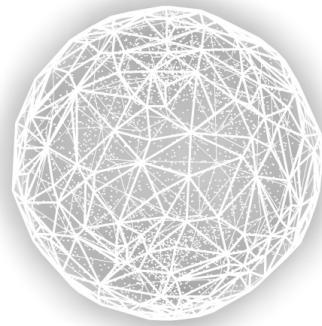


# Couverture optimale d'une sphère

TIEN T. NGUYEN, MAXIME FERBUS

2021-2022



## Introduction

Considérons  $n$  points  $a_1, \dots, a_n$  placés sur le cercle unité. Pour les répartir le plus régulièrement possible, il faut et il suffit que chacun d'entre eux soit séparé de ses deux voisins d'une distance de  $\frac{2\pi}{n}$ . La question de la répartition optimale de  $n$  points sur une sphère (également connue sous le nom de « problème de Fejes Tóth », « problème du dictateur » ou « problème de Tammes »), est une transposition de ce problème à la dimension supérieure. Sa difficulté tient en partie aux nombreuses interprétations possibles des termes de l'énoncé, ainsi qu'à la variété des techniques mathématiques en jeu (analyse, algorithmique, algèbre, combinatoire...). Malgré la lenteur des progrès de la recherche, le cas général n'a jamais cessé d'être étudié, tant pour son intérêt mathématique intrinsèque que pour le grand nombre d'applications dont il est susceptible : étude de la répartition des doublets d'électrons autour d'un atome, couverture de la terre par  $n$  satellites, fabrication d'une balle de golf réglementaire...

Mais qu'entendre au juste par « répartition optimale » ? C'est tout l'enjeu du problème, dans la mesure où c'est le sens que l'on donne à ces termes qui détermine les méthodes employées à sa résolution. Pour autant, si certaines de ces méthodes permettent d'obtenir

une solution exacte pour un nombre restreint de points, aucune d'entre elles n'est, à l'heure actuelle, transposable au cas général.

Dans ce rapport, nous commencerons par explorer les différentes manières de définir l'optimisation dans le cas qui nous occupe, ainsi que les méthodes de résolution associées ; puis nous exposerons les difficultés que nous avons rencontrées au cours de notre travail. Pour finir, nous proposons une modélisation, sur JupyterHub, des solutions exactes obtenues par la méthode du recouvrement (*covering*), que nous analysons d'après différents critères afin de déterminer si ces solutions sont optimales « à tous points de vue ».

## 1 Présentation générale du problème et des méthodes de résolution

Commençons par définir un repère et une distance sur la sphère.

### 1.0.1 Quel système de coordonnées...

Comme on travaille sur les points d'une sphère, le choix d'un système de coordonnées sphériques est le plus naturel. Faisons ici le choix de la convention géographique, où un point est repéré par sa longitude et sa latitude.

Commençons par définir une origine  $O$  et un repère orthonormé direct  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ . Nous identifions un point  $M$  de l'espace au triplet  $(\rho, \theta, \delta)$ , où

- ◊  $\rho$  est la distance entre le point  $M$  et l'origine ;
- ◊  $\theta$  est la longitude, c'est-à-dire l'angle entre  $\vec{x}$  et la projection de  $\overrightarrow{OM}$  sur le plan équatorial ( $-\pi \leq \theta < \pi$ ) ;
- ◊  $\delta$  est la latitude, c'est-à-dire l'angle entre  $\overrightarrow{OM}$  et sa projection sur le plan équatorial ( $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ ).

Dans le cas qui nous occupe, le rayon est constant. On peut, sans perte de généralité, le supposer égal à 1 et identifier un point de la sphère au couple  $(\theta, \delta)$ , tout comme, sur un cercle de rayon 1 préalablement muni d'un pôle et d'un sens de parcours, on peut identifier un point à l'angle correspondant dans la base polaire.

### 1.0.2 Pour quelle distance ?

Pour mesurer la régularité d'une répartition, il faut déjà disposer d'une distance, c'est-à-dire d'une fonction qui associe un réel positif aux coordonnées de deux points. Sur la droite numérique, on dispose de la distance naturelle fournie par la valeur absolue : la distance  $d$  entre deux points d'abscisses respectives  $x_a$  et  $x_b$  vaut  $d(x_a, x_b) = |x_b - x_a|$ . Dans l'espace euclidien à deux dimensions, on dispose, pour mesurer la distance entre points  $A(x_a, y_a)$  et  $B(x_b, y_b)$ , d'un corollaire du théorème de Pythagore :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2},$$

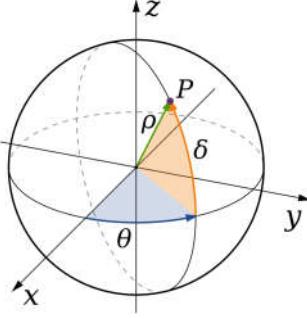


FIGURE 1 – Repérage d'un point en coordonnées sphériques (convention géographique).  
Source : Wikipédia.

qui se généralise en dimension  $n$ . Cette distance est *a priori* inutilisable sur la sphère, puisqu'elle ne mesure que des lignes droites, tandis que celles qui joignent deux points sur une sphère sont courbes.

La plus courte distance entre deux points sur une sphère se nomme *distance orthodromique*. Si l'on se place sur une sphère de rayon 1, la distance entre deux points  $A$  et  $A'$ , de latitudes respectives  $\delta$  et  $\delta'$  et de longitudes respectives  $\theta$  et  $\theta'$  vaut (formule de haversine) :

$$d(A, A') = 2 \arcsin \left( \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right) + \cos \delta \cdot \cos \delta' \cdot \sin^2 \left( \frac{\theta' - \theta}{2} \right)} \right),$$

ou encore, en réécrivant la formule à l'aide du sinus verse, défini par translation du cosinus :

$$\text{versin}(\theta) = 1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right),$$

$$\text{versin } d(A, A') = \text{versin}(\delta' - \delta) + \cos(\delta) \cos(\delta') \text{versin}(\theta' - \theta).$$

## 1.1 Répartitions optimales et méthodes de résolution

Au cours de nos recherches, nous avons identifié deux méthodes majeures de résolutions : le covering (et sa variante, le packing) et la minimisation de l'énergie potentielle. Nous avons également identifié d'autres méthodes, sur lesquelles nous avons trouvé moins de littérature.

### 1.1.1 Recouvrement (*covering*) et enveloppement (*packing*)

Ces deux méthodes consistent à placer des cercles de même rayon sur une sphère, mais elles ne cherchent pas à optimiser la même chose. Dans le cas du covering, on cherche à minimiser la distance maximale  $d_{max}$  entre chaque point et son voisin le plus proche ( $d$

est appelé rayon de couverture, ou covering radius en anglais). Dans le cas du packing, on cherche à maximiser la distance minimale  $d_{min}$  entre chaque point et son voisin le plus proche. La méthode du covering est la seule méthode pour laquelle il existe des solutions exactes. C'est en 1943 que Fejes Tóth a proposé l'inégalité suivante :

$$d \leq \sqrt{4 - \csc^2\left(\frac{\pi n}{6(n-2)}\right)}.$$

En passant à la limite pour  $n = 2, 3, 4, 6, 8$  et  $12$ , on aboutit aux solutions exactes suivantes<sup>1</sup> :

- 2 points sont placés de manière diamétralement opposée ;
- 3 points sont disposés de manière à former un triangle équilatéral sur un cercle de diamètre maximal ;
- 4 points forment un tétraèdre régulier ;
- 6 points, un octaèdre régulier ;
- 8 points, un anti-prisme carré (et non pas un cube !) ;
- et 12 points, un icosaèdre, qui est formé de 20 triangles équilatéraux.

Pour ces 6 valeurs de  $N$ , les solutions selon les méthodes de l'enveloppement et de l'enveloppe convexe semblent être les mêmes.

On remarque la similitude des résultats avec le modèle VESPR utilisé en chimie pour déterminer la géométrie autour d'un atome. Dans le modèle VESPR, le nombre  $N$  est le nombre de doublets d'électrons entourant l'atome central (qu'ils soient liants ou non). La disposition des doublets autour de l'atome est le résultat de la répulsion électrostatique des électrons entre eux : ils se positionnent de la manière la plus stable, c'est-à-dire de sorte à minimiser leur interaction, donc le plus loin possible les uns des autres. Ce lien entre le problème mathématique de Fejes Tóth et son application atomique est d'ailleurs à l'origine de la méthode la plus récente : celle de la minimisation de l'énergie (voir ci-dessous).

### 1.1.2 Généralisation pour $N$ élevé

Cette méthode, à l'instar des autres, ne permet pas de déduire une solution pour  $N$  points. Cependant, il a été montré que, pour  $N$  grand, les points ont tendance à s'agencer selon des hexagones, à l'exception de 12 d'entre eux qui s'agencent selon des pentagones ! Par exemple, pour un ballon de football ( $N = 32$ ), on a 20 hexagones et 12 pentagones. Ceci est dû au passage du plan à la sphère (dans le plan, l'hexagone permet de résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation). C'est ce qu'expliquent Saff et Kuijlaars dans leur article *Distributing many points on a sphere*.

À partir des travaux de Habicht et Van Der Waerden, qui ont prouvé que la plus grande

---

1. voir modélisation en troisième partie

valeur de la distance minimale entre deux points (packing) respecte l'encadrement suivant :

$$\left(\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} N^{-1/2} - CN^{-2/3} \leq d_N \leq \left(\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} N^{-1/2},$$

Saaf et Kuijlaars déduisent que chaque cellule (partition de la sphère unité qui contient 1 point) est de forme hexagonale et a pour aire  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , d'où (pour avoir une aire totale de la sphère correcte), une approximation de la “meilleure” distance minimale entre 2 points :

$$\delta_N = \left(\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} N^{-1/2}.$$

## 1.2 Minimisation de l'énergie potentielle

Le problème de Thomson consiste en la recherche de l'équilibre le plus stable pour  $N$  électrons en considérant que ceux-ci sont forcés de se déplacer le long d'une sphère et qu'ils se repoussent selon une loi inverse carrée. La méthode de minimisation de l'énergie potentielle répond à ce problème de Thomson, mais permet également d'approcher une solution pour le problème mathématique de la répartition optimale de  $N$  points sur une sphère. C'est la plus récente et, contrairement au covering et au packing, il s'agit d'une méthode empirique : on obtient une solution approchée (vs. exacte) par itération (vs. *a priori*). Cette méthode consiste à modéliser une force d'interaction entre les points deux à deux (un ressort, par exemple). Il s'agit ensuite de minimiser l'énergie potentielle résultant de l'ensemble de ces forces. Lorsque la force modélisée est la force de Coulomb (force électrostatique), cela revient peu ou prou à modéliser l'agencement des électrons autour des atomes. Saff et Kuijlaars expliquent cette méthode en 1997 : dans leur article, ils cherchent à généraliser le critère de la minimisation de l'énergie lorsque  $N$  tend vers l'infini. L'énergie potentielle à minimiser peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_{1 \leq j < k \leq N} |x_j - x_k|^{-s}.$$

On peut ainsi s'intéresser à différents types d'énergie :

- Si  $s = 1$ , il s'agit de l'énergie potentielle associée à la force de Coulomb
- Si  $s = 0$ , il s'agit en quelque sorte de l'énergie logarithmique.
- Si  $s$  tend vers  $+\infty$ , cela conduit finalement à se ramener à la méthode du packing.

En travaillant avec un grand nombre de points ( $N =$ quelques milliers), ils ont rencontré une difficulté majeure : cette fonction d'énergie potentielle semble avoir de nombreux minima locaux, mais pas de minimum global clair, car la plupart des minima sont très proches en énergie. La méthode qu'ils utilisent pour identifier le minimum est de définir une asymptote à cette énergie, qui est l'énergie minimale (donc optimale au sens physique).

Intéressons-nous au cas où  $s = 1$ , car il modélise des lois physiques que nous réussissons à apprêhender, et également parce que c'est le cas qui a été résolu en premier par les auteurs. Pour  $s = 1$ , les chercheurs ont montré que l'énergie minimale vaut :

$$E_{min} = \frac{N^2}{2} - R(N)$$

et que  $R(N)$  est environ égal à  $0.55305N^{3/2}$ . En ce qui concerne les autres valeurs de  $s$ , l'énergie optimale s'obtient à partir d'une intégrale généralisée dont toute la difficulté est de déterminer si elle converge et, le cas échéant, vers quelle valeur.

### 1.3 L'enveloppe convexe

On peut également employer la méthode de l'enveloppe convexe, qui consiste à former un solide à  $N$  sommets et à maximiser son volume. On peut également minimiser le produit des distances entre les points pris deux à deux :

$$\prod_{1 \leq j < k \leq N} x_j - x_k,$$

ce que Saff et Kujilaars appellent "minimiser l'énergie logarithmique".

## 2 Quelques considérations mathématiques

Essayons de déterminer, par des arguments élémentaires, la raison pour laquelle il est si difficile de passer du cercle à la sphère. Un cercle est une surface de dimension 1 plongée dans l'espace à deux dimensions, si bien que la notion de voisinage de deux points sur ce dernier est rigoureusement identique à celle de voisinage sur une droite : un point admet au plus un voisin à droite et un voisin à gauche (une fois défini un sens de parcours), et ces voisins sont uniques. Dans le cas d'une sphère, qui est une surface à deux dimensions plongée dans un espace à trois dimensions, la question du voisinage est cette fois-ci analogue à celle qui a cours dans le plan : si l'on dispose cinq points dans le plan et qu'on en choisit un, qui seront ses voisins : le point le plus proche à l'exclusion des autres, ou chacun des quatre autres points ?

### 2.1 Mesure de la régularité de répartition des distances

La difficulté du problème tient à deux paramètres : la mesure de la régularité des distances et l'expression de ces distances sur une surface courbe, qui entraîne des calculs fastidieux.

On dira que des points sont régulièrement répartis sur une surface si la distance de chacun de ses points à ses voisins est constante. Pour une surface de dimension 1, la question

du voisinage ne pose pas de difficulté particulière : on peut répartir uniformément  $n$  points sur un segment de longueur  $l$  en plaçant deux de ces points à chacune des extrémités et en adoptant un pas régulier de  $\frac{l}{n-1}$ . De même, sur un cercle de centre  $O$  dont on aura fixé le rayon à 1, la distance séparant deux points  $A$  et  $B$  sera égale à  $|\angle AOB|$ , de sorte que  $n$  points pourront être espacés d'une distance de  $\frac{2\pi}{n}$ .

Dans le plan, en revanche, les difficultés apparaissent. Intuitivement, la configuration optimale pour trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  est donnée par un triangle équilatéral. On comprend que si l'on dispose d'un système de coordonnées, cette solution n'est pas uniquement déterminée *a priori* : même en fixant l'un de ses points, on obtient une infinité de solutions par rotations, symétries, similitudes et homothéties. En d'autres termes, dans un premier temps, la distance optimale n'intervient pas explicitement, et la solution du problème est essentiellement donnée par la condition  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{2\pi}{3}$ . On relève deux différences fondamentales avec les cas de la droite et du cercle :

- ◊ Nous n'avons pas commencé par borner une région de l'espace ; sur le segment et le cercle, on travaillait en réalité sur des ensembles bornés, c'est-à-dire des ensembles dont les points pouvaient entrer en bijection avec des parties bornées de  $\mathbb{R}$  ;
- ◊ Nous n'avons pas pu transposer de manière satisfaisante la notion de voisinage sur un segment au plan.

Développons le second point pour proposer une solution. Sur une droite, un point n'a, selon notre définition, que deux voisins au plus ; nous comprenons donc que d'après notre définition, un point (marqué) n'est voisin d'un autre que s'il existe une droite les reliant sans passer par un autre point marqué. C'est l'impossibilité de définir autrement le voisinage qui rend si difficile, de prime abord, la question du plan.

Ici, c'est l'exigence de régularité qui nous permet d'éviter en partie la difficulté. Si la répartition des points dans le plan est optimale, cela signifie que chaque point est à égale distance de ses voisins (quoi que ce mot signifie pour l'instant). En d'autres termes, il existe un cercle de rayon  $d$  (la distance optimale) passant par tous les voisins de chacun des points. Par cet argument heuristique, nous pouvons définir le voisinage dans le problème qui nous occupe : le voisinage d'un point  $P$  est le cercle de rayon  $d$  et de centre  $P$ .

Cette définition nous permet d'expliquer pourquoi il est impossible de disposer quatre points dans le plan de manière optimale (on pourra les disposer en carré pour obtenir une répartition régulière, mais elle ne le sera que si l'on considère les quatre paires de sommets voisins : la distance séparant les sommets opposés sera toujours proportionnelle d'un facteur  $\sqrt{2}$  à cette dernière, mais il faut bien la considérer, puisqu'il existe une droite de l'espace joignant deux sommets opposés sans passer par un autre point).

Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  quatre points répartis de manière optimale,  $A$ ,  $B$  et  $C$  n'étant pas alignés. D'après ce qui précède, il existe un cercle  $\mathcal{C}_A$  de centre  $A$  et de rayon  $d$  qui contient  $B$ ,  $C$  et  $D$  ; mais il existe également un cercle  $\mathcal{C}_B$  de centre  $B$  et de rayon  $d$  qui contient  $A$ ,  $C$  et  $D$  et un cercle  $\mathcal{C}_C$  qui contient  $A$ ,  $B$  et  $D$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{C}_D$  ne peut exister.  $A$ ,  $B$  et  $C$  n'étant pas alignés, il est licite d'identifier  $\mathcal{C}_D$ , s'il existe, au cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , qui est unique. Mais dans ce cas,  $D$ , qui est le point de

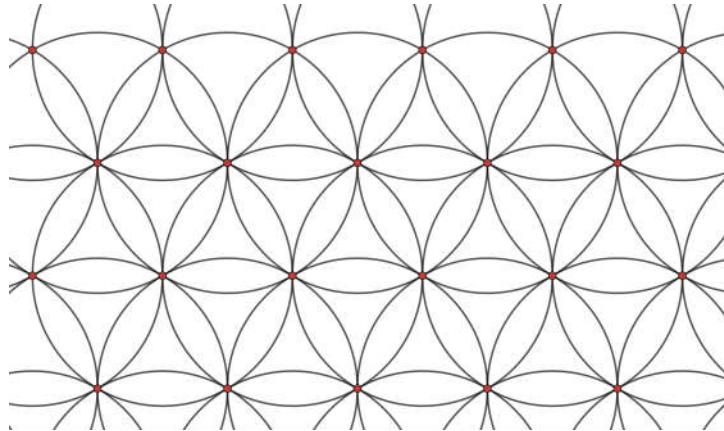


FIGURE 2 – Disposés en triangles équilatéraux, les points rouges forment une configuration optimale : les intersections des cercles de rayon  $d$  ayant ces points pour centres sont précisément les points rouges. (figure réalisée sous Geogebra).

concours des côtés des médiatrices de  $ABC$ , ne peut être distant de  $d$  de chacun des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , sans quoi le triangle serait dégénéré, ce qui est contraire à nos hypothèses.

De ce qui précède, nous comprenons qu'il est impossible de trouver une répartition optimale pour plus de trois points, au sens où chaque point ne peut être disposé à une distance optimale de *tous* les autres. En réalité, nous avons entrevu un résultat plus intéressant : si le nombre de points considéré est supérieur à trois, un point ne peut être voisin de tous les autres.

Ce critère d'appartenance des points à des cercles a ceci d'intéressant, qu'elle permet de séparer un pavage optimal du plan (en triangles équilatéraux) d'un pavage non optimal (en carrés). En effet (nous ne sommes pas en mesure de démontrer cette conjecture), *n points sont répartis de manière optimale si et seulement si l'on peut faire glisser le cercle de rayon d dont un point est le centre pour lui donner tout autre point pour centre, de sorte que les intersections deux à deux de tous les cercles ainsi obtenus soient encore dans l'ensemble des points de départ*<sup>2</sup>.

### 3 Modélisation

Nous présentons ici le résultat de notre travail de modélisation sur Python.

Dans la première partie, nous avons évoqué plusieurs critères d'optimisation puis. Nous

---

2. Nous nommerons "maillage circulaire" l'opération qui consiste à former de tels cercles de rayon  $d$  à partir d'un ensemble de points (voir sur les figures).

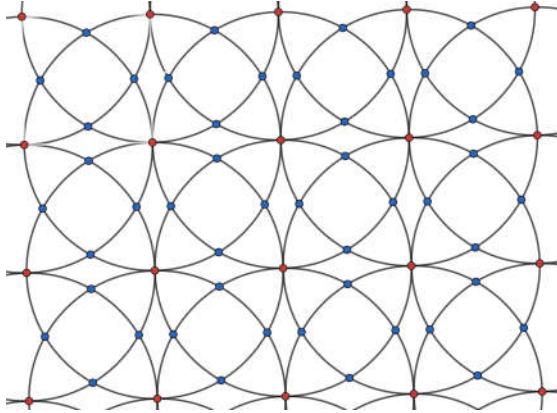


FIGURE 3 – Disposés en carrés, les points rouges ne forment plus une configuration optimale : la construction des cercles de rayon  $d$  entraîne l'apparition des points bleus, qui n'étaient pas dans l'ensemble de départ (figure réalisée sous Geogebra).

modélisons ici le placement des points selon l'un d'entre eux (covering, car les solutions exactes sont connues). Nous avons souhaité analyser ces solutions au vu des différents critères d'optimisation : les solutions exactes issues de la méthode du covering sont-elles optimales “à tous points de vue” ? Pour cela, nous nous sommes basés sur deux critères issus de la littérature. Pour la méthode du packing : nous avons comparé la valeur de la distance minimale entre 2 points (moyenne) avec la valeur théorique de cette distance maximisée, donnée par la formule indiquée par Saaf et Kuijlaars dans *Distributing many points on a sphere* :  $d_{opt} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} N^{-1/2}$ . Pour la méthode de la minimisation de l'énergie, nous avons comparé notre calcul de l'énergie potentielle de Coulomb (somme de l'inverse des distances cartésiennes entre les points deux à deux) avec la valeur théorique pressentie (mais non prouvée à l'époque) par les mêmes auteurs :  $E_{opt} = \frac{N^2}{2} - 0.55305N^{3/2}$ . Nous n'avons pas pu prendre de formule plus précise, car les travaux qui ont succédé étaient clairement hors de notre portée de compréhension.

Nos résultats figurent dans le tableau de la page suivante.

Que pouvons-nous conclure de ces résultats ?

- Concernant le taux de couverture de la surface de la sphère : nous nous attendions à ce qu'il augmente avec  $N$ , mais nous constatons que ce n'est pas nécessairement le cas.
- Concernant la maximisation de la distance minimale :
- Rapport à la valeur théorique : nous voyons que dans certains cas, nous avons obtenu une valeur plus grande que le maximum théorique, ce qui est logiquement impossible.

N	Taux de couverture / surface	Maximisation de la distance minimale entre 2 points	Minimisation de l'énergie potentielle de coulomb
Commentaire	Notre critère initial Rapport en %	Critère : $d(opti)=\sqrt{8\pi/\sqrt{3}} \cdot N^{-1/2}$ Rapport en écart relatif	Critère : $E(opti)=((N^2)/2)-0.55305*(N^{1.5})$ Rapport en écart relatif
2	100,00%	16,63%	Non applicable
3	75,00%	-4,77%	6,51%
4	84,51%	0,30%	2,76%
6	87,87%	1,01%	1,15%
8 / cube	73,40%	-8,60%	1,31%
8 / anti prisme carré	82,36%	-2,99%	1,31%
12	89,61%	0,68%	0,32%

FIGURE 4 – Tableau des résultats obtenus à partir des formules.

- Évolution avec N : de manière analogue avec le taux de couverture, nous nous attendions à ce que l'écart relatif avec la valeur théorique se réduise avec N, mais ce n'est pas le cas.
- Concernant la minimisation de l'énergie : nous voyons que plus N est grand, plus l'énergie potentielle calculée à partir des solutions covering s'approche de l'asymptote de l'énergie potentielle de Coulomb optimale.
- Comparaison du cube et de l'anti-prisme carré : si la méthode du packing indique clairement une meilleure optimisation avec l'anti-prisme carré, nous voyons que ceci n'est pas du tout évident pour l'optimisation selon l'énergie potentielle.

Ainsi, pour répondre à la question que nous nous posons : au vu de la comparaison entre cube et anti-prisme carré, sous réserve d'erreurs de calculs et d'utilisation de formules théoriques qui ne seraient plus à jour (mais elles avaient le mérite de nous être accessibles), nous constatons que les méthodes n'indiquent pas nécessairement le même positionnement optimal. La méthode de minimisation de l'énergie potentielle semble plus adaptée pour un N élevé.

### 3.1 Réalisation d'un outil de modélisation

Nous avons voulu débuter la réalisation d'un outil visant à la modélisation informatique du problème de la couverture de la sphère, en nous aidant des TP faits durant les étapes préparatoires de l'ARE. Pour cela nous avons utilisé l'environnement de développement

Jupyter Hub et les librairies Python auxquelles nous avons fait appel sont :

- Numpy : pour disposer des outils mathématiques nécessaires (cosinus, sinus, calcul de la moyenne, calcul de l'écart type...);
- Matplotlib : pour nous permettre d'afficher en 3 dimensions des objets (sphères et points)

### 3.2 Fonctionnalités de l'outil de modélisation

Les coordonnées de chacun des  $N$  points à positionner sur la sphère sont à entrer en paramètres. Ensuite, l'outil est capable d'afficher en 3 dimensions la sphère avec  $N$  points à sa surface, et de faire les mesures et les calculs suivants :

- Calculer la moyenne de la distance d'un point à son point le plus proche
- Calculer l'écart type de la distance d'un point à son point le plus proche
- Calculer un « taux de couverture » de la sphère (vois explications ci-dessous) A noter :
- Nous avons privilégié les coordonnées géographiques pour adresser les points sur la sphère, à savoir un couple (Latitude/Longitude) où les angles sont exprimés en degrés.
- Pour évaluer la distance entre 2 points, nous avons parfois fait appel à l'angle entre les 2 points, et parfois à la distance sur la surface de la sphère entre les 2 points. En réalité c'est la même information qui est exprimée de 2 manières différentes. D'autant qu'avec un rayon de la sphère égal à 1, la distance entre 2 points est rigoureusement égale à l'angle entre ces 2 points exprimé en radians.

### 3.3 Détail des calculs opérés par l'outil et interprétations supposées des résultats des calculs

- Calcul de la distance la plus proche (calculer pour chaque point la distance au point le plus proche) : ce premier calcul sert de base pour les calculs qui vont suivre.
- Calcul de la moyenne (calculer pour l'ensemble des points la moyenne de la distance au point le plus proche) : on peut supposer que plus grande sera la moyenne, meilleure sera la couverture au sens où l'écart entre les points sera le plus grand possible.
- Calcul de l'écart-type (Calculer pour l'ensemble des points l'écart type de la distance au point le plus proche) : on peut supposer que plus petit sera l'écart-type, meilleure sera la couverture au sens où l'écart entre les points sera le plus régulier possible.
- Calcul du taux de couverture. (1) Pour chaque point : tracer autour de celui-ci un secteur sphérique de “rayon sphérique”  $\frac{d}{2}$  ( $d$  étant la distance au point le plus proche). (2) Calculer la somme des surfaces tous les secteurs sphériques. (3) Calculer un taux de couverture correspondant à : « somme de tous les secteurs sphériques » / « surface totale de la sphère ». On peut supposer que plus grand sera ce taux,

Nombre de points	Moyenne	Ecart-type	Taux de couverture
2	3.14	0	1
3	2.09	0	0.75
4	1.91	0	0.84
6 (Octaèdre)	1.57	0	0.88
<b>8 (Cube)</b>	<b>1.23</b>	<b>0</b>	<b>0.73</b>
<b>8 (Antiprisme)</b>	<b>1.31</b>	<b>0</b>	<b>0.82</b>
12 (Icosaèdre)	1.10	0	0.89

FIGURE 5 – Résultats des calculs sur JupyterHub

meilleure sera la couverture.

### 3.4 Utilisation de l’outil de modélisation sur quelques cas simples

Nous avons pu utiliser notre outil sur des cas assez simples où la répartition idéale des points sur la sphère suit un modèle qui est connu à l’avance. Nous nous sommes donc intéressés aux cas suivants : 2 points, 3 points, 4 points, 6 points, 8 points (cas du cube et cas de l’anti-prisme carré) et 12 points.

Pour chacun de ces cas, nous avons pu calculer avec notre outil la moyenne, l’écart-type et le taux de couverture. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous.

Ces résultats amènent à quelques constatations et réflexions :

- La moyenne diminue à mesure que le nombre de points augmente, ce qui était assez prévisible.
- L’écart type est lui toujours de 0, ce qui était aussi prévisible puisque pour les configurations étudiées la distance pour chaque point au point le plus proche conserve une valeur constante.
- Pour le taux de couverture il est plus délicat d’émettre des hypothèses ou des conjectures avec le peu de données disponibles ici.
- Observons le cas intéressant du cube et de l’anti-prisme : le taux de couverture semble s’améliorer de même que la moyenne quand on passe d’un cube (solution non idéale pour 8 points) à un antiprisme carré (solution connue comme idéale pour 8 points). Ainsi, on peut dire que pour ce cas précis le taux de couverture s’améliore lorsqu’on déplace les points vers une meilleure répartition.

Le code Python de notre outil de modélisation est disponible en annexe de ce rapport.

## Synthèse

Nous n'avons pas tardé à comprendre la complexité du problème de la couverture optimale d'une sphère. L'enjeu majeur consiste à définir ce que signifie "optimal". Nous avons abordé plusieurs méthodes : le covering, qui est la plus ancienne et a permis de trouver des solutions exactes pour quelques valeurs de  $N$ , et la minimisation de l'énergie potentielle, qui permet d'obtenir une valeur approchée, même pour  $N$  grand. Nous avons ensuite essayé de modéliser les solutions exactes de la méthode par covering et analyser si ces solutions étaient également optimales d'un point de vue de l'optimisation de l'énergie (ce que nous avions imaginé initialement, à savoir réaliser un outil capable de faire des calculs d'optimisation pour placer les points sur la sphère, s'est en fait révélé une tâche bien difficile, voire impossible dans l'état de nos connaissances). Au vu des résultats pour le cube et l'antiprisme carré, ce n'est pas évident. Si nous avions disposé de davantage de temps, nous aurions pu approfondir les questions suivantes :

- Est-il vrai qu'il n'existe aucune configuration optimale dans le plan pour 4 points ?
- L'identification du plan à la sphère de Riemann est-elle une bonne manière de passer de nos expériences dans le plan à nos expériences sur la sphère ?
- On peut relier  $n$  points sur la sphère par des segments pour obtenir des triangles et définir ainsi un pavage de la sphère. Peut-on progresser à partir de considérations strictement algébriques sur les pavages ?
- Nous avons établi que la répartition optimale de huit points n'est pas celle de l'octaèdre (qui est un solide platonicien), mais celle de l'antiprisme carré, ce qui pourrait surprendre. On peut les distinguer à peu de frais en les identifiant à leurs graphes (ou *polygones de Petrie*, définis comme la projection de ces solides dans le plan), et tenter de trouver un lien entre répartition optimale de  $n$  points sur la sphère et propriétés du graphe du solide associé.
- Mener à son terme notre réflexion sur les liens entre répartition optimale et invariance par maillage circulaire.

## Quelques titres

- Saaf et Kuijlaars, Distributing many points on a sphere, 1997  
(<https://perswww.kuleuven.be/u0017946/publications/Papers97/art97a-Saff-Kuijlaars-MI/Saff-Kuijlaars-MathIntel97.pdf>)
- Wolfram Mathworld, Spherical code, 2022 (<https://mathworld.wolfram.com/SphericalCode.html>)
- Wolfram Mathworld, Thomson Problem, 2022 (<https://mathworld.wolfram.com/ThomsonProblem.html>)

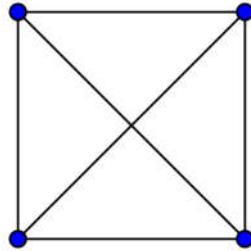


FIGURE 6 – Le carré croisé *est* le tétraèdre. Dans l'espace, toutes les arêtes (segments noirs) sont de même longueur (figure réalisée sous Geogebra).

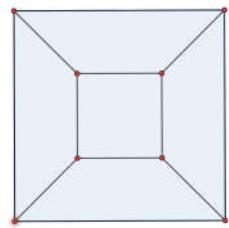


FIGURE 7 – Graphe du carré (figure réalisée sous Geogebra).

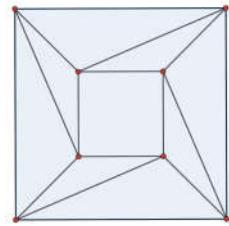


FIGURE 8 – Graphe de l'antiprisme carré (figure réalisée sous Geogebra).