GIỚI THIỆU HỌC PHẦN
XÁC SUẤT THỐNG KÊ
Đối tượng: Cao đẳng CQ

- Số đơn vị học trình: *02*
- Số tiết: *45 tiết*
+ *Lý thuyết:* *15 tiết*
+ *Thực hành:* *30 tiết*
- Điều kiện tiên quyết: *Học xong học phần Toán cao cấp*
- Thời điểm thực hiện: *Học kỳ II*

MỤC TIÊU HỌC PHẦN:

1. Trình bày được lý thuyết xác suất, vận dụng giải được các bài tập xác suất, các bài tập xác suất liên quan đến y học.

2. Trình bày được lý thuyết thống kê, vận dụng giải được các bài tập thống kê, các bài tập thống kê liên quan đến y học.

NỘI DUNG CHÍNH CỦA HỌC PHẦN

STT	Tên bài	Số tiết		Trang số
		LT	TH	
	CHƯƠNG I: XÁC SUẤT	**9**	**19**	
1	Bài 1: Giải tích kết hợp	2	2	2
2	Bài 2: Phép thử và biến cố	1	2	7
3	Bài 3: Khái niệm xác suất	2	3	12
4	Bài 4: Công thức nhân và cộng xác suất	2	6	18
5	Bài 5: Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayest	2	6	25
	CHƯƠNG II. THỐNG KÊ TRONG Y HỌC	**6**	**11**	
6	Bài 1: Tham số mẫu	2	4	29
7	Bài 2: Phương pháp bình phương bé nhất	2	4	37
8	Bài 3: Hệ số tương quan tuyến tính	2	3	42
	Tổng	**15**	**30**	

ĐÁNH GIÁ:

- Hình thức thi: Tự luận
- Điểm thường xuyên 15%
- Điểm thi kết thúc học phần 85%

CHƯƠNG I: XÁC SUẤT

Bài 1

GIẢI TÍCH KẾT HỢP

Số tiết: (LT: 02, TH: 02)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được lý thuyết tập hợp, các phép toán của tập hợp.

2. Trình bày được định nghĩa, công thức tính của: chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp, hoán vị, hoán vị lặp, tổ hợp, tổ hợp lặp.

3. Vận dụng để giải được các bài tập giải tích kết hợp

NỘI DUNG:

A. LÝ THUYẾT

I. Tập hợp

1. Mọi người thường nói tập hợp thầy thuốc, tập hợp bệnh nhân, tập hợp số, tập hợp bàn ghế,…

Tập hợp là khái niệm chưa xác định vì vậy để hiểu và thực hiện các phép toán với tập hợp thông thường qua cách cho một tập hợp

Có 2 cách cho tập hợp, hoặc cho danh sách các phần tử của tập hợp hoặc cho các đặc tính, tính chất để xác định một phần tử của tập hợp.

Kí hiệu các chữ: A, B, C, …để chỉ tập hợp, các chữ: x, y, z, …để chỉ phần tử của tập hợp.

Phần tử x thuộc tập hợp A viết là: $x \in A$

Phần tử x không thuộc tập hợp A viết là: $x \notin A$

2. Tập hợp trống (tập hợp rỗng)

Là tập hợp không chứa phần tử nào. Thường kí hiệu là tập trống là Φ

Ví dụ: A = $\{$ x thực: x2 +1 =0 $\}$= Φ

B = $\{$ Bác sỹ chuyên mổ tim ở bệnh viện huyện $\}$

C = $\{$ Bệnh nhân "Đao" trên 50 tuổi $\}$

3. Tập hợp con

A là tập hợp con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều là các phần tử thuộc B

Ví dụ: Tổ là tập hợp con của lớp, lớp là tập hợp con của khối

Tập hợp bệnh nhân trong khoa Nội là tập hợp con của tập hợp bệnh nhân trong toàn bệnh viện

4. Tập hợp bằng nhau

Mọi phần tử của A là những phần tử của B và ngược lại mọi phần tử của B cũng là những phần tử của A thì A = B

II. Phép toán về tập hợp:

1. Phép hợp: Hợp 2 tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử hoặc thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B. Nói cách khác hợp 2 tập hợp là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp.

Phép toán hợp hai tập hợp ký hiệu: $\cup$

2. Phép giao: Giao hai tập hợp A và B là tập hợp bao gồm các phần tử thuộc A và thuộc B. Nói cách khác giao 2 tập hợp là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập hợp**.**

Phép toán giao ký hiệu $\cap$.

3. Phép trừ: Cho 2 tập hợp A, B, kí hiệu A\B đọc là A trừ B, A\B=C

C bao gồm các phần tử chỉ thuộc A mà không thuộc B

Cho $A \subset E$ thì $E \setminus A = C$,

C được gọi là phần bù của A trong E

Ví dụ: Gọi E là tập hợp học sinh lớp CĐ 3A

gọi A là tập hợp nam học sinh lớp điều dưỡng K3A.

Khi đó A ={ tập hợp các nữ học sinh lớp điều dưỡng K3A}.

Trong thực tế thường gặp loại bài toán cho một tập hợp hữu hạn các phần tử, cần phải ghép các phần tử thành từng nhóm tuỳ thuộc vào yêu cầu của bài toán và tính số nhóm tạo thành. Các phần tử của nhóm khi ghép có thể sắp xếp theo thứ tự, khi đó 2 nhóm khác nhau có cùng số phần tử thì chúng khác nhau bởi ít nhất một phần tử hoặc thứ tự sắp xếp khác nhau: Trường hợp này ta nói nhóm có phân biệt thứ tự.

Các phần tử của nhóm khi ghép có thể không được quan tâm tới thứ tự, khi đó hai nhóm khác nhau có cùng số phần tử thì chúng khác nhau bởi ít nhất một phần tử.

Trường hợp này ta nói nhóm không phân biệt thứ tự.

Các yêu cầu của bài toán loại này thường là ghép các nhóm không phân biệt thứ tự và có phân biệt thứ tự. Khi ghép nhóm có phân biệt thứ tự có khi yêu cầu các phần tử của nhóm phải khác nhau, có khi yêu cầu các phần tử của nhóm không nhất thiết phải khác nhau. Rõ ràng với mỗi một yêu cầu, số nhóm tạo thành sẽ khác nhau. Giải tích kết hợp sẽ nghiên cứu loại bài toán này.

III - Chỉnh hợp - chỉnh hợp lặp:

1. Chỉnh hợp:

a. Định nghĩa: Chỉnh hợp chập k của n phần tử là một nhóm có phân biệt thứ tự , gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho (k <= n).

b. Công thức tính: Kí hiệu chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k

$$\text{Công thức tính: } A_n^k = \frac{k!}{(n-k)!}$$

c. Ví dụ:

+ Ví dụ 1: Một số có 3 chữ số khác nhau là một mẫu không lặp, có thứ tự được xây dựng từ 3 chữ số 1, 2, 3, số mẫu là 6.

+ Ví dụ 2: Xếp 3 bệnh nhân vào 5 khoa mỗi khoa một người là một mẫu không lặp, có thứ tự được xây dựng từ 5 khoa, số mẫu là 60.

+ Ví dụ 3: Chọn ngẫu nhiên 2 Bác sỹ từ một nhóm gồm 3 bác sỹ A, B, C để xuống tuyến y tế cơ sở khám bệnh, ai được chọn đầu tiên sẽ làm nhóm trưởng của nhóm ấy? hỏi có bao nhiêu cách chọn?

2. Chỉnh hợp lặp:

a. <u>Định nghĩa:</u> Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm có phân biệt thứ tự, gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể có mặt 1, 2,...,n lần trong nhóm (ở đây có thể k ≥ n).

b. <u>*Công thức tính:*</u> Kí hiệu chỉnh hợp lặp chập k của n là F_n^k

Công thức tính: $F_n^k = n^k$

c. <u>*Ví dụ:*</u>

+ Ví dụ 1: Một số có 3 chữ số là một mẫu có lặp, có thứ tự xây dựng từ 3 chữ số 1, 2, 3, số mẫu là: 27

+ Ví dụ 2: Xếp 5 bệnh nhân vào 3 khoa là một mẫu có lặp, có thứ tự xây dựng từ 3 khoa, số mẫu là 243

IV. Hoán vị

1. Hoán vị:

<u>a. Định nghĩa</u>: Mỗi cách sắp xếp các phần tử của 1 tập hợp gồm n phần tử khác nhau, được gọi là một hoán vị của n phần tử ấy. Ký hiệu hoán vị là P_n

b. *Công thức tính:* $P_n = n!$

c. *Ví dụ*: Mỗi cách sắp xếp 5 học sinh ngồi vào 1 bàn gồm 5 chỗ ngồi là 1 hoán vị của 5 học sinh, số cách xếp chỗ là 120

2. Hoán vị lặp:

<u>*a. Định nghĩa:*</u> Mỗi cách sắp xếp các phần tử của 1 tập hợp gồm n phần tử, trong đó có k phần tử giống nhau, gọi là một hoán vị lặp chập k của n phần tử ấy.

Ký hiệu hoán vị lặp P_n^k

<u>*b. Công thức tính:*</u> $P_n^k = \frac{n!}{k!}$

<u>*c. Ví dụ:*</u> Mỗi cách sắp xếp 3 học sinh ngồi vào 1 bàn gồm 5 chỗ là 1 hoán vị lặp của 5 phần tử trong đó có 2 phần tử giống nhau, số cách xếp là 60

V. Tổ hợp:

1. Tổ hợp:

<u>*a. Định nghĩa:*</u> Tổ hợp chập k của n phần tử là 1 nhóm không phân biệt thứ tự, gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho (k <= n).

<u>*b. Công thức tính:*</u>

Ký hiệu số tổ hợp chập k của n là C_n^k Ta có:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

nhận xét: $C_n^k = C_n^{n-k}$

c. Ví dụ:

+ Có tất cả 10 đội bóng đá thi đấu vòng tròn tính điểm, biết mỗi đội chỉ gặp nhau một lần, hỏi có bao nhiêu trận đấu sẽ diễn ra?

Số trận đấu sẽ diễn ra là: $C_{10}^{2} = 45$

+ Một hộp thuốc tiêm gồm có 10 lọ, từ hộp đó lấy ra cùng lúc 3 lọ, hỏi có bao nhiêu cách lấy?

2. Tổ hợp lặp:

a. Định nghĩa: Tổ hợp lặp chập k của n phần tử là 1 nhóm không phân biệt thứ tự, gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho.

b. Công thức tính:

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!.(n-1)!}$$

chú ý: khi k > n công thức trên vẫn đúng

c. Ví dụ: Cho tập hợp A=(1,2,3,4)

1. Có bao nhiêu nhóm có 3 chữ số khác nhau được xây dựng từ 4 chữ số trên?
2. Có bao nhiêu nhóm có 3 chữ số được xây dựng từ 4 chữ số trên?
3. Có bao nhiêu nhóm có 4 chữ số được xây dựng từ tập A?

B. THỰC HÀNH

Bài 1: Một nhóm học sinh trong đó có 4 trai, 3 gái. Để chọn ra 3 em trong đó có ít nhất 1 trai, 1 gái, hỏi có bao nhiêu cách

A. C_{7}^{3} B. $C_{4}^{2}C_{3}^{1}$

C. $C_{4}^{1}\cdot C_{3}^{2}$ D. $C_{4}^{2}C_{3}^{1}+C_{4}^{1}\cdot C_{3}^{2}$

Bài 2: Một hộp chứa 5 bi xanh, 3 bi đỏ, 2 bi vàng. Lấy ra 2 viên, có bao nhiêu cách lấy, nếu bi thứ nhì màu đỏ?

A. C_{3}^{2} B. $C_{7}^{1}\cdot C_{3}^{1}$

C. C_{10}^{2} D. $C_{3}^{2}+C_{7}^{1}\cdot C_{3}^{1}$

Bài 3: Một bác sỹ có 15 bệnh án. Hỏi có bao nhiêu cách lấy bệnh án nghiên cứu nếu: Lấy tuỳ ý 10 bệnh án

Bài 4: Một khoa có 20 bác sỹ. Lập quy hoạch bồi dưỡng thường xuyên, hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu: cử 1 người đi nghiên cứu sinh, 2 người đi thi cao học và 3 người đi thi chuyên khoa 1

Bài 5: Trong một hộp thuốc cấp cứu có: 20 ống thuốc tiêm, trong đó có 4 ống Atropin, lấy ngẫu nhiên ra 2 ống, hỏi có bao nhiêu cách lấy ra được:

a. 3 ống Atropin

b. 2 ống Atropin

Bài 6: Một khoa gồm có 9 người, trong ngày cần cử 2 người đi công tác tại cơ sở, 5 người trực tại khoa, hỏi có bao nhiêu cách phân công?

Bài 7: Một hội nghị Y khoa có 40 bác sỹ tham dự. Người ta muốn lập một nhóm bác sỹ thực hành một ca phẫu thuật để minh hoạ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm có:

a. Một bác sỹ chính và 3 phụ tá
b. Một bác sỹ chính và 4 phụ tá

Bài 8: Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kỹ sư. Để lập một tổ công tác cần chọn 1 kỹ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó, và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập?

Bài 9: Cho các chữ số: 1, 2, 5, 7, 8. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau được lập từ 5 chữ số trên sao cho:
a. Số đó là số chẵn
b. Số đó không có mặt chữ số 7

Bài 2
PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ
Số tiết: (LT:01, TH: 02)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được khái niệm: phép thử, biến cố, các loại biến cố.

2. Trình bày được mối quan hệ giữa các biến cố, hệ đầy đủ các biến cố.

3. Vận dụng để giải được các bài tập về phép thử và biến cố

NỘI DUNG:

A. LÝ THUYẾT

I. Khái niệm phép thử và biến cố

1. Khái niệm

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (thí nghiệm cụ thể hay quan sát hiện tượng nào đó), có thể cho nhiều kết quả khác nhau. Các kết quả này không thể dự báo chắc chắn được. Một phép thử thường được lặp lại nhiều lần

Ví dụ: đo chiều cao, làm xét nghiệm, chẩn đoán bệnh hay điều trị bệnh,…là các phép thử

Hiện tượng hay kết quả của một phép thử được gọi là biến cố.

Các biến cố được kí hiệu bởi các chữ cái A, B, C, A_1, A_2…

a. *Thí dụ 1*: Chẩn đoán bệnh cho một bệnh nhân. Hiện tượng: chẩn đoán có bệnh, chẩn đoán không có bệnh là các biến cố.

b. *Thí dụ 2*: Làm xét nghiệm máu cho một bệnh nhân là thực hiện một phép thử. Hiện tượng xét nghiệm dương tính, xét nghiệm âm tính là các biến cố.

c. *Thí dụ 3:* Tung một con xúc sắc là thực hiện một phép thử (con xúc sắc là một khối lập phương đồng chất, trên 6 mặt của nó được ghi tương ứng 1,2,3,4,5,6 chấm), Các biến cố:

- xúc sắc xuất hiện mặt có 3 chấm
- xúc sắc xuất hiện mặt có 6 chấm
- xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 6
- xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 7

2. Các loại biến cố:

Khi nghiên cứu một đối tượng, không nghiên cứu mọi mặt mà chỉ nghiên cứu một đặc tính hay tính chất nào đó. Dựa vào khả năng xuất hiện của hiện tượng chia các hiện tượng thành 3 loại:

a. *Biến cố chắc chắn:* Biến cố nhất định xảy ra sau phép thử gọi là biến cố chắc chắn, ký hiệu là U.

+ *Ví dụ*: Tung một con xúc sắc, gọi A là biến cố có số chấm nhỏ hơn hoặc bằng 6, khi đó A là biến cố chắc chắn.

b. *Biến cố không có thể có:* Biến cố nhất định không xảy ra sau phép thử gọi là biến cố không thể có, ký hiệu là V.

c. Biến cố ngẫu nhiên: Biến cố có thể xảy ra, cũng có thể xảy ra sau phép thử. Biến cố ngẫu nhiên thường được ký hiệu bởi các chữ A, B, C,… hoặc các chữ số kèm theo chỉ số như A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3,…

d. Các ví dụ:

- Bác sỹ điều trị bệnh cho một bệnh nhân có thể xảy ra các trường hợp: chắc chắn khỏi bệnh, không bao giờ khỏi bệnh, có thể khỏi bệnh

- Trong thí dụ ở phần trên, thì xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 7 là biến cố chắc chắn (U), xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 6 là biến cố không có thể (V). Nếu gọi A_i là biến cố con xúc sắc xuất hiện mặt có i chấm ($i= \overline{1,6}$) thì A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 là các biến cố ngẫu nhiên.

II. Quan hệ giữa các biến cố

1. Giao (tích) của các biến cố:

Biến cố A gọi là biến cố giao (hay biến cố tích) của các biến cố $A_1, A_2,\ldots,A_n$ nếu biến cố A xảy ra thì tất cả n biến cố $A_1, A_2,\ldots,A_n$ phải đồng thời xảy ra sau phép thử

ký hiệu: $A = A_1.A_2.\ldots.A_n$

2. Hợp (tổng) của các biến cố:

Biến cố A gọi là biến cố hợp (hay biến cố tổng) của các biến cố $A_1, A_2,\ldots,A_n$, nếu biến cố A xảy ra thì phải có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2,\ldots,A_n$ xảy ra sau phép thử

ký hiệu: $A = A_1+A_2+\ldots A_n$

a. Thí dụ 1: Sản xuất 3 sản phẩm:

Gọi: A_i là biến cố sản phẩm thứ i sản xuất ra đạt tiêu chuẩn ($i = \overline{1,3}$)

A là biến cố cả 3 sản phẩm sản xuất ra đều đạt tiêu chuẩn.

B là biến cố có ít nhất 1 sản phẩm sản xuất ra đạt tiêu chuẩn.

Để cho gọn và tiện cho việc sử dụng khi tính toán người ta thường viết các biến cố dưới dạng ký hiệu, chẳng hạn với các biến cố trên ta viết:

A_i = {Sản phẩm thứ i sản xuất ra đạt tiêu chuẩn} ($i = \overline{1,3}$)

A = {Cả 3 sản phẩm sản xuất ra đều đạt tiêu chuẩn}

Trong cách viết này dấu "=" thay cho chữ "là biến cố" và nội dung của biến cố được đặt trong dấu ngoặc nhọn.

Theo định nghĩa của tổng và tích các biến cố, ta có thể biểu diễn các biến cố A và B theo các biến cố A_1, A_2, A_3 như sau:

$$A = A_1.A_2.A_3$$
$$B = A_1+A_2+A_3$$

b. Thí dụ 2: Hai bác sỹ cùng chẩn đoán bệnh cho 1 bệnh nhân. Gọi A là biến cố Bác sỹ thứ nhất chẩn đoán đúng. Gọi B là biến cố Bác sỹ thứ 2 chẩn đoán đúng khi đó:

Biến cố tích A.B là biến cố cả 2 bác sỹ chẩn đoán đúng.

Biến cố tổng A+B là biến cố ít nhất 1 bác sỹ chẩn đoán đúng.

3. Biến cố xung khắc:

a. Hai biến cố A_1 và A_2 gọi là xung khắc nếu chúng không thể đồng thời xảy ra sau phép thử. Nói cách khác nếu biến cố A_1 đã xảy ra thì biến cố A_2 không xảy ra và ngược lại, hoặc cả hai biến cố A_1 và A_2 đều không xảy ra sau phép thử.

Như vậy, nếu A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc thì $A_1.A_2 = V$

b. Một hệ gồm n biến cố $A_1, A_2....A_n$ gọi là xung khắc từng đôi nếu trong hệ trên, hai biến cố bất kỳ bao giờ cũng xung khắc với nhau, nghĩa là:

$$A_i.A_j = V \ (i \neq j)$$

c. Các thí dụ:

+ Thí dụ 1 **:** Tung một đồng xu

Gọi S = {đồng xu xuất hiện mặt sấp}

N = {đồng xu xuất hiện mặt ngửa}

Thì S và N là hai biến cố xung khắc.

+ Thí dụ 2**:** Tung một con xuc sắc

Gọi: Ai = {con xúc sắc xuất hiện mặt có i chấm} ($i = \overline{1,6}$)

thì A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc, A_1 và A_6 là hai biến cố xung khắc...., A_5 và A_6 là 2 biến cố xung khắc, vậy $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ là một hệ gồm 6 biến cố xung khắc từng đôi.

+ Thí dụ 3: Một y tá tiêm kháng sinh cho một bệnh nhân qua đường Ven. Gọi A là biến cố tiêm trúng Ven, B là biến cố tiêm trượt Ven. Biến cố A và B là hai biến cố xung khắc.

4. Biến cố đối lập:

a. Hai biến cố A và B gọi là đối lập nếu biến cố A thì B không xảy ra và ngược lại. nếu B là đối lập A ký hiệu $B = \overline{A}$.

Nếu A và $\overline{A}$ là 2 biến cố đối lập thì $A + \overline{A} = U$ và $A.\overline{A} = V$. Nghĩa là nếu A và $\overline{A}$ là đối lập thì tổng của chúng bằng biến cố chắc chắn, tích của chúng bằng biến cố không thể.

b. Các thí dụ:

+ *Thí dụ 1*: Một bà mẹ sinh con, biến cố sinh con trai và biến cố sinh con gái là biến cố đối lập.

+ *Thí dụ 2:* Điều trị bệnh cho một bệnh nhân. Biến cố điều trị khỏi bệnh (biến cố S) và điều trị không khỏi (biến cố N) là 2 biến cố đối lập.

+*Thí dụ 3:* Một bác sỹ chẩn đoán bệnh cho bệnh nhân, biến cố chẩn đoán có bệnh và biến cố chẩn đoán không có bệnh là 2 biến cố đối lập nhau.

c. Chú ý:

Từ định nghĩa biến cố đối lập và biến cố xung khắc ta suy ra rằng: Nếu hai biến cố đối lập thì 2 biến cố đó xung khắc, nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng.

5. Hệ đầy đủ các biến cố:

a. Một hệ gồm n biến cố $A_1, A_2,...A_n$ gọi là một hệ đầy đủ, nếu một và chỉ một trong các biến cố ấy phải xảy ra sau phép thử. Nói cách khác, các biến cố ấy phải thoả mãn cả hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} A_1+A_2+...+A_n = U \\ A_i+A_j = V \quad (i \neq j) \end{cases}$$

Từ định nghĩa này dễ dàng suy ra rằng: hai biến cố đối lập A và $\overline{A}$ là một hệ đầy đủ.

b. Các thí dụ:

+ Thí dụ 1: Trong thí dụ ở phần trên thì biến cố sinh con trai (biến cố A) và biến cố sinh con gái (biến cố $\overline{A}$) là một hệ đầy đủ.

+ Thí dụ 2: Tung một con xúc sắc

Nếu gọi A_i = {con xúc sắc xuất hiện mặt có i chấm} ($i=\overline{1,6}$)

thì A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 là một hệ đầy đủ.

Một hệ đầy đủ các biến cố được gọi là đồng khả năng, nếu trong phép thử khả năng xảy ra chúng đều như nhau, nghĩa là không có cơ sở nào để kết luận rằng khả năng xảy ra biến cố này lại nhiều hơn khả năng xảy ra biến cố khác.

Chẳng hạn, khi tung một đồng xu thì biến cố đồng xu xuất hiện mặt sấp (biến cố S) và biến cố đồng xu xuất hiện mặt ngửa (biến cố N) là một hệ đầy đủ đồng khả năng. khi tung một con xúc sắc, thì các biến cố: con xúc sắc xuất hiện các mặt có 1 chấm, 2 chấm, 3 chấm, 4 chấm, 5 chấm, 6 chấm tức là các biến cố A_1, A_2, A3, A_4, A_5, A_6 cũng là một hệ đầy đủ đồng khả năng với giả thiết rằng đồng xu và con xúc sắc hoàn toàn cân đối và đồng nhất.

B. THỰC HÀNH:

Bài 1:

a. Một kĩ thuật viên làm thủ thuật chắc chắn sẽ đạt

b. Một kĩ thuật viên làm thủ thuật có thể đạt, cũng có thể không đạt

c. Một kĩ thuật viên làm thủ thuật chắc chắn không đạt

d. Một kĩ thuật viên làm thủ thuật có thể đạt

Bài 2:

a. Một bà mẹ 2 lần sinh con thì chắc chắn sẽ sinh được con trai

b. Một bà mẹ 2 lần sinh con ít nhất một lần sinh được con trai

c. Một bà mẹ 2 lần sinh con xảy ra 3 khả năng: hoặc cả 2 con gái, hoặc cả 2 con trai hoặc 1 trai, 1 gái.

d. Một bà mẹ 2 lần sinh con có thể sinh được con gái

***Bài* 3**: Bắn đạn vào 1 bia đã được chia làm 3 phần thì:

a. Chắc chắn sẽ bắn trúng ít nhất một trong 3 phần

b. Bắn trúng phần 1 hoặc phần 2 của bia

c. Có thể bắn trúng bia, cũng có thể không bắn trúng bia

d. Có thể bắn trúng bia

Bài 4: Một bác sỹ đã điều trị cho một bệnh nhân bị bệnh bằng 3 phương pháp

a. Nhất định bệnh nhân sẽ khỏi

b. Bệnh nhân sẽ khỏi bởi ít nhất một trong 3 phương pháp

c. Có thể bệnh nhân không khỏi

d. Bệnh nhân có thể khỏi hoặc không khỏi

Bài 5: Hai người cùng bắn vào một bia, mỗi người bắn một viên, có một người bắn trúng.
Gọi Ai là biến cố người thứ i bắn trúng bia (i=1, 2)
Chọn câu trả lời đúng nhất

a. $A_1 \cdot \bar{A}_2$

b. $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 A_2$

c. A1 $\cup$ A2

d. A1 .A2

e. $\overline{A_1}.\overline{A_2}$

Bài 6: Hai xạ thủ cùng bắn đạn vào 1 bia. Kí hiệu A_k là biến cố người thứ k bắn trúng (k=1, 2),

a. Hãy biểu diễn các biến cố sau đây qua các biến cố A_1, A_2

A: “ không ai bắn trúng”

B: “ cả 2 đều bắn trúng”

C: “ có ít nhất 1 người bắn trúng”

D: “ có đúng 1 người bắn trúng”

b. Chứng tỏ rằng: A= C, B và D xung khắc

Bài 7: Có 3 xạ thủ, mỗi người độc lập bắn một viên vào một mục tiêu. Gọi A_i là biến cố xạ thủ thứ i bắn trúng mục tiêu.

a. Hãy mô tả các biến cố sau: $A_1A_2A_3$; $A_1 + A_2 + A_3$;

b. Xét các biến cố sau:

A: Có ít nhất 2 xạ thủ bắn trúng.

B: Có nhiều nhất một xạ thủ bắn trúng.

C: Chỉ có một xạ thủ bắn trúng.

D: Chỉ có một xạ thủ thứ 3 bắn trúng.

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C, D theo các biến cố A_i.

Bài 3
KHÁI NIỆM XÁC SUẤT
Số tiết: (LT: 02, TH: 03)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được khái niệm xác suất, định nghĩa cổ điển của xác suất và các phương pháp tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

2. Trình bày được định nghĩa thống kê của xác suất, các tính chất của xác suất

3. Vận dụng để giải được các bài tập liên quan đến khái niệm xác suất.

NỘI DUNG

A. LÝ THUYẾT

Trước khi thực hiện phép thử, đoán xem một hiện tượng ngẫu nhiên nào đó có xảy ra hay không là một việc khó khăn. Khi thực hiện phép thử nhiều lần, biết khả năng xuất hiện của hiện tượng, từ đó đoán được sự xuất hiện của hiện tượng dễ dàng hơn.

Khả năng xuất hiện của hiện tượng A là xác suất xuất hiện A là một hằng số nằm giữa 0 và 1, tồn tại một cách khách quan, không phụ thuộc vào ý muốn chủ quan của con người.

1. Khái niệm xác suất:

Trong các loại biến cố, chúng ta chú ý đến loại biến cố ngẫu nhiên. Biến cố ngẫu nhiên là một biến cố mà sự xảy ra hay không xảy ra của nó trong một phép thử không phụ thuộc vào ý muốn chủ quan của người quan sát.

Chẳng hạn thực hiện phép thử gieo xúc sắc.

Gọi A= {con xúc sắc xuất hiện mặt chẵn chấm}.

Gọi A_i là biến cố mặt i chấm xuất hiện.

Ta nhận thấy A và A_6 là các biến cố ngẫu nhiên. Các biến cố này giống nhau ở chỗ: Chúng có thể xảy ra, cũng có thể không xảy ra sau phép thử, nhưng bằng trực giác ta có thể nhận thấy rằng: Khả năng xảy ra biến cố A nhiều hơn được đặc trưng bởi số lớn hơn.

Con số đặc trưng cho khả năng xuất hiện của một biến cố gọi là xác suất của một biến cố.

Như vậy: Xác suất của một biến cố A là một số, đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố A trong phép thử tương ứng.

Người ta ký hiệu xác suất biến cố A là p(A).

Chẳng hạn, trong thí dụ tung một con xúc sắc vừa nêu ra ở phần trên, nếu khả năng xuất hiện của biến cố A là 50/100 thì 50/100 chính là xác suất của biến cố A nghĩa là: p(A) = 50/100 = 0,5

Qua phần này ta hiểu được bản chất của khái niệm xác suất, nhưng chưa cho ta một phương pháp cụ thể để tìm xác suất của một biến cố. Một số định nghĩa sau đây sẽ giúp ta giải quyết điều đó.

2. Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Cùng với thời gian, lý thuyết xác suất ngày càng phát triển và hoàn thiện, do đó định nghĩa của xác suất cũng ngày càng hoàn chỉnh. Dựa trên bản chất khái niệm xác suất, người ta đã nêu ra nhiều các định nghĩa xác suất khác nhau. Một định nghĩa ra đời từ thời kỳ đầu của lý thuyết xác suất thường gọi là định nghĩa cổ điển của xác suất. Để đi tới định nghĩa này ta xét thí dụ sau:

a. Thí dụ:

+ Tung một con xúc sắc cân đối và đồng chất. Hãy tính khả năng để con xúc sắc xuất hiện mặt có 6 chấm.

Nếu gọi A_6: con xúc sắc xuất hiện mặt có 6 chấm: Theo yêu cầu của đầu bài ta phải tính khả năng xuất hiện của biến cố A_6, nói cách khác tức là tính xác suất của biến cố A_6.

Vì con xúc sắc hoàn toàn cân đối và đồng chất như giả thiết, nên khả năng xuất hiện của 6 trường hợp là như nhau, không có trường hợp nào "ưu thế" hơn trường hợp nào. Ta nói đó là 6 trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử.

Trong 6 trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử, ta thấy chỉ khi trường hợp thứ 6 xảy ra thì biến cố A_6 mới xuất hiện ta nói đó là 1 trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện biến cố A_6. Người ta lấy tỷ số 1/6 để đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố A6, tức là $p(A_6) = 1/6$

+ Cũng trong thí dụ này: Hãy tính khả năng để con xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm là chẵn?

Gọi A: "xúc sắc xuất hiện mặt có số chấm là chẵn"

Lập luận tương tự ta thấy: trong 6 trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử, ta thấy có 3 trường hợp xúc sắc xuất hiện mặt có chấm chẵn, ta nói đó là 3 trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện của biến cố A. Người ta lấy tỷ số 3/6 để đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố A, tức là p(A) = 3/6

Tổng quát ta có định nghĩa sau:

b. Định nghĩa:

Nếu trong một phép thử có tất cả n trường hợp đồng khả năng trong đó có m trường hợp thuận lợi cho biến cố A, thì xác suất của biến cố A là một số được xác định như nhau:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

Đó là nội dung của định nghĩa cổ điển của xác suất, ta xét một số thí dụ tính xác suất theo định nghĩa này.

3. Các phương pháp tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

a. Phương pháp suy luận trực tiếp:

+ Thí dụ 1: Tung đồng thời 2 đồng xu. Tính xác suất để chỉ có một đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Giải: Gọi A = {chỉ có 1 đồng xu xuất hiện mặt sấp} ta phải tính p(A).

Với phép thử tung đồng thời 2 đồng xu, ta thấy có 4 trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra (n = 4):

Đồng xu	Các trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra

Thứ nhất	S	S	N	N
Thứ hai	N	S	N	S

Trong 4 trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử, có hai trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện của biến cố A (m = 2)

$$\text{Vậy } p(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4}$$

+ *Thí dụ 2:* Khi kiểm tra chương 1 môn xác suất, giáo viên cho 4 câu hỏi (câu 1, câu2, câu 3, câu 4) và sẽ hỏi 2 trong 4 câu đó. Học sinh X học cả 4 câu nhưng câu 1 và câu 4 học kỹ nhất. Tính xác suất để khi kiểm tra học sinh X gặp cả 2 câu đã học kỹ nhất.

Giải: Gọi A = khi kiểm tra học sinh X gặp cả 2 câu đã học kỹ nhất. Ta phải tính p(A).

Nếu hỏi 2 trong 4 câu (phép thử), thì có 6 trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra (n = 6) như sau:

Câu 1 và câu 2; câu 1 và câu 3; câu 1 và câu 4

Câu 2 và câu 3; câu 2 và câu 4; câu 3 và câu 4

Trong 6 trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra, có 1trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện của biến cố A (m= 1). Vậy $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$

b. Phương pháp dùng các công thức của giải tích tổ hợp.

Với ví dụ ở trên, ta cũng có thể dùng giải tích tổ hợp để giải

Thí dụ 3: Một lô sản phẩm có 10 sản phẩm, trong đó có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ lô sản phẩm đó 3 sản phẩm. Tìm xác suất để:

a) Cả 3 sản phẩm lấy ra đều là chính phẩm.

b) Trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 chính phẩm.

c. Phương pháp dùng sơ đồ ven:

Ví dụ: Một gia đình có 3 con, tìm xác suất để gia đình đó có 2 con gái?

(giả sử xác suất sinh con trai và con gái là như nhau?

Hướng dẫn: dùng sơ đồ ven, có 8 kết cục đồng khả năng xảy ra là: GGG, GGT, GTG, GTT, TGG, , TGT, TTG, TTT. Trong đó có 3 kết cục thuận lợi để có 2 con gái

$$\text{Vậy } p(A) = \frac{3}{8}$$

Với định nghĩa cổ điển, ta đã tính được xác suất của khái niệm nhiều biến cố và việc tính toán trong một số trường hợp khá đơn giản và trực quan. Tuy nhiên, phạm vi áp dụng của định nghĩa này đối với loại phép thử là hữu hạn (n: hữu hạn) và những trường hợp có thể xảy ra trong phép thử ấy lại phải đồng khả năng. Nói cách khác, đối với loại phép thử mà số trường hợp có thể xảy ra trong phép thử không có tính đồng khả năng, thì không thể áp dụng được định nghĩa cổ điển.

4. Định nghĩa thống kê của xác suất:

a. Định nghĩa tần suất của biến cố:

Giả sử trong một điều kiện nào đó ta có thể lặp lại n lần một phép thử và thấy trong đó có m lần xuất hiện biến cố A, thì tỷ lệ $\frac{m}{n}$ gọi là tần suất của biến cố A và được ký hiệu là : f (A).

Như vậy f (A) = $\frac{m}{n}$

b. Các thí dụ:

+ *Thí dụ 1*: Khi khảo sát ngẫu nhiên 40 sinh viên, người ta phát hiện ra 5 sinh viên giỏi. Nếu gọi A là biến cố "xuất hiện sinh viên giỏi" thì tần xuất xuất hiện sinh viên giỏi trong số 40 sinh viên được khảo sát là: f (A) = 1/8

+ *Thí dụ 2:* Để xác định tần suất của biến số xuất hiện mặt sấp (biến cố S) khi tung một đồng xu nhiều lần, người ta còn ghi lại được những số liệu có tính chất lịch sử sau:

Người thí nghiệm	số lần tung (n)	số lần xuất hiện mặt sấp (m)	tần suất xuất hiện mặt sấp f (S) = m/n
Buýp - phông	4.040	2.048	0,5070
Piếc - sơn	12.000	6.019	0,5016
Piếc - sơn	24.000	12.012	0,5005

Qua thí dụ này ta nhận thấy tần suất của biến số xuất hiện mặt sấp (biến cố S) phụ thuộc vào số lượng phép thử tiến hành. Tuy nhiên, qua thực nghiệm ta cũng nhận thấy giá trị tần suất này dao động rất ít xung quanh một số xác định (0,5) khi số phép thử càng lớn.

Qua thí dụ trên và nói chung qua việc quan sát nhiều hiện tượng, người ta thấy tần suất của một biến cố có tính chất ổn định, nghĩa là nó dao động rất ít xung quanh một số xác định p nào đó khi số phép thử khá lớn. Số p đó được gọi là xác suất của biến cố ấy theo điểm thống kê.

Từ đó ta đi đến định nghĩa sau:

c. Định nghĩa:

Nếu tần suất xuất hiện biến cố A luôn luôn dao động xung quanh một số xác định p nào đó, và khi số phép thử tăng lên khá lớn mà tần suất xuất hiện biến cố A càng gần tới p, thì số p được gọi là xác suất của biến cố A theo quan điểm thống kê.

Định nghĩa này cho phép ta lấy gần đúng:

$$p = p(A) = \lim f(A) \text{ khi } n \text{ đủ lớn})$$

Dễ dàng nhận thấy rằng định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê, xác suất cũng có đầy đủ những tính chất như trong định nghĩa cổ điển.

Định nghĩa thống kê của xác suất đã khắc phục được một nhược điểm của định nghĩa cổ điển (định nghĩa này không dùng đến khái niệm đồng khả năng), vì vậy định nghĩa này được sử dụng nhiều trong thực tế. Bên cạnh ưu điểm trên, ta nhận thấy định nghĩa này còn có những hạn chế: Định nghĩa này không giúp ta tìm được giá trị chính xác của xác suất mà chỉ tìm được giá trị gần đúng. Tuy nhiên, bằng định nghĩa này, người ta đã tìm được xác suất để sinh con trai trong mỗi lần sinh là p = 0,518, con số này hầu như không thay đổi theo thời gian, địa phương và chủng tộc. Nhà toán học La- plat-xơ (Laplace) trong 10 năm liền theo dõi ở các thành phố Pe-téc-bua, LuânĐôn, và Bá Linh thấy tỷ số đó là 22/43.

Ông cũng đã theo dõi 40 năm liền (1745) ở Pari thấy tỷ số là 25/49. Nhà toán học Cra-me (Cramer) theo dõi ở Thuỵ Điển trong năm 1935 cũng thấy tỷ số đó là 0,518.

5. Tính chất của xác suất:

Xác suất có những tính chất cơ bản sau:

a. Tính chất 1: $0 \leq p(A) \leq 1$, A là một biến cố nào đó. Thật vậy, theo định nghĩa cổ điển của xác suất thì p(A) = $\frac{m}{n}$ vì m là số trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện của biến cố A cho nên $0 \leq m \leq n$

Vì n là số tất cả các trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử, nên ta có: $n \geq m \geq 0$

Từ đó suy ra: $\frac{0}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n}$

Hay: $0 \leq p(A) \leq 1$

b. Tính chất 2: p(U) = 1

Thật vậy, đối với biến cố chắc chắn (U) thì trường hợp đồng khả năng nào có thể xảy ra của phép thử cũng đều là trường hợp thuận lợi để nó xuất hiện, nên m = n.

Do đó p(U) = $\frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$

c. Tính chất 3: p(V) = 0

Thật vậy, đối với biến cố không thể (V) thì trong số n trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử, không có trường hợp thuận lợi để nó xuất hiện, nên m = 0.

Do đó p(V) = $\frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$

A. THỰC HÀNH

Bài 1: Điều tra năm 1989 thấy 48,53 trẻ tại một địa phương sâu răng. Điều trị và súc miệng bằng Fluo 0,2% trong 8 năm, điều tra lại 1250 trẻ ban đầu thấy 181 trẻ sâu răng? đánh giá tỉ lệ trẻ sâu răng sau 8 năm điều trị và xúc miệng

Bài 2: Một hộp có 10 ống thuốc, trong đó có 6 ống thuốc ngoại và 4 ống thuốc nội, lấy ngẫu nhiên từ hộp đó 3 lọ thuốc, tìm xác suất để:

a. Cả 3 lọ thuốc lấy ra đều là thuốc ngoại?
b. Trong 3 lọ lấy ra có đúng 1 lọ thuốc ngoại?

Bài 3: Tung con xúc sắc hai lần, tìm xác suất để trong đó có một lần được 6 chấm?

Bài 4: Có 30 đề thi trong đó có 10 đề khó, 20 đề trung bình, tìm xác suất để:

a) Một học sinh bốc thăm thi, thì được 2 đề trung bình?
b) Một học sinh bốc thăm thi, thì bốc được ít nhất 1 đề trung bình

Bài 5. Một khách sạn có 6 phòng đơn. Cứ 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lý chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để:

a) Cả 6 người đều là nam.

b) Có 4 nam và 2 nữ.

c) Có ít nhất hai nữ.

Bài 6: Trong một lớp gồm 50 người, trong đó:

20 người chơi bóng đá,

15 người chơi bóng chuyền,

10 người chơi bóng rổ,

8 người chơi bóng đá và bóng chuyền,

5 người chơi bóng đá và bóng rổ,

3 người chơi bóng chuyền và bóng rổ,

1 người chơi bóng đá, bóng chuyền và bóng rổ

Lấy ngẫu nhiên một học sinh. Tìm xác suất để người đó chơi ít nhất một môn bóng?

Bài 7: Trong một hộp có 50 lọ thuốc, trong đó có 10 lọ Penicilin. Lấy ngẫu nhiên ra 3 lọ, tìm xác suất sao cho lấy được

a. Lấy được 3 lọ Penicilin
b. Lấy được 2 lọ Penicilin

Bài 8: 25 hành khách lên ngẫu nhiên 5 toa tầu. Tìm xác suất để:

a. Toa thứ nhất có đúng 4 hành khách
b. Mỗi toa có 5 hành khách

Bài 4

CÁC PHÉP TÍNH VỀ XÁC SUẤT

Số tiết: (LT: 02, TH: 06)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được công thức nhân xác suất

2. Trình bày được công thức cộng xác suất

3.Vận dụng để giải được bài tập về các phép tính của xác suất

NỘI DUNG

A. LÝ THUYẾT

I. Công thức nhân xác suất

1. Xác suất có điều kiện:

a. Định nghĩa: Xác suất của biến cố B được tính khi biết biến cố A nào đó đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện, kí hiệu là p(B/A), thường được đọc là "xác suất để B xảy ra với điều kiện A đã xảy ra" hoặc "xác suất của B với điều kiện A"

b.Ví dụ: Giả sử 1 lớp chia làm 3 nhóm thực tập. Nhóm I có 30 sinh viên trong đó có 10 nữ, nhóm II có 25 sinh viên trong đó có 10 nữ, nhóm III có 25 sinh viên trong đó có 8 nữ. Chọn ngẫu nhiên trong lớp ra một sinh viên, tìm xác suất để đó là sinh viên nữ thuộc nhóm 2?

Gọi B là biến cố sinh viên chọn ra là nữ

A là biến cố sinh viên thuộc nhóm 2

Ta có p(B) = $\frac{28}{80} = 0{,}35$ p(B/A) = $\frac{10}{25} = 0{,}4$ ta thấy p(B) $\neq$ p(B/A)

2. Hai biến cố độc lập:

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu như sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng gì tới sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia và ngược.

Tức là: p(B) = p(B/A) hoặc p(A) = p(A/B)

Trong trường hợp ngược lại ta nói A và B là phụ thuộc nhau

Để xác định tính độc lập của các biến cố, trong thực tế ít khi người ta dùng cách kiểm nghiệm xem những đẳng thức trên có được thực hiện hay không, mà thông thường người ta căn cứ vào kinh nghiệm vào trực giác. Chẳng hạn, khi tung 2 đồng xu, rõ ràng đồng xu này có xuất hiện mặt sấp hay không, cũng không ảnh hưởng tới xác suất để đồng xu kia xuất hiện mặt sấp (hay ngửa). Như vậy, việc bà mẹ này sinh con trai hay không, cũng không ảnh hưởng tới xác suất sinh con trai (gái) của bà mẹ khác. Bằng cách đó, ta cũng có thể nhận biết được các biến cố vừa xét là độc lập.

3. Công thức nhân xác suất:

a. Định lý:

Nếu trong một phép thử, các biến cố A và B có thể cùng xảy ra thì:

$$p(A.B) = p(B).p(A/B) = p(A).p(B/A)$$

b. Chứng minh:

Giả sử n là số kết quả có thể có khi thực hiện phép thử

m_1 là số trường hợp thuận lợi cho biến cố A xảy ra là

m_2 là số trường hợp thuận lợi cho biến cố B xảy ra là m là số trường hợp thuận lợi cho cả biến cố A và B xảy ra

khi đó $\quad p(A.B) = \dfrac{m}{n} \qquad p(A) = \dfrac{m_1}{n}$

ta đi tìm p(B/A), với điều kiện biến cố A đã xảy ra rồi thì số kết cục duy nhất đồng khả năng của phép thử đối với biến cố B là m_1 , trong đó m là kết cục thuận lợi cho biến cố B xảy ra.

Khi đó theo định nghĩa ta có: $p(B/A) = \dfrac{m}{m_1} = \dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{m_1}{n}} = \dfrac{p(A.B)}{p(A)}$

Vậy p(A.B) = p(A).p(B/A)

Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể chứng minh được p(A.B) = p(B).p(A/B)

c. Hệ quả 1:

+ Nếu A và B là 2 biến cố độc lập với nhau thì ta có:

p(A.B) = p(A).p(B)

+ Tổng quát: nếu trong một phép thử, các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ có thể cùng xảy ra thì: $\quad p(A_1.\ A_2.\ \ldots.\ A_k) = p(A_1).p(\ A_2/A_1)\ldots.p(A_k/A_1.\ A_2.\ \ldots.\ A_{k-1})$

Nếu các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ độc lập thì:

$$p(A_1.\ A_2.\ \ldots.\ A_k) = p(A_1).p(\ A_2)\ldots.p(A_k)$$

d. Các thí dụ:

+ Thí dụ 1: Một công nhân đứng hai máy hoạt động độc lập nhau. Xác suất để máy thứ nhất, máy thứ 2 không bị hỏng trong một ca làm việc lần lượt là 0,9 và 0,8. Tính xác suất để cả 2 máy đều không bị hỏng trong một ca làm việc.

Giải:

Gọi A = {cả 2 máy đều không bị hỏng trong một ca làm việc}

Theo yêu cầu của đầu bài, ta phải tính p(A)

Nếu gọi A_i = { máy thứ i không bị hỏng trong một ca làm việc} (i =1,2),

khi đó ta có: $A = A_1.A_2$

Vì vậy xác suất cần tìm là: $p(A) = p(A_1.A_2)$

Theo giả thiết A_1, A_2 là 2 biến cố độc lập với nhau nên ta có:

$p(A) = p(A_1.A_2) = p(A_1).p(A_2) = 0,72$

+ Thí dụ 2 : Một tập gồm 10 chứng từ, trong đó có 2 chứng từ không hợp lệ. Một cán bộ kế toán rút ngẫu nhiên 1 chứng từ và tiếp đó rút ngẫu nhiên 1 chứng từ khác để kiểm tra.

a. Tính xác suất để cả 2 chứng từ rút ra đều hợp lệ.

b. Nếu người đó rút chứng từ thứ ba. Tính xác suất để trong chứng từ rút ra chỉ có chứng từ thứ 3 không hợp lệ.

Giải :

Gọi A = {cả 2 chứng từ rút ra đều hợp lệ}.

B = {trong 3 chứng từ rút ra, chỉ có chứng từ thứ 3 không hợp lệ}

Theo yêu cầu của đầu bài ta phải tính xác xác suất p(A), p(B).

Nếu gọi A_i = {chứng từ rút ra lần thứ i là hợp lệ} (i = 1,3). Khi đó ta có :

$$A = A_1 . A_2 \text{ và } B = A_1 . A_2 . A_3$$

Vì vậy các xác suất cần tìm là:

$$p(A) = p(A_1 . A_2)$$

$$= p(A_1).\ p(A_2/ A_1) = \frac{8}{10}.\frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

$$p(B) = p(A_1 . A_2 . \overline{A_3})$$

$$= p(A_1).\ p(A_2/A_1) .\ p(\overline{A_3}/A_1 . A_2).$$

$$= \frac{8}{10}.\frac{7}{9}.\frac{2}{8} = \frac{7}{45}$$

II. Công thức cộng xác suất

Trong một phép thử, đã biết xác suất của một số biến cố nào đó ta có thể tính xác suất của biến cố hợp của chúng.

1.Công thức cộng xác suất:

a. Định lý

Xác suất của tổng 2 biên cố bằng tổng các xác suất trừ đi xác suất của tích hai biến cố. Nghĩa là cho hai biến cố A và B ta có :

$$\boxed{p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A.B)}$$

b. Chứng minh :

Giả sử trong n trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử:

+ Có m_1 trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện của biến cố A, tức là: p(A)= $\frac{m_1}{n}$

+ Có m_2 trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện của biến cố B, tức là: p(B) = $\frac{m_2}{n}$

+ Có m trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện cả biến cố A và B, tức là có m trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện biến cố tích A.B. Do đó p(A.B) = $\frac{m}{n}$

khi đó số trường hợp thuận lợi cho việc xuất hiện của biến cố tổng (A + B) là: $(m_1 + m_2 - m)$.

Vì vậy :

$$p(A + B) = \frac{m_1 + m_2 - m}{n} = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{n} - \frac{m}{n} = p(A) + p(B) - p(A . B)$$

Định lý được chứng minh.

Từ định lý trên ta suy ra các hệ quả sau:

2. Hệ quả:

a. Hệ quả 1: với 3 biến cố A, B, C ta có :

$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A.B) - p(A.C) - p(B.C) + p(A.B.C)$$

b. Hệ quả 2 : Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì ta có :

$$p(A + B) = p(A) + p(B)$$

Thật vậy, theo định lý trên ta có :

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A.B)$$

vì A và B là hai biến cố xung khắc, nên A . B = V

Vì vậy ta có : $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A.B)$

$= p(A) + p(B) - 0$

$= p(A) + p(B)$

<u>c. Hệ quả 3</u>: Nếu $A_1, A_2, ... A_n$ là một hệ các biến cố xung khắc từng đôi thì ta có :

$$p(A_1 + A_2 + ... + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n)$$

Chú ý: Vì $A + A = U \Rightarrow p(A + A) = p(U) \Rightarrow p(A + A) = 1 \Rightarrow p(A) + p(A) = 1$ Từ đó suy ra : $p(A) = 1 - p(A)$

3. Các thí dụ:

<u>a. Thí dụ 1</u> : Một người bắn một viên đạn vào một bia đã được chia làm 3 phần. Giả sử xác suất người đó bắn trúng phần 1, phần 2, phần 3 của bia lần lượt là: 0,2; 0,3 và 0,4. Tính xác suất để người đó :

a. Bắn trúng phần 1 hoặc 2 của bia.

b. Bắn trúng bia.

c. Bắn không trúng bia.

Giải:

Gọi A = {Bắn trúng phần 1 hoặc phần 2 của bia}.

B = {Bắn trúng bia}.

C = {Bắn không trúng bia}.

Theo yêu cầu của đầu bài, ta phải tính các xác suất : p(A), p(B) và p(C).

Nếu gọi A_i = {Bắn trúng phần i của bia} (i = 1,3).

Khi đó ta có : $A = A_1 + A_2$.

$B = A_1 + A_2 + A_3$.

Và ta cũng nhận thấy B và C là hai biến cố đối lập.

a. Xác suất cần tìm là p(A). Vì A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc suy ra :

$p(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$= 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$

b. $P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9$

$\Rightarrow P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

<u>b. Thí dụ 2 :</u> Ba vận động viên bóng rổ, mỗi người ném một quả vào rổ. Giả sử xác suất ném trúng rổ của vận động viên thứ 1, thứ 2, thứ 3 lần lượt là 0,7; 0,8; 0,9. Tính xác suất để có ít nhất 1 vận động viên ném trúng rổ. với giả thiết rằng các vận động viên ném độc lập nhau.

Giải :

Gọi A = {có ít nhất một vận động viên ném trúng rổ}.

Theo yêu cầu của đầu bài, ta phải tính p(A).

Nếu gọi A_i = {Vận động viên thứ i ném trúng rổ} (i = 1,3).

Khi đó ta có : $A = A_1 + A_2 + A_3$

Vì vậy xác suất cần tìm là :

$p(A) = p(A_1 + A_2 + A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) -$

$p(A_1A_2) - p(A_2A_3) - p(A_1A_3) + p(A_1A_2A_3)$

Vì A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau nên ta có :

$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_1)\,p(A_2) - p(A_2)\,p(A_2) -$
$-p(A_1)\,p(A_3) + p(A_1)\,p(A_2)\,p(A_3)$
$= 0{,}7 + 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}7 . 0{,}8 - 0{,}7 . 0{,}9 - 0{,}8 . 0{,}9 + 0{,}7 . 0{,}8 . 0{,}9 = 0{,}994$

Giá trị của xác suất trên còn có thể tính bằng cách dựa vào công thức xác suất của biến cố đối lập như sau :

$$p(A) = p(A_1 + A_2 + A_3)$$
$$= 1 - p(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3})$$
$$= 1 - p(\overline{A_1})\,p(\overline{A_2})\,p(\overline{A_3}) \text{ vì } \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3} \text{ Độc lập toàn bộ}$$
$$= 1 - 0{,}3 . 0{,}2 . 0{,}1 = 0{,}994$$

c. Thí dụ 3: Một đợt sổ số phát hành n vé trong đó có m vé trúng thưởng $(m < n)$. Người thứ nhất mua ngẫu nhiên một vé. Tiếp đó người thứ hai mua ngẫu nhiên một vé khác. Tính xem khả năng trúng thưởng của người nào lớn hơn.

Giải :

Gọi A_i - {người thứ i mua được vé trúng thưởng} (i = 1,2).

Ta phải so sánh $p(A_1)$ và $p(A_2)$

Dễ dàng nhận thấy rằng $p(A_1) = \frac{m}{n}$

Để tính được $p(A_2)$, ta nhận thấy : $A_2 = A_1 . A_2 + \overline{A_1} . A_2$

Do đó : $p(A_2) = p(A_1.A_2) + p(\overline{A_1}A_2)$ (Vì : $A_1.A_2$ và $\overline{A_1}A_2$ là hai biến cố xung khắc)

$$= p(A_1) . p(A_2 / A_1) + p(\overline{A_1}) . p(A_2 / \overline{A_1})$$
$$= \frac{m}{n}.\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}.\frac{m}{n-1}$$
$$= \frac{m}{n}$$

Như vậy $p(A_1) = p(A_2) = \frac{m}{n}$.

Nghĩa là khả năng trúng thưởng của hai người như nhau. Từ đó suy ra, khi mua vé sổ số thì mua trước hay mua sau, khả năng trúng thưởng vẫn như nhau. Cũng tương tự như vậy, khi rút thăm, dù rút trước hay rút sau cũng không lợi hơn nhau.

B. THỰC HÀNH

Bài 1. Có 2 bác sỹ cùng chẩn đoán bệnh cho 1 bệnh nhân. Khả năng chẩn đoán đúng của 2 bác sỹ lần lượt là 0,9 và 0,8. Tìm xác suất để:

a. Cả hai bác sỹ cùng chẩn đoán đúng ?

b. ít nhất có 1 bác sỹ chẩn đoán đúng ?

c. Bác sỹ 1 đúng và bác sỹ 2 chẩn đoán sai ?

Bài 2. Có 1 hộp phấn trong đó có dựng 6 viên phấn đỏ và 7 viên phấn xanh. Lấy bất kỳ (không hoàn lại) 2 lần mỗi lần 1 viên phấn. Tìm xác suất để:

a. Cả 2 lần đều lấy được viên phấn màu đỏ ?

b. Có ít nhất 1 lần lấy được viên phấn màu xanh ?

c. Lần 1 phấn đỏ và lần 2 màu xanh ?

Bài 3: Một phòng điều trị có 3 bệnh nhân nặng với xác suất cấp cứu trong vòng một giờ của các bệnh nhân tương ứng là 0,7; 0,8; 0,9. tìm xác suất sao cho trong vòng một giờ:

a. Có hai bệnh nhân cần cấp cứu
b. Có ít nhất một bệnh nhân không cần cấp cứu

Bài 4: Tại một địa phương có 5000 người, điều tra thấy 510 người bị sốt rét, trong số sốt rét có 15 người sốt rét ác tính. Trong số sốt rét ác tính có 5 người chết.

a. Tìm tỉ lệ sốt rét thường
b. Tìm tỉ lệ chết của sốt rét ác tính

Bài 5: Ba bác sỹ cùng khám cho một bệnh nhân. Khả năng chẩn đoán đúng của các bác sỹ tương ứng là 0,95; 0,9; 0,85, tìm xác suất sao cho:

a. Chỉ có 2 bác sỹ chẩn đoán đúng
b. Có ít nhất một người chẩn đoán đúng
c. Chỉ có một bác sỹ chẩn đoán đúng

Bài 6: Xác suất để Hồng thi đỗ môn toán là 2/3, xác suất để cô ta thi đỗ môn tiếng anh là 4/9, giả thiết rằng xác suất để cô ta thi đỗ cả 2 môn là 1/4. Tìm xác suất để:

a. Hồng thi đỗ ít nhất một môn
b. Hồng không đỗ môn nào
c. Hồng thi trượt ít nhất một môn
d. Hồng thi đỗ đúng một môn

Bài 7: Có một lô hàng gồm 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ lô hàng ra 6 sản phẩm. Tìm xác suất để không có quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm được lấy ra?

Bài 8: Lớp có 100 Sinh viên, trong đó cú 50 SV giỏi Anh Văn, 45 SV giỏi Pháp Văn, 10 SV giỏi cả hai ngoại ngữ. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Tính xác suất để:

a. Sinh viên này giỏi ít nhất một ngoại ngữ.
b. Sinh viên này không giỏi ngoại ngữ nào hết.
c. Sinh viên này chỉ giỏi đúng một ngoại ngữ.
d. Sinh viên này chỉ giỏi duy nhất môn Anh Văn.

Bài 9: Ba sinh viên cùng làm bài thi, xác suất làm được bài của sinh viên A là 0,8; của sinh viên B là 0,7; của sinh viên C là 0,6. Tìm xác suất để:

a. Cả 3 sinh viên làm được bài.
b. Có ít nhất hai sinh viên làm được bài

Bài 10: Hãy chứng minh rằng với 3 biến cố bất kỳ A, B, C luôn thoả mãn điều kiện:

$$p(A+B+C) \leq p(A) + p(B) + p(C)$$

Bài 11: Hãy chứng minh rằng các biến cố: A, $\bar{A}$B, $\overline{A+B}$ lập thành 1 nhóm đầy đủ các biến cố

Bài 12: Hãy chứng minh rằng với mọi A, B:

+ p($\overline{A+B}$) = p($\overline{A}.\overline{B}$)
+ p($\overline{A.B}$) = P($\overline{A}+\overline{B}$)

Bài 5

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ VÀ

CÔNG THỨC BAYEST

Số tiết:(LT: 02, TH: 06)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được công thức xác suất đầy đủ

2. Trình bày được công thức Bayest

3. Vận dụng để giải được các bài tập về công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayest

NỘI DUNG:

A. LÝ THUYẾT

1. Công thức xác suất đầy đủ

Đây là một định lý bao hàm cả định lý cộng và nhân xác suất. Một hệ gồm n biến cố được gọi là hệ đầy đủ nếu chúng xung khắc với nhau từng đôi và có tổng bằng biến cố chắc chắn.

Giả sử các biến cố $A_1, A_2, \ldots A_n$ lập thành một hệ đầy đủ và B là một biến cố xảy ra khi một trong các biến cố A_i xảy. Cho biết $p(A_i)$ và $p(B/A_i)$
($i = \overline{1, n}$). Khi đó xác suất của biến cố B được tính theo công thức :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B/A_i) \qquad (1)$$

(1) gọi là công thức xác suất đầy đủ.

Chứng minh : Vì $A_1, A_2 \ldots A_n$ lần thành hệ đầy đủ các biến cố nên :

$$B = BU = B\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i B$$

Các biến cố A_i (i = 1, n) xung khắc từng đôi nên các biến cố $A_i.B$ (i = 1, n) cũng xung khắc từng đôi, áp dụng định lý cộng và nhân xác suất ta được.

$$p(B) = p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B/A)$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

2. Công thức Bayest

Công thức mang tên của linh mục và nhà toán học người Anh Thomas Bayest, là công thức ngược, cho phép tính xác xuất có điều kiện p(B/A) khi biết p(A/B) và một số thông tin khác.

Công thức: Với cùng giả thiết như công thức xác định đầy đủ, thêm một giả thiết nữa là phép thử được thực hiện và biến cố B đã xảy ra. Hãy tính $p(A_k/B)$ (k = 1,n)

Ta có :

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_K) P(B / A_K)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)} \quad (2) \quad (k = \overline{1,n})$$

(2) gọi là công thức Bayest.

Chứng minh:

Xét xác suất của tích hai biến cố (B .A_k). Theo công thức xác suất một tích ta có :

$P(B.A_k) = P(B) . P(A_k/B) = P(A_k).P(B/A_k) \Rightarrow P(A_k/B) = P(B/A_k) / P(B)$

Thay P(B) bởi công thức (1) ta được điều phải chứng minh :

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B/A_K)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_1)P(B/A_1)}$$

3. Ví dụ

a. Ví dụ 1 : Có hai hộp thuốc. Hộp I có 2 vỉ thuốc ngoại và 5 vỉ thuốc nội. Hộp II có 3 vỉ thuốc ngoại và 6 vỉ thuốc nội Từ hộp I và hộp II lần lượt lấy ra 2 vỉ thuốc và 1 vỉ thuốc. Từ 3 vỉ thuốc đó lại lấy ra một vỉ.

a) Tính xác suất để vỉ lấy ra sau cùng là thuốc ngoại.

b). Biết vỉ lấy ra sau cùng là thuốc ngoại. Tính xác suất để vỉ thuốc này thuộc hộp số II ?

Giải :

Gọi Ai là biến cố "vỉ thuốc lấy ra sau cùng là của hộp i" (i = 1,2). Ta có A_1, A_2 lập thành hệ đầy đủ các biến cố và $p(A_1) = 2/3$, $p(A_2) = 2/3$, $p(A_2) = 1/3$.

Gọi B là biến cố "vỉ thuốc lấy ra sau cùng là thuốc ngoại".

a) Theo công thức xác suất đầy đủ ta có :

$$p(B) = p(A_1)\, p(B/A_1) + p(A_2)\, p(B/A_2).$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{2}{7} + \frac{1}{3}.\frac{3}{9} = \frac{19}{63}$$

b). Theo công thức Bây - ét ta có.

$$p(A_2\backslash B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{1/3.3/9}{\frac{19}{63}} = \frac{7}{19}$$

b. Ví dụ 2: Điều trị phương pháp I, phương pháp II, phương pháp III tương ứng cho 5000, 3000, 2000 bệnh nhân. Xác suất khỏi của các phương pháp tương ứng là 0,85; 0,9; 0,95

a). Tìm xác suất khỏi của 3 phương pháp khi điều trị cho bệnh nhân

b). Điều trị một trong 3 phương pháp cho bệnh nhân đã khỏi, tìm tỉ lệ điều trị của từng phương pháp?

Giải:

Tổng số bệnh nhân điều trị là 10000 người

Gọi A_i là biến cố bệnh nhân điều trị bởi phương pháp thứ i (i=1,2,3)

$p(A_1) = 0,5$, $p(A_2) = 0,3$ $p(A_3) = 0,2$

a). Gọi B là biến cố điều trị khỏi

ta có $p(B/A_1) = 0,85$ $p(B/A_2) = 0,9$ $p(B/A_3) = 0,95$

áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$p(B) = \sum_{1}^{3} p(A_i).p(B/A_i)$$
$$= 0,5.0,85 + 0,3.0,9 + 0,2.0,95$$

$= 0,885$

b). $p(A_1/B) = \dfrac{p(A_1).p(B/A_1)}{p(B)} = 0,48$

$$p(A_2/B) = \frac{p(A_2).p(B/A2)}{p(B)} = 0,305$$

$$p(A_3/B) = \frac{p(A_3).p(B/A_3)}{p(B)} = 0,215$$

B. THỰC HÀNH:

Bài 1. Trong một tủ lưu bệnh án của 1 bệnh viên bao gồm 4 ngăn đựng bệnh án của 4 khoa Nội, Ngoại, Sản, Nhi có hình thức bề ngoài giống hệt nhau. Ngăn 1 chứa bệnh án của khoa Nội, ngăn 2 chứa bệnh án của khoa Ngoại, ngăn 3 chứa bệnh án của khoa Sản; ngăn 4 chứa bệnh án của khoa Nhi.

Giả sử ngăn 1 : Có 4 bệnh án nam và 5 bệnh án nữ.

Giả sử ngăn 2 : Có 5 bệnh án nam và 6 bệnh án nữ.

Giả sử ngăn 3 : Có 6 bệnh án nam và 7 bệnh án nữ.

Giả sử ngăn 4 : Có 7 bệnh án nam và 8 bệnh án nữ.

Một bác sỹ lấy bất kỳ một ngăn sau đó lất bất kỳ 2 bệnh án để kiểm tra.

a. Tìm xác suất để cả 2 bệnh án đều là Nam ?

b. Tìm xác suất để cả 2 bệnh án đều là Nữ ?

c. Tìm xác suất để có 1 bệnh án là Nam, 1 bệnh án là Nữ ?

d. Giả sử 2 bệnh án đều là Nam tìm xác suất để bệnh án đó thuộc các khoa Nội, Ngoại, Nhi?

Bài 2. Có 2 hộp thuốc. Hộp 1 có 6 vỉ thuốc ngoại và 8 vỉ thuốc nội. Hộp 2 có 3 vỉ thuốc ngoại và 6 vỉ thuốc nội . Lấy ngẫu nhiên 1 vỉ từ hộp 1 chuyển sang hộp 2, sau đó từ hộp 2 lấy bất kỳ ra 1 vỉ.

a. Tìm xác suất để vỉ thuốc lấy ra là vỉ thuốc ngoại.

b. Tìm xác suất để vỉ thuốc lấy ra là vỉ thuốc nội

c. Giả sử vỉ thuốc lấy ra là vỉ thuốc nội, tìm xác suất để vỉ được chuyển từ hộp 1 sang hộp 2 lần lượt là vỉ thuốc ngoại?

Bài 3. Trong ngăn lưu bệnh án của khoa Ngoại chấn thương của 1 bệnh viện có 30% bệnh án bệnh nhân bị bỏng do nước nóng, 32% bỏng do hoá chất và 38% bỏng do nguyên nhân khác. Giả sử tỷ lệ bệnh nhân bị biến chứng của các thể loại bỏng lần lượt là 1%, 2% và 4%. Lấy lất kì 1 bệnh án để kiểm tra.

a. Tìm xác suất để lấy được bệnh án bệnh nhân bị biến chứng ?

b. Giả sử bệnh án lấy ra là bệnh án của bệnh nhân bị biến chứng tìm xác suất để bệnh nhân đó bị bỏng do hoá chất ?

Bài 4. Một nhà máy có ba phân xưởng sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Xác suất để phân xưởng 1, phân xưởng 2 và phân xưởng 3 sản xuất được sản phẩm loại I lần lượt là: 0,7; 0,8; 0,6. Từ một lô hàng gồm 20% sản phẩm được phân xưởng 1; 30% sản phẩm của phân xưởng 2 và 50% sản phẩm của phân xưởng 3 người ta lấy ra 1 sản phẩm để kiểm tra.

a. Tính xác suất để sản phẩm được kiểm tra là loại I.

b. Biết sản phẩm được kiểm tra là loại I. Tính xác suất để sản phẩm này do phân xưởng 2 sản xuất.

Bài 5. Tỉ lệ người dân nghiện thuốc lá là 30%, biết rằng tỉ lệ người viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là 60%, còn tỉ lệ người viêm họng trong số người không hút thuốc lá là 40%

a. Chọn ngẫu nhiên một người, biết rằng người đó viêm họng. Tính xác suất để người đó nghiện thuốc?

b. Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc?

Bài 6. Biết rằng tỉ lệ người mắc bệnh nào đó ở một địa phương là 2%. Người ta đã dùng một phản ứng giúp chẩn đoán, nếu người đó bị bệnh thì phản ứng luôn luôn dương tính, nếu người không bị bệnh thì phản ứng dương tính là 0,2.

a. Tìm xác suất dương tính của phản ứng

b. Tìm xác suất bị bệnh, không bị bệnh trong nhóm người có phản ứng dương tính?

Bài 7. Xác suất bị bạch tạng của đàn ông là 6.10^{-4}, của đàn bà là: $3,6.10^{-5}$, trong đám đông đàn ông bằng 0,5 số đàn bàn.

Tìm xác suất để gặp một người đàn ông trong đám đông bị bạch tạng?

Bài 8: Một phân xưởng có 60 công nhân, trong đó có 40 nữ và 20 nam. Tỉ lệ công nhân nữ tốt nghiệp phổ thông trung học là 15%, còn tỉ lệ này đối với nam là 20%. Gặp ngẫu nhiên một công nhân của phân xưởng. Tìm xác suất để gặp một người công nhân tốt nghiệp phổ thông trung học?

Bài 9: Một cặp trẻ sinh đôi có thể cùng trứng hoặc không cùng trứng.

Một cặp sinh đôi cùng trứng những đứa trẻ sinh ra bao giờ cũng cùng giới tính, còn cặp sinh đôi không cùng trứng xác suất để chúng cùng giới tính là 1/2, giả sử cặp sinh đôi cùng trứng với xác suất bằng p. Tìm xác xuất để cặp trẻ sinh đôi cùng giới tính là cặp sinh đôi cùng trứng.

CHƯƠNG II: THỐNG KÊ TRONG Y HỌC

Bài 1

THAM SỐ MẪU

Số tiết: (LT: 02, TH: 04)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được công thức tính, ý nghĩa của số trung bình

2. Trình bày được công thức tính, ý nghĩa của phương sai, độ lệch mẫu

3. Vận dụng để giải được các bài tập về tham số mẫu

NỘI DUNG:

A. LÝ THUYẾT

1. Các khái niệm

a. Khoảng số thực:

khoảng đóng $[a,b]$ = { x thực: a $\le x \le b$ }

khoảng nửa đóng, nửa mở: $[a,b)$, $(a,b]$

khoảng mở: (a,b)

b. Kí hiệu tổng: $\sum_{1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

$$\sum_{1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{1}^{n} x_i + \sum_{1}^{n} y_i$$

$$\sum_{1}^{n} a.x_i = a.\ \sum_{1}^{n} x_i$$

c. Tập hợp tổng quát và tập hợp mẫu:

tập hợp tổng quát là tập hợp bao gồm tất cả các đối tượng cần nghiên cứu, số phần tử của tập hợp tổng quát gọi là kích thước của tập hợp tổng quát, kí hiệu là: N

Vì các điều kiện hạn chế, thường lấy ra một mẫu để nghiên cứu

Tập hợp mẫu là tập hợp bao gồm các đối tượng lấy ra để nghiên cứu

Số phần tử của tập hợp mẫu gọi là kích thước mẫu, kí hiệu: n, nói chung N $\ge$n

Cần lấy mẫu ngẫu nhiên, khách quan sao cho tính chất của tập hợp mẫu phản ánh đúng tính chất tập hợp tổng quát

Có 2 cách lấy các phần tử ra để nghiên cứu:

Lấy có hoàn lại là lấy ra một phần tử để nghiên cứu rồi trả lại tập hợp mẫu, Kết quả các lần nghiên cứu sau không phụ thuộc các kết quả nghiên cứu trước đó, phép thử độc lập.

Lấy không hoàn lại là lấy ra một phần tử để nghiên cứu sau đó không trả lại tập hợp mẫu, kết quả các nghiên cứu sau phụ thuộc kết quả các nghiên cứu trước, phép thử không độc lập.

d. Dấu hiệu nghiên cứu

khi nghiên cứu chỉ quan tâm xe xét một số mặt, một số tính chất của đối tượng nghiên cứu. Các đặc tính, tính chất cần nghiên cứu gọi là dấu hiêụ nghiên cứu. Có dấu hiệu nghiên cứu về chất, có dấu hiệu nghiên cứu về lượng. Các dấu hiệu nghiên cứu về chất được nghiên cứu khả năng xuất hiện của chúng, các dấu hiệu nghiên cứu về lượng được tính các tham số mẫu.

2. Sắp xếp số liệu

Khi tiến hành nghiên cứu, số liệu thu được theo thứ tự thời gian, như vậy số liệu chưa có thứ tự giá trị. Trước khi tính các tham số mẫu, các số liệu được sắp xếp theo thứ tự giá trị.

Việc sắp xếp lại số liệu không làm thay đổi kết quả tính.

Kí hiệu n giá trị ban đầu thu được là x_i, i = $\overline{1,n}$

Có những cách sắp xếp số liệu sau:

Sắp xếp số liệu thành dãy tăng (hoặc dãy giảm)

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (1)

Có thể sắp xếp số liệu thành dãy các giá trị khác nhau tăng dần tương ứng với tần số xuất hiện của chúng

x_1	x_2	…	x_k	
m_1	m_2	…	m_k	với $n = \sum_{1}^{k} m_i$ (2)

3. Các tham số mẫu

<u>a. Trung bình mẫu $\overline{x}$</u>

- Nếu đại lượng x có n trị số $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$, thì số trung bình sẽ được tính theo công thức :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{hay} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i \qquad (1)$$

- Một cách tổng quát, nếu các trị số x_i (với i = 1,2 ... k) có các tần số tương ứng n_i thì:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_ix_i + \ldots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_ix_i}{n}$$

Trong đó : $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots + n_k$

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ (tổng số lần quan sát)

Ta viết gọn :

$$\overline{x} = \frac{\sum n_ix_i}{n} \qquad (2)$$

- áp dụng công thức (3) ta phải tính các tích n_ix_i và mất nhiều thì giờ nếu giá trị của n_i và x_i đều lớn. Để giản hoá phép tính, ta thu gọn các số liệu nguyên thuỷ bằng cách đổi gốc, ta chọn một gốc mới x_0 theo cho 0, như vậy mỗi trị số của xi sẽ được trừ đi hằng số x_0.

Ta sẽ có : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_ix_i = \frac{1}{n}\sum_i n_i(x_i + x_0 - x_0) = \frac{1}{n}\sum_i n_i(x_i - x_0) + x_0$ (3)

- Trong trường hợp các số liệu được phân vào những nhóm có khoảng cách R bằng nhau, ta còn có thể giản hoá phép tính thêm một bước nữa, như vậy mỗi biến số x_i sẽ thu gọn thành.

$$\frac{x_i - x}{R}$$

Trong đó : x_0 : Gốc mới

R : Khoảng cách giữa 2 nhóm (bằng số)

Công thức tính trung bình sẽ có dạng :

$$\bar{x} = x_0 + R\frac{\sum n_i\left(\frac{x_i - x_0}{R}\right)}{n} \quad (4)$$

Nếu ta đặt :

$u_i = \frac{x_i - x_0}{R}$, công thức trên trở thành:

$$\boxed{\bar{x} = x_0 + R\frac{\sum n_i u_i}{n}} \quad (5)$$

- Trung bình cộng là trị số bình quân của các giá trị khác nhau, nhưng thuộc cùng một loại.
- $\bar{x}$ có cùng đơn vị với x_i, chữ số thập phân của $\bar{x}$ hơn x_i một chữ số
- Mốt (x_0) là trị số có tần số lớn nhất. Nếu các số liệu đã được phân nhóm, mốt là trị số trung tâm của nhóm có tần số lớn nhất. Như ta thấy, mốt thường được chọn làm gốc mới để tính toán số trung bình theo phương pháp giản hoá.
- $\bar{x}$ là tâm quần tụ của tập hợp mẫu

Ví dụ 1: Đo Glucoza huyết (tính bằng cg trong 1 lít huyết tương) cho 17 người được coi như là bình thường và đã nhịn đói từ 4 giờ qua, người ta thu được những kết quả sau đây (các trị số đã được sắp xếp từ bé đến lớn) :

75	80	85	85	90	95	95	95	100
100	100	100	100	105	105	110	123	130

a**.** Số trung bình hay trung bình số học (ký hiệu thống kê là x) được tính như sau :

$$\bar{x} = \frac{75 + 80 + 85 + 85 + 90 + 95 + 95 ... + 120}{17}$$

$$\bar{x} = 96{,}5 cg / l$$

b. ở thí dụ trên ta gặp trị số 85 hai lần, 95 ta lần, 100 năm lần và 105 hai lần. Ta có thể viết.

$$\bar{x} = \frac{75 + 80 + (2x85) + 90 + (3x95) + (5x100) + (2x105) + 110 + 120}{17}$$

*Ví dụ 2***:** Cho bảng số liệu sau, tính cân bằng trung bình của 815 con trai 10 tuổi.

Kg	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Số người	4	9	31	75	183	204	157	97	40	12	3

Giải:

x_i (kg)	n_i	$x_i - x_0$	$n_i (x_i - x_0)$
16	4	- 5	- 20
17	9	- 4	- 36
18	31	- 3	- 93

19	75	- 2	- 150
20	193	- 1	- 183
21	204	0	0
22	157	1	157
23	97	2	388
24	40	3	360
25	12	4	192
26	3	5	75
	n = 815		- 482 + 534
			+ 50 $= \sum n_i (x_i - x_0)$

$x_0 = 21$

$\sum n_i (x_i - x_0) = 52$

$$\bar{x} = x_0 + \sum_i \frac{n_i (x_i - x_0)}{n} = 21 + \frac{82}{815} = 21 + 0{,}06 = 21{,}06kg$$

Vậy cân nặng trung bình của 815 bé trai 10 tuổi là 21,06kg

Ví dụ 3: Huyết áp tối thiểu, tính bằng mm Hg, của 2750 người lớn, nữ. Các số liệu được phân vào 12 nhóm, tính số trung bình của huyết áp tối thiểu của 2750 người lớn, nữ, bởi bảng số liệu dưới đây:

Huyết áp	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
Số người	5	8	90	186	397	464	598	431	315	185	46	25

Giải:

x_i	n_i	$x_i - x_0$	$x = \frac{x_i - x_0}{K}$	$n_i u_i$
40	5	- 30	- 6	- 30
45	8	- 25	- 5	- 40
50	90	- 20	- 4	- 360
55	186	- 15	- 3	- 558
60	397	- 10	- 2	- 794
65	464	- 5	- 1	- 46
70	598	0	0	0

75	431	5	1	431
80	315	10	2	630
85	185	15	3	555
90	46	20	4	174
95	25	25	5	125
	n = 2750			- 2246 + 1925
				- 321 = $\sum$ $n_i.u_i$

$x_0 = 70$ K = 5

$\sum n_i.u_i = -321$

$$\bar{x} = x_0 + K\frac{\sum n_i.u_i}{n}$$

$$= 70 + 5\frac{+321}{2750} = 70 + 5(-0{,}1130) = 70 - 0{,}565 = 69{,}435mmHg$$

Vậy huyết áp tối thiểu của 2750 người lớn nữ là 69,435mmHg

b. Phương sai, độ lệch mẫu:

Số trung bình là một đặc trưng trung tâm của một dãy số liệu, nó không phản ánh được mức độ phân tán của các số liệu chung quanh nó.

Thí dụ: Ta có hai dãy số sau đây:

a.	7	7	8	9	11	12	12	14
b.	1	1	2	2	8	21	22	23

Số trung bình của hai dãy đều bằng nhau:

$$\overline{x_a} = 10; \overline{x_b} = 10; n_a = n_b = 8$$

Nhưng ta thấy rõ ràng các trị số của dãy a tập trung chung quanh 10 nhiều hơn so với dãy b, hay nói một cách khách các số liệu của bay b phân tán hơn so với dãy a. Ta cần có những chỉ số xác định mức độ phân tán đó.

Độ lệch tuyệt đối trung bình ký hiệu E là :

$$E = \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$$

Với thí dụ trên, ta có :

E(a) $= \dfrac{|10-7| + |10-7| + |8-10| + |9-10| + |11-10| + |12-10| + |12-10| + |14-19|}{3}$

$= \dfrac{3+3+2+1+1+2+2+4}{8} = \dfrac{18}{8} = 2{,}25$

Và E(b) $= \dfrac{72}{8} = 9$

Ta nói rằng các số liệu của dãy b có độ phân tán lớn hơn dãy a.

Độ lệch tuyệt đối trung bình là một chỉ số phân tán dễ tính toán, nó chịu ảnh hưởng của mọi trị số của dãy. Nhưng nhược điểm của nó là phải sử dụng các giá trị tuyệt đối, do đó ta không thể dửa vào các phép tính đại số để nêu lên ý nghĩa lý thuyết của nó. Hiện nay người ta không dùng đến chỉ số này nữa.

Dĩ nhiên ta không thể dùng số trung bình của các độ lệch $x_i = \bar{x}$ với dấu của chúng (nghĩa là các giá trị đại số) vì ta sẽ có 0; thực vậy :

$$\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)}{n} = \frac{\sum x_i - \sum \bar{x}}{n} = \frac{\sum x_i - n\bar{x}}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Cho nên hiện nay người ta chỉ dùng đến 2 chỉ số phân tán: phương sai và độ lệch mẫu.

a. Phương sai là trung bình của các bình phương các độ lệch ký hiệu s^2

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum n_i (x_i - \bar{x})^2 \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[n.\sum_i n_i.x_i^2 - (\sum_i n_i.x_i)^2\right] \qquad (6)$$

$$= \frac{R^2}{n(n-1)}\left[n.\sum_i n_i.u_i{}^2 - \left(\sum_i n_i.u_i\right)^2\right] \qquad (7)$$

Từ (5), sau khi bình phương và thay $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i.x_i$ suy ra (6)

Trong công thức (6), thay $x_i = R.u_i + x_0$ dẫn đến:

$$s^2 = \frac{1}{n(n-1)}\left[n.\sum_i n_i.(R.u_i + x_0)^2 - \left(\sum_i n_i.(R.u_i + x_0)\right)^2\right]$$

khi đó (7) được chứngminh

+ s^2 không cùng đơn vị với x_i

+ s = $\sqrt{x^2}$ được gọi là độ lệch mẫu, độ lệch mẫu là một chỉ số nói lên sự phân tán của các trị số xi chung quanh $\bar{x}$.

+ s có cùng đơn vị và số thập phân với $\bar{x}$, như vậy s^2 có số thập phân gấp 2 lần số thập phân của s.

+ s^2 là trung bình của bình phương khoảng lệch giữa x_i và $\bar{x}$ và được gọi là phương sai, khi đo một đại lượng nhiều lần, s^2 và s cho biết độ chính xác của các giá trị đo được, s^2 hay s được xem là sai số của cách đo.

b. Ví dụ:

Ví dụ 1: Gọi X là áp lực động mạch phổi thời tâm trương người bình thường

Đo 30 người được kết quả như sau:

Giá trị x_i (mmHg)	2	3	4	5	6	7	8	9
Số người	1	4	7	8	2	5	2	1

Tính các tham số của mẫu trên

Giải:
Lập bảng tính:
Cách 1

x_i	n_i	$n_i.x_i$	$n_i.x_i^2$
2	1	2	4
3	4	12	36
4	7	28	112
5	8	40	200
6	2	12	72
7	5	35	245
8	2	16	128
9	1	9	81
Tổng	30	154	878

$$\bar{x} = \frac{154}{30} = 5,1$$

$$s^2 = \frac{1}{30.29}(30.878 - 154^2) = 3,0161 \approx 1,74^2$$

Cách 2:

x_i	n_i	u_i	$n_i.u_i$	$n_i.u_i^2$
2	1	-3	-3	9
3	4	-2	-8	16
4	7	-1	-7	7
5	8	0	0	0
6	2	1	2	2
7	5	2	10	20
8	2	3	6	18
9	1	4	4	16
Tổng	30		4	88

$$\bar{x} = 5 + \frac{1}{30}.4 \approx 5,1$$

$$s^2 = \frac{1^2}{29.30}(30.88 - 4^2) = 3,0161 \approx 1,74^2$$

B. THỰC HÀNH:

Bài 1: Gọi X là áp lực động mạch phổi tâm trương của người bình thường, đo 30 người được kết quả sau:

Giá trị x_i(mmHg)	2	3	4	5	6	7	8	9
Số người (n_i)	1	4	7	8	2	5	2	1

Tính các tham số của mẫu trên?

Bài 2. Tính trung bình và độ lệch của cân nặng của một nhóm học sinh mà số liệu đã được lập thành bảng sau :

Cân nặng kg	40	41	42	43	45	46	47	48	49
Số người	4	7	6	4	10	11	12	5	2

Bài 3. Tính trung bình và độ lệch chuẩn của huyết áp của nhóm bệnh nhân mà số liệu được lập thành bảng sau :

Huyết áp (mmHg)	90	100	110	120	130	140	150	160	170
Số người	2	20	30	60	20	10	2	1	1

Bài 4. Gọi X là lượng Protein huyết thanh người bình thường (g/l). Điện di 17 mẫu của 17 người thu được kết quả sau:

Giá trị (g/l)	6,9	7,2	7,6	7,8	8,5
Số người	2	3	5	6	1

Tính các tham số của mẫu trên

Bài 5. Gọi X là áp lực trung bình của động mạch phổi bệnh nhân hẹp hai lá đơn thuần, nghiên cứu thu được số liệu sau:

x_i	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103
n_i	5	20	27	24	25	23	15	10	4	2

Tính các tham số của mẫu trên?

Bài 6: đo áp lực động mạch phổi thời tâm thu bệnh nhân hẹp 2 lá thu được kết quả sau:

áp lực(x_i)	20,5	35,5	50,5	65,5	80,5	95,5	110,5	125,5	140,5	155,5
Số người(n_i)	6	20	33	24	28	12	17	8	4	1

Tính các tham số của mẫu trên?

Bài 2

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

Số tiết: (LT: 02, TH: 04)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được cách lập hàm tương quan tuyến tính,

2. *Trình bày được cách lập hàm tương quan bậc 2.*
3. *Vận dụng để giải được các bài tập về phương pháp bình phương bé nhất*

NỘI DUNG:

A. LÝ THUYẾT

1. Bài toán:

Giả sử trên mỗi đối tượng nghiên cứu thu được hai giá trị x và y của hai đại lượng X và Y. Kết quả của n đối tượng nghiên cứu được cho trong bảng sau:

X	x_1	x_2	$\dots x_n$
Y	y_1	y_2	$\dots y_n$

Giả sử giữa X và Y có mối tương quan hàm số y = ax + b hay $y = ax^2 + bx + c,\dots$ từ n cặp giá trị hãy lập hàm số y = f(x).

2. Lập hàm bậc nhất:

a. Giải bài toán:

Biểu diễn điểm $M(x_i, y_i)$ trên mặt phẳng toạ độ 0xy.

Giả sử hàm số y = ax + b đã được lập

Gọi δ_i là bình phương khoảng lệch thứ i: $\delta_i = (ax_i + b - y_i)^2$

Với n điểm $\sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2$

Hàm số y = ax + b được lập với điều kiện:

$$f(a, b) = \sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2 \text{ bé nhất} \qquad (1)$$

Khi đó cần tính các đạo hàm f’a, f’b.

$$f'a = 2\sum_1^n (ax_i + b - y_i)x_i = 2\left[(\sum_1^n x_i^{\,2}).a + (\sum_1^n x_i).b - (\sum_1^n x_i.y_i)\right]$$

$$f'b = 2\sum_1^n (ax_i + b - y_i).1 = 2.\left[(\sum_1^n x_i).a + n.b - \sum_1^n y_i\right]$$

Giải hệ hai phương trình bậc nhất đối với a và b

$$\begin{cases} f'a = 0 \\ f'b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sum_1^n x_i^2).a + (\sum_i x_i).b = \sum_i x_i.y_i \\ (\sum_i x_i).a + n.b = \sum_i y_i \end{cases} \qquad (2)$$

Giải hệ (2):

$$\det D = \begin{vmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & n \end{vmatrix} = n.\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)2$$

$$\det D_a = \begin{vmatrix} \sum_i x_i.y_i & \sum_i x_i \\ \sum_i y_i & n \end{vmatrix} = n.\sum_i x_i.y_i - \sum_i x_i.\sum_i y_i$$

$$\det D_b = \begin{vmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i.y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i y_i \end{vmatrix} = \sum_i x_i^2.\sum_i y_i - \sum_i x_i.\sum_i x_i.y_i$$

khi det D $\neq 0$, hệ xác định

$$a = \frac{n.\sum_i x_i.y_i - \sum_i x_i.\sum_i y_i}{n.\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \qquad (3)$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2.\sum_i y_i - \sum_i x_i.\sum_i x_i.y_i}{n.\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \qquad (4)$$

tính đạo hàm f''_a, f''_b và $f''_{a.b}$

$f''_a = 2(\sum_i x_i^2)$; $f''_a > 0$ với mọi a. Hàm f(a, b) đạt cực tiểu tại a tìm được

$f''_b = 2n$; $f''_b > 0$ với mọi b. Hàm f(a, b) đạt cực tiểu tại b tìm được

$f''_{a.b} = 2(\sum_i x_i)$ với điều kiện $(f''_{a.b})^2 - f''_a.f''_b < 0$ dẫn đến a và b tính theo (3) và (4) là các giá trị thoả mãn điều kiện (1)

hàm số y = ax + b đã tìm được

b. Công thức tính:

từ (3) chia tử số và mẫu số cho n^2 ta được: $a = \dfrac{\overline{x.y} - \bar{x}.\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$

x_i và y_i quá lớn hoặc là số thập phân hoặc các số cách đều nhau:

$$a = \frac{\overline{u.v} - \bar{u}.\bar{v}}{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}.\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

x_i	y_i	u_i	v_i	u_i^2	$u_i.v_i$
1	3	-2	-2	4	4
2	5	-1	-1	1	1
3	7	0	0	0	0
4	9	1	1	1	1
5	11	2	2	4	4
Σ		0	0	10	10
TB		0	0	2	2

trong đó $u_i = \frac{x_i - x_0}{\Delta x}$

$v_i = \frac{y_i - y_0}{\Delta y}$, với x_0, y_0, $\Delta x, \Delta y$ tùy chọn

Trong tính toán, không tính b theo (4). Từ phương trình (2) với a đã biết dẫn đến:

$b = \bar{y} - a.\bar{x}$

Nhận xét: hàm số y = ax + b luôn đi qua điểm $M(\bar{x}, \bar{y})$

c. Ví dụ: Cho 2 dãy số liệu

X	1	2	3	4	5
Y	3	5	7	9	11

Lập hàm số y = ax + b thoả mãn điều kiện (1)

Giải: Lập bảng tính với $u_i = x_i - 3$, $v_i = (y_i - 7)/2$

tính các tham số: $a = \frac{\overline{u.v} - \bar{u}.\bar{v}}{\overline{u^2} - (\bar{v})^2}.\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

$\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 7$, b = 1

hàm số bậc nhất cần lập có dạng: y = 2x + 1

3. Lập hàm bậc 2

+ Giải bài toán:

Từ cặp giá trị (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$, lập hàm bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$

Lập tương tự như lập hàm bậc nhất.

Gọi δ_i là bình phương khoảng lệch thứ i: $\delta_i = (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$

Với n điểm:

$$\sum_1^n \delta_i = \sum_1^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \qquad \text{kí hiệu là f(a, b, c)}$$

tìm các tham số a, b, c sao cho: $f(a, b, c) = \sum_1^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ bé nhất (1’)

Tính các đạo hàm, cho các đạo hàm bằng 0 dẫn đến hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(\sum_i x_i^4\right).a + \left(\sum_i x_i^3\right).b + \left(\sum_i x_i^2\right).c = \sum_1^n x_i^2.y_i \\ \\ \end{cases}$$

$$\left(\sum_i x_i^3\right).a + \left(\sum_i x_i^2\right).b + \left(\sum_i x_i\right).c = \sum_1^n x_i.y_i \qquad (2')$$

$$\left(\sum_i x_i^2\right).a + \left(\sum_i x_i\right).b + n.c = \sum_1^n y_i$$

Giải hệ (2') theo phương pháp Cramer hoặc phương pháp Gauss sẽ tìm được a,b,c.
Với các điều kiện phức tạp thường không xét a, b, c thỏa mãn điều kiện (1')
+ Ví dụ: Cho 2 dãy số liệu:

X	1	2	3	4
Y	-2	0	4	10

Lập hàm bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ từ số liệu trên
Giải: lập bảng tính các hệ số theo (2')

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2.y_i$	$x_i.y_i$
1	1	-2	1	1	1	-2	-2
2	2	0	4	8	16	0	0
3	3	4	9	27	81	36	12
4	4	10	16	64	256	160	40
Σ	10	12	30	100	354	194	50

Dựa vào (2') ta được: $354a + 100b + 30c = 194$

$100a + 30b + 10c = 50$

$30a + 10b + 4c = 12$

Giải hệ được: a = 1, b = -1, c= -2
Phương trình bậc 2 có dạng: y = x2 - x - 2

B. THỰC HÀNH:

Bài 1: Đo một đại lượng tại hai điểm khác nhau trên cơ thể. Tại điểm I bằng phương pháp I, kí hiệu là X, tại điểm II bằng phương pháp II, kí hiệu Y, thu được số liệu sau:

X	32.6	34.5	39.0	39.1	39.1	39.3	39.7	42.3	45.4	53.3	59.4	71.9
Y	32.3	37.6	39.2	37.4	39.6	40.9	39.0	42.8	46.1	55.6	55.1	71.3

Lập hàm số y = ax + b thoả mãn điều kiện trên

Bài 2: Theo dõi số dân của cả nước thu được số liệu như sau:

X	64.412	66.233	67.744	69.405	71.026	72.510	73.959
Y	31.3	29.9	30.4	30.0	28.5	28.3	25.3

Lập hàm số y = ax + b thoả mãn điều kiện trên

Bài 3: Lập phương trình bậc 2: $y = ax^2 + bx + c$ từ các số liệu sau:

a.

b.

X X	-12	-21	1 0	2 1	32
Y Y	-17	22	-1 1	2 4	711

Bài 4: Lập phương trình y = ax + b từ số liệu sau:

X	2	4	6	8	10	12
Y	1	3	5	7	9	11

Bài 5: Lập phương trình thoả mãn điều kiện:

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

Bài 3
HỆ SỐ TƯƠNG QUAN TUYẾN TÍNH
Số tiết: (LT: 02, TH: 03)

MỤC TIÊU:

1. Trình bày được định nghĩa, tính chất của hiệp phương sai.

2. Trình bày được định nghĩa, tính chất của hệ số tương quan tuyến tính.

3. Vận dụng để giải được các bài tập về hệ số tương quan tuyến tính.

NỘI DUNG:

A. LÝ THUYẾT:

Trong bài trước đã giới thiệu cách lập hàm số y = ax + b từ hai dãy số liệu. Bài này giới thiệu một hệ số mà giá trị của nó cho biết lập hàm số y = ax + b có phù hợp với số liệu không. Đó là hệ số tương quan tuyến tính.

1. Hiệp phương sai:

a. Định nghĩa: Cho hai đại lượng X, Y

Hiệp phương sai của hai đại lượng X, Y kí hiệu $C_{ov}(X,Y)$ là hằng số được xác định như sau:

$$C_{ov}(X,Y) = M\{(X - MX)(Y - MY)\} \qquad (1)$$

khi không biết MX và MY (MX, MY: là trung bình lý thuyết của đại lượng X, Y) hiệp phương sai được ước lượng bởi hiệp phương sai mẫu:

$$C_{ov}(X,Y) \approx \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad (2)$$

Từ (2) dẫn đến công thức tính gần đúng của hiệp phương sai:

$$C_{ov}(X,Y) \approx \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i.y_i - \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i.\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} y_i \approx \overline{x.y} - \bar{x}.\bar{y}$$

khi xi, yi nhận giá trị lớn hoặc có số thập phân hoặc cách đều ta có công thức tính sau:

$$C_{ov}(X,Y) \approx \Delta x.\Delta y(\overline{u.v} - \bar{u}.\bar{v})$$

trong đó:

$u_i = \dfrac{x_i - x_0}{\Delta x}$, $v_i = \dfrac{y_i - y_0}{\Delta y}$, với x_0, y_0, $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$ tùy chọn

b. Tính chất:

+ $C_{ov}(X,Y) = C_{ov}(Y,X)$

+ $C_{ov}(aX,bY) = ab.C_{ov}(X,Y)$; a, b là các tham số thực

+ $C_{ov}(X,Y) = 0$ khi X và Y độc lập với nhau

2. Hệ số tương quan tuyến tính:

a. Định nghĩa: Cho hai đại lượng X, Y

Hệ số tương quan tuyến tính của hai đại lượng X và Y là một số xác định,, kí hiệu là R_{xy} gọi tắt là hệ số tương quan.

$$R_{xy} = \frac{C_{ov}(X,Y)}{\sqrt{DX}.\sqrt{DY}} \qquad (4)$$

gọi r_{xy} là hệ số tương quan mẫu

khi không biết MX, MY hệ số tương quan được ước lượng bởi hệ số tương quan mẫu: $R_{xy} \approx r_{xy}$

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \qquad (5)$$

b. Công thức tính hệ số tương quan mẫu:

$$r_{xy} = \frac{n.\sum_{1}^{n} x_i.y_i - \sum_{1}^{n} x_i.\sum_{1}^{n} y_i}{\sqrt{n.\sum_{1}^{n} x_i^2 - (\sum_{1}^{n} x_i)^2}.\sqrt{n.\sum_{1}^{n} y_i^2 - (\sum_{1}^{n} y_i)^2}} \qquad (6)$$

$$= \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}.\sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}} = a.\frac{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}}{\sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}} \qquad (7)$$

$$= \frac{\overline{u.v} - \bar{u}\,\bar{v}}{\sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}.\sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}} \qquad (8)$$ trong đó u, v theo (3)

c. Tính chất:

+ R_{xy} là hệ số không có đơn vị, thường viết đến phần nghìn
+ $R_{xy} = R_{yx}$, viết tắt là R
+ Giả sử a, b là các số thực dương và X’ =aX, Y’ = bY

$$R_{x'y'} = \frac{C_{ov}(X,Y)}{\sqrt{DX'DY'}} = \frac{C_{ov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = R_{xy}$$

+ Hai đại lượng X, Y độc lập thì $R_{xy} = 0$
+ Giả sử Y=aX + b

$$R_{xy} = \frac{C_{ov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = \frac{C_{ov}(X,aX+b)}{\sqrt{DXD(aX+b)}} = \frac{a.C_{ov}(X,X)}{\sqrt{DX}.\sqrt{a^2.DX}} = \frac{a}{|a|} = \pm 1$$

như vậy khi y là hàm bậc nhất của x thì hệ số tương quan tuyến tính bằng ± 1

từ (3.4) và (3.5) dẫn đến quy ước:

$0 \le |r| < 0,3$ x và y không tương quan tuyến tính

$0,3 \le |r| \le 0,6$ x và y có tương quan tuyến tính

$0,6 < |r| \le 1$ x và y có tương quan tuyến tính chặt chẽ

Từ (7) suy ra r và a luôn cùng dấu:

$r < 0 \Leftrightarrow a < 0$ hàm bậc nhất nghịch biến

$r > 0 \Leftrightarrow a > 0$ hàm bậc nhất đồng biến

Ví dụ: Gọi X, Y là giá trị đo được của một đại lượng tại hai điểm trên cơ thể bằng 2 cách. Đo 12 người thu được kết quả sau:

X	32,6	34,5	39	39,1	39,1	39,3	39,7	42,3	45,4	53,3	59,4	71,9
Y	32,3	37,6	39,2	37,4	39,6	40,9	39	42,8	46,1	55,6	55,1	71,3

hai dãy số liệu trên có tương quan tuyến tính không?

Giải: Tính các kết quả trung gian:

$\sum x$	$\sum x^2$	$\sum y$	$\sum y^2$	$\sum x.y$
535,6	25341,52	536,9	25322,53	25311,62

tính r: $r = \dfrac{12.25311,62 - 535,6.536,9}{\sqrt{12.25341,52 - (535,6)^2}\sqrt{12.25322,53 - (536,9)^2}} \approx 0,986$

hai dãy số liệu trên tương quan tuyến tính đồng biến rất chặt chẽ

B. **THỰC HÀNH :**

Bài 1: Theo dõi số dân và chỉ tiêu phát triển dân số của cả nước thu được số liệu sau:

X	64,412	66,233	67,744	69,405	71,026	72,510	73,959	75,355	76,710
Y	21	21,9	22,9	23	21,8	21,6	18,6	18,8	18

Hai dãy số liệu trên có tương quan tuyến tính không?

Bài 2: Theo dõi số dân và chỉ tiêu phát triển dân số của một nước thu được kết quả sau:

X	73000	74000	75000	77000
Y	21,6	18,6	18,8	18

Hai dãy số liệu trên có tương quan tuyến tính không?

Bài 3: Gọi x là lứa tuổi và y là nhịp tim trung bình, nghiên cứu thu được kết quả sau:

x	9	10	11	12	13	14	15

y	72,8	72,5	73,6	69,8	69,2	68,6	70,2

Hai dãy số liệu trên có tương quan tuyến tính không?

Bài 4: Theo dõi phát triển dân số 1 xã thu được số liệu sau:

Năm	x(số dân)	s(tỉ lệ sinh)	c(tỉ lệ chết)
1980	6,67	0,0411	0,0099
1981	4,86	0,0397	0,0074
1982	5,05	0,0352	0,0099
1983	5,17	0,0375	0,0064
1984	5,47	0,0336	0,0059

Tính hệ số tương quan tuyến tính với y = s-c?