

# 第五节课习题

高翔

2019年11月

## 1 习题说明

- 第  $i$  节课习题所有材料打包在  $Li.zip$  中,  $\forall i = 1 \dots 8$ 。
- 习题分为若干种: **计算类**习题, 需要读者编程计算一个实际问题, 我们会附有参考答案以供自测。**操作类**习题, 会指导读者做一个具体的实验, 给出中间步骤截图或结果。**简述类**习题则提供阅读材料, 需要读者阅读材料后, 回答若干问题。
- 每个习题会有一些的分值。每次习题分值加和为 10 分。你需要获得 8 分以上才能得到“通过”的评价。带 \* 的习题为附加题, 会在总分之外再提供一定的分值, 所以总和可能超过 10 分。换句话说, 你也可以选择一道附加题, 跳过一道正常题。
- 每道习题的给分由助教评判, 简述类习题可能存在一定开放性, 所以评分也存在主观因素。
- 请利用深蓝学院系统提交习题。每次习题我们会记通过与否。提交形式为 word 或 pdf 格式报告, 如有编程习题请提交可编译的源码。
- 为方便读者, 我通常会准备一些阅读材料, 放在 books/或 papers/目录下。请读者按个人需求使用这些材料。它们多数是从网络下载的, 如果侵犯到你的权利, 请及时告诉我。
- 每个习题会标注大致用时, 但视同学个人水平可能会有出入。
- 习题的完成情况会影响你对本课程内容的掌握程度, 请认真、独立完成。习题总得分较高的同学将获得推荐资格。

## 2 ORB 特征点 (4 分, 约 2.5 小时)

ORB(Oriented FAST and BRIEF) 特征是 SLAM 中一种很常用的特征, 由于其二进制特性, 使得它可以非常快速地提取与计算 [1]。下面, 你将按照本题的指导, 自行书写 ORB 的提取、描述子的计算以及匹配的代码。代码框架参照 `computeORB.cpp` 文件, 图像见 `1.png` 文件和 `2.png`。

### 2.1 ORB 提取

ORB 即 Oriented FAST 简称。它实际上是 FAST 特征再加上一个旋转量。本习题将使用 OpenCV 自带的 FAST 提取算法, 但是你要完成旋转部分的计算。旋转的计算过程描述如下 [2]:

在一个小图像块中, 先计算质心。质心是指以图像块灰度值作为权重的中心。

1. 在一个小的图像块  $B$  中, 定义图像块的矩为:

$$m_{pq} = \sum_{x,y \in B} x^p y^q I(x,y), \quad p, q = \{0, 1\}.$$

2. 通过矩可以找到图像块的质心:

$$C = \left( \frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}} \right).$$

3. 连接图像块的几何中心  $O$  与质心  $C$ , 得到一个方向向量  $\overrightarrow{OC}$ , 于是特征点的方向可以定义为:

$$\theta = \arctan(m_{01}/m_{10}).$$

实际上只需计算  $m_{01}$  和  $m_{10}$  即可。习题中取图像块大小为  $16 \times 16$ , 即对于任意点  $(u, v)$ , 图像块从  $(u-8, v-8)$  取到  $(u+7, v+7)$  即可。请在习题的 `computeAngle` 中, 为所有特征点计算这个旋转角。

提示:

1. 由于要取图像  $16 \times 16$  块, 所以位于边缘处的点 (比如  $u < 8$  的) 对应的图像块可能会出界, 此时需要判断该点是否在边缘处, 并跳过这些点。
2. 由于矩的定义方式, 在画图特征点之后, 角度看起来总是指向图像中更亮的地方。
3. `std::atan` 和 `std::atan2` 会返回弧度制的旋转角, 但 OpenCV 中使用角度制, 如使用 `std::atan` 类函数, 请转换一下。

作为验证, 第一个图像的特征点如图 1 所示。看不清可以放大看。



图 1: 带有旋转的 FAST



图 2: 匹配图像

## 2.2 ORB 描述

ORB 描述即带旋转的 BRIEF 描述。所谓 BRIEF 描述是指一个 0-1 组成的字符串（可以取 256 位或 128 位），每一个 bit 表示一次像素间的比较。算法流程如下：

1. 给定图像  $I$  和关键点  $(u, v)$ ，以及该点的转角  $\theta$ 。以 256 位描述为例，那么最终描述子

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_{256}].$$

2. 对任意  $i = 1, \dots, 256$ ， $d_i$  的计算如下。取  $(u, v)$  附近任意两个点  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ，并按照  $\theta$  进行旋转：

$$\begin{bmatrix} u_p' \\ v_p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中  $u_p, v_p$  为  $\mathbf{p}$  的坐标，对  $\mathbf{q}$  亦然。记旋转后的  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  为  $\mathbf{p}', \mathbf{q}'$ ，那么比较  $I(\mathbf{p}')$  和  $I(\mathbf{q}')$ ，若前者大，记  $d_i = 0$ ，反之记  $d_i = 1$ <sup>1</sup>。

这样我们就得到了 ORB 的描述。我们在程序中用 256 个 bool 变量表达这个描述<sup>2</sup>。请你完成 `compute_ORBDesc` 函数，实现此处计算。注意，通常会固定  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  的取法（称为 ORB 的 pattern），否则每次都重新随机选取，会使得描述不稳定。我们在全局变量 `ORB_pattern` 中定义了  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  的取法，格式为  $u_p, v_p, u_q, v_q$ 。请你根据给定的 pattern 完成 ORB 描述的计算。

提示：

1.  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  同样要做边界检查，否则会跑出图像外。如果跑出图像外，就设这个描述子为空。
2. 调用 `cos` 和 `sin` 时同样请注意弧度和角度的转换。

## 2.3 暴力匹配

在提取描述之后，我们需要根据描述子进行匹配。暴力匹配是一种简单粗暴的匹配方法，在特征点不多时很有用。下面你将根据习题指导，书写暴力匹配算法。

所谓暴力匹配思路很简单。给定两组描述子  $\mathbf{P} = [p_1, \dots, p_M]$  和  $\mathbf{Q} = [q_1, \dots, q_N]$ 。那么，对  $\mathbf{P}$  中任意一个点，找到  $\mathbf{Q}$  中对应最小距离点，即算一次匹配。但是这样做会对每个特征点都找到一个匹配，所以我们通常还会限制一个距离阈值  $d_{max}$ ，即认作匹配的特征点距离不应该大于  $d_{max}$ 。下面请你根据上述描述，实现函数 `bfMatch`，返回给定特征点的匹配情况。实践中取  $d_{max} = 50$ 。

<sup>1</sup> 注意反过来记也可以，但是程序中要保持一致。

<sup>2</sup> 严格来说可以用 32 个 `uchar` 以节省空间，但是那样涉及到位运算，本习题只要求掌握算法。

提示：

1. 你需要按位计算两个描述子之间的汉明距离。
2. OpenCV 的 DMatch 结构，queryIdx 为第一图的特征 ID，trainIdx 为第二个图的特征 ID。
3. 作为验证，匹配之后输出图像应如图 2 所示。

最后，请结合实验，回答下面几个问题：

1. 为什么说 ORB 是一种二进制特征？
2. 为什么在匹配时使用 50 作为阈值，取更大或更小值会怎么样？
3. 暴力匹配在你的机器上表现如何？你能想到什么减少计算量的匹配方法吗？

### 3 从 $\mathbf{E}$ 恢复 $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ (3 分, 约 1 小时)

我们在书中讲到了单目对极几何部分, 可以通过本质矩阵  $\mathbf{E}$ , 得到旋转和平移  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ , 但那时直接使用了 OpenCV 提供的函数。本题中, 请你根据数学原理, 完成从  $\mathbf{E}$  到  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$  的计算。程序框架见 code/E2Rt.cpp.

设 Essential 矩阵  $\mathbf{E}$  的取值为 (与书上实验数值相同):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -0.0203618550523477 & -0.4007110038118445 & -0.03324074249824097 \\ 0.3939270778216369 & -0.03506401846698079 & 0.5857110303721015 \\ -0.006788487241438284 & -0.5815434272915686 & -0.01438258684486258 \end{bmatrix}$$

. 请计算对应的  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ , 流程如下:

1. 对  $\mathbf{E}$  作 SVD 分解:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T.$$

2. 处理  $\mathbf{\Sigma}$  的奇异值。设  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  且  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , 那么处理后的  $\mathbf{\Sigma}$  为:

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, 0\right). \quad (2)$$

3. 共存在四个可能的解:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^\wedge &= \mathbf{U}\mathbf{R}_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T, & \mathbf{R}_1 &= \mathbf{U}\mathbf{R}_Z^T\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{V}^T \\ \mathbf{t}_2^\wedge &= \mathbf{U}\mathbf{R}_Z\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T, & \mathbf{R}_2 &= \mathbf{U}\mathbf{R}_Z^T\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{V}^T. \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{R}_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)$  表示沿  $Z$  轴旋转 90 度得到的旋转矩阵。同时, 由于  $-\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}$  等价, 所以对任意一个  $\mathbf{t}$  或  $\mathbf{R}$  取负号, 也会得到同样的结果。因此, 从  $\mathbf{E}$  分解到  $\mathbf{t}, \mathbf{R}$  时, 一共存在四个可能的解。请打印这四个可能的  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ 。

提示: 用 AngleAxis 或 Sophus::SO3 计算  $\mathbf{R}_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 。

注: 实际当中, 可以利用深度值判断哪个解是真正的解, 不过本题不作要求, 只需打印四个可能的解即可。同时, 你也可以验证  $\mathbf{t}^\wedge \mathbf{R}$  应该与  $\mathbf{E}$  只差一个乘法因子, 并且与书上的实验结果亦只差一个乘法因子。

## 4 用 G-N 实现 Bundle Adjustment 中的位姿估计 (3 分, 约 2 小时)

Bundle Adjustment 并不神秘, 它仅是一个目标函数为重投影误差的最小二乘。我们演示了 Bundle Adjustment 可以由 Ceres 和 g2o 实现, 并可用于 PnP 当中的位姿估计。本题, 你需要自己书写一个高斯牛顿法, 实现用 Bundle Adjustment 优化位姿的功能, 求出相机位姿。严格来说, 这是 Bundle Adjustment 的一部分, 因为我们仅考虑了位姿, 没有考虑点的更新。完整的 BA 需要用到矩阵的稀疏性, 我们留到第七节课介绍。

假设一组点的 3D 坐标为  $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_i\}$ , 它们在相机中的坐标为  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_i\}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ 。在文件 p3d.txt 和 p2d.txt 中给出了这两组点的值。同时, 设待估计的位姿为  $\mathbf{T} \in \text{SE}(3)$ , 内参矩阵为:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 520.9 & 0 & 325.1 \\ 0 & 521.0 & 249.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

请你根据上述条件, 用 G-N 法求出最优位姿, 初始估计为  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ 。程序 GN-BA.cpp 文件提供了大致的框架, 请填写剩下的内容。

在书写程序过程中, 回答下列问题:

1. 如何定义重投影误差?
2. 该误差关于自变量的雅可比矩阵是什么?
3. 解出更新量之后, 如何更新至之前的估计上?

作为验证, 最后估计得到的位姿应该接近:

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 0.9978 & -0.0517 & 0.0399 & -0.1272 \\ 0.0506 & 0.9983 & 0.0274 & -0.007 \\ -0.0412 & -0.0253 & 0.9977 & 0.0617 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这和书中使用 g2o 优化的结果很接近<sup>3</sup>。

---

<sup>3</sup> 但是书中由于代码中错误地设置了 depth scale (应该为 5000, 实际输入了 1000), 所以应该说和修正后结果相近。

## 5 \* 用 ICP 实现轨迹对齐 (2 分, 约 2 小时)

在实际当中, 我们经常需要比较两条轨迹之间的误差。第三节课习题中, 你已经完成了两条轨迹之间的 RMSE 误差计算。但是, 由于 ground-truth 轨迹与相机轨迹很可能不在一个参考系中, 它们得到的轨迹并不能直接比较。这时, 我们可以用 ICP 来计算两条轨迹之间的相对旋转与平移, 从而估计出两个参考系之间的差异。



图 3: vicon 运动捕捉系统, 部署于场地中的多个红外相机会捕捉目标球的运动轨迹, 实现快速定位。

设真实轨迹为  $\mathbf{T}_g$ , 估计轨迹为  $\mathbf{T}_e$ , 二者皆以  $\mathbf{T}_{WC}$  格式存储。但是真实轨迹的坐标原点定义于外部某参考系中 (取决于真实轨迹的采集方式, 如 Vicon 系统可能以某摄像头中心为参考系, 见图 3), 而估计轨迹则以相机出发点为参考系 (在视觉 SLAM 中很常见)。由于这个原因, 理论上的真实轨迹点与估计轨迹点应满足:

$$\mathbf{T}_{g,i} = \mathbf{T}_{ge} \mathbf{T}_{e,i} \quad (4)$$

其中  $i$  表示轨迹中的第  $i$  条记录,  $\mathbf{T}_{ge} \in \text{SE}(3)$  为两个坐标系之间的变换矩阵, 该矩阵在整条轨迹中保持不变。 $\mathbf{T}_{ge}$  可以通过两条轨迹数据估计得到, 但方法可能有若干种:

1. 认为初始化时两个坐标系的差异就是  $\mathbf{T}_{ge}$ , 即:

$$\mathbf{T}_{ge} = \mathbf{T}_{g,1} \mathbf{T}_{e,1}^{-1}. \quad (5)$$

2. 在整条轨迹上利用最小二乘计算  $\mathbf{T}_{ge}$ :

$$\mathbf{T}_{ge} = \arg \min_{\mathbf{T}_{ge}} \sum_{i=1}^n \left\| \log (\mathbf{T}_{gi}^{-1} \mathbf{T}_{ge} \mathbf{T}_{e,i})^\vee \right\|_2. \quad (6)$$

3. 把两条轨迹的平移部分看作点集, 然后求点集之间的 ICP, 得到两组点之间的变换。

其中第三种也是实践中用的最广的一种。现在请你书写 ICP 程序, 估计两条轨迹之间的差异。轨迹文件在 compare.txt 文件中, 格式为:

$$\text{time}_e, \mathbf{t}_e, \mathbf{q}_e, \text{time}_g, \mathbf{t}_g, \mathbf{q}_g,$$

其中  $\mathbf{t}$  表示平移,  $\mathbf{q}$  表示单位四元数。请计算两条轨迹之间的变换, 然后将它们统一到一个参考系, 并画在 pangolin 中。轨迹的格式与先前相同, 即以时间, 平移, 旋转四元数方式存储。

本题不提供代码框架, 你可以利用之前的作业完成本题。图 4 显示了对准前与对准后的两条轨迹。



图 4: 轨迹对准前与对准后

## Bibliography

- [1] E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, and G. Bradski, “Orb: an efficient alternative to sift or surf,” in *2011 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 2564–2571, IEEE, 2011.
- [2] P. L. Rosin, “Measuring corner properties,” *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 73, no. 2, pp. 291–307, 1999.