand $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_1)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

7. Dans le cas particulier d'une variable de loi de Poisson(1), on a $\mathbb{E}(X) = \operatorname{Var}(X) = 1$. Donc, quand $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1\right) \leq t\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}(N \leq t),$$

où N est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1\right) \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq n + t\sqrt{n}\right)$$

et donc en faisant $t = 0$ on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}$$

par symétrie.

8. En utilisant la question 2, on a

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \longrightarrow 1/2.$$