

# Programming languages

Qinxiang Cao

2022 年 12 月 18 日

## 1 Lambda 表达式的语法

- Lambda 表达式的语法

```
E = V
    | C
    | E E
    | lambda V: E
```

```
C = N | + | - | * | / | %
```

- 习惯上，函数应用（Function Application）左结合、函数抽象（Function Abstraction）右结合
- Lambda 表达式的例子

```
- lambda x: lambda y: x + y
- lambda f: lambda x: lambda y: f y x
- lambda x: x + x
- (lambda x: x + x) 1
- (lambda x: x + 1) ((lambda x: x * x) 1)
- lambda f: lambda x: f (x + 1)
- (lambda f: lambda x: f (x + 1)) (lambda x: x + x) 1
```

## 2 Lambda 表达式的小步语义

- 求值结束的 lambda 表达式（Value）

```
val = lambda V: E
      | c
      | ( + ) N
      | ( - ) N
      | ( * ) N
      | ( / ) N
      | ( % ) N
```

- 函数应用的化简（Call-by-value）
  - 先化简函数部分
  - 再化简参数部分

– 最后作代入  $(\text{lambda } x : e_1)e_2 \rightarrow e_1[x \mapsto e_2]$ , 亦称  $\beta$  规约。

- 小步语义的例子

```
– (lambda f: lambda x: f (x + 1)) (lambda x: x + x) 1
– (lambda x: (lambda x: x + x) (x + 1)) 1
– (lambda x: x + x) (1 + 1)
– (lambda x: x + x) 2
– 2 + 2
– 4
```

- 小步语义的例子

```
– (lambda x: x + 1) ((lambda x: x * x) 1)
– (lambda x: x + 1) (1 * 1)
– (lambda x: x + 1) 1
– 1 + 1
– 2
```

- 小步语义的例子

```
– (lambda f: lambda x: lambda y: (f (y))(x))
  (lambda x: lambda y: x - y) 1 2
– (lambda x: lambda y: ((lambda x: lambda y: x - y) (y))(x)) 1 2
– (lambda y: ((lambda x: lambda y: x - y) (y))(1)) 2
– ((lambda x: lambda y: x - y) (2))(1)
– (lambda y: 2 - y)(1)
– 2 - 1
– 1
```

### 3 Church Encoded

### 4 简单类型 Lambda 表达式

### 5 类型安全性

具有合法类型的 lambda 表达式一定能避免运行出错吗？

- 2 2
- 2 (+)
- 2 (lambda x: x + 1)
- (+) (+)
- (+) (lambda x: x)
- 4611686018427387904 + 4611686018427387904

类型安全性具有合法类型的 lambda 表达式一定不会发生函数调用相关错误

Progress 如果  $\vdash e : T$ , 那么一定会发生以下三种情况之一:

- $e$  是已经求值完成的式子 (value);
- 存在  $e'$  使得  $e \rightarrow e'$ ;
- 下一步化简会造成算术运算错误。

Preservation 如果  $\vdash e : T$  并且  $e \rightarrow e'$ , 那么  $\vdash e' : T$

Progress 的证明对  $e$  的语法树做归纳

Preservation 的证明需要用到下面引理:

- 如果  $\vdash e : T$ , 那么  $\Gamma \vdash e : T$
- 如果  $x$  与  $y$  是不同的变量并且  $\Gamma, x : T_1, y : T_2 \vdash e : T$ , 那么  $\Gamma, y : T_2, x : T_1 \vdash e : T$
- $\Gamma, x : T' \vdash e : T$  并且  $\vdash e' : T'$ , 那么  $\Gamma \vdash e[x \mapsto e'] : T$

对  $e \rightarrow e'$  的原因归纳