高校应用数学学报A辑　　Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2002,17(1):83~90

一类特殊 Weibull 分布纪录值之和的中心极限定理

苏　淳,童铁军

(中国科技大学 统计与金融系,安徽合肥　230026)

摘　要:给出了参数 τ 为正整数的倒数的 Weibull 分布纪录值之和的中心极限定理。

关键词:Weibull 分布;纪录值;中心极限定理
中图分类号:O211.4
文献标识码:A　　**文章编号**:1000-4424(2002)01-0083-08

§1　引　言

对纪录值的研究,始于 20 世纪 40 年代,并在 70 年代取得了一系列重要的结果.那时人们的兴趣主要集中在纪录值序列本身的极限性质上,不仅获得了关于第 n 个纪录值的大数定律,中心极限定理等经典的结果,而且在其极限分布之类型方面(见[1,2])也作了大量有意义的工作。但在随后一段时间内,对纪录值的研究趋于静寂。近年来,由于纪录值在金融,保险,生物以及可靠性等领域的广泛应用,人们对纪录值的研究开始升温,研究的范围也日趋广泛。这其中包括对纪录值之和的渐近正态性的研究。但由于纪录值之和较难处理,无法采用统一的方法进行研究,一般只能针对具体的分布一类一类解决。故至今人们只获得了关于标准指数分布,Gumbel 分布及 Beta 分布这三种分布的纪录值序列部分和的中心极限定理(Barry C A,Jose A V(1998))。遗憾的是迄今未见对 Weibull 分布($F(x)=1-\exp\{-(\lambda x)^{\tau}\}$,其中 $x\geqslant 0,\lambda,\tau>0$)的纪录值之和讨论相应的问题。众所周知,Weibull 分布在金融保险等领域中具有极为重要的应用,它描述了重重尾分布,轻重尾分布和轻尾分布的种种临界状况。因而讨论其纪录值之和的中心极限定理不仅对研究金融风险概率模型的极限定理方面具有非常重要的意义,而且对发展其纪录值之和的极限理论本身也具有一定的意义和

收稿日期:2000-10-16
基金项目:国家自然科学基金(10071081);中国科学院特支经费资助的课题
第二作者 E-mail:tiejuntong@263.net

价值。

本文我们主要讨论 Weibull 分布纪录值之和的渐近正态性。虽然 Weibull 分布在金融和保险等领域中具有重要的地位,但迄今未见有人讨论该种分布纪录值之和的极限定理。这可能是与这类极限定理的研究具有相当的难度,并且尚未找到一种统一的研究方法有关。考虑到 Weibull 分布的重要地位,我们决定先从参数 τ 为正整数的倒数的 Weibull 分布的纪录值做起,以求找到解决问题的突破口,为今后彻底解决问题提供借鉴。

§2 基本概念及若干引理

定义 2.1 设 $\{X_k, k\geqslant 1\}$ 为 i.i.d.r.v.序列,服从连续分布 $F(x)$,称 X_j 为一个纪录值,当且仅当 $X_j > \max\{X_1, X_2, \cdots X_{j-1}\}$。

定义 2.2 约定 $X^{(1)} = X_1$,并令第 n 个纪录发生的时刻为 L_n,即 $L_1 = 1, L_n = \min\{j \mid X_j > X_{L_n - 1}\}$,其中 $n\geqslant 2$,则 $X^{(n)} = X_{L_n}(n\geqslant 1)$,并称 $\{X^{(k)}, k\geqslant 1\}$ 为 $\{X_k, k\geqslant 1\}$ 的纪录值序列。

本文称参数为 1 的指数分布为标准指数分布,记作 $E(1)$,并恒设 $\{Y_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d.的 $E(1)$r.v.序列,记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, n\geqslant 1$。此外恒设 $F(x)$ 为连续分布,且对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $F(x) < 1$(即 F 为无界支撑)。令 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$,并定义

$$R(x) = -\log\bar{F}(x) = \log\frac{1}{1 - F(x)}, x\in\mathbf{R}。$$

众所周知,$R(x)$就是可靠性理论中的积分风险函数(Integrated hazard function).易见$R(x)$是非负且非降的连续函数,因此可如下定义其反函数 $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) \triangleq R^{-1}(x) = \sup\{y \mid R(y)\leqslant x\},\ x\geqslant 0. \tag{2.1}$$

则显然

$$\Psi(u) \triangleq R^{-1}(u) = F^{-1}(1 - e^{-u}),\ u\geqslant 0. \tag{2.2}$$

下面先给出几个引理。

引理 2.1[2] 当 $F(x)$为 $E(1)$时,有

$$(X^{(n)}, n\geqslant 1) \stackrel{d}{=} (S_n, n\geqslant 1), \tag{2.3}$$

即 $(X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(n)}) \stackrel{d}{=} (S_1, S_2, \cdots, S_n), \forall n\in\mathbf{N}$,其中 $\stackrel{d}{=}$ 表示同分布。

引理 2.2[2] 若 r.v.X 服从连续分布 $F(x)$,则 $R(X)\sim E(1)$,即

$$P(R(X)\leqslant x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{若 } x\geqslant 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

由引理 2.2 及 $R(x)$的非降性易知,若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. $\sim F(x)$, $\{X^{(n)}, n\geqslant 1\}$ 为其纪录值序列,则 $\{R(X_n), n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. $\sim E(1)$,且 $\{R(X^{(n)}), n\geqslant 1\}$ 为其纪录值序列,从而由引理 2.1 可得

$$(R(X^{(n)}), n\geqslant 1) \stackrel{d}{=} (S_n, n\geqslant 1), \tag{2.5}$$

其中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$,而$(Y_k, k\geqslant 1)$ 为 i.i.d.的 $E(1)$r.v.序列,所以,由 $\Psi(x)$ 的定义知:

$$(X^{(n)}, n \geqslant 1) \overset{d}{=} (R^{-1}(S_n), n \geqslant 1) = (\Psi(S_n), n \geqslant 1). \tag{2.6}$$

现定义纪录值序列的部分和 T_n：$T_n = \sum_{k=1}^{n} X^{(k)}$. 对 $\Psi_x(u) = u$（即标准指数分布），$\Psi_x(u) = \log u$（即 Gumbel 分布）以及 $\Psi_{(x)}(u) = 1 - e^{-u/\gamma}$（即 Beta 分布），这三种分布下纪录值之和的渐近正态性[3] 中已经做过较详细的研究。

以下的 Strassen 的著名结果对于我们的研究十分重要：

引理 2.3[4]　设 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 为 i.i.d.的 r.v.序列，其中 $EZ_1 = 0$，$\mathrm{Var}Z_1 = 1$，令 $S_n' = \sum_{k=1}^{n} Z_k$，则对 $\forall \alpha \geqslant 1$，有

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} n^{-1-\alpha/2}(2\log\log n)^{-\alpha/2}\sum_{i=1}^{n} |S_i'|^{\alpha} = \frac{2(\alpha+2)^{\alpha/2-1}}{\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^{\alpha}}}\right)^{\alpha}\cdot \alpha^{\frac{\alpha}{2}}}\right\} = 1. \tag{2.7}$$

§ 3　主要结果及其证明

首先给出 $\tau = \frac{1}{2}$ 场合下的一个结果：

定理 3.1　设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 为 i.i.d. ~ $W_2(x)$ 的随机变量序列，其中 $W_2(x)$ 为参数 $\tau = \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ 的 Weibull 分布，并设 $\{X^{(k)}, k \geqslant 1\}$ 为 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 之纪录值序列，则 $T_n = \sum_{k=1}^{n} X^{(k)}$ 服从中心极限定理，即

$$\frac{T_n - ET_n}{\sqrt{\mathrm{Var}T_n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \tag{3.1}$$

其中 $N(0,1)$ 为标准正态分布，$\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛。

证　首先，由(2.2)式知 $\Psi_x(u) = F^{-1}(1 - e^{-u}) = \frac{1}{\lambda}\ln^2(1 - 1 + e^{-u}) = \frac{1}{\lambda}u^2$，

再利用(2.6)式，可得 $(X^{(n)}, n \geqslant 1) \overset{d}{=} (\Psi_x(S_n), n \geqslant 1) = (\frac{1}{\lambda}S_n^2, n \geqslant 1)$.

所以

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} X^{(k)} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} \Psi_x(S_k) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} S_k^2. \tag{3.2}$$

由上式可知，参数 λ 的值决定的只是 Weibull 分布纪录值的刻度，因而不失一般性可假定 $\lambda = 1$，此时有

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} X^{(k)} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} S_k^2.$$

注意，S_k 是 i.i.d.的 E(1) 随机变量序列的部分和，故易知

$$ET_n = \sum_{k=1}^{n} ES_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k)} = 2(C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{n+1}^2) = 2C_{n+2}^3. \tag{3.3}$$

下面求 T_n 之方差

$$\mathrm{Var}T_n = \mathrm{Var}T_{n-1} + \mathrm{Var}S_n^2 + 2\mathrm{Cov}(T_{n-1}, S_n^2), \tag{3.4}$$

分项计算之

$$\mathrm{Var}S_n^2 = ES_n^4 - (ES_n^2)^2 = \frac{\Gamma(n+4)}{\Gamma(n)} - \left(\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)}\right)^2 = 2(2n+3)(n+1)n, \tag{3.5}$$

$$\mathrm{Cov}(T_{n-1}, S_n^2) = ET_{n-1}S_n^2 - ET_{n-1}ES_n^2 \triangleq I_1 - I_2. \tag{3.6}$$

易得

$$I_2 = ET_{n-1}ES_n^2 = 2C_{n+1}^3 \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{3}(n+1)^2 n^2 (n-1). \tag{3.7}$$

由 S_n 的定义知 S_k 与 $S_n - S_k$ 独立,从而

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} ES_k^2 S_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} ES_k^2 [S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2] = \\ &\sum_{k=1}^{n-1} [ES_k^4 + 2ES_k^3 E(S_n - S_k) + ES_k^2 E(S_n - S_k)^2] = \\ &\sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\Gamma(k+4)}{\Gamma(k)} + 2\frac{\Gamma(k+3)}{\Gamma(k)}(n-k) + \frac{\Gamma(K+2)}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(n-k+2)}{\Gamma(n-k)}\right] = \\ &\frac{1}{3}(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1), \end{aligned} \tag{3.8}$$

把(3.7)与(3.8)代入(3.6),即可得

$$\mathrm{Cov}(T_{n-1}, S_n^2) = I_1 - I_2 = \frac{2}{3}(n+1)n(n-1)(2n+3).$$

再对(3.4)进行递归,得

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}T_n &= \sum_{k=2}^{n} (\mathrm{Var}T_k - \mathrm{Var}T_{k-1}) + \mathrm{Var}T_1 = \sum_{k=2}^{n} (2\mathrm{Cov}(T_{k-1}, S_k^2) + \mathrm{Var}S_{k-1}) + \mathrm{Var}S_1^2 = \\ &2\sum_{k=2}^{n} \mathrm{Cov}(T_{k-1}, S_k^2) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}S_k^2 = \\ &2\sum_{k=2}^{n} \frac{4}{3}(k+1)^2 k(k-1) + 2\sum_{k=1}^{n} (k+1)k(2k+3) = \frac{8}{15}n^5 + o(n^5), \end{aligned} \tag{3.9}$$

即 $\dfrac{\mathrm{Var}T_n}{8n^5/15} \to 1, n \to \infty$. 又易见

$$\frac{ET_n - n(n+1)(2n+1)/6}{\sqrt{n^5}} = \frac{2C_{n+2}^3 - n(n+1)(2n+1)/6}{\sqrt{n^5}} \to 0, \ n \to \infty,$$

所以,为证(3.1),只需证

$$\frac{T_n - n(n+1)(2n+1)/6}{\sqrt{8n^5/15}} \xrightarrow{d} N(0,1), \tag{3.10}$$

另一方面,

$$T_n \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} S_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (S_k - k + k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (S_k - k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k(S_k - k) + \sum_{k=1}^{n} k^2,$$

即

$$T_n - \sum_{k=1}^{n} k^2 = T_n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} (S_k - k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k(S_k - k).$$

所以，为证(3.10)，只需证

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(S_k - k)^2}{\sqrt{8n^5/15}} + \frac{2\sum_{k=1}^{n} k(S_k - k)}{\sqrt{8n^5/15}} \triangleq A_1 + A_2 \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{3.11}$$

在第一项 A_1 中令 $Z_i = Y_i - 1$，则 $EZ_i = 0$，$\mathrm{Var}Z_i = 1$，满足引理 2.3 条件，故知当 $\alpha = 2$ 时，有

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(S_i')^2}{2n^2 \log\log n} = \frac{1}{(\arcsin t)^2 |_0^1} = \frac{4}{\pi^2}\right\} = 1.$$

其中 $S_k' = \sum_{j=1}^{k} Z_j$。从而 $P\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(S_i')^2}{\sqrt{8n^5/15}} = 0\right\} = 1$. 即 $A_1 \to 0$ a.s，因而为证(3.11)只需证 $A_2 \xrightarrow{d} N(0,1)$。下面用特征函数逼近的方法证明之。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_{A_2}(t) &= \lim_{n\to\infty} E\exp\left(it\frac{2\sum_{k=1}^{n} k(S_k - k)}{\sqrt{8n^5/15}}\right) = \lim_{n\to\infty} E\exp\left(it\frac{2\sum_{k=1}^{n} k(S_k')}{\sqrt{8n^5/15}}\right) = \\
&\lim_{n\to\infty} E\exp\left(it\frac{\sum_{j=1}^{n}(n+j)(n-j+1)Z_j}{\sqrt{8n^5/15}}\right) = \lim_{n\to\infty} E\exp\left(it\frac{\sum_{j=1}^{n}(n^2 - j^2)Z_j}{\sqrt{8n^5/15}}\right) = \\
&\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} f_z\left(\frac{(n^2 - j^2)}{\sqrt{8n^5/15}}t\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} f_z\left(\left[1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]\sqrt{\frac{15}{8}}\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \\
&\lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log f_z^n\left(\left[1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]\sqrt{\frac{15}{8}}\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 为 i.i.d.r.v 序列，且其均值为 0，方差为 1，从而由经典的中心极限定理知，对任意的常数 $c > 0$，有

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant c} \left| f_z^n\left(\frac{tu}{\sqrt{n}}\right) - \exp\left(-\frac{t^2 u^2}{2}\right) \right| \to 0, \tag{3.13}$$

结合(3.12)，(3.13)，便知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_{A_2}(t) &= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log f_z^n\left(\left[1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]\sqrt{\frac{15}{8}}\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\} = \\
&\lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log\exp\left(-\left[1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]^2 t^2 \frac{15}{16}\right)\right\} = \\
&\lim_{n\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]^2 t^2 \frac{15}{16}\right\} = \\
&\exp\left\{-\frac{15}{16}t^2 \int_0^1 (1 - x^2)^2 \mathrm{d}x\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\},
\end{aligned}$$

得证。

对 $\tau=\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$ 的场合,我们给出的中心极限定理中的中心化常数和正则化常数是常规的,具有经典的形式,而对 $m\geqslant 3,m\in\mathbf{N}$,由于难以确切地算出 $\operatorname{Var}T_n$,因而本文采用阶的形式,给出如下的中心极限定理:

定理 3.2 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d.服从参数为 $\tau=m^{-1}$ 的 Weibull 分布,其中 $m\geqslant 3$, $m\in\mathbf{N}$,并令 $\{X^{(k)},k\geqslant 1\}$ 为 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 之纪录值序列,则 $T_n=\sum_{k=1}^{n}X^{(k)}$ 服从如下中心极限定理,即

$$\frac{T_n-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{m+1}n^{m+1}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}}\xrightarrow{d}N(0,1),\tag{3.14}$$

其中 $N(0,1)$ 为标准正态分布。

证 与定理 3.1 证明相同,不失一般性我们可假定 $\lambda=1$,即证明

$$\frac{T_n-\frac{1}{m+1}n^{m+1}}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

由(2.2)知,此时

$$\Psi_x(u)=W_m^{-1}(1-e^{-u})=u^m,$$

其中 $W_m(x)$ 是参数为 $\tau=\frac{1}{m}(m\geqslant 3,m\in\mathbf{N})$ 的 Weibull 分布,所以

$$(X^{(n)},n\geqslant 1)\overset{d}{=}(\Psi_x(S_n),n\geqslant 1)=(S_n^m,n\geqslant 1),\text{ 即 }T_n=\sum_{k=1}^{n}X^{(k)}\overset{d}{=}\sum_{k=1}^{n}S_k^m.$$

易得其均值为

$$ET_n=E\sum_{k=1}^{n}S_k^m=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)}=m!(C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{m+k-1}^m)=$$
$$m!C_{m+n}^{m+1}\sim\frac{1}{m+1}n^{m+1}.\ (\text{当 } n\to\infty \text{ 时})\tag{3.15}$$

另一方面,

$$T_n\overset{d}{=}\sum_{k=1}^{n}S_k^m=\sum_{k=1}^{n}(S_k-k+k)^m=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}C_m^j(S_k-k)^{m-j}k^j=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-2}C_m^j(S_k-k)^{m-j}k^j+\sum_{k=1}^{n}C_m^{m-1}(S_k-k)k^{m-1}+\sum_{k=1}^{n}C_m^mk^m=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-2}C_m^j(S_k-k)^{m-j}k^j+m\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}(S_k-k)+\sum_{k=1}^{n}k^m.\tag{3.16}$$

先讨论(3.16)最后两项,易得

$$\sum_{k=1}^{n}k^m\sim\frac{1}{m+1}n^{m+1},E\Big\{m\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}(S_k-k)\Big\}=m\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}E(S_k-k)=0,$$

$$\operatorname{Var}\Big\{m\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}(S_k-k)\Big\}=m^2\operatorname{Var}\Big\{\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}S_k\Big\}=m^2\operatorname{Var}\Big\{\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}\sum_{j=1}^{k}Y_j\Big\}=$$

$$m^2\mathrm{Var}\Big\{\sum_{j=1}^n Y_j\sum_{k=j}^n k^{m-1}\Big\} = m^2\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{k=j}^n k^{m-1}\Big)^2$$

$$\sim\Big(1-\frac{2}{m+1}+\frac{1}{2m+1}\Big)n^{2m+1} = \frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}. \tag{3.17}$$

于是

$$\frac{T_n-\frac{1}{m+1}n^{m+1}}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}} \overset{d}{=} \frac{\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{m-2}C_m^j(S_k-k)^{m-j}k^j}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}} + \frac{m\sum_{k=1}^n k^{m-1}(S_k-k)}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}} \triangleq A_1 + A_2. \tag{3.18}$$

下面证 $A_1\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，$A_2\xrightarrow{d}N(0,1)$. 对 A_1，有

$$A_1 = \frac{\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{m-2}C_m^j(S_k-k)^{m-j}k^j}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}} = \sum_{j=0}^{m-2}\frac{\sum_{k=1}^n C_m^j(S_k-k)^{m-j}k^j}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}} \triangleq A_{1.0}+A_{1.1}+\cdots+A_{1,m-2}, \tag{3.19}$$

其中 $A_{1,i} = \dfrac{\sum_{k=1}^n C_m^i(S_k-k)^{m-i}k^i}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}}$ $(i=0,1,2,\cdots,m-2)$。利用引理 2.3，在(2.7)中令 $\alpha = m-i$，即可得

$$P\Big\{\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{m+2-i}{2}}(2\log\log n)^{-\frac{m-i}{2}}\sum_{i=1}^n|S_i'|^{m-i} = \frac{2(m+2-i)^{\frac{m-i}{2}-1}}{\Big(\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^{m-i}}}\Big)^{m-i}(m-i)^{\frac{m-i}{2}}} \leqslant \frac{2(m+2-i)^{\frac{m-i}{2}-1}}{(m-i)^{\frac{m-i}{2}}} < \infty\Big\} = 1,$$

其中 $S_k' = \sum_{j=1}^k Z_j$，$Z_j = Y_j - 1$。从而

$$P\Big\{\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{m+3-i}{2}}\sum_{i=1}^n|S_i'|^{m-i} = 0\Big\} = 1. \tag{3.20}$$

对(3.19)中任意的 $A_{1,i}$，有 $i\leqslant m-2$，从而

$$P\left\{\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}|A_{1,i}| \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n C_m^i|S_k-k|^{m-i}k^i}{\sqrt{\frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}n^{2m+1}}} \leqslant C\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n|S_k'|^{m-i}n^i}{n^{m+1/2}} \leqslant \\ &C\limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{m+3-i}{2}}\sum_{k=1}^n|S_k'|^{m-i} = 0\end{aligned}\right\} = 1,$$

其中 C 为一常数，所以 $A_{1,i}\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，$i=0,1,2,\cdots,m-2$。又 m 为固定正整数，所以

$$A_1 = \sum_{i=0}^{m-2} A_{1,i} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \tag{3.21}$$

而对 A_2,采用与定理3.1类似的方法(即用特征函数逼近),可得

$$A_2 \xrightarrow{d} N(0,1), \tag{3.22}$$

故由(3.18)知,定理得证。

参考文献:

[1] Tata M N. On outstanding values in a sequence of random variables[J]. Z. Wahrsch. Verw. Geb., 1969, 12: 9~20.

[2] Lindgren G. Discrete wave-analysis of continuous stochastic processes[J]. Stochastic Process. Appl., 1973, 1: 83~105.

[3] Arnold B C, Villasenor J A. The Asymptotic distributions of sums of records[J]. Kluwer Academic Publishers, 1998, 1(3): 351~363.

[4] Strassen V. An invariance principle for the law of the iterated logarithm[J]. Z. Wahrsch. Verw. Geb., 1964, 3: 211~226.

[5] Marcus M and Pinsky M. On the domain of attraction of exp $\{-e^{-x}\}$ [J]. J. Math. Anal. Appl., 1969, 28: 440~449.

[6] Resnick S I. Limit laws for record values[J]. Stochastic Process. Appl., 1973, 1: 67~82.

CLT FOR SUMS OF RECORD VALUES OF SPECIAL WEIBULL DISTRIBUTION

SU Chun, TONG Tie-jun

(*Dept. of Statistics and Finance, Univ. of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: In this paper, the CLT for sums of record values of special Weibull distribution is established, in which parameter τ is some reciprocal of positive integer.

Key Words: Weibull Distribution; Record Value; CLT

Subject Classification: 60F05, 60F15