ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC & KỸ THUẬT MÁY TÍNH

Mô hình hóa toán học (CO2011)

Bài tập lớn

"Dynamics of love"

GVHD: Nguyễn Tiến Thịnh
Nguyễn An Khương
Nguyễn Văn Minh Mẫn
Mai Xuân Toàn
Trần Hồng Tài

SV thực hiện: Nguyễn Đại Tiến — 2114988 (L05 - 40, Nhóm trưởng)
Nguyễn Trương Phước Thọ — 2114913 (L03 - 40)
Võ Minh Duy — 2113046 (L05 - 40)
Nguyễn Ngọc Quý — 2114605 (L05 - 40)

Tp. Hồ Chí Minh, Tháng 12/2022

Mục Lục

1 Danh sách thành viên & Phân chia công việc

STT	Tên	MSSV	Nhiệm vụ	% đóng góp
1	Nguyễn Đại Tiến	2114988	- Bài tập 2, 4	100%
2	Nguyễn Trương Phước Thọ	2114913	- Bài tập 3	100%
3	Võ Minh Duy	2113046	- Bài tập 4	100%
4	Nguyễn Ngọc Quý	2114605	- Bài tập 1	100%

2 Bài tập 1

2.1 Tổng quan

Toán học thì hiếm khi được áp dụng vào động lực của tình yêu (dyamic of loves). Trong quá khứ đã có nhiều nhà nghiên cứu nói về vấn đề này có thể sử dụng công thức toán học để xác định được tính cảm của hai người theo thời gian hay không? Đặc biệt trong cuốn sách của Strogatz (1994) có viết một đoạn ngắn về tình yêu và một số bài tập liên quan. Mặc dù mô hình về tình yêu của Strogatz ban đầu nhằm mục đích thúc đẩy sinh viên nhiều hơn là như một mô hình nghiêm túc về tình yêu nhưng nó đã tạo ra một điều thú vị và thúc đẩy các nhà nghiên cứu khác đưa ra mô hình tuyến tính tình mô tả sự thay đổi theo thời gian của tình yêu hoặc sự ghét bỏ được thể hiện bởi hai người trong một mỗi quan hệ lãng mạn.

2.2 Phương trình vi phân thường

2.2.1 Khái niệm

Phương trình vi phân là một phương trình chứa hàm ẩn, gọi là x(t), các đạo hàm của x(t) và biến thời gian t. Ta gọi cấp của một phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hàm ẩn xuất hiện trong phương trình. Trong Bài tập lớn này ta xét phương trình vi phân thường cấp 1 có dạng:

$$F(t, x, x') = 0 \ (1)$$

Hoặc ta có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x) \quad i = 1, ..., n, \ (*)$$

Một nghiệm của phương trình vi phân là một hàm x(t) xác định trên khoảng $I \subseteq R$ sao cho khi thay x(t) và đạo hàm x(t) và đạo hàm x'(t) vào phương trình được một đồng nhất thức. Chẳng hạn, x(t) là nghiệm của phương trình (2) trên khoảng I nếu $(t, x(t)) \in D_f$ (với D là miền xác định của f và x'(t)=f(t,x(t)) với mọi $t \in I$ thì được đồng nhất thức :

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0$$

2.2.2 Nghiệm của phương trình vi phân

Xét phương trình vi phân cấp 1

$$x' = f(t)$$

Với f(t) là một hàm liên tục trên khoảng $I \subseteq R$. Ta nguyên hàm hai vế thì tìm được nghiệm của phương trình vi phân là:

$$x(t) = \int f(t)dt + C$$

Hoặc ta có thể đưa về dạng: $x = \phi(t, C)$
Với C hằng số tùy ý. Ta gọi đây là nghiệm tổng quát. Của phương trình x'=f(t);

2.3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất n hàm số là hệ có dạng:

$$x_i' = a_1^i(t)x_1 + .. + a_n^i(t)x_n,$$

trong đó a_j^i là những hàm số (xác định trên khoảng $I \subseteq R$)
Giả thiết a_j^i liên tục trên I. Nếu ký hiệu Y là vectơ cột và A là ma trận chứa a_j^i

Y= $\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ A= $\begin{pmatrix} a_1^1(x) & ... & a_n^1(x) \\ & ... & \\ & ... & \\ & ... & \\ a_1^n(x) & ... & a_n^n(x) \end{pmatrix}$ thì hệ (*) được có thể được viết dưới dạng ma trận: Y'=AY.

Với giả thiết về tính liên tục của các hàm hệ số a_i^j, cho trước $x0 \in R^n$, tồn tại duy nhất một nghiệm Y(x) của hệ (*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu Y(x0)=b. Ngoài ra các nghiệm của hệ (*) tạo thành một không gian n chiều.

2.4 Love affairs equation

Ở Bài tập lớn này ta xem xét tình yêu của Romeo dành cho Juliet và cũng là tình yêu của Juliet dành cho Romeo. Mối tình giữa họ có thể được mô tả bằng bài toán dưới dạng hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất như sau:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ \\ J' = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

+ R(t): tình yêu của Romeo ở thời gian t.
+ J(t): tình yêu của Juliet ở thời gian t.
+ Ở đây R0, J0 thuộc R là tình yêu của Romeo dành cho Juliet và Juliet dành cho Romeo lúc ban đầu.
+ Các hệ số không đổ a,b,c và d thuộc R mô tả sự tương tác của tình yêu của người này với người kia.
+ a, b: phong cách lãng mạn của Romeo giành cho Juliet.

+ a mô tả mức độ mà Romeo được khuyến khích bởi cảm xúc của chính mình và b là mức độ mà anh ấy được khuyến khích bởi cảm xúc của Juliet.

$*$ Phong cách lãng mạn:
Romeo có thể thể hiện một trong bốn phong cách lãng mạn tùy thuộc vào giá trị của a và b được mô tả như sau:

- "Eager Beaver": a> 0, b (người bị rung động bởi cảm xúc của chính mình và tình cảm của người khác dành cho mình)
- "Nercissistic Nerd": a> 0, b <0 (người bị rung động bởi cảm xúc của chính mình và rút lui khỏi tình cảm của người khác dành cho mình)
- "Cautious Lover": a< 0, b> 0 (người muốn ngăn cản cảm xúc của bản thân nhưng bị rung động bởi tình yêu của người khác dành cho)
- Hermit: a <0, b <0 (người muốn ngăn cản cảm xúc của bản thân)

Phong cách lãng mạn của Juliet cũng được mô tả tương tự như Romeo.
Ví dụ:

$$\begin{cases} R' = -3R + 3J \\ J' = -2R + J \\ R(0) = -4, J(0) = 2 \end{cases}$$

Trong ví dụ này, Romeo không yêu Juliet và ngược lại, Juliet yêu Romeo vào thời điểm chúng ta xem xét, tức là R0 < 0 và J0 > 0. Vì c<0 và d>0 nên Juliet là kiểu người "Nercissistic Nerd" nên Juliet được khuyến khích bởi cảm xúc của mình và quay lưng lại với tình yêu của Romeo dành cho nàng. Tuy nhiên, nếu anh ấy ghét cô ấy nhiều hơn, cô ấy sẽ yêu anh ấy nhiều hơn. Có ít nhất hai cách để điều tra tình yêu giữa Romeo và Juliet.

2.5 Giải bài toán

Ta có hệ tổng quát của bài toán như sau:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ \\ J' = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta chuyển hệ về dạng được biểu diễn như sau:
$\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$
Với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} R_0 & J_0 \end{pmatrix}^T$

Với ma trận A, chúng ta đi tìm nghiệm không tầm thường của bài toán trị riêng:

$$Ak = \lambda k \Leftrightarrow (A - \lambda I)k = 0 \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$$

Với k là vecto riêng ứng với trị riêng λ

Đa thức đặc trưng :

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - Trace(A)\lambda + det(A) = 0$$

Từ đó ta tính được trị riêng λ theo a, b ,c ,d :

$$\lambda = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt[2]{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}$$

Ta tính tiếp giá trị Δ của đa thức đặc trưng:

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = Trace(A)^2 - 4det(A) \text{ (**)}$$

Dựa vào giá trị Δ ta chia làm 3 trường hợp:

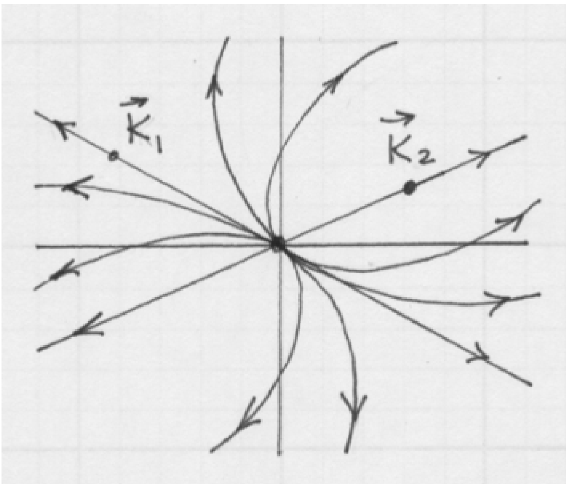
- Nếu $\Delta > 0$ thì trị riêng λ là số thực và phân biệt $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$
- Nếu $\Delta = 0$ thì trị riêng λ là số thực và là nghiệm kép $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$
- Nếu $\Delta < 0$ thì trị riêng λ là số phức $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

1. **Trường hợp 1** : $\Delta > 0$

   - Nghiệm tổng quát : $u = C_1k_1e^{\lambda_1 t} + C_2k_2e^{\lambda_2 t}$ (1)
     Với k_1, k_2 lần lượt là các vecto riêng ứng với trị riêng λ_1, λ_2
   - Để tìm vector riêng k_1 tương ứng với λ_1 ta giải phương trình:
     $(A - \lambda_1 * I) * k_1 = 0$
     Tương tự cho k_2.
   - Giả sử ta tìm được vector riêng : $k_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, $k_2 = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$
   - Khi đó nghiệm của hệ (*) là :

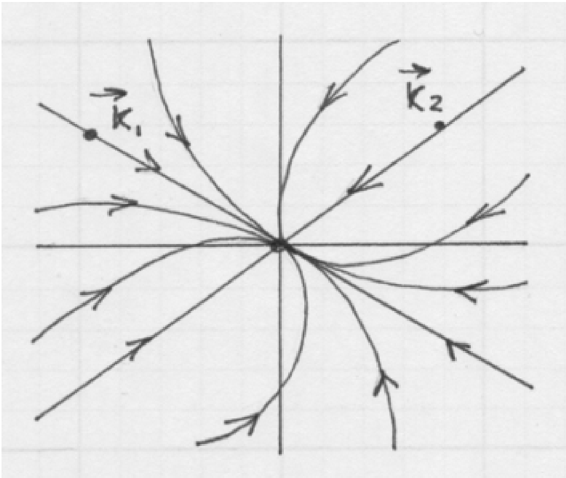
$$\begin{cases} R(t) = C_1 * m * e^{\lambda_1 t} + C_2 * k * e^{\lambda_2 t} \\ J(t) = C_1 * n * e^{\lambda_1 t} + C_2 * l * e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (*)$$

a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Hai trị riêng dương $\rightarrow$ **Unstable node**



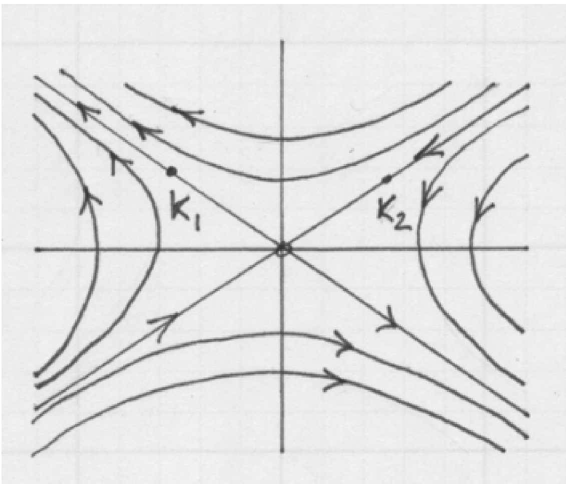
Hình 1: Unstable node

b $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Hai trị riêng âm.
$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty}[C_1k_1e^{\lambda_1 t} + C_2k_2e^{\lambda_2 t}] = C_1k_1 \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t} + C_2k_2 \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_2 t} = 0$
$\rightarrow$ **Stable node**



Hình 2: Stable node

c $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Hai trị riêng trái dấu
$\rightarrow$ **Saddle point (unstable)**

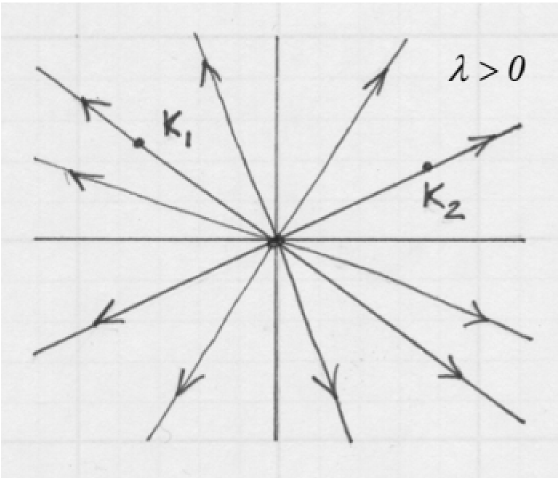


Hình 3: Saddle point (unstable node)

2. **Trường hợp 2** : $\Delta = 0$ thì trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

a Tồn tại hai vectơ riêng độc lập tuyến tính k_1, k_2.
Nghiệm tổng quát : $u(t) = C_1k_1e^{\lambda t} + C_2k_2e^{\lambda t} = (C_1k_1 + C_2k_2)e^{\lambda t}$ (2a)

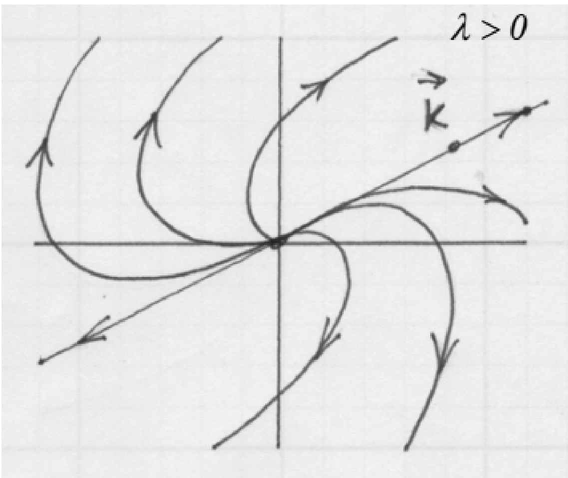
- $\lambda > 0$: **Degenerate(proper) unstable node**
- $\lambda < 0$: **Degenerate(proper) stable node**



Hình 4: Degenerate (proper) unstable node

b Tồn tại một vectơ riêng độc lập tuyến tính k (tìm p)
Để có được 2 nghiệm độc lập tuyến tính ta bổ sung vào phương trình tổng quát để có nghiệm tổng quát chính là: $u(t) = C_1ke^{\lambda t} + C_2(kt + p)e^{\lambda t} = (C_1k + C_2(kt + p))e^{\lambda t}$ (2b)

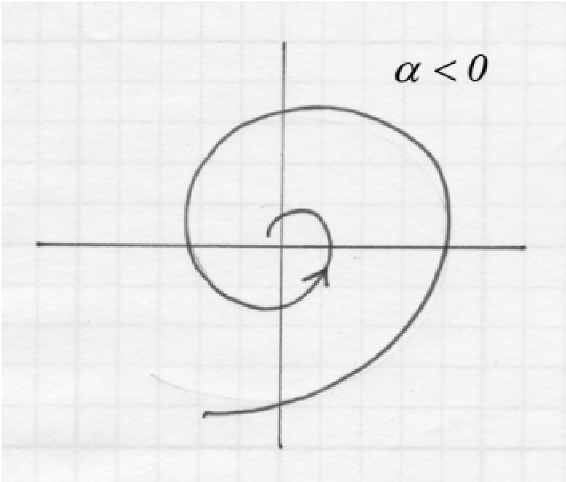
- $\lambda > 0$: **Degenerate(improper) unstable node**
- $\lambda < 0$: **Degenerate(improper) stable node**



Hình 5: Degenerate (improper) unstable node

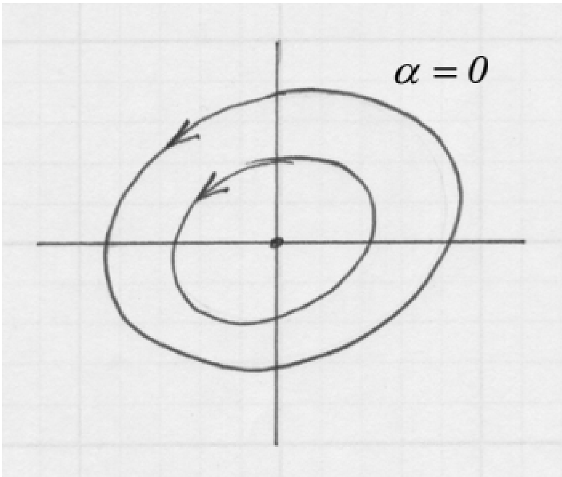
3. **Trường hợp 3** : $\Delta < 0$: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$; Có vector riêng $k_1 = b_1 + b_2 i, k_2 = b_1 - b_2 i$

   a $\alpha \neq 0$
   Nghiệm tổng quát : $u = [C_1(b_1 cos\beta t - b_2 sin\beta t) + C_2(b_2 cos\beta t + b_1 sin\beta t)]e^{\alpha t}$ (3a)
   - $\alpha > 0$: **Unstable focus (spiral point)**
   - $\alpha < 0$: **Stable focus (spiral point)**



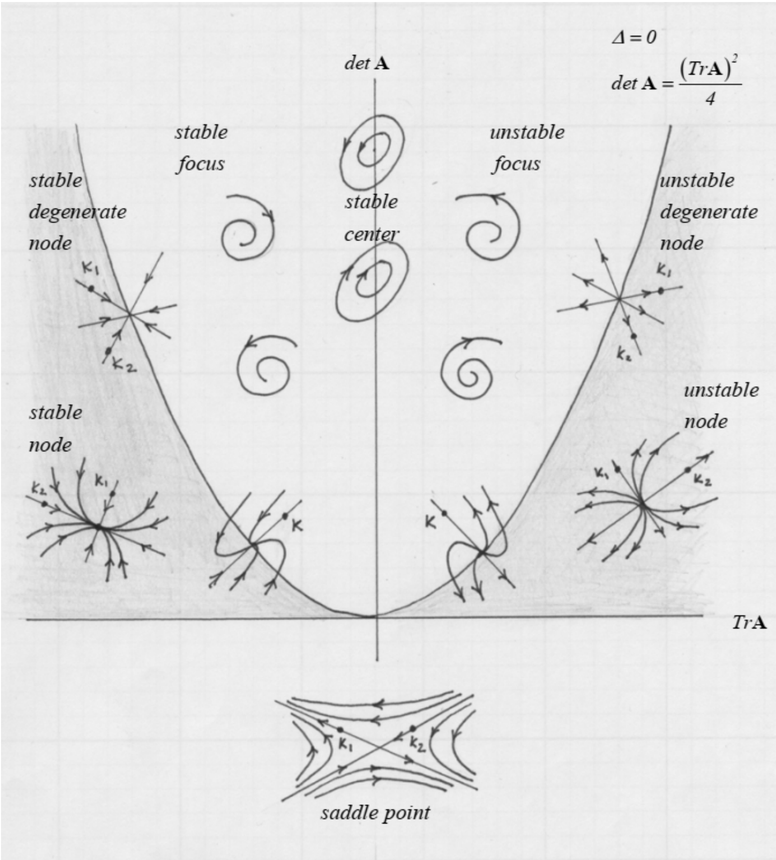
Hình 6: Stable focus (spiral point)

   b $\alpha = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$ (a=-d)
   Nghiệm tổng quát : $u = C_1(b_1 cos\beta t - b_2 sin\beta t) + C_2(b_2 cos\beta t + b_1 sin\beta t)$ (3b)
   $\rightarrow$ **Stable center (not asymptotically stable)**



Hình 7: Stable center (not asymptotically stable)

Cuối cùng, ta dựa vào giá trị ban đầu R_0, J_0(nếu có) để tìm hằng số C_1, C_2



Hình 8: Phân loại các điểm tới hạn trên mặt phẳng tuyến tính

2.6 Hoàn thành bảng 2

Completed Table 2 for all possible cases:

$Re\lambda_1$	$Re\lambda_2$	$\lvert Im\lambda_1\rvert$	$\lvert Im\lambda_2\rvert$	Type
-	-	+	+	Spiral-In
0	0	+	+	Center
+	+	+	+	Spiral-Out
+	-	0	0	Saddle
+	+	0	0	Unstable Node
-	-	0	0	Stable Node

3 Bài tập 2

Áp dụng phương pháp làm được trình bày ở phần 2, ta tiến hành lập trình trên ngôn ngữ lập trình Python để tìm ra nghiệm chính xác và biểu diễn chúng trền đồ thị như bên dưới :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.linalg import eig


def ex2(a, b, c, d, initial):
    A = np.array([[a, b], [c, d]])
    equation(A, initial)
    plt.legend()
    plt.show()
    phase_portrait(A, initial)
    plt.legend()
    plt.show()


def equation(A, initial):
    t = np.linspace(0, 10, 1000)
    e_val, e_vec = eig(A)
    if e_val[0] == e_val[1]:
        e_vec[:, 1] = 0, e_vec[0, 0]/A[0, 1]
        c1, c2 = np.dot(np.linalg.inv(e_vec), initial)
        R = (c1*e_vec[0, 0]+c2*(e_vec[0, 0]*t+e_vec[0, 1]))*np.e**(e_val
            [0]*t)
        J = (c1*e_vec[1, 0]+c2*(e_vec[1, 0]*t+e_vec[1, 1]))*np.e**(e_val
            [0]*t)
    else:
        c1, c2 = np.dot(np.linalg.inv(e_vec), initial)
        R = c1*np.e**(e_val[0]*t)*e_vec[0, 0]+c2*np.e**(e_val[1]*t)*e_vec
            [0, 1]
        J = c1*np.e**(e_val[0]*t)*e_vec[1, 0]+c2*np.e**(e_val[1]*t)*e_vec
            [1, 1]

    plt.plot(t, R, label="Romeo's love")
    plt.plot(t, J, label="Juliet's love")
    plt.xlabel("Time", color="brown")
    plt.ylabel("Love for the other", color="brown")
    str1 = type_of_love(A[0, 0], A[0, 1])
    str2 = type_of_love(A[1, 1], A[1, 0])
    if(str1 == str2):
        plt.title(("love between " + str1+"s").upper(), color="blue")
    else:
        if(str1 == "Eager Beaver"):
            str1 = "an "+str1
        else:
            str1 = "a "+str1
        if(str2 == "Eager Beaver"):
            str2 = "an "+str2
        else:
```

```
            str2 = "a "+str2
        plt.title(("love between " + str1+" and "+str2).upper(), color="
            blue")

    plt.legend()


def phase_portrait(A, initial):
    vector_field(A)
    nullcline(A)
    e_val, e_vec = eig(A)
    print(e_vec)

    trajectory(A, e_vec[:, 0])  # optional
    trajectory(A, e_vec[:, 1])  # optional
    trajectory(A, initial)  # optional
    trajectory(A, -initial)  # optional

    plt.scatter(0, 0, marker="o", label="Fixed point")
    plt.xlabel("Romeo's love for Juliet", c="brown")
    plt.ylabel("Juliet's love for Romeo", c="brown")
    str1 = type_of_love(A[0, 0], A[0, 1])
    str2 = type_of_love(A[1, 1], A[1, 0])
    if(str1 == str2):
        plt.title(("love between " + str1+"s").upper(), color="blue")
    else:
        if(str1 == "Eager Beaver"):
            str1 = "an "+str1
        else:
            str1 = "a "+str1
        if(str2 == "Eager Beaver"):
            str2 = "an "+str2
        else:
            str2 = "a "+str2
        plt.title(("love between " + str1+" and "+str2).upper(), color="
            blue")
    plt.xlim(-4, 4)
    plt.ylim(-4, 4)


def trajectory(A, initial):
    t = np.linspace(0, 10, 1000)
    e_val, e_vec = eig(A)

    if e_val[0] == e_val[1]:
        e_vec[:, 1] = 0, e_vec[0, 0]/A[0, 1]
        c1, c2 = np.dot(np.linalg.inv(e_vec), initial)
        R = (c1*e_vec[0, 0]+c2*(e_vec[0, 0]*t+e_vec[0, 1]))*np.e**(e_val
            [0]*t)
        J = (c1*e_vec[1, 0]+c2*(e_vec[1, 0]*t+e_vec[1, 1]))*np.e**(e_val
            [0]*t)
    else:
        c1, c2 = np.dot(np.linalg.inv(e_vec), initial)
```

```
        R = c1*np.e**(e_val[0]*t)*e_vec[0, 0]+c2*np.e**(e_val[1]*t)*e_vec[0, 1]
        J = c1*np.e**(e_val[0]*t)*e_vec[1, 0]+c2*np.e**(e_val[1]*t)*e_vec[1, 1]

    plt.plot(R, J, label="Trajectory")


def vector_field(A):
    x = np.linspace(-4, 4, 17)
    y = np.linspace(-4, 4, 17)
    u = np.array([(i, j) for i in x for j in y])
    du = np.dot(A, u.T).T
    plt.quiver(u.T[0], u.T[1], du.T[0], du.T[1], width=0.001, color="#0099CC",
               label="Vector field")


def nullcline(A):
    R = np.linspace(-4, 4, 1000)
    plt.plot(R, -A[0, 0]*R/A[0, 1], ls=':', label="Nullcline 1")
    plt.plot(R, -A[1, 0]*R/A[1, 1], ls=':', label="Nullcline 2")


def type_of_love(a, b):
    if a > 0 and b > 0:
        return "Eager Beaver"
    elif a > 0 and b < 0:
        return "Narcissistic Nerd"
    elif a < 0 and b > 0:
        return "Cautious Lover"
    else:
        return "Hermit"


def main():
    a = int(input("a = "))
    b = int(input("b = "))
    c = int(input("c = "))
    d = int(input("d = "))
    R0 = int(input("R0 = "))
    J0 = int(input("J0 = "))
    ex2(a, b, c, d, np.array([R0, J0]))


if __name__ == "__main__":
    main()
```

Ta tính tiếp giá trị Δ được chỉ ra ở công thức 2.5 để xác định chọn lựa ví dụ cho từng trường hợp: $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc$

3.1 Giữa Eager Beavers

Trường hợp $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$:

- Ta có : $4bc > 0$ (do b, c cùng dấu)
- Theo bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a^2+d^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2} \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \geqslant 0$

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc > 0$
Vậy 2 ví dụ ở trường hợp này đều rơi vào trường hợp $\boxed{1}$
Ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{1c}$ và $\boxed{1a}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = R + 2J \\ J' = 3R + 2J \\ R_0 = 4, J_0 = 1 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng trái dấu lần lượt là $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ (Trường hợp $\boxed{1c}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó
   Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 4$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$

   Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

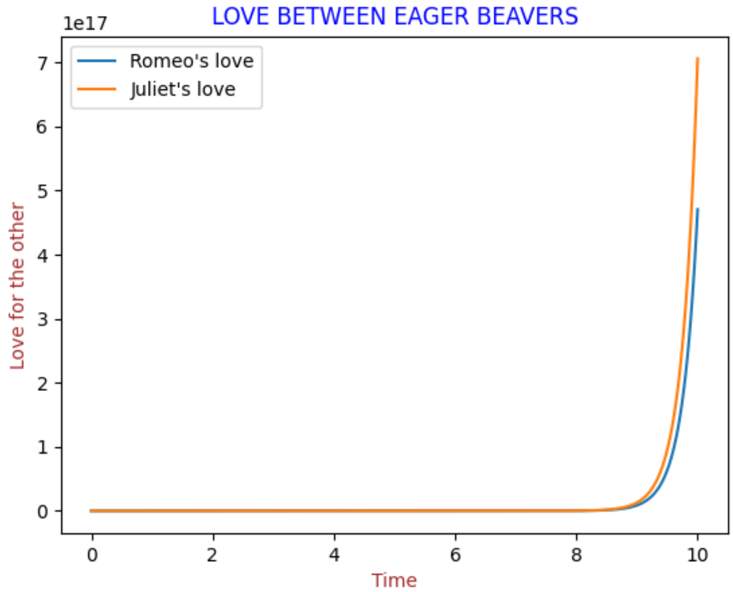
   Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

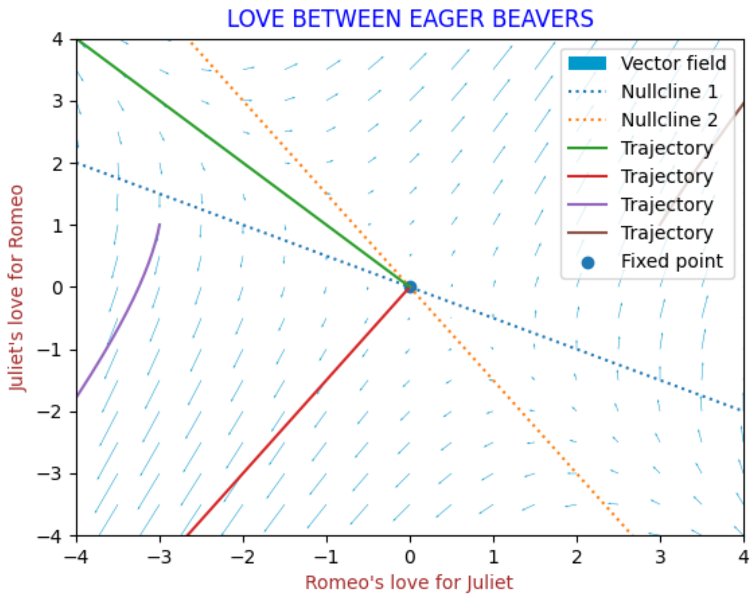
   Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2$

   Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
   $\begin{cases} R(t) = 2e^{4t} + 2e^{-t} \\ J(t) = 3e^{4t} - 2e^{-t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = 3R + J \\ J' = 4R + 3J \\ R_0 = 1, J_0 = -5 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng dương lần lượt là $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$ (Trường hợp $\boxed{\text{1a}}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 5$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:

$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$

Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

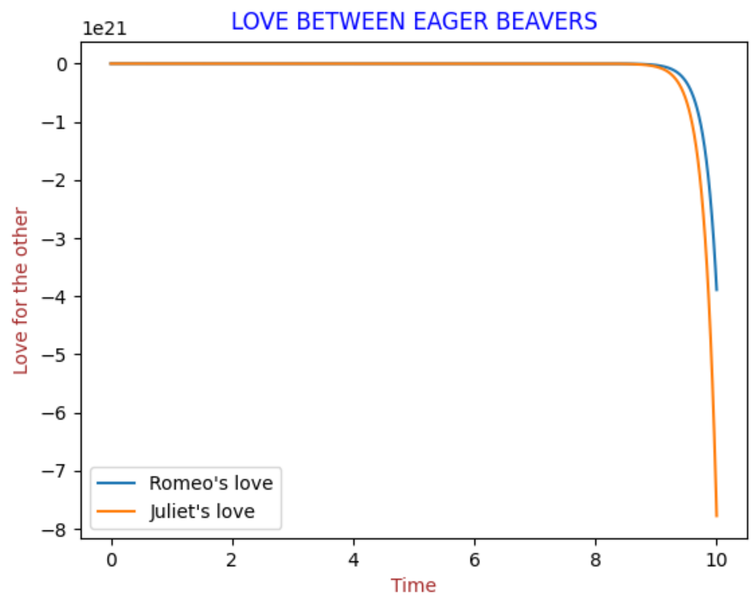
$\Rightarrow C_1 = \frac{-3}{4}, C_2 = \frac{7}{4}$

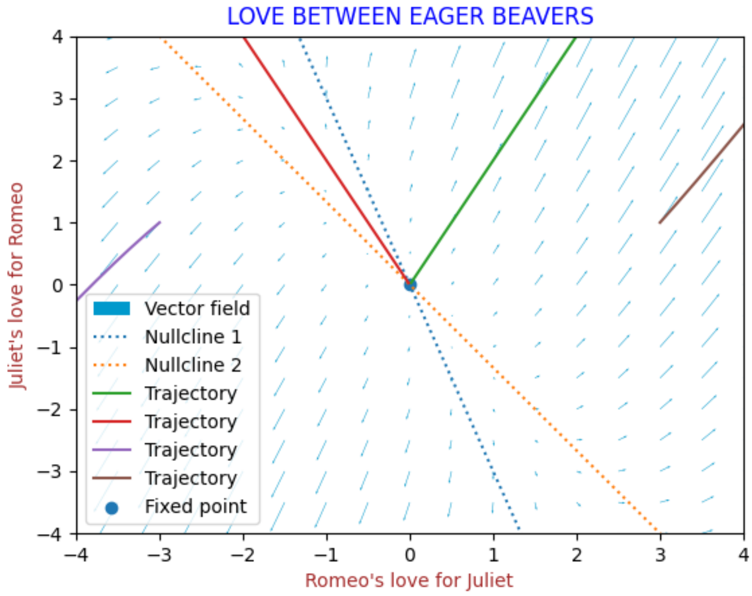
Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :

$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \frac{-3}{4} e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$\begin{cases} R(t) = \frac{-3}{4} e^{5t} + \frac{7}{4} e^t \\ J(t) = \frac{-3}{2} e^{5t} - \frac{7}{2} e^t \end{cases}$





3.2 Giữa Eager Beaver và Narcissistic Nerd

Trường hợp $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$:

- Ta có : $4bc < 0$ (do b, c trái dấu)
- Theo bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a^2+d^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2} \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \geqslant 0$

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc$ có thể rơi vào trường hợp bất kì
Ở trường hợp này, ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{2b}$ và $\boxed{3a}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = 4R + J \\ J' = -R + 2J \\ R_0 = 3, J_0 = 10 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 3 & 10 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có trị riêng kép : $\lambda = 3$ (Trường hợp $\boxed{2b}$)

   Thế trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A-\lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng: $k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$
   Thế tiếp vecto riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)p = k$ để tìm vecto thứ hai : $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

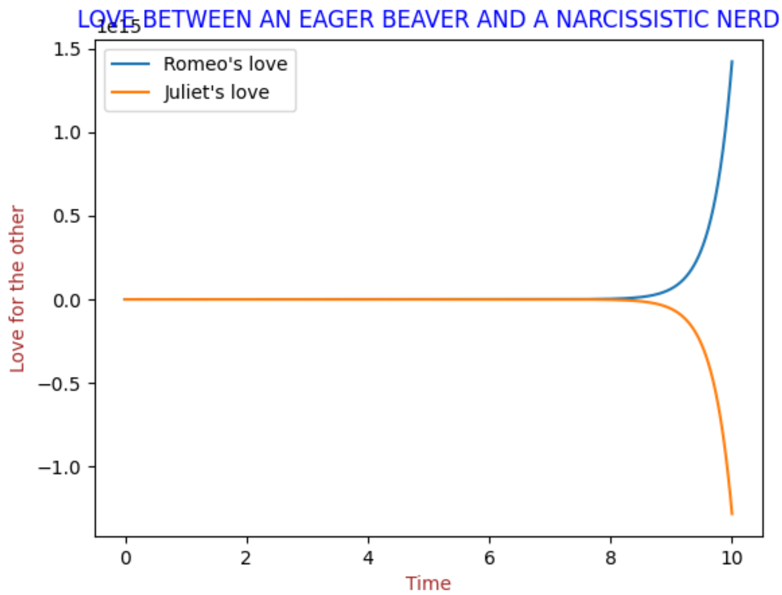
Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{2b}$:
$u = (C_1 k + C_2(kt+p))e^{\lambda t} = \left(C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_2\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right)e^{3t}$

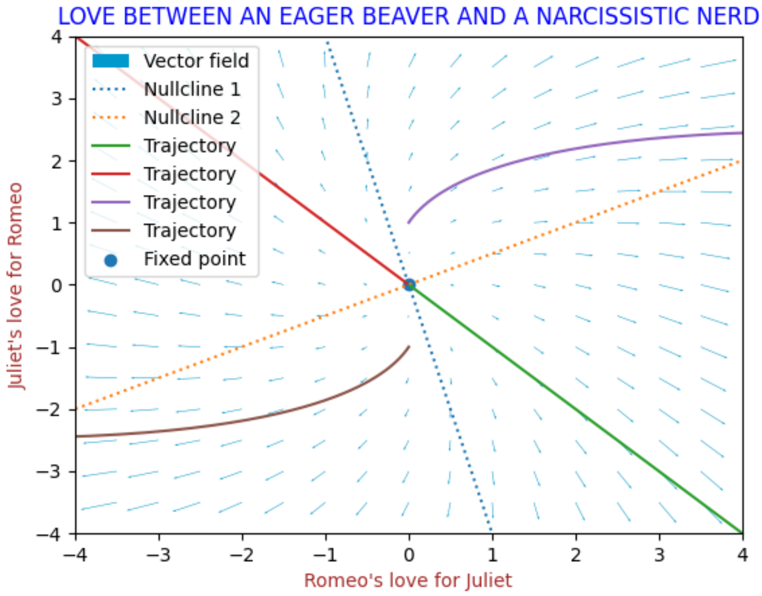
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix}3\\10\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 3, C_2 = 13$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix}R\\J\end{pmatrix} = \left(3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 13\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right)e^{3t}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$\begin{cases} R(t) = (3+13t)e^{3t} \\ J(t) = (16+13t)e^{3t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = 3R + 9J \\ J' = -8R + 7J \\ R_0 = -9, J_0 = 0 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} -9 & 0 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 93 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng phức lần lượt là $\lambda_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{17}i$ (Trường hợp $\boxed{3a}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)x = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{17}i$ ta tìm được vecto riêng $x_{1,2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{17} \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{(3a)}$:

$u = [C_1(b_1 cos(\beta t) - b_2 sin(\beta t)) + C_2(b_2 cos(\beta t) + b_1 sin(\beta t))]e^{\alpha t}$

$= \left[C_1 \left(\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} cos(2\sqrt{17}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{17} \end{pmatrix} sin(2\sqrt{17}t) \right) + C_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{17} \end{pmatrix} cos(2\sqrt{17}t) + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} sin(2\sqrt{17}t) \right) \right] e^{5t}$

Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{17} \end{pmatrix}$

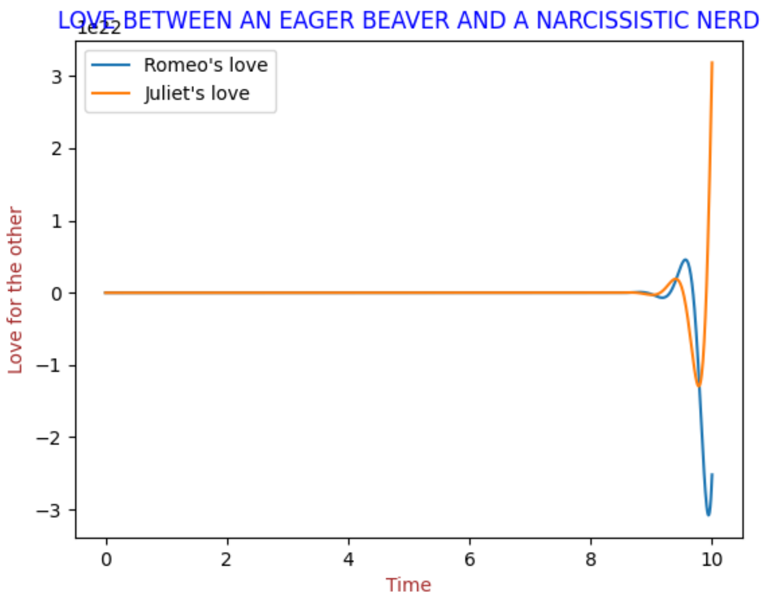
$\Rightarrow C_1 = -1, C_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}$

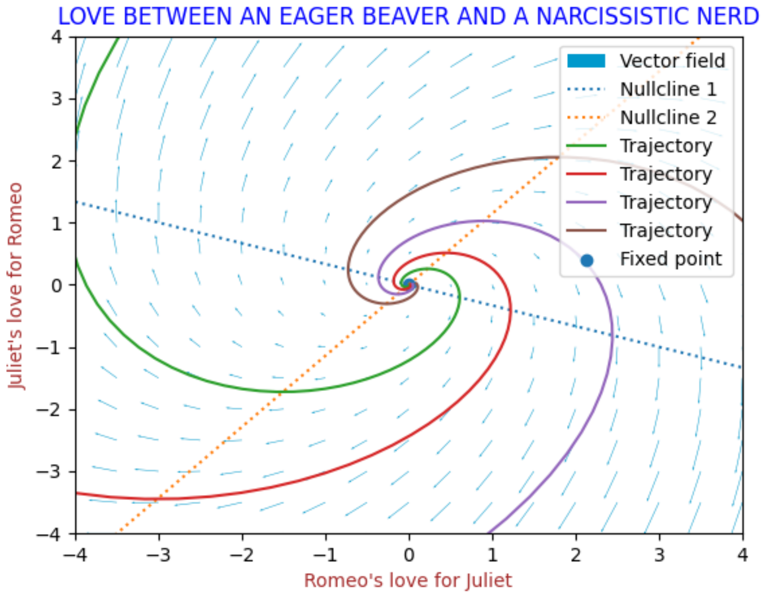
Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :

$$u = \left[-\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} cos(2\sqrt{17}t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{17} \end{pmatrix} sin(2\sqrt{17}t) \right) + \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{17} \end{pmatrix} cos(2\sqrt{17}t) + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} sin(2\sqrt{17}t) \right) \right] e^{5t}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} R(t) = [-9cos(2\sqrt{17}t) + \frac{9}{\sqrt{17}} sin(2\sqrt{17}t)]e^{5t} \\ J(t) = [\frac{36}{\sqrt{17}} sin(2\sqrt{17}t)]e^{5t} \end{cases}$$





3.3 Giữa Eager Beaver và Cautious Lover

Trường hợp $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$:

- Ta có : $4bc > 0$ (do b, c cùng dấu)
- Và : $a^2 + d^2 - 2ad > 0$ (do a, d trái dấu)

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc > 0$
Vậy 2 ví dụ ở trường hợp này đều rơi vào trường hợp $\boxed{1}$
Ta sẽ chọn 2 ví dụ ở trường hợp $\boxed{1c}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = 2R + 11J \\ J' = 6R - 3J \\ R_0 = 15, J_0 = 2 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 15 & 2 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 72 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng trái dấu lần lượt là $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -9$ (Trường hợp $\boxed{1c}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

   Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 8$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 11 & 6 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -9$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

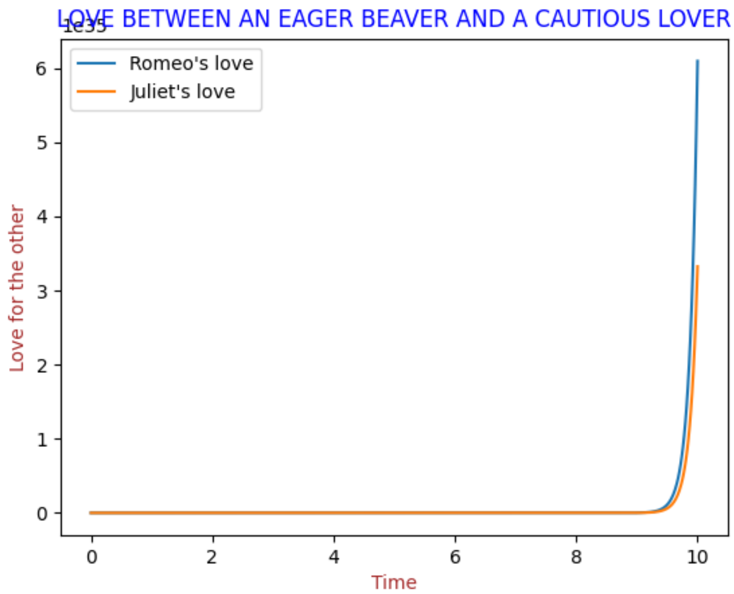
Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-9t}$

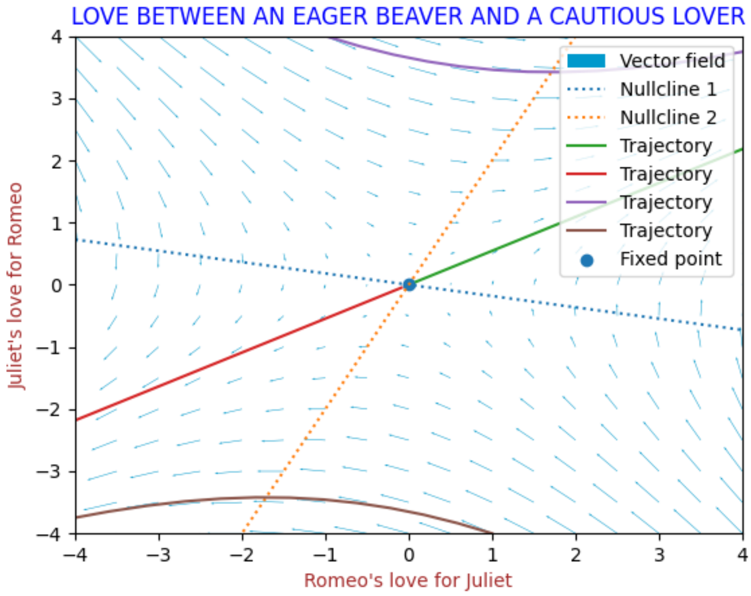
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 4$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = e^{8t} \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} + 4e^{-9t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$\begin{cases} R(t) = 11e^{8t} + 4e^{-9t} \\ J(t) = 6e^{8t} - 4e^{-9t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = 3R + 5J \\ J' = R - 3J \\ R_0 = 0, J_0 = -5 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 16 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng trái dấu lần lượt là $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -4$ (Trường hợp $\boxed{1c}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 4$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -4$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \end{pmatrix}^T$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:

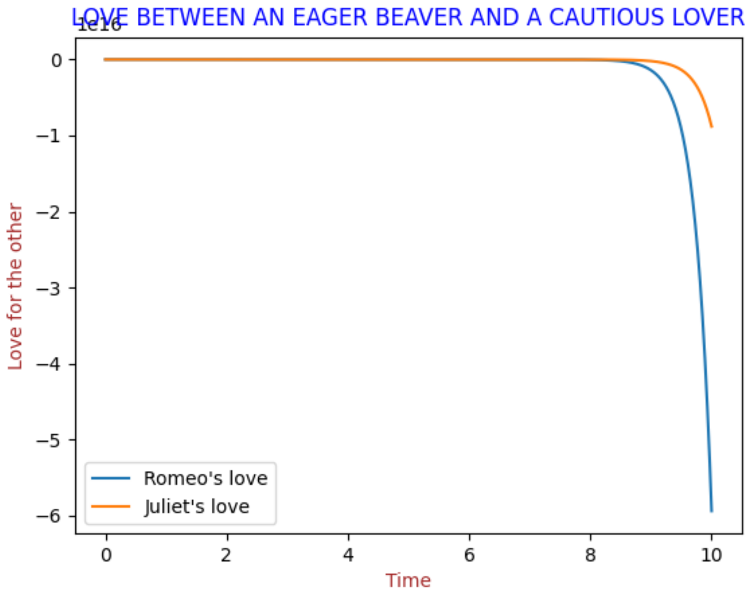
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} e^{-4t}$

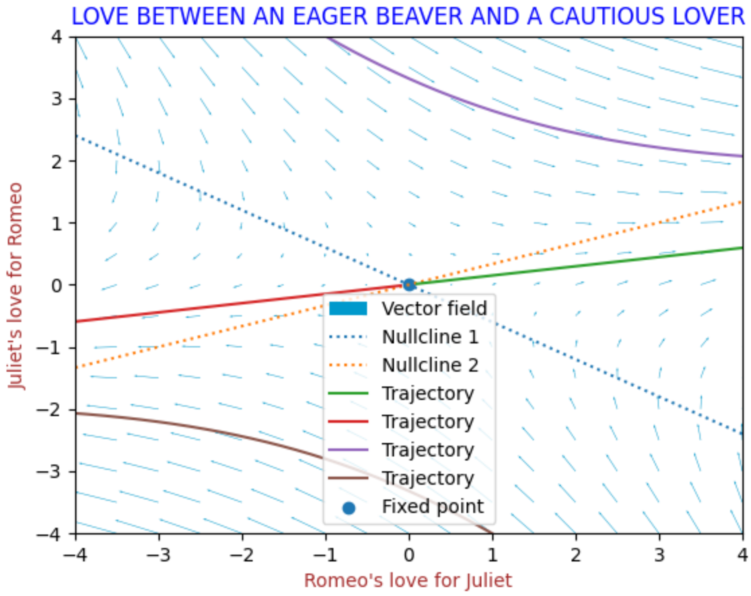
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = -\frac{5}{8}, C_2 = \frac{5}{8}$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = -\frac{5}{8}e^{4t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{8}e^{-4t}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$\begin{cases} R(t) = -\frac{25}{8}e^{4t} + \frac{25}{8}e^{-4t} \\ J(t) = -\frac{5}{8}e^{4t} - \frac{35}{8}e^{-4t} \end{cases}$





3.4 Giữa Eager Beaver và Hermit

Trường hợp $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$:

- Ta có : $4bc < 0$ (do b, c trái dấu)
- Và : $a^2 + d^2 - 2ad > 0$ (do a, d trái dấu)

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc$ có thể rơi vào trường hợp bất kì
Ở trường hợp này, ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{3b}$ và $\boxed{2b}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = 6R + 10J \\ J' = -4R - 6J \\ R_0 = 10, J_0 = 0 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng phức lần lượt là $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ (Trường hợp $\boxed{3b}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)x = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

   Ứng với trị riêng $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ ta tìm được vecto riêng $k_{1,2} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{(3b)}$:

$u = [C_1(b_1cos(\beta t) - b_2sin(\beta t)) + C_2(b_2cos(\beta t) + b_1sin(\beta t))]$

$= C_1\left(\begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix}cos(2t) - \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}sin(2t)\right) + C_2\left(\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}cos(2t) + \begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix}sin(2t)\right)$

Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

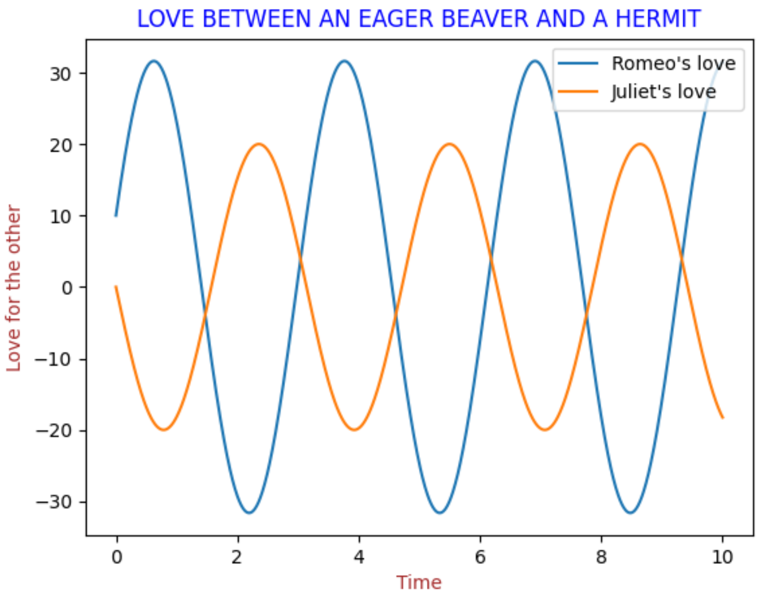
$\Rightarrow C_1 = -1, C_2 = -3$

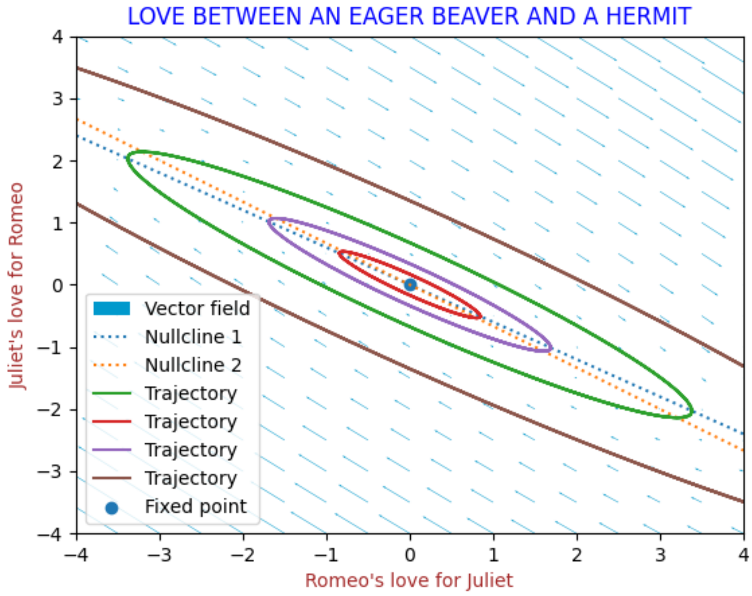
Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :

$u = -\left(\begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix}cos(2t) - \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}sin(2t)\right) - 3\left(\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}cos(2t) + \begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix}sin(2t)\right)$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} R(t) = 10cos(2t) + 30sin(2t) \\ J(t) = -20sin(2t) \end{cases}$$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = R + 4J \\ J' = -4R - 7J \\ R_0 = 1, J_0 = 0 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T$, $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có trị riêng kép : $\lambda = -3$ (Trường hợp $\boxed{\text{2b}}$)

Thế trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng: $k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

Thế tiếp vecto riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)p = k$ để tìm vecto thứ hai : $p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{\text{2b}}$:

$u = (C_1 k + C_2(kt + p))e^{\lambda t} = \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right) \right) e^{-3t}$

Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

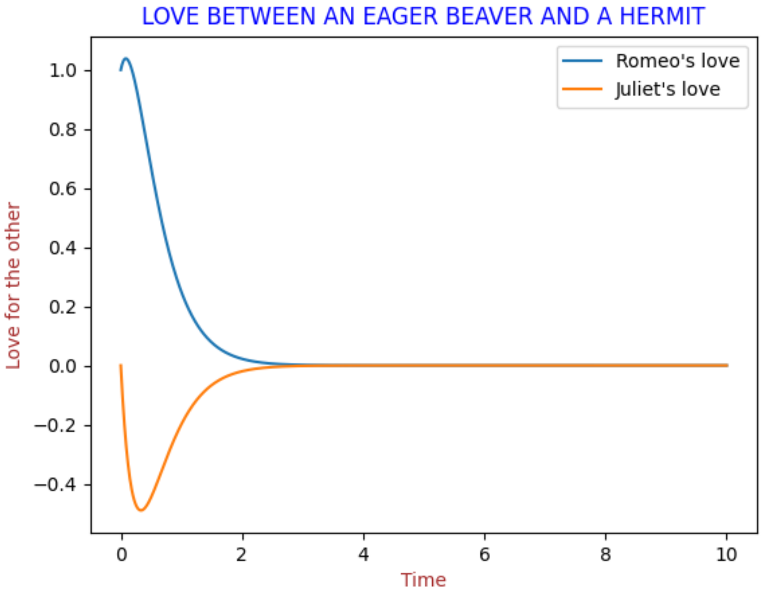
$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 4$

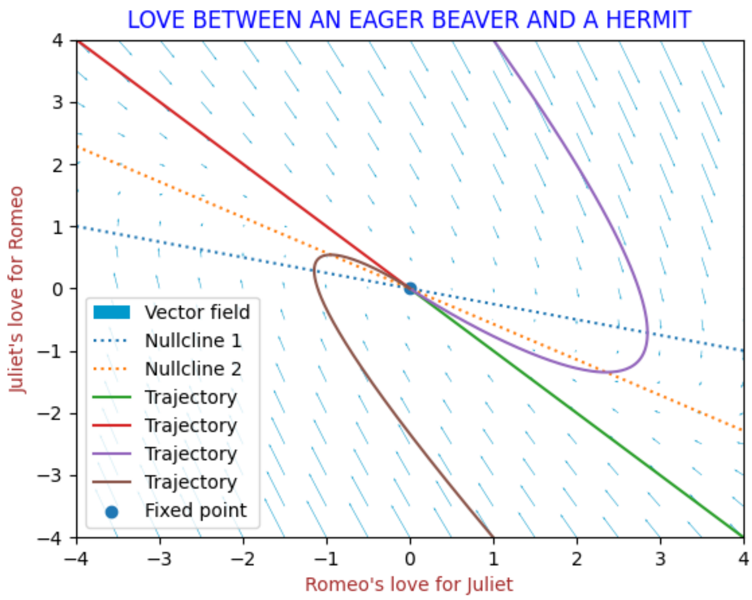
Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :

$$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) e^{-3t}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} R(t) = (1 + 4t)e^{-3t} \\ J(t) = -4te^{-3t} \end{cases}$$





3.5 Giữa Narcissistic Nerds

Trường hợp $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$:

- Ta có : $4bc > 0$ (do b, c cùng dấu)
- Theo bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a^2+d^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2} \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \geqslant 0$

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc > 0$
Vậy 2 ví dụ ở trường hợp này đều rơi vào trường hợp $\boxed{1}$
Ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{1c}$ và $\boxed{1a}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = 2R - 3J \\ J' = -4R + J \\ R_0 = 4, J_0 = 3 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng trái dấu lần lượt là $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2$ (Trường hợp $\boxed{1c}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó
   Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 5$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

   Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -2$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$

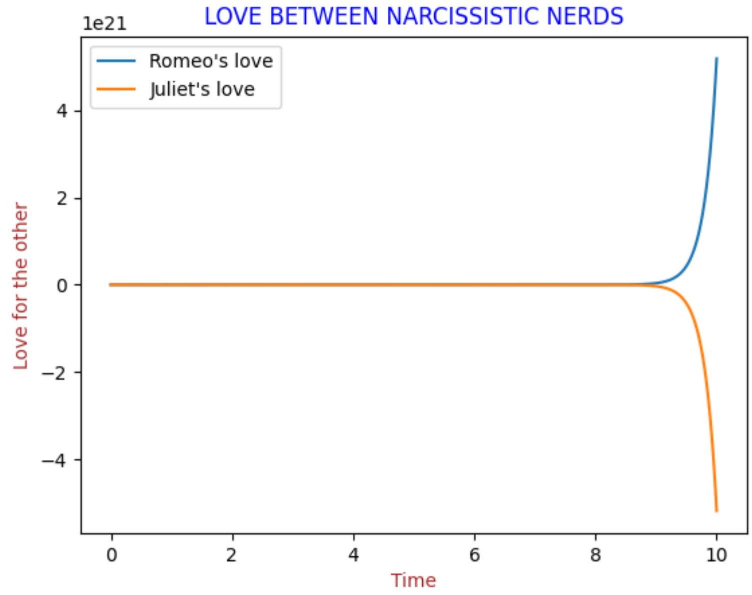
   Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1k_1e^{\lambda_1 t} + C_2k_2e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t}$

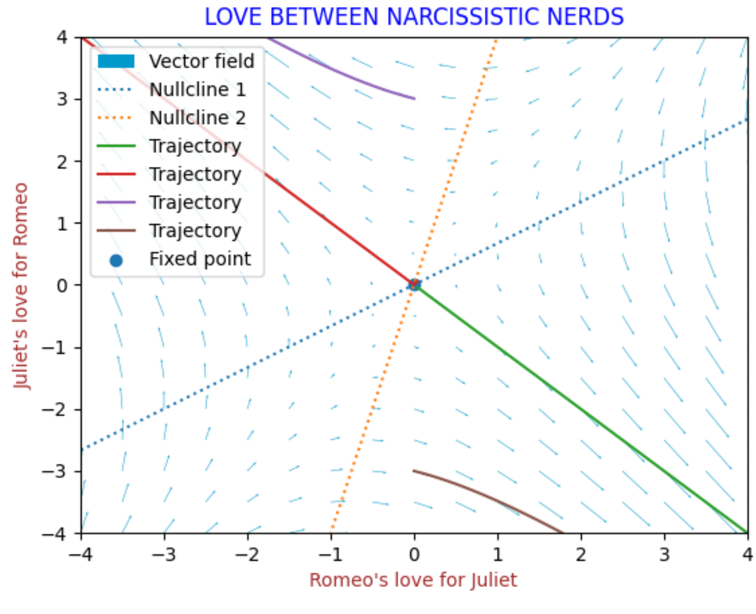
   Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 1$

   Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
   $\begin{cases} R(t) = e^{5t} + 3e^{-2t} \\ J(t) = -e^{5t} + 4e^{-2t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = 9R - 4J \\ J' = -2R + J \\ R_0 = 8, J_0 = 8 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng dương lần lượt là $\lambda_1 = 5+2\sqrt{6}, \lambda_2 = 5-2\sqrt{6}$ (Trường hợp $\boxed{\text{1a}}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 5 + 2\sqrt{6}$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 - 2\sqrt{6} \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 5 - 2\sqrt{6}$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}^T$

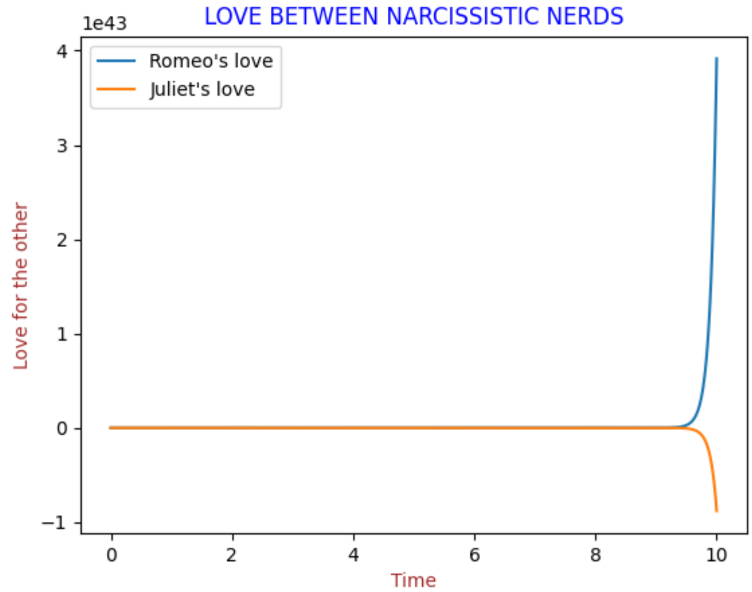
Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - 2\sqrt{6} \end{pmatrix} e^{(5+2\sqrt{6})t} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix} e^{(5-2\sqrt{6})t}$

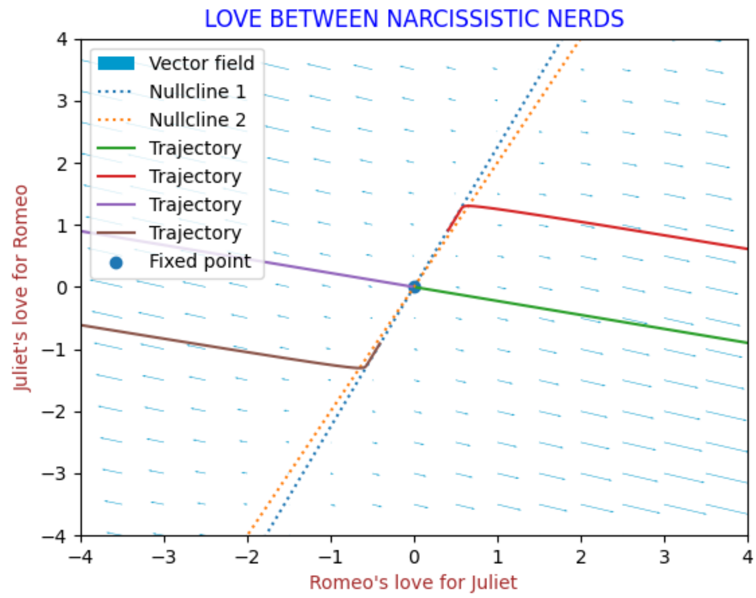
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 1$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - 2\sqrt{6} \end{pmatrix} e^{(5+2\sqrt{6})t} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix} e^{(5-2\sqrt{6})t}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$$\begin{cases} R(t) = 4e^{(5+2\sqrt{6})t} + 4e^{(5-2\sqrt{6})t} \\ J(t) = (4 - 2\sqrt{6})e^{(5+2\sqrt{6})t} + (4 - 2\sqrt{6})e^{(5-2\sqrt{6})t} \end{cases}$$





3.6 Giữa Narcissistic Nerd và Cautious Lover

Trường hợp $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$:

- Ta có : $4bc < 0$ (do b, c trái dấu)
- Và : $a^2 + d^2 - 2ad > 0$ (do a, d trái dấu)

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc$ có thể rơi vào trường hợp bất kì
Ở trường hợp này, ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{3b}$ và $\boxed{2b}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = -2R + J \\ J' = -5R + 2J \\ R_0 = 1, R_0 = 5 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$
   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng phức lần lượt là $\lambda_{1,2} = \pm i$ (Trường hợp $\boxed{3b}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

   Ứng với trị riêng $\lambda_{1,2} = \pm i$ ta tìm được vecto riêng $k_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

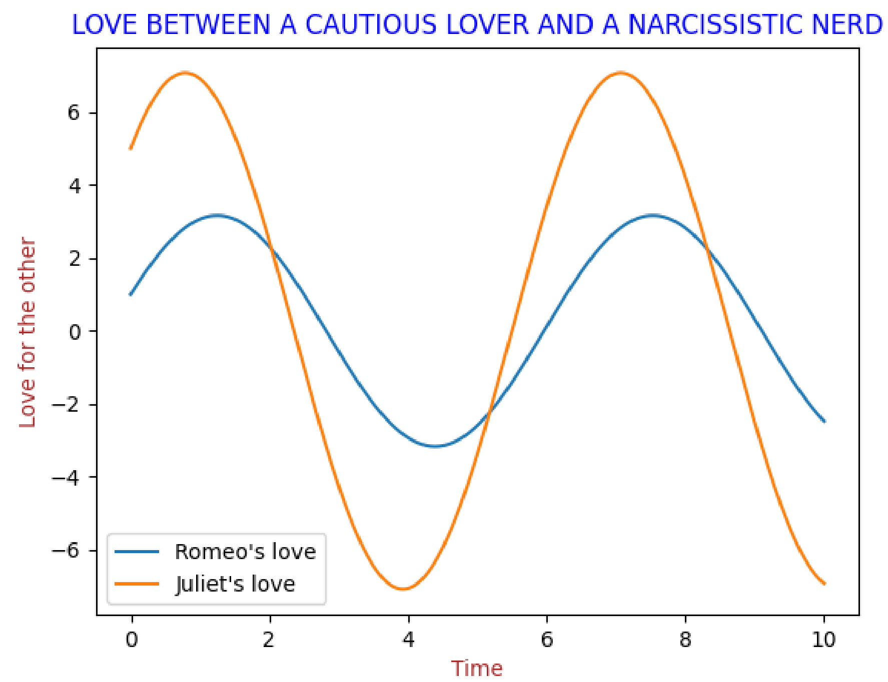
   Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{(3b)}$:
   $u = C_1(b_1 cos(\beta t) - b_2 sin(\beta t)) + C_2(b_2 cos(\beta t) + b_1 sin(\beta t))$
   $= C_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} sin(t) \right) + C_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} sin(t) \right)$

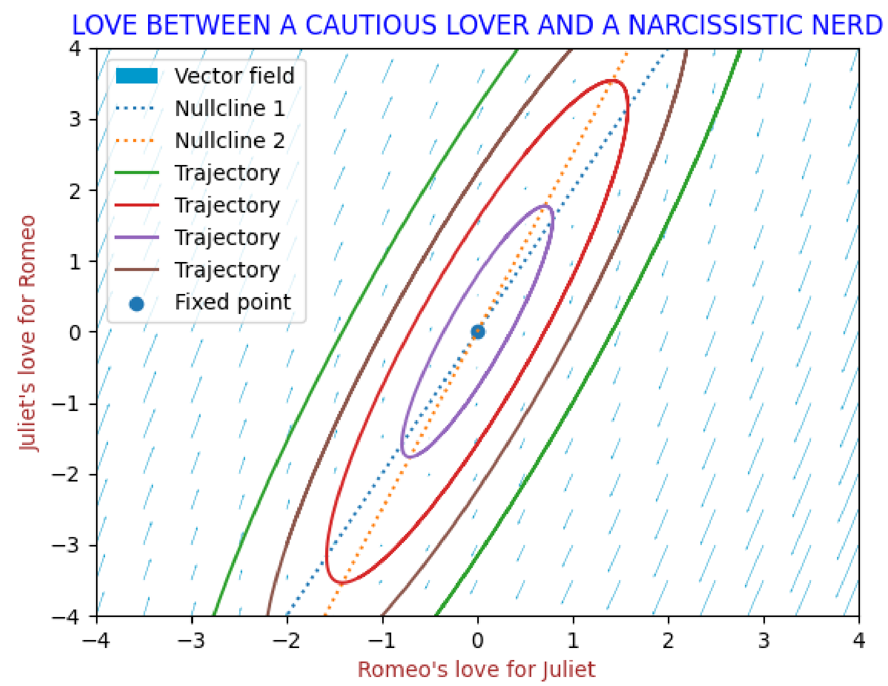
   Ta có : $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = C_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3$

   Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} sin(t) \right) + 3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} cos(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} sin(t) \right)$

   Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
   $\begin{cases} R(t) = cos(t) + 3sin(t) \\ J(t) = 5cos(t) + 5sin(t) \end{cases}$


LOVE BETWEEN A CAUTIOUS LOVER AND A NARCISSISTIC NERD
Love for the other
Time
Romeo's love
Juliet's love
0
2
4
6
8
10
−6
−4
−2
0
2
4
6


LOVE BETWEEN A CAUTIOUS LOVER AND A NARCISSISTIC NERD
Juliet's love for Romeo
Romeo's love for Juliet
Vector field
Nullcline 1
Nullcline 2
Trajectory
Trajectory
Trajectory
Trajectory
Fixed point
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = -5R + 2J \\ J' = -8R + 3J \\ R_0 = 1, J_0 = 3 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có trị riêng kép : $\lambda = -1$ (Trường hợp $\boxed{\text{2b}}$)

Thế trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A-\lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng: $k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$
Thế tiếp vecto riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)p = k$ để tìm vecto thứ hai : $p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$

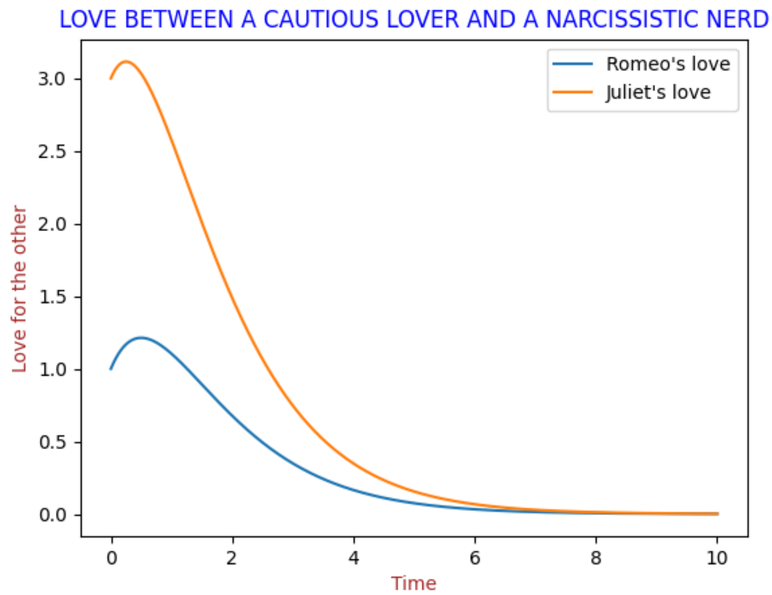
Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{\text{(2b)}}$:
$u = (C_1k + C_2(kt + p))e^{\lambda t} = \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \right) e^{-t}$

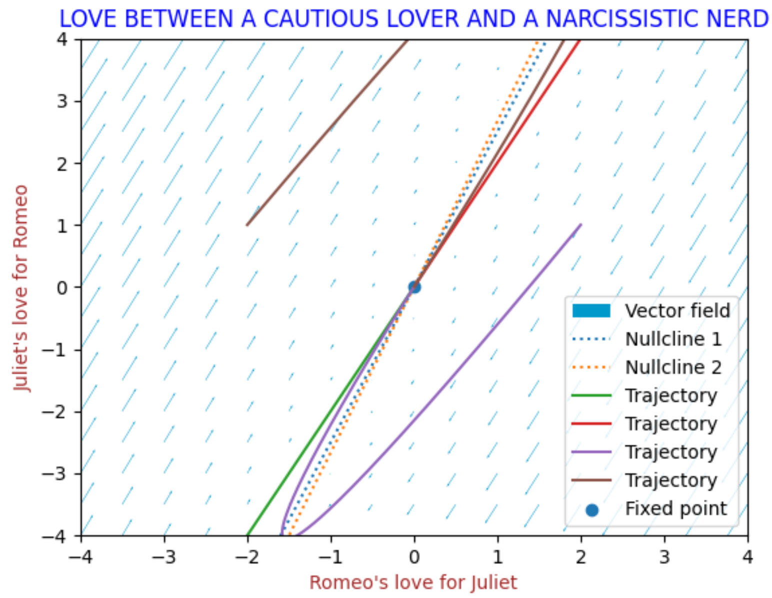
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \right) e^{-t}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$\begin{cases} R(t) = (1 + 2t)e^{-t} \\ J(t) = (3 + 4t)e^{-t} \end{cases}$





3.7 Giữa Narcissistic Nerd và Hermit

Trường hợp $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$:

- Ta có : $4bc < 0$ (do b, c trái dấu)
- Theo bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a^2+d^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2} \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \geqslant 0$

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc$ có thể rơi vào trường hợp bất kì
Ở trường hợp này, ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{\text{2b}}$ và $\boxed{\text{3a}}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = -8R + 4J \\ J' = -R - 4J \\ R_0 = -1, J_0 = 0 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có trị riêng kép : $\lambda = -6$ (Trường hợp $\boxed{\text{2b}}$)

   Thế trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng: $k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$
   Thế tiếp vecto riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)p = k$ để tìm vecto thứ hai : $p = \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}^T$

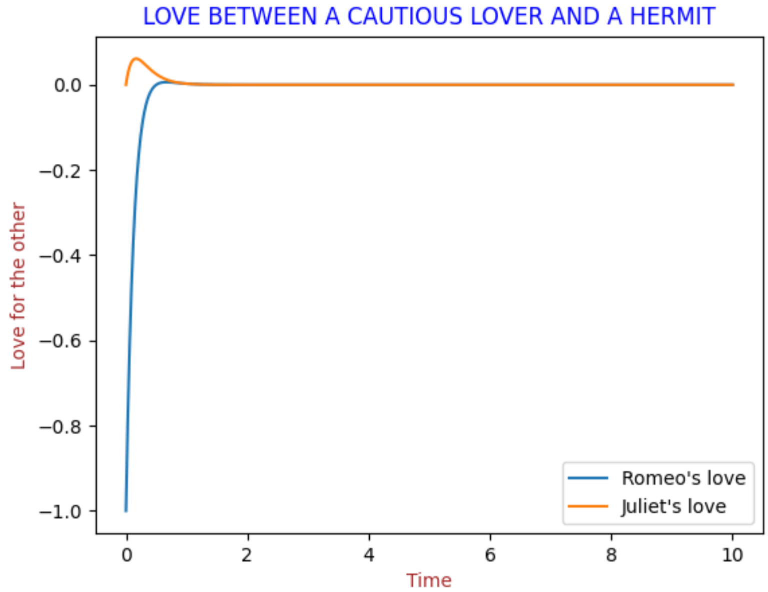
   Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{\text{(2b)}}$:
   $u = (C_1 k + C_2(kt + p))e^{\lambda t} = \left(C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right) e^{-6t}$

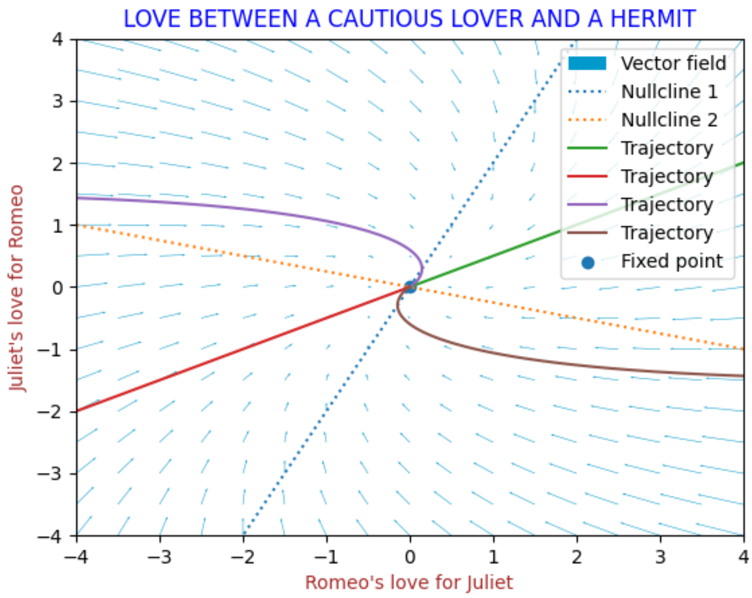
   Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 1$

   Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right) e^{-6t}$

   Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
   $\begin{cases} R(t) = (-1 + 2t)e^{-6t} \\ J(t) = te^{-6t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = -4R + J \\ J' = -2R - 2J \\ R_0 = -2, J_0 = 1 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng phức lần lượt là $\lambda_{1,2} = -3 \pm 3i$ (Trường hợp $\boxed{\text{3a}}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_{1,2} = -3 \pm 3i$ ta tìm được vecto riêng $k_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{\text{(3a)}}$:

$u = [C_1(b_1cos(\beta t) - b_2sin(\beta t)) + C_2(b_2cos(\beta t) + b_1sin(\beta t))]e^{\alpha t}$

$= \left[C_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos(3t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} sin(3t)\right) + C_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} cos(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} sin(3t)\right)\right] e^{-3t}$

Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

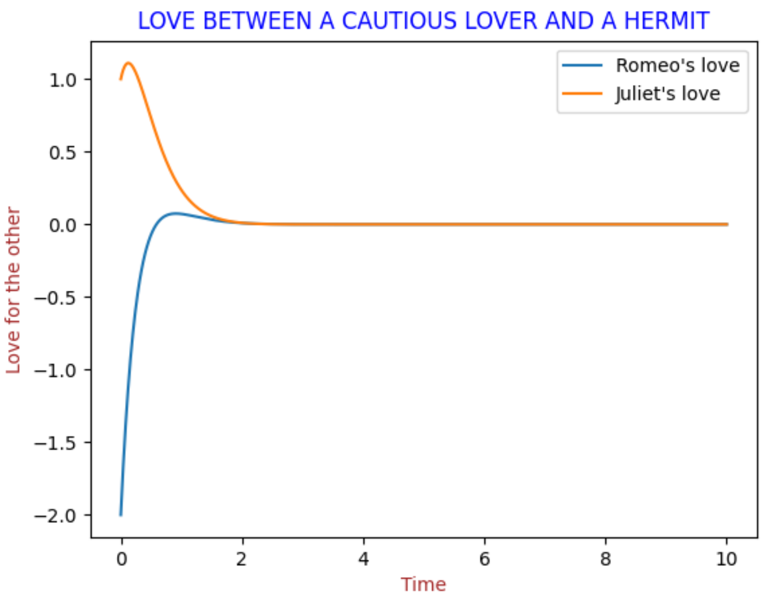
$\Rightarrow C_1 = -2, C_2 = 1$

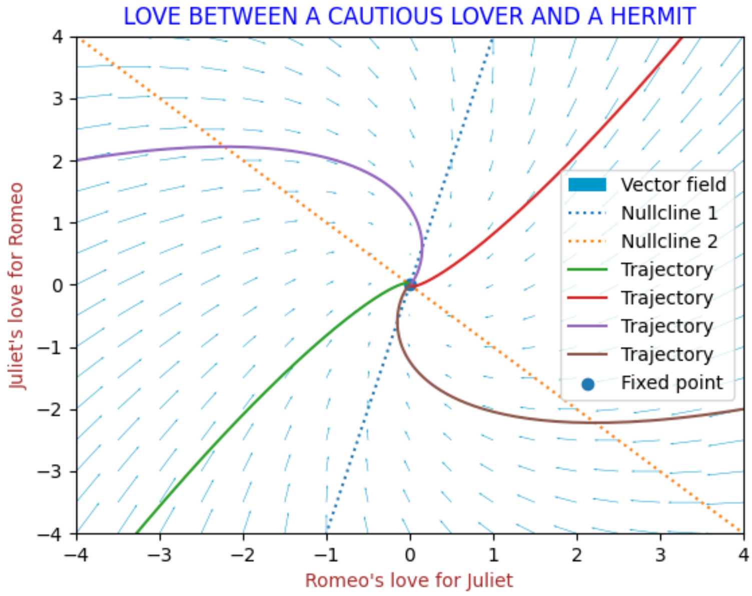
Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :

$u = \left[-2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos(3t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} sin(3t)\right) + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} cos(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} sin(3t)\right)\right] e^{-3t}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} R(t) = [-2cos(3t) + sin(3t)]e^{-3t} \\ J(t) = [cos(t) + 7sin(t)]e^{-3t} \end{cases}$$





3.8 Giữa Cautious Lovers

Trường hợp $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$:

- Ta có : $4bc > 0$ (do b, c cùng dấu)
- Theo bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a^2+d^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2} \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \geqslant 0$

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc > 0$
Vậy 2 ví dụ ở trường hợp này đều rơi vào trường hợp $\boxed{1}$
Ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{1b}$ và $\boxed{1a}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = -6R + 1J \\ J' = 3R - 4J \\ R_0 = 9, J_0 = 7 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 9 & 7 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng âm lần lượt là $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -7$ (Trường hợp $\boxed{1b}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = -3$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -7$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

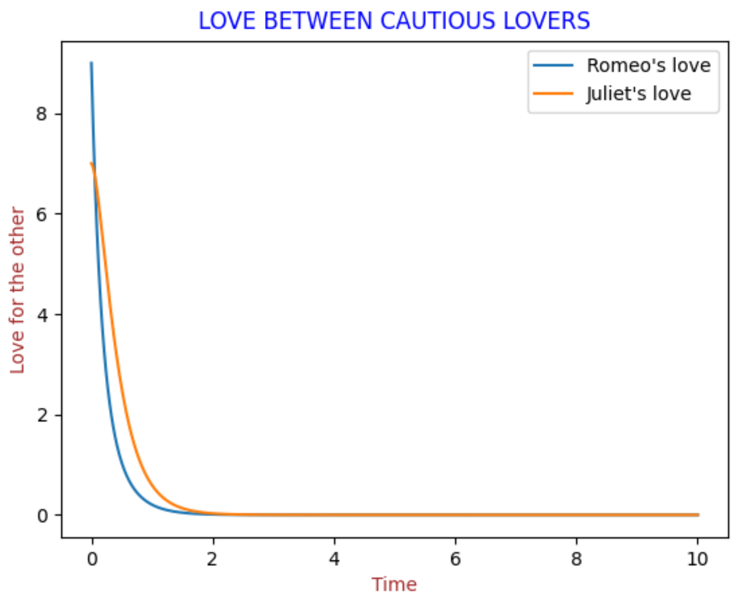
Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức [1] :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t}$

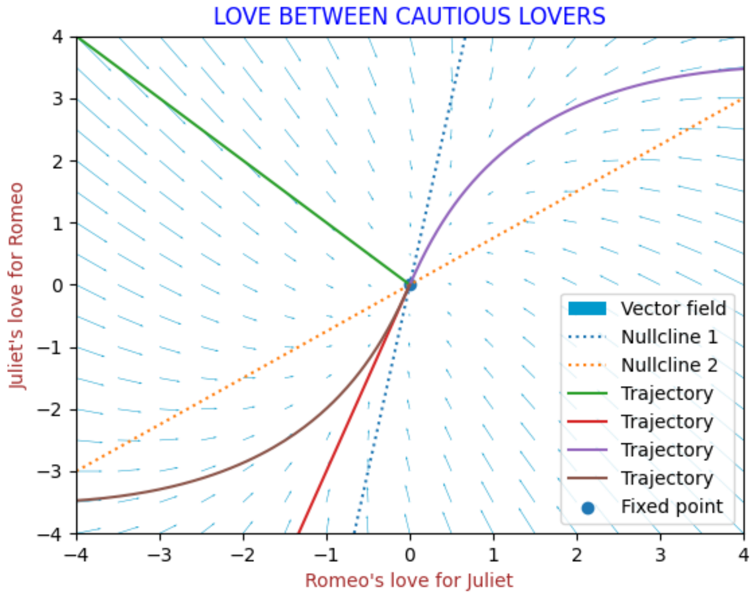
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 4, C_2 = 5$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = 4e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5e^{-7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$\begin{cases} R(t) = 4e^{-3t} + 5e^{-7t} \\ J(t) = 12e^{-3t} - 5e^{-7t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = -3R + 5J \\ J' = 6R - 4J \\ R_0 = -4, J_0 = 7 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} -4 & 7 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda - 18 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng trái dấu lần lượt là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -9$ (Trường hợp $\boxed{\text{1a}}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -9$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \end{pmatrix}^T$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:

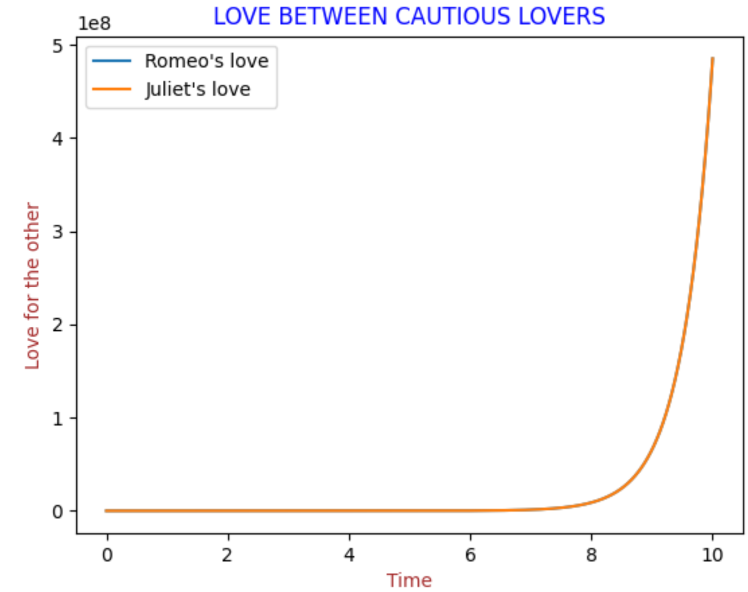
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-9t}$

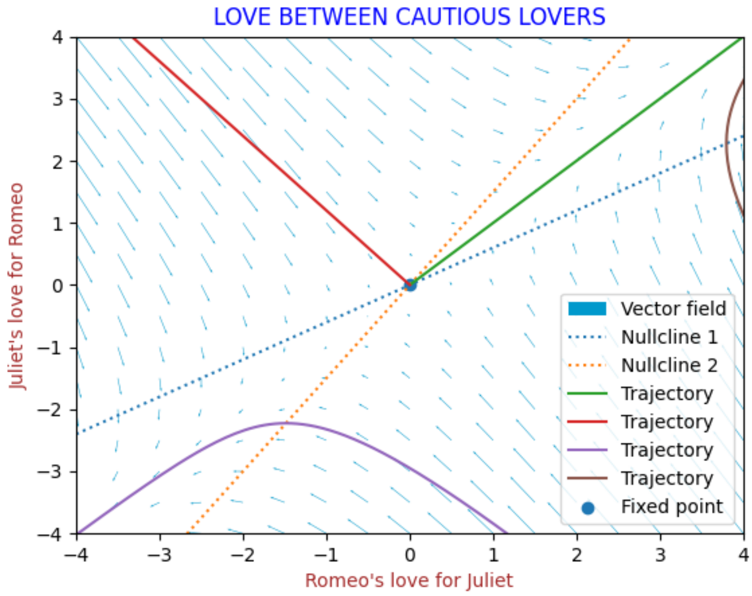
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 1$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-9t}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$\begin{cases} R(t) = e^{2t} - 5e^{-9t} \\ J(t) = e^{2t} + 6e^{-9t} \end{cases}$





3.9 Giữa Cautious Lover và Hermit

Trường hợp $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$:

- Ta có : $4bc > 0$ (do b, c cùng dấu)
- Theo bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a^2+d^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2} \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \geqslant 0$

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc > 0$
Vậy 2 ví dụ ở trường hợp này đều rơi vào trường hợp $\boxed{1}$
Ta sẽ chọn 2 ví dụ ở trường hợp $\boxed{1c}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = 2R - 5J \\ J' = -8R - J \\ R_0 = 1, J_0 = 12 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 42 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng trái dấu lần lượt là $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -6$ (Trường hợp $\boxed{1c}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

   Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 7$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

   Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -6$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}^T$

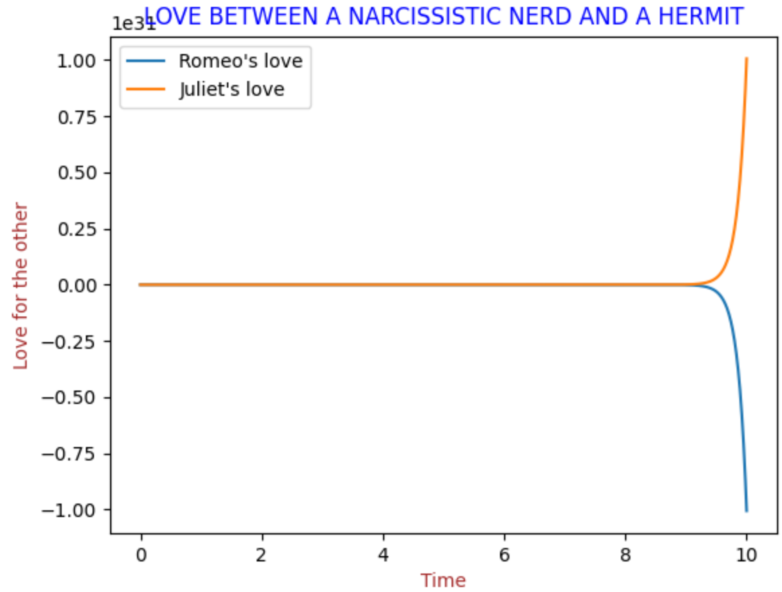
   Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1k_1e^{\lambda_1 t} + C_2k_2e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} e^{-6t}$

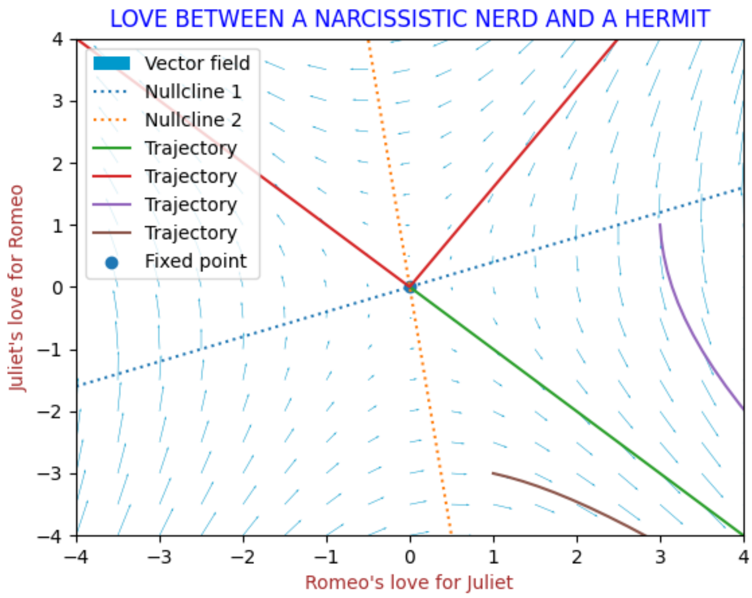
   Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow C_1 = -4, C_2 = 1$

   Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
   $u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = -4e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-6t} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

   Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
   $\begin{cases} R(t) = -4e^{7t} + 5e^{-6t} \\ J(t) = 4e^{7t} + 8e^{-6t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = 9R - 4J \\ J' = -3R - 2J \\ R_0 = 14, J_0 = 3 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 14 & 3 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda - 30 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng trái dấu lần lượt là $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -3$ (Trường hợp $\boxed{\text{1c}}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 10$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -3$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{(1)}$:

$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{10t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

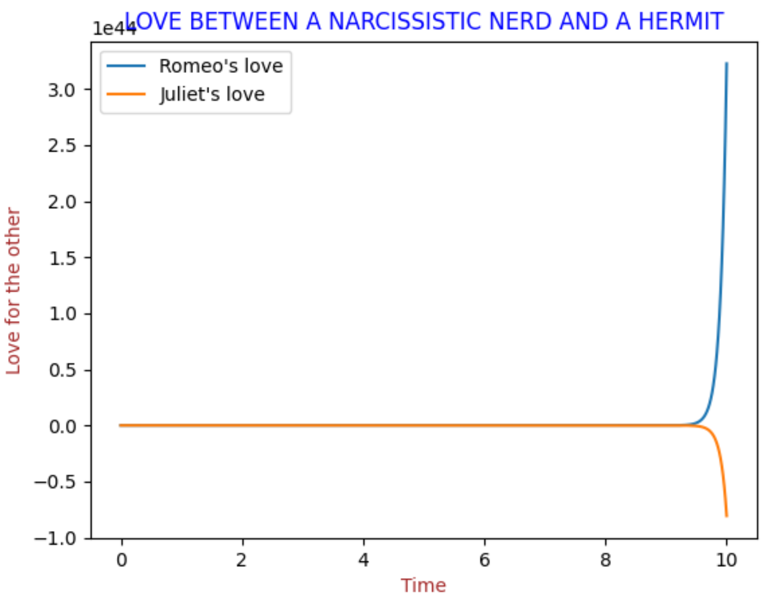
$\Rightarrow C_1 = 3, C_2 = 2$

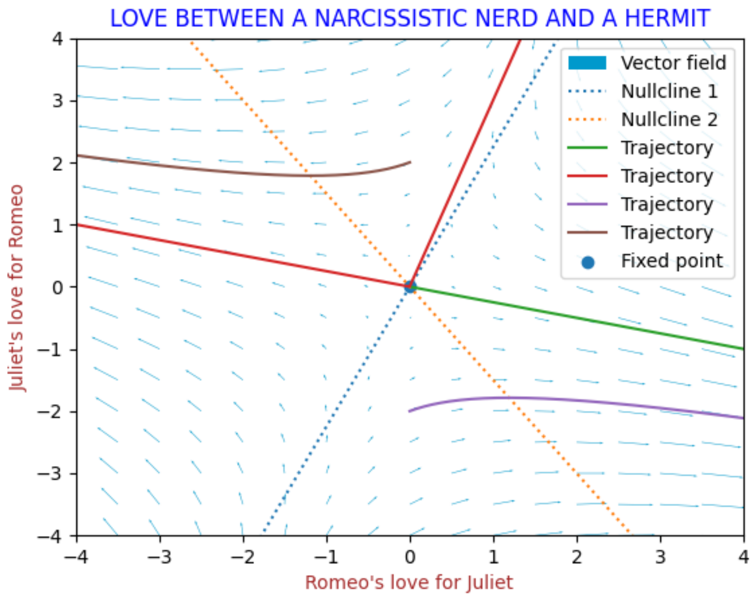
Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :

$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = 3e^{10t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$\begin{cases} R(t) = 12e^{10t} + 2e^{-3t} \\ J(t) = -3e^{10t} + 6e^{-3t} \end{cases}$





3.10 Giữa Hermits

Trường hợp $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$:

- Ta có : $4bc > 0$ (do b, c cùng dấu)
- Theo bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a^2+d^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2d^2} \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \geqslant 0$

Do đó $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc > 0$
Vậy 2 ví dụ ở trường hợp này đều rơi vào trường hợp $\boxed{1}$
Ta sẽ chọn ví dụ ở trường hợp $\boxed{1b}$ và $\boxed{1c}$

1. **Ví dụ 1 :** $\begin{cases} R' = -7R - 5J \\ J' = -3R - 5J \\ R_0 = 6, J_0 = -2 \end{cases}$

   Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix}^T$

   Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

   Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 12\lambda + 20 = 0$

   $\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng âm lần lượt là $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -10$ (Trường hợp $\boxed{1b}$)

   Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = -2$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -10$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}^T$

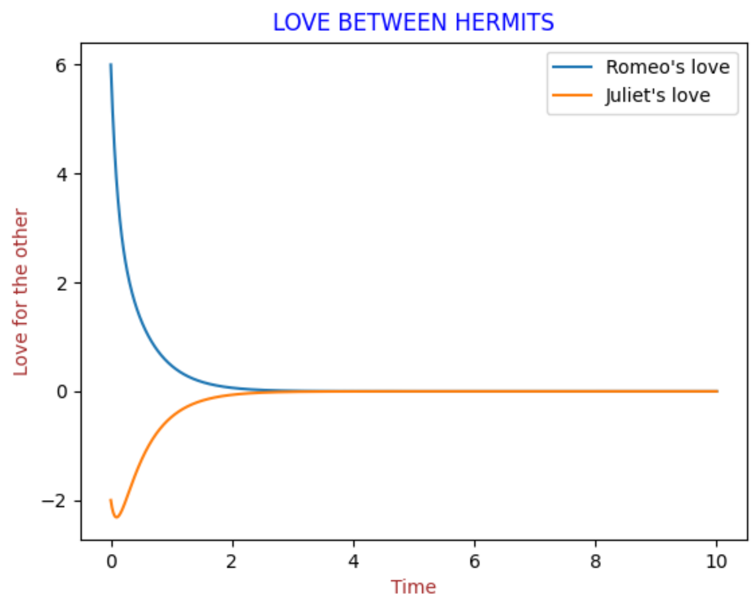
Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} e^{-10t}$

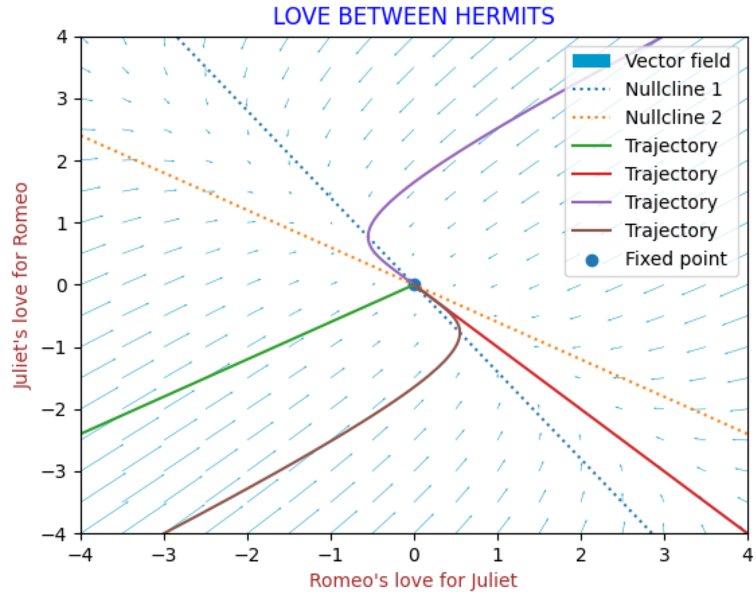
Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 5, C_2 = 1$

Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :
$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = 5e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:
$\begin{cases} R(t) = 5e^{-2t} + e^{-10t} \\ J(t) = -5e^{-2t} + 7e^{-7t} \end{cases}$





2. **Ví dụ 2 :** $\begin{cases} R' = -3R - J \\ J' = -8R - 7J \\ R_0 = 2, J_0 = 4 \end{cases}$

Chuyển hệ về dạng ma trận $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, u_0 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} u' = Au \\ u_0 = u(0) \end{cases}$

Đa thức đặc trưng : $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 13 = 0$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng âm lần lượt là $\lambda_1 = -5+2\sqrt{3}, \lambda_2 = -5-2\sqrt{3}$ (Trường hợp $\boxed{1c}$)

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = -5 + 2\sqrt{3}$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -5 - 2\sqrt{3}$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix}^T$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân theo công thức $\boxed{1}$:

$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(-5+2\sqrt{3})t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(-5-2\sqrt{3})t}$

Điều kiện khởi tạo : $u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

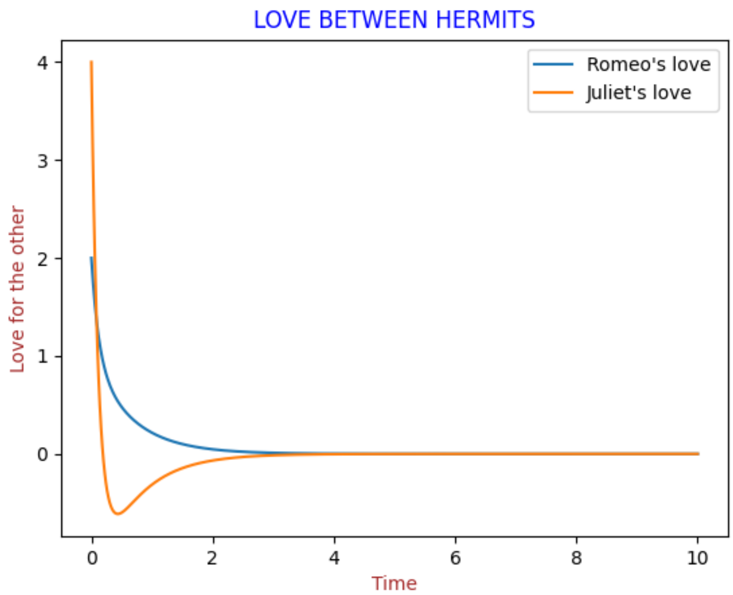
$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 1$

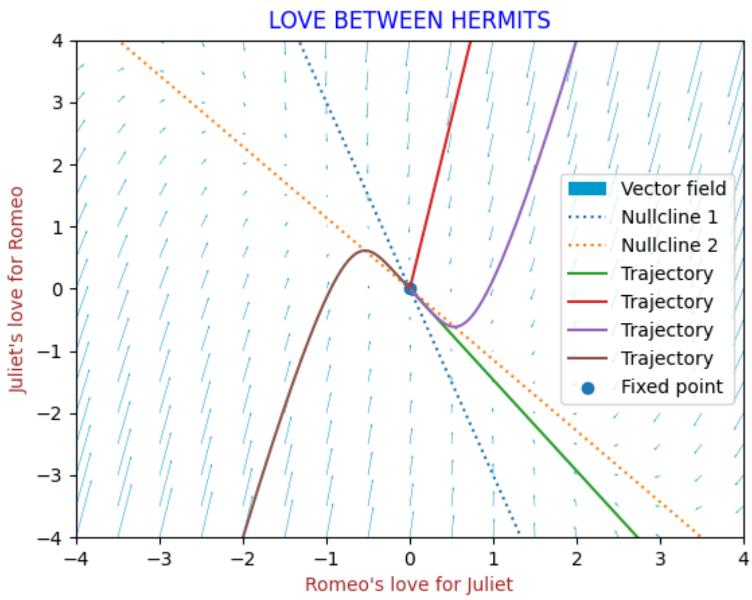
Thế vào nghiệm tổng quát, ta được :

$u = \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(-5+2\sqrt{3})t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(-5-2\sqrt{3})t}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$\begin{cases} R(t) = e^{(-5+2\sqrt{3})t} + e^{(-5-2\sqrt{3})t} \\ J(t) = (2+2\sqrt{3})e^{(-5+2\sqrt{3})t} + (2-2\sqrt{3})e^{(-5-2\sqrt{3})t} \end{cases}$





4 Bài tập 3

4.1 Hệ 13

1. **Cơ sở lí thuyết**
Ta có hệ như sau:

$$\begin{cases} R' = aR + bJ + f(t) \\ J' = cR + dJ + g(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} R & J \end{pmatrix}^T, Y' = \begin{pmatrix} R' & J' \end{pmatrix}^T, F(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \end{pmatrix}^T$
Ta có Y' = AY + F(t)

Hệ (1) luôn có nghiệm tổng quát $Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$ với $Y_h(t)$ là nghiệm của hệ thuần nhất và $Y_p(t)$ là nghiệm đặc biệt của hệ không thuần nhất.

Gọi $\Phi(t)$ là nghiệm cơ bản của hệ $Y' = AY$

Vì vậy nghiệm của $Y_h(t) = \Phi(t) \times C$ với $C = \begin{pmatrix} C_1, ...C_n \end{pmatrix}^T$ là vectơ hằng số. Giả sử vectơ này không là hằng số mà là 1 hàm số theo biến t $C(t)$ thì $Y(t) = \Phi(t) \times C(t)$, thế vào (1)

Ta được $\Phi'(t) \times C(t) + C'(t) \times \Phi(t) = A \times \ c(t) + F(t)$

Vì $\Phi'(t) = A \times \Phi(t)$ nên $C'(t) = \Phi^{-1}(t) \times F(t)$ suy ra $C(t) = C_0 + \int \Phi'(t) \times F(t)dt$

Vậy $Y(t) = \Phi(t) \times C(t) = \Phi(t) \times C_0 + \Phi(t) \times \int \Phi^{-1}(t) \times F(t)dt = Y_h(t) + Y_p(t)$

Suy ra $Y_h(t) = \Phi(t) \times C_0$ và $Y_p(t) = \Phi(t) \times \int \Phi^{-1}(t) \times F(t)dt$

2. **Các ví dụ**

   a) **Ví dụ 1 :**

$$\begin{cases} R' = R - 2J + t^2 \\ J' = R + 4J - 2 \end{cases} \quad (1)$$

Có $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ và $F(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -2 \end{pmatrix}$
Và Đa thức đặc trưng : $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng lần lượt là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó
Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 3$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$

Ta có $Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$

$Y_h(t) = \Phi \times C_0 = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Với $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix}$ và $\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ -e^{-3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}$

$Y_h(t) = \Phi(t) \times C_0$ và $Y_p(t) = \Phi(t) \times \int \Phi^{-1}(t) \times F(t) dt = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ -e^{-3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} t^2 \\ -2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times e^{-2t}t^2 - \frac{1}{2} \times e^{-2t}t + \frac{3}{4} \times e^{-2t} \\ \frac{1}{3} \times e^{-3t}t^2 + \frac{2}{9} \times e^{-3t}t - \frac{34}{27} \times e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \times t^2 - \frac{7}{9} \times t + \frac{13}{54} \\ \frac{1}{6} \times t^2 + \frac{5}{18} \times t + \frac{55}{108} \end{pmatrix}$

Có $Y(t) \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = Y_h(t) + Y_p(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \times t^2 - \frac{7}{9} \times t + \frac{13}{54} \\ \frac{1}{6} \times t^2 + \frac{5}{18} \times t + \frac{55}{108} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{9}t + \frac{13}{54} \\ -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} + \frac{1}{6}t^2 + \frac{5}{18}t + \frac{55}{108} \end{pmatrix}$

b) **Ví dụ 2 :**

$$\begin{cases} R' = -6R + 2J + e^t \\ J' = -3R + 1J - t \end{cases} \quad (2)$$

Có $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ và $F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -t \end{pmatrix} \rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng lần lượt là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 5$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$

Với $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-5t} \\ 3 & -e^{5t} \end{pmatrix}$ và $\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5}e^{5t} & -\frac{1}{5}e^{5t} \end{pmatrix}$

Có $Y(t) \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = Y_h(t) + Y_p(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5}t^2 - \frac{2}{25}t + \frac{2}{125} \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{25}t + \frac{1}{125} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 e^{-5t} + \frac{1}{5}t^2 - \frac{2}{25}t + \frac{2}{125} \\ 3C_1 + C_2 e^{-5t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{25}t + \frac{1}{125} \end{pmatrix}$

c) **Ví dụ 3 :**

$$\begin{cases} R' = 3J + 20sin(t) \\ J' = 3R + 10cos(t) \end{cases} \quad (3)$$

Có $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ và $F(t) = \begin{pmatrix} 20sin(t) \\ 10cos(t) \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng lần lượt là $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 3$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = -3$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$

Với $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-3t} \\ e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$ và $\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$

Có $Y(t) \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = Y_h(t) + Y_p(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5cost \\ -5sint \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} - C_2 e^{-3t} - 5cost \\ C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} - 5sint \end{pmatrix}$

d) **Ví dụ 4 :**

$$\begin{cases} R' = 2R - J + e^t \\ J' = 3R - 2J + e^{-t} \end{cases} \quad (4)$$

Có $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ và $F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng lần lượt là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = -1$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

Với $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$ và $\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{e^t}{2} & \frac{e^t}{2} \\ \frac{3e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$

Có $Y(t) \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} = Y_h(t) + Y_p(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}t}{2} + \frac{3e^t t}{2} + \frac{e^{-t}}{4} \\ -\frac{3e^t}{4} + \frac{3e^{-t}t}{2} + \frac{3e^t t}{2} + \frac{e^{-t}}{4} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^t - \frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}t}{2} + \frac{3e^t t}{2} + \frac{e{-t}}{4} \\ 3C_1 e^{-t} + C_2 e^t - \frac{3e^t}{4} + \frac{3e^{-t}t}{2} + \frac{3e^t t}{2} + \frac{e^{-t}}{4} \end{pmatrix}$

e) **Ví dụ 5 :**

$$\begin{cases} R' = R - 2J + e^{t^2} \\ J' = R + 4J + e^{-t^2} \end{cases} \quad (5)$$

Có $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ và $F(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{-t^2} \end{pmatrix}$
$\rightarrow$ Ma trận A có 2 trị riêng lần lượt là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

Ta lần lượt thế 2 trị riêng vừa tìm được vào phương trình $(A - \lambda I)k = 0$ để tìm vecto riêng ứng với nó
Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta tìm được vecto riêng $k_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}^T$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 3$ ta tìm được vecto riêng $k_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T$

Với $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} & -e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$ và $\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{2t}} & -\frac{1}{e^{2t}} \\ \frac{1}{e^{3t}} & \frac{2}{e^{3t}} \end{pmatrix}$
$Y_h(t) = \Phi(t) \times C_0$ và $Y_p(t) = \Phi(t) \times \int \Phi'(t) \times F(t)dt = \begin{pmatrix} -2e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -e^{t^2-2t} - e^{-t^2-2t} \\ e^{t^2-3t} + 2e^{-t^2-3t} \end{pmatrix} dt$
Đến đây, ta không thể tính được tích phân $\int \begin{pmatrix} -e^{t^2-2t} - e^{-t^2-2t} \\ e^{t^2-3t} + 2e^{-t^2-3t} \end{pmatrix} dt$ thông qua các phương pháp đại số thông thường , để giải được ví dụ này, ta cần phải tham khảo đến phương pháp Euler được trình bày ở phần sau.

4.2 Hệ 14

Dạng tổng quát của hệ phương trình vi phân 2 ẩn :

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) \\ J' = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Với f và g là 2 hàm số thực phụ thuộc vào t, R, J. Ta cùng đi tìm điều kiện của f và g để hệ trên có nghiệm.

- **Điều kiện Lipschitz**
  Hàm f(x,y) thỏa điều kiện Lipschitz trong miền D của Oxy theo biến y nếu :
  $\exists \lambda > 0, \forall (x, y_1), (x, y_2) \epsilon D$ và $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \lambda\, |y_1 - y_2|$

  Nếu miền D lồi và hàm f(x,y) có đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ bị chặn trong miền D, khi đó $\exists \lambda > 0$ (λ được gọi là hằng số Lipschitz) sao cho $|f'_y(x, y) \leq \lambda|$ thì hàm trong miền D thỏa điều kiện Lipschitz với hằng số λ

- **Sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình vi phân thường bậc nhất**
  Cho phương trình vi phân thường (ODE – ordinary differential equations) $x' = f(t, x)$ (1) với điều kiện ban đầu tại $t = t_0$ là $x = x_0$.

  Hàm $f(t, x)$ sẽ có các tính chất sau:
  Hàm f(t,x) xác định và liên tục tại một miền D nào đó chứa điểm (t_0, x_0)
  Hàm f(t,x) trong miền D $= \{(t, x) \in R^2 |\ |t - t_0| \leq a\ , |x - x_0| \leq b\}$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến x với hằng số $\lambda > 0,\ \forall\ (t, y_1), (t, y_2) \in D$ và $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \lambda\, |x_1 - x_2|$

Khi đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm $x = \phi(t)$ của (1) thỏa điều kiện $x_0 = \phi(t_0)$ trên đoạn lân cận $[t_0 - h, t_0 + h], h > 0$ và $h = min(a, \frac{b}{M})$ và $M = max_{t,x \in D}|f(t,x)|$

Các ví dụ

1. **Ví dụ 1 :**

$$\begin{cases} \dot{R} = -J + cos(t) \\ \dot{J} = 3R - 4J + 4cos(t) - sin(t) \\ R(0) = 5, J(0) = 6 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t,R,J) = -J + cos(t)$ có
$f(0,5,6) = -6 + cos(0) = -5$ và $\frac{df}{dR} = 0$ và $\frac{df}{dJ} = -1$
Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm (0,5,6) nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

Xét hàm $g(t,R,J) = 3R - 4J + 4cos(t) - sint(t)$ có
$g(0,5,6) = -5$ và $\frac{dg}{dR} = 3$ và $\frac{dg}{dJ} = -4$
Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm (0,5,6) nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

2. **Ví dụ 2 :**

$$\begin{cases} \dot{R} = t \times arctan(R) \\ \dot{J} = t\sqrt{J-3} \\ R(0) = 0, J(0) = 3 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t,R,J) = t \times arctan(R)$ có $f(0,0,3) = 0$ và $\frac{df}{dR} = \frac{t}{1+R^2} = 0$ và $\frac{df}{dJ} = 0$
Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm (0,0,3) nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

Xét hàm $g(t,R,J) = t\sqrt{J-3}$ có $g(0,0,3) = 0$ và $\frac{dg}{dR} = 0$ và $\frac{dg}{dJ} \to \infty$ không xác định.
Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm (0,0,3) nên có tồn tại nghiệm nhưng không phải là nghiệm duy nhất

3. **Ví dụ 3 :**

$$\begin{cases} \dot{R} = 3R + J \\ \dot{J} = -R + J \\ R(0) = 1, J(0) = 0 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t,R,J) = 3R + J \times arctan(R)$ có $f(0,1,0) = 3$ và $\frac{df}{dR} = 3$ và $\frac{df}{dJ} = 1$
Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm (0,1,0) nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

Xét hàm $g(t,R,J) = -R + J$ có $g(0,1,0) = -1$ và $\frac{dg}{dR} = -1$ và $\frac{dg}{dJ} = 1$
Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm (0,1,0) nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

4. **Ví dụ 4 :**

$$\begin{cases} \dot{R} = 1 - \frac{1}{J} \\ \dot{J} = \frac{1}{R-t} \\ R(0) = 3, J(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Xét hàm $f(t,R,J) = 1 - \frac{1}{J}$ có $f(0,3,\frac{1}{3}) = -2$ và $\frac{df}{dR} = 0$ và $\frac{df}{dJ} = 9$

Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm $(0,3,\frac{1}{3})$ nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

Xét hàm $g(t,R,J) = \frac{1}{R-t}$ có $g(0,3,\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ và $\frac{dg}{dR} = -\frac{1}{9}$ và $\frac{dg}{dJ} = 0$
Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm $(0,3,\frac{1}{3})$ nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

5. **Ví dụ 5 :**

$$\begin{cases} \dot{R} = (2sint - cost)R + (sint - cost)J \\ \dot{J} = 2(cost - sint)R + (2cost - sint)J \\ R(0) = 3, J(0) = 1 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t,R,J) = (2sint - cost)R + (sint - cost)J$ có
$f(0,3,1) = -4$ và $\frac{df}{dR} = -1$ và $\frac{df}{dJ} = -1$

Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm $(0,3,1)$ nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất
Xét hàm $g(t,R,J) = 2(cost - sint)R + (2cost - sint)J$ có
$g(0,3,1) = 8$ và $\frac{dg}{dR} = 2$ và $\frac{dg}{dJ} = 2$

Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm $(0,3,1)$ nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

6. **Ví dụ 6 :**

$$\begin{cases} \dot{R} = J^2 + sint(t) \\ \dot{J} = \frac{R}{2J} \\ R(0) = \frac{1}{2}, J(0) = 3 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t,R,J) = J^2 + sint(t)$ có
$f(0,\frac{1}{2},3) = 9$ và $\frac{df}{dR} = 0$ và $\frac{df}{dJ} = 6$

Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm $(0,\frac{1}{2},3)$ nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất
Xét hàm $g(t,R,J) = \frac{R}{2J}$ có
$g(0,\frac{1}{2},1) = \frac{1}{12}$ và $\frac{dg}{dR} = \frac{1}{6}$ và $\frac{dg}{dJ} = -\frac{1}{36}$

Vậy hàm liên tục tại lân cận điểm $(0,\frac{1}{2},3)$ nên có tồn tại nghiệm và có nghiệm duy nhất

5 Bài tập 4

Quan sát lại một lần nữa IVP tổng quát của bài tập trước :

$$\begin{cases} \dot{R} = f(t,R,J) \\ \dot{J} = g(t,R,J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Thông qua các ví dụ ở phần 4, có thể thấy ở một số ví dụ ta vẫn có thể tìm ra nghiệm đúng một cách rõ ràng thông qua một số bước biến đổi toán học. Tuy nhiên, ở một vài trường hợp, chúng ta không thể tìm ra nghiệm rõ ràng như là ví dụ 2e (nó vẫn tồn tại nhưng thường không thể biểu diễn dưới dạng các hàm số sơ cấp và tích phân của nó). Đó là lí do tại sao chúng ta sử dụng phương pháp biểu diễn dưới dạng số (khi điều kiện tồn tại của nghiệm được đảm bảo). Ở bài tập lớn lần này, chúng ta sẽ thảo luận về phương pháp Euler.

5.1 Phương pháp Explicit Euler

1. **Cơ sở lí thuyết**

   Ta sẽ xấp xỉ nghiệm $\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$ bằng dãy $\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}_n$ sao cho :

$$\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_0, R_0, J_0)h \\ J_1 = J_0 + g(t_0, R_0, J_0)h \\ R(t_0) = R_0, J(t_0) = J_0 \end{cases}$$

   Với $h = t_1 - t_0$ là time step, ta ước tính xấp xỉ giá trị R, J tại thời điểm $t = t_1$ bằng cách truyền vào hàm f, g giá trị (t_0, R_0, J_0), sau đó ta tiếp tục truyền vào hàm f, g giá trị (t_1, R_1, J_1) vừa tìm để ước tính xấp xỉ giá trị R, J tại thời điểm t_2 và cứ tiếp tục ước tính xấp xỉ như thế cho đến n giá trị. Cứ như thế ta có được công thức tổng quát:

$$\begin{cases} R_{k+1} = R_k + f(t_k, R_k, J_k)h \\ J_{k+1} = R_k + g(t_k, R_k, J_k)h \\ t_k = t_0 + kh \\ R(t_0) = R_0, J(t_0) = J_0 \end{cases}$$

   Phương pháp làm trên được gọi là phương pháp **Explicit Euler**

2. **Local Truncation Error**

   - Khi ước tính xấp xỉ nghiệm của IVP, có một vài sai số xảy ra như sai số làm tròn hay local truncation error,.... Tuy nhiên, ở bài tập lớn lần này, ta sẽ bỏ qua sai số làm tròn, chỉ xét đến local truncation error.
   - Local Truncation Error là sai số được gây ra tại một bước đơn của phương pháp Euler, giả sử rằng ta bắt đầu ở bước này với nghiệm đúng và bỏ qua sai số làm tròn. Nó được gọi là Local Truncation Error của phương pháp Euler.
   - Ta có $R(t_0) = R_0, J(t_0) = J_0$ là nghiệm của hệ tại thời điểm ban đầu t_0 (thời điểm ta bắt đầu ước tính xấp xỉ). Ta gọi $R(t_1), J(t_1)$ là nghiệm đúng của hệ và R_1, J_1 là giá trị được ước tính xấp xỉ bằng phương pháp Euler.
     Khi đó Local Truncation Error tại thời điểm t_1 được tính theo công thức :

$$\epsilon(t_1) := \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2}$$

   $*$ Ta cùng đi chứng minh $\epsilon(t_1)$ tỉ lệ thuận với h^2

   - Ban đầu ta có : $\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_0, R_0, J_0)h \\ J_1 = J_0 + g(t_0, R_0, J_0)h \\ R(t_0) = R_0, J(t_0) = J_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = R(t_0) + f(t_0, R(t_0), J(t_0))h \\ J_1 = J(t_0) + g(t_0, R(t_0), J(t_0))h \end{cases}$$

Mà : $\begin{cases} R'(t_0) = f(t_0, R(t_0), J(t_0)) \\ J'(t_0) = g(t_0, R(t_0), J(t_0))h \end{cases}$

Từ đó suy ra : $\begin{cases} R_1 = R(t_0) + R'(t_0)h \\ J_1 = J(t_0) + J'(t_0)h \end{cases}$ (1)

- Áp dụng định lí Taylor, ta lại có :
$\begin{cases} R(t_1) = R(t_0) + R'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2!}R''(t_0)(t_1 - t_0)^2 + ... + \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_0)(t_1 - t_0)^n \\ J(t_1) = J(t_0) + J'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2!}J''(t_0)(t_1 - t_0)^2 + ... + \frac{1}{n!}J^{(n)}(t_0)(t_1 - t_0)^n \\ h = t_1 - t_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} R(t_1) = R(t_0) + R'(t_0)h + \frac{1}{2!}R''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_0)h^n \\ J(t_1) = J(t_0) + J'(t_0)h + \frac{1}{2!}J''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}J^{(n)}(t_0)h^n \end{cases}$ (2)

- Thế (1) và (2) vào công thức tính Local Truncation Error ban đầu :
Ta có :
$R(t_1) - R_1 = (R(t_0) + R'(t_0)h + \frac{1}{2!}R''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_0)h^n) - (R(t_0) + R'(t_0)h)$
$= \frac{1}{2!}R''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_0)h^n$
$J(t_1) - J_1 = (J(t_0) + J'(t_0)h + \frac{1}{2!}J''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}J^{(n)}(t_0)h^n) - (J(t_0) + J'(t_0)h)$
$= \frac{1}{2!}J''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}J^{(n)}(t_0)h^n$
Vậy : $\epsilon(t_1) := \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2}$
$= \sqrt{[\frac{1}{2!}R''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_0)h^n]^2 + [\frac{1}{2!}J''(t_0)h^2 + ... + \frac{1}{n!}J^{(n)}(t_0)h^n]^2}$
- Khi h tiến dần về 0, ta có thể kết luận được $\epsilon(t_1)$ tỉ lệ thuận với h^2

3. **Tính ổn định của phương pháp Explicit Euler**

a) Mô hình về tính ổn định :

- Ta cùng đi xét hệ : $\begin{cases} y'(t) = f(t, y) = \lambda y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

  Nghiệm của hệ trên là : $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$
- Ta xét hệ tương tự như trên nhưng thay đổi giá trị ban đầu : $y_s(0) = y_0 + s$
  Nhiệm của hệ lúc này trở thành : $y_s(t) = (y_0 + s)e^{\lambda t}$
- Vì vậy trong trường hợp $\lambda \leqslant 0$ một thay đổi nhỏ trong điều kiện khởi tạo chỉ gây ra thay đổi không đáng kể trong nghiệm vì vậy mô hình bài toán có tính ổn định. Tuy nhiên trong trường hợp $\lambda > 0$ một thay đổi lớn trong nghiệm sẽ xảy ra, lúc này mô hình bài toán trở nên không ổn định. Vì vậy, khi xem xét tính ổn định của phương pháp số, ta chỉ xem xét trường hợp $\lambda \leqslant 0$

b) Tính ổn định của phương pháp Explicit Euler :

- Xét mô hình $\lambda \leqslant 0$ và $f(t, y) = \lambda y(t)$:
  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$
  Vì vậy : $y_n = (1 + h\lambda)^n y_0$
- Bởi vì mô hình bài toán luôn có một nghiệm phân rã theo cấp số mũ, một phương pháp số ổn định thì nên loại bỏ những trường hợp tương tự như vậy. Bởi vậy, để đảm bảo tính ổn định cho phương pháp Euler, chúng ta cần hệ số tăng trưởng

$|1 + \lambda h| < 1$.
Với $\lambda \leqslant 0 : -2 < \lambda h < 0 \Leftrightarrow h < \frac{-2}{\lambda}$

- Vì vậy, khi step size h lớn, phương pháp **Explicit Euler** sẽ trở nên không ổn định. Để giải quyết về vấn đề này, ta sẽ tiếp tục thảo luận về phương pháp **Implicit Euler** được trình bày ở phần tiếp theo.

5.2 Phương pháp Implicit Euler

1. **Cơ sở lí thuyết**
Giống với phương pháp **Explicit Euler**, giả sử rằng ban đầu ta có giá trị khởi tạo R_0, J_0 tại $t = t_0$, sau đó ta sử dụng xấp xỉ Taylor để ước tính xấp xỉ giá trị của R, J tại$t = t_1$ với time step $h = t_1 - t_0$, tuy nhiên khác nhau ở chỗ, phương pháp **Implicit Euler** sử dụng chuỗi Taylor xung quanh điểm $R(t_1), J(t_1)$:

$$\begin{cases} R_{k+1} = R_k + f(t_{k+1}, R_{k+1}, J_{k+1})h \\ J_{k+1} = R_k + g(t_{k+1}, R_{k+1}, J_{k+1})h \\ t_k = t_0 + kh \\ R(t_0) = R_0, J(t_0) = J_0 \end{cases}$$

2. **Tính ổn định của phương pháp Implicit Euler**
Ở phần 3, ta đã đi khảo sát tính ổn định của phương pháp **Explicit Euler**, ta đã kết luận rằng nó chỉ ổn định với time step nhỏ. Ở phần này, ta sẽ cùng đi khảo sát tính ổn định của phương pháp **Implicit Euler**
   - Xét mô hình $\lambda \leqslant 0$ và $f(t, y) = \lambda y(t)$:
   $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1} = \frac{y_n}{1-h\lambda}$
   Vì vậy : $y_n = (\frac{1}{1-h\lambda})^n y_0$
   - Tương tự như chứng minh tính ổn định của phương pháp **Explicit Euler**, ta có hệ số tăng trưởng $(\frac{1}{1-h\lambda}) < 1$.
   Với $\lambda \leqslant 0$: ta thấy rằng bất đẳng thức trên luôn đúng với mọi $h > 0$)
   - Vì vậy, ta có thể kết luận rằng phương pháp **Implicit Euler** luôn ổn định ngay cả khi h lớn.

3. **Giải các ví dụ bằng phương pháp Implicit Euler**
Chúng ta cùng đi giải các ví dụ bằng ngôn ngữ lập trình Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def plot(t, R, J):
    plt.plot(t, R, label="Romeo's love")
    plt.plot(t, J, label="Juliet's love")
    plt.xlabel("Time", color="brown")
    plt.ylabel("Love for the other", color="brown")
    plt.title("Love between Romeo and Juliet")
    plt.legend()
    plt.show()

def implicit_euler1(t1, R0, J0, h):
    R1 = (R0+J0*h/(1-h))/(1-h-t1*h*h/(1-h))
```

```
    J1 = (J0+R1*t1*h)/(1-h)
    return R1, J1

def implicit_euler2(t1, R0, J0, h):
    R1 = R0/(1-J0*t1*h/(1-(np.e**t1)*h))
    J1 = J0/(1-(np.e**t1)*h)
    return R1, J1

def implicit_euler3(t1, R0, J0, h):
    R1 = (R0/(1-np.sin(t1))*h)
    J1 = J0+(R0/(1-np.sin(t1)*h))*(np.e)*np.cos(t1)
    return R1, J1

def implicit_euler4(t1, R0, J0, h):
    R1 = R0/(1-h*np.log(t1))
    J1 = (J0+R1*h)/(1+h*np.e**t1)
    return R1, J1

def implicit_euler5(t1, R0, J0, h):
    R1 = (R0+h*np.sin(t1**2))/(1-h*2)
    J1 = (J0+np.cos(R1)*h)/(1-h*2)
    return R1, J1

def ex4(R0, J0,  t0, h, implicit_euler):
    R = [R0]
    J = [J0]
    t = [t0]
    while(t0 < 4):
        t0 += h
        R0, J0 = implicit_euler(t0, R0, J0, h)
        t.append(t0)
        R.append(R0)
        J.append(J0)
    plot(t, R, J)

def main():
    R0 = 2
    J0 = 3
    t0 = 0
    h = 0.1
    ex4(R0, J0, t0, h, implicit_euler1)
    ex4(R0, J0, t0, h, implicit_euler2)
    ex4(R0, J0, t0, h, implicit_euler3)
    ex4(R0, J0, t0, h, implicit_euler4)
    ex4(R0, J0, t0, h, implicit_euler5)

main()
```

Ta cùng nhìn lại phương trình ở hệ 14 :

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) \\ J' = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Để giải quyết các ví dụ ở phần này, ta sẽ khởi tạo các giá trị $h = 0.1, t_0 = 0, R_0 = 2, J_0 = 3$ để dùng chung cho toàn bộ các ví dụ.

- Ví dụ 1 : $\begin{cases} R' = R + J \\ J' = Rt + J \end{cases}$

  Theo phương pháp Implicit Euler : $\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_1, R_1, J_1)h \\ J_1 = J_0 + g(t_1, R_1, J_1)h \end{cases}$

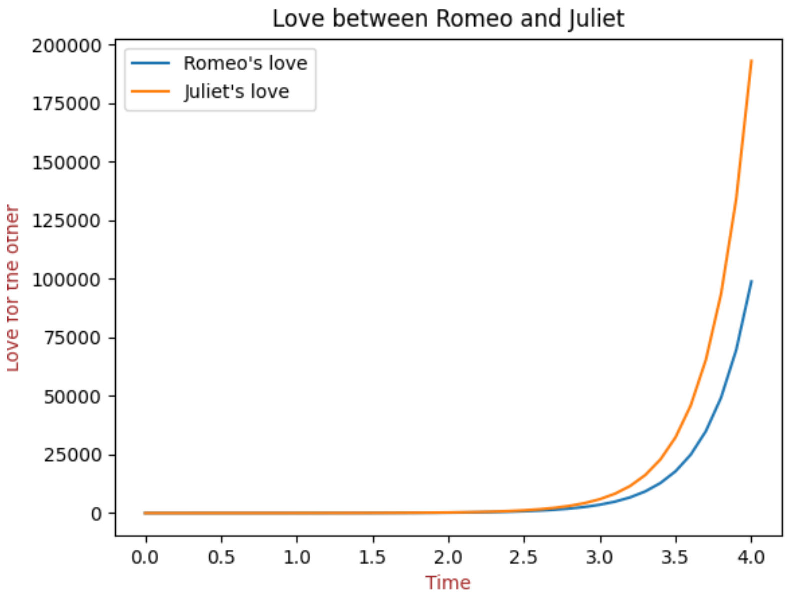
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + (R_1 + J_1)h \\ J_1 = J_0 + (R_1 t_1 + J_1)h \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + (R_1 + J_1)h \\ J_1 = \frac{J_0 + R_1 t_1 h}{1-h} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + (R_1 + \frac{J_0 + R_1 t_1 h}{1-h})h \\ J_1 = \frac{J_0 + R_1 t_1 h}{1-h} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_0 + \frac{J_0 h}{1-h}}{1 - h - \frac{t_1 h^2}{1-h}} \\ J_1 = \frac{J_0 + R_1 t_1 h}{1-h} \end{cases}$$

  Sau khi đã rút được R_1, J_1 theo R_0, J_0, t_1, h ta tiến hành thực hiện code bằng python đoạn chương trình ước tính xấp xỉ nghiệm của các trạng thái sau để vẽ đồ thị



- Ví dụ 2 : $\begin{cases} R' = RJt \\ J' = Je^t \end{cases}$

  Theo phương pháp Implicit Euler : $\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_1, R_1, J_1)h \\ J_1 = J_0 + g(t_1, R_1, J_1)h \end{cases}$

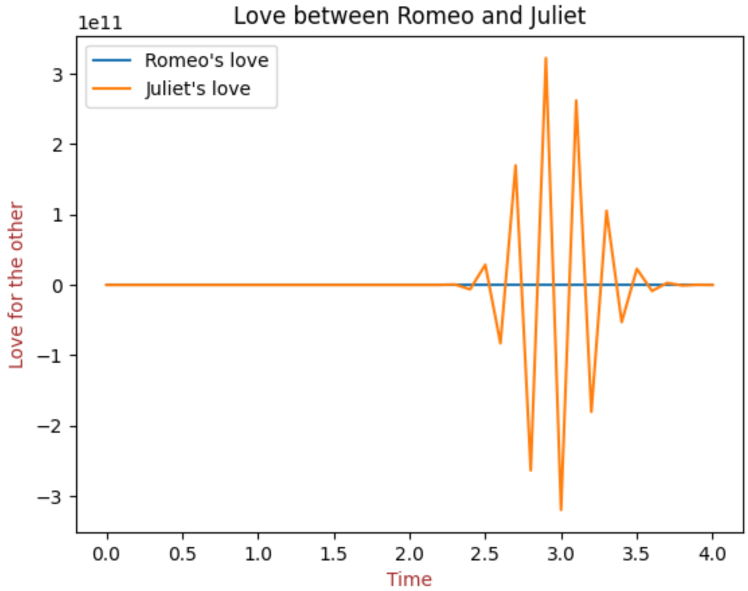
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + (R_1 J_1 t_1)h \\ J_1 = J_0 + (J_1 e^{t_1})h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + (R_1 J_1 t_1)h \\ J_1 = \frac{J_0}{1-e^{t_1}h} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + \frac{R_1 J_0 t_1 h}{1-e^{t_1}h} \\ J_1 = \frac{J_0}{1-e^{t_1}h} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_0}{1-\frac{J_0 t_1 h}{1-e^{t_1}h}} \\ J_1 = \frac{J_0}{1-e^{t_1}h} \end{cases}$$

Sau khi đã rút được R_1, J_1 theo R_0, J_0, t_1, h ta tiến hành thực hiện code bằng python đoạn chương trình ước tính xấp xỉ nghiệm của các trạng thái sau để vẽ đồ thị



- Ví dụ 3 : $\begin{cases} \dot{R} = Rsin(t) \\ \dot{J} = R \times ecos(t) \end{cases}$

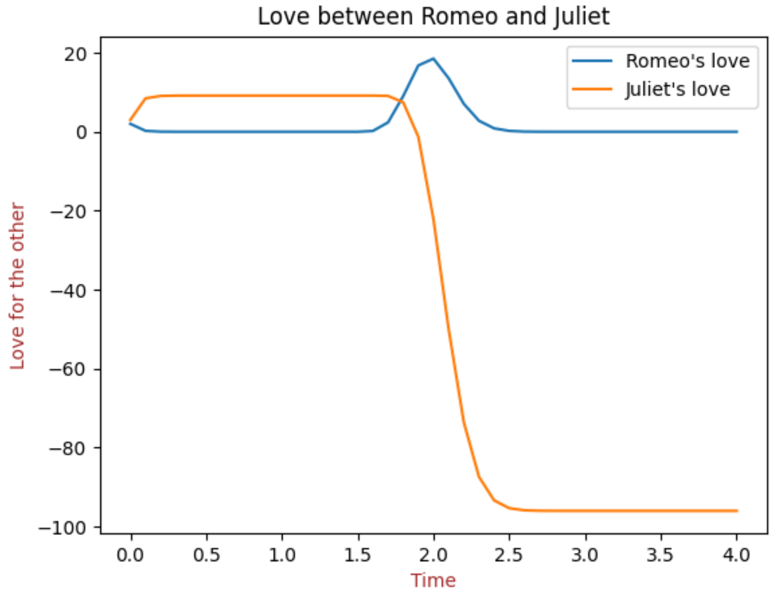
Theo phương pháp Implicit Euler : $\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_1, R_1, J_1)h \\ J_1 = J_0 + g(t_1, R_1, J_1)h \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + (R_1 sin(t))h \\ J_1 = J_0 + (R1 \times ecos(t))h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1(1 - sin(t))h = R_0 \\ J_1 = J_0 + (R1 \times ecos(t))h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_0}{(1-sin(t))h} \\ J_1 = J_0 + (\frac{R_0}{(1-sin(t))h} \times ecos(t))h \end{cases}$$

Sau khi đã rút được R_1, J_1 theo R_0, J_0, t_1, h ta tiến hành thực hiện code bằng python đoạn chương trình ước tính xấp xỉ nghiệm của các trạng thái sau để vẽ đồ thị



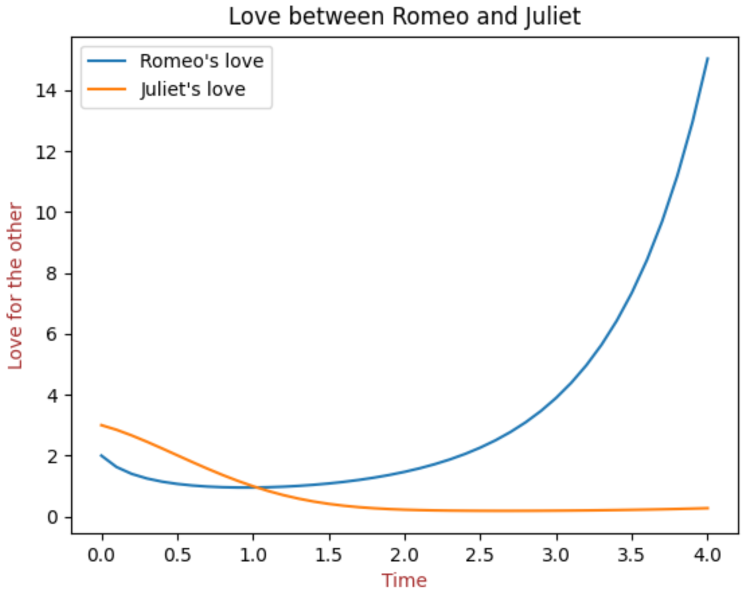
- Ví dụ 4 : $\begin{cases} R' = Rln(t) \\ J' = R - Je^t \end{cases}$

  Theo phương pháp Implicit Euler : $\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_1, R_1, J_1)h \\ J_1 = J_0 + g(t_1, R_1, J_1)h \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = R_0 + (R_1 ln(t_1))h \\ J_1 = J_0 + (R_1 - J_1 e^{t_1})h \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_0}{1 - ln(t_1)h} \\ J_1 = \frac{J_0 + R_1 h}{1 + e^{t_1} h} \end{cases}$

  Sau khi đã rút được R_1, J_1 theo R_0, J_0, t_1, h ta tiến hành thực hiện code bằng python đoạn chương trình ước tính xấp xỉ nghiệm của các trạng thái sau để vẽ đồ thị



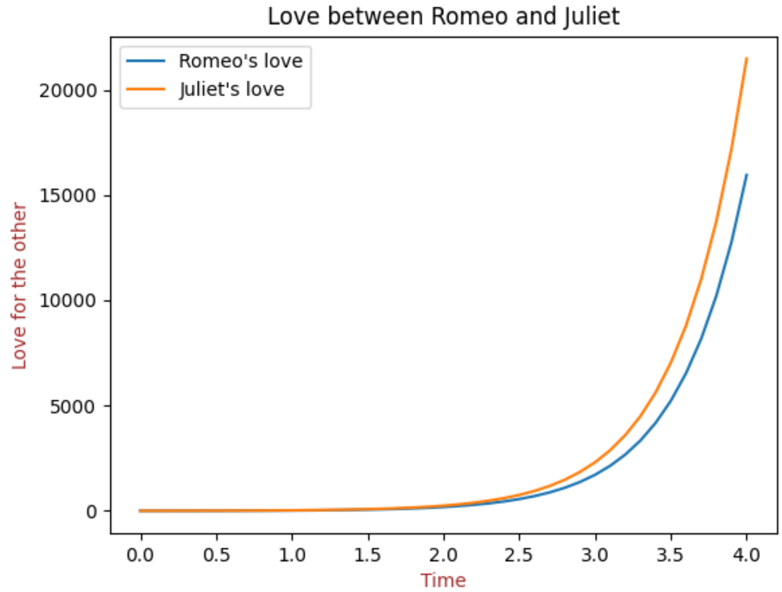
- Ví dụ 5 : $\begin{cases} R' = 2R + sin(t^2) \\ J' = 2J + cos(R) \end{cases}$

  Theo phương pháp Implicit Euler : $\begin{cases} R_1 = R_0 + f(2R_1 + sin(t^2))h \\ J_1 = J_0 + g(2J_1 + cos(R))h \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_0 + sin(t_1^2)h}{1-2h} \\ J_1 = J_0 + (2J_1 + cos(R_1))h \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{R_0 + sin(t_1^2)h}{1-2h} \\ J_1 = \frac{J_0 + cos(R_1)h}{1-2h} \end{cases}$

  Sau khi ta tính được R_1 và rút được J_1 theo các biến đã biết ,ta tiến hành thực hiện code bằng python đoạn chương trình ước tính xấp xỉ nghiệm của các trạng thái sau để vẽ đồ thị



4. **Local Truncation Error**

Tương tự như phương pháp **Explicit Euler**, local truncation error của phương pháp **Implicit Euler** tại $t = t_1$ được tính theo công thức :

$$\epsilon(t_1) := \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2}$$

$*$ Ta cùng đi chứng minh $\epsilon(t_1)$ tỉ lệ thuận với h^2

- Ban đầu ta có : $\begin{cases} R_1 = R_0 + f(t_1, R_1, J_1)h \\ J_1 = J_0 + g(t_1, R_1, J_1)h \\ R(t_0) = R_0, J(t_0) = J_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = R(t_0) + f(t_1, R(t_1), J(t_1))h \\ J_1 = J(t_0) + g(t_1, R(t_1), J(t_1))h \end{cases}$$

Mà : $\begin{cases} R'(t_1) = f(t_1, R(t_1), J(t_1))h \\ J'(t_1) = g(t_1, R(t_1), J(t_1))h \end{cases}$

Từ đó suy ra : $\begin{cases} R_1 = R(t_0) + R'(t_1)h \\ J_1 = J(t_0) + J'(t_1)h \end{cases}$ (1)

- Áp dụng định lí Taylor, ta lại có :

$$\begin{cases} R(t_0) = R(t_1) + R'(t_1)(t_0 - t_1) + \frac{1}{2!}R''(t_1)(t_0 - t_1)^2 + ... + \frac{1}{n!}R^{(n)}(t_1)(t_0 - t_1)^n \\ J(t_0) = J(t_1) + J'(t_1)(t_0 - t_1) + \frac{1}{2!}J''(t_1)(t_0 - t_1)^2 + ... + \frac{1}{n!}J^{(n)}(t_1)(t_0 - t_1)^n \\ h = t_1 - t_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R(t_0) = R(t_1) - R'(t_1)h + \frac{1}{2!}R''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}R^{(n)}(t_1)h^n \\ J(t_0) = J(t_1) - J'(t_1)h + \frac{1}{2!}J''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}J^{(n)}(t_1)h^n \end{cases}$$

- Thế $R(t_0), J(t_0)$ vừa tìm được vào phương trình (1) :
$\begin{cases} R_1 = R(t_0) + R'(t_1)h = [R(t_1) - R'(t_1)h + \frac{1}{2!}R''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}R^{(n)}(t_1)h^n] + R'(t_1)h \\ J_1 = J(t_0) + J'(t_1)h = [J(t_1) - J'(t_1)h + \frac{1}{2!}J''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}J^{(n)}(t_1)h^n] + J'(t_1)h \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = R(t_1) + \frac{1}{2!}R''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}R^{(n)}(t_1)h^n \\ J_1 = J(t_1) + \frac{1}{2!}J''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}J^{(n)}(t_1)h^n \end{cases}$

- Thế R_1, J_1 vừa tìm được vào công thức tính Local Truncation Error ban đầu :
Ta có :
$R(t_1) - R_1 = R(t_1) - (R(t_1) + \frac{1}{2!}R''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}R^{(n)}(t_1)h^n)$
$= -\frac{1}{2!}R''(t_1)h^2 + ... - (-1)^n\frac{1}{n!}R^{(n)}(t_1)h^n$
$J(t_1) - J_1 = J(t_1) - (J(t_1) + \frac{1}{2!}J''(t_1)h^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}J^{(n)}(t_1)h^n)$
$= -\frac{1}{2!}J''(t_1)h^2 + ... - (-1)^n\frac{1}{n!}J^{(n)}(t_1)h^n$
Vậy : $\epsilon(t_1) := \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2}$
$= \sqrt{[-\frac{1}{2!}R''(t_1)h^2 + ... - (-1)^n\frac{1}{n!}R^{(n)}(t_1)h^n]^2 + [-\frac{1}{2!}J''(t_1)h^2 + ... - (-1)^n\frac{1}{n!}J^{(n)}(t_1)h^n]^2}$
- Khi h tiến dần về 0, ta có thể kết luận được $\epsilon(t_1)$ tỉ lệ thuận với h^2

5. **Nhược điểm của phương pháp Implicit Euler**

- Mặc dù phương pháp **Implicit Euler** được cho là ổn định nhưng đối với step time cực lớn thì nó vẫn sẽ gây ra sai trừ khi được xây dựng một cách kĩ lưỡng và cẩn thận.
- Trong công thức của phương pháp **Implicit Euler** ta thấy rằng việc xác định trạng thái tại thời điểm $t = t_1$ thì giá trị cần tìm R_1 và J_1 xuất hiện ở cả 2 phía của phương trình ,điều này yêu cầu chi phí cho tính toán cao hơn và không hoàn toàn có thể giải được đối với mọi trường hợp, vì step time lớn nên sự sai số so với hàm gốc của phương pháp **Implicit Euler** sẽ lớn hơn.
- Phương pháp này không phù hợp cho các bài toán yêu cầu cao về độ chính xác ở các thời điểm nhỏ liên tục.

Ở Bài tập lớn lần này, mục tiêu chính là quan tâm đến hành vi của các giải pháp, hành vi ở đây có thể hiểu là chiều hướng phát triển theo thời gian của từng trường hợp, thông qua mô hình ta có thể hiểu được xu hướng tình cảm của romeo và juliet trong tương lai, giải thích được các vấn đề về tình yêu giữa các "style" tình yêu, thế nên khoảng thời gian tính toán là lớn, việc xác định xu hướng không yêu cầu độ chính xác quá lớn từng trong khoảng thời gian nhỏ, tuy nhiên nó yêu cầu sự đúng đắn về chiều hướng phát triển, hơn nữa vì thời gian lớn nên ta cần phương pháp giảm tối thiếu lượng tính toán nhưng vẫn đảm bảo được tính đúng đắn của hành vi. Vậy nên phương pháp **Implicit Euler** phù hợp với Bài tập lớn lần này.

References

[1] Vladimir I Arnold. Ordinary Differential Equations. Springer Science & Business Media, 1992.

[2] Love affairs and linear differential equations - https://www.r-bloggers.com/2019/08/love-affairs-and-linear-differential-equations/

[3] Morris W Hirsch and Stephen Smale. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Academic Press, 1974.

[4] Steven H Strogatz. Love affairs and differential equations. Mathematics Magazine, 61(1):35–35, 1988.

[5] Local Truncation Error for Euler's Method - https://personal.math.ubc.ca/~CLP/CLP2/clp_2_ic/ap_local_trunc_Euler.html

[6] Explicit Euler's method - https://www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/488%20Data/16.pdfl

[7] Local Trunction Error - https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/local-truncation-error

[8] SOLUTION METHODS FOR IVPS: (EXPLICIT) EULER METHOD - https://engcourses-uofa.ca/books/numericalanalysis/ordinary-differential-equations/solution-methods-for-ivps/explicit-euler-method/

[9] Forward and Backward Euler Methods - https://web.mit.edu/10.001/Web/Course_Notes/Differential_Equations_Notes/node3.html

[10] SOLUTION METHODS FOR IVPS: BACKWARD (IMPLICIT) EULER METHOD - https://engcourses-uofa.ca/books/numericalanalysis/ordinary-differential-equations/solution-methods-for-ivps/backward-implicit-euler-method/

[11] Dynamical models of love - https://www.researchgate.net/publication/8474604_Dynamical_models_of_love

[12] Modified models for love and their dynamical properties - https://www.researchgate.net/publication/304304657_Modified_models_for_love_and_their_dynamical_properties

[13] Systems of Linear First Order Ordinary Differential Equations - https://byjus.com/maths/systems-of-linear-first-order-ordinary-differential-equations/

[14] [Math educare] bai giang phuong trinh vi - phan trinh duc tai -https://www.slideshare.net/NguyenVietnam2/math-educare-bai-giang-phuong-trinh-vi-phantrinh-duc-tai

[15] Linear Nonhomogeneous Systems of Differential Equations with Constant Coefficients-https://math24.net/linear-nonhomogeneous-systems-differential-\equations-constant-coefficients.html

[16] Linear Nonhomogeneous Systems -https://mandal.ku.edu/math220/SysOfNonH7p9.pdf

[17] Nonhomogeneous Linear Systems -http://howellkb.uah.edu/DEtext/Additional_Chapters/Part6/NonHomLS.pdf

[18] Nonlinear Ordinary Differential Equations - by Peter J. Olver University of Minnesota http://howellkb.uah.edu/DEtext/Additional_Chapters/Part6/NonHomLS.pdf

[19] Nonlinear Systems Theory - Matthew M. Peet - Arizona State University http://control.asu.edu/Classes/MiniCourse/L02_MINI.pdf

[20] A mordern introduction to differential equation - Third Edition - Henry J. Ricardo

[21] Nonlinear Systems and Control https://www.egr.msu.edu/~khalil/NonlinearSystems/Sample/Lect_1.pdf

[22] Picard's Theorem https://www.youtube.com/watch?v=kN_BKFaIP20&t=190s

[23] Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems - Gerald Teschl https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/ode.pdf

[24] Nonlinear Control - Lecture 3: Fundamental Properties http://ele.aut.ac.ir/~abdollahi/Lec_2_N10.pdf

[25] Numerical stability-Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_stability

[26] Explicit and implicit euler methods https://www.flow3d.com/resources/cfd-101/numerical-issues/implicit-versus-explicit-numerical-methods/

[27] Implicit (Standard) And Explicit Methods In FEA – Which One Should You Choose? https://www.fidelisfea.com/post/implicit-standard-and-explicit-methods-in-fea-which-one-should-you-choose