Exercices d'analyse, feuille 2

Licence d'Informatique

$2^{\text{ème}}$ année, semestre 3

1 Généralités

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner une démonstration de chaque assertion vraie, et donner un contre-exemple de chaque assertion fausse.

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers l'infini.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est constante à partir d'un certain rang.
3. Si une suite positive tend vers zéro, elle est décroissante.
4. Si une suite positive tend vers zéro, elle est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.
6. Si une suite est croissante et non bornée, elle tend vers l'infini.

Exercice 2.

1. Soit (u_n) une suite convergente. Montrer que (u_n) est bornée. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit (u_n) une suite tendant vers $+\infty$. Montrer que (u_n) n'est pas majorée. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{>0})\ u_n := \frac{n+1}{n}.$$

1. Soient $n \geq N$ des entier naturels non nuls. Montrer que :

$$|u_n - u_N| \leq \frac{1}{N}.$$

2. En déduire que la fonction

$$\begin{aligned} \mathrm{conv} : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto 10^k + 1 \end{aligned}$$

est un certificat de convergence pour la suite u.

Exercice 4 (Produit de deux suites)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, ayant des certificats respectifs conv_u et conv_v. Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers le produit des limites) et d'en exhiber un certificat de convergence.

1. (Propagation des erreurs arithmétiques)
   (a) On définit les trois réels $a := 1,23456789$, $a' := 1,23459999$ et $b := 89,1189$. Montrer par le calcul que ab et $a'b$ ont les mêmes $4-2=2$ premières décimales.
   (b) Soient a, a' et b des réels. On suppose que b a au plus m chiffres avant la virgule et que les k premières décimales de a et a' sont égales pour $k \geq m$. Montrer que ab et $a'b$ ont (au moins) les mêmes $k-m$ premières décimales.
   (c) En déduire que si a, a', b, b' sont des réels tels que :
   — a, a', b, b' ont au plus m chiffres avant la virgule ;
   — les k premières décimales de a et a' sont égales, ainsi que les k premières décimales de b et b' ;
   alors les $k-m-1$ premières décimales de ab et $a'b'$ sont égales.
2. Justifier qu'on peut trouver un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont au plus m chiffres avant la virgule.
3. Montrer que la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{conv} : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto \max(\mathrm{conv}_u(k+m+1), \mathrm{conv}_v(k+m+1)) \end{aligned}$$

est un certificat de convergence pour la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Établir finalement l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

2 Étude de convergence

Exercice 5. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) de termes généraux respectifs $u_n := \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}$ et $v_n := u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$ sont adjacentes.

Exercice 6. 1. Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab\ .$$

2. On fixe deux nombres strictement positifs u_0 et v_0, et on définit par récurrence les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

(a) Déduire de (1) que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \geq v_n$$

(b) Notons $w_n = u_n - v_n$.

i. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad w_{n+1} \leq \frac{w_n}{2}$$

ii. En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

iii. Que peut-on alors dire de leur convergence ?

Exercice 7. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :
— $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq a$
— $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \leq b$
— $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge vers a et $(v_n)_n$ converge vers b.

3 Détermination de limites

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ on pose $u_n := \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Déterminer, si elle existe, la limite de u.

Exercice 9. Déterminer les limites, lorsqu'elles existent, des suites de terme général

$$\frac{\sqrt{3n^2+3}}{\sqrt{2n^2-4}}; \quad \frac{n!}{n^n}; \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}; \quad \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}; \quad (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} \quad \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$$

Exercice 10. Soit (u_n) la suite définie par $u_2 = a$ et $nu_{n+1} = (n-1)u_n - n + 1$, $n \geq 2$. Calculer u_n et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 11. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 := 1$ et $u_n := (9 - u_{n-1})/2$ pour $n \geq 1$. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n := u_n - 3$ est géométrique. En déduire $\lim(u_n)$.

Exercice 12. Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 := 1, \quad u_{n+1} := \frac{3+2u_n}{2+u_n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que, pour tout n, $u_n > 0$.
2. Pour tout n, on pose $v_n := (u_n - \sqrt{3})/(u_n + \sqrt{3})$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 13. Étudier la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{>0}) \qquad u_n := \frac{1}{\sqrt{4n^4+n^2+1}-2n^2}$$

4 Exercices plus difficiles

Exercice 14. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 := 1$ et $u_{n+1} := u_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On définit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par : $a_n := u_{2n}$ et $b_n := u_{2n+1}$. Calculer :
   (a) $a_{n+1} - a_n$
   (b) $b_{n+1} - b_n$,
   (c) $b_n - a_n$.
3. Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers la même limite.
4. En déduire que $(u_n)_n$ converge.

Exercice 15. Déterminer un certificat de convergence pour la suite de terme général $u_n := \exp(-n)$. *Indication* : il pourra s'avérer judicieux d'établir $1 - \exp(-x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 16. On considère les suites de termes généraux $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

1. Montrer que, si l'une de ces suites converge alors l'autre converge aussi.
2. Montrer que les deux suites sont divergentes. *Indication* : $\pi \notin \mathbb{Q}$

Exercice 17. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Montrer que (u_n) converge.
3. En utilisant l'encadrement
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$
donner un encadrement de u_n.
4. Calculer la limite de (u_n).

Exercice 18. On considère les suites (u_n) et (v_n) de termes généraux respectifs

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n := u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Indication : penser aux suites adjacentes.
   Cette limite commune est appelée le nombre d'Euler e et sert de base à l'exponentielle.
2. Montrer que cette limite est irrationnelle. *Indication* : raisonner par l'absurde en supposant $e = \frac{p}{q}$ et en considérant u_q et v_q.