ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

PHẠM VĂN NHÂM

MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội - 2011

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Dãy số và một số vấn đề liên quan đến dãy số là một phần rất quan trọng của đại số và giải tích toán học. Các học sinh và sinh viên thường phải đối mặt với nhiều dạng toán loại khó liên quan đến chuyên đề này. Những ai mới bắt đầu làm quen với khái niệm dãy số thường khó hình dung về cấu trúc đại số trên tập các dãy số, đặc biệt là các phép tính đối với các dãy có chứa tham số, các biến đổi về dãy và đại số các dãy,...

Dãy số đặc biệt quan trọng trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của các mô hình rời rạc của giải tích trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn,...

Trong nhiều kỳ thi học sinh giỏi quốc gia , thi Olympic toán quốc tế, thi vô địch toán các nước, các bài toán liên quan đến dãy số cũng hay được đề cập và thường thuộc loại rất khó.

Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Các kiến thức cơ bản về dãy

Chương 2: Một số lớp các bài toán về dãy số

Chương 1: Nhắc lại các khái niệm cơ bản về dãy số, các định lý, các dấu hiệu liên quan đến dãy số sẽ dùng trong luận văn.

Chương 2: Trong chương này tác giả trình bày các bài toán về dãy, trong đó có nhiều bài toán có trong các kỳ thi học sinh giỏi các nước, Olympic toán quốc tế, các bài toán này được trình bày theo nhóm các dạng, sau một số bài là sự phân tích để tìm hướng giải cũng như ý tưởng phát triển bài toán.

Để hoàn thành luận văn này, trước nhất tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc tới **TS.Nguyễn Thành Văn**, Trường THPT chuyên -Đại học Khoa học Tự nhiên Hà nội, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình hoàn thành bản luận văn này. Qua đây tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành các thầy cô đã đọc, đánh giá và cho những ý kiến quý báu để luận văn được phong phú và hoàn thiện hơn.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng sau Đại học, khoa Toán-Cơ -Tin trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà nội đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên các vấn đề trong luận văn vẫn chưa được trình bày sâu sắc và không thể tránh khỏi sai sót trong trình bày, mong được sự góp ý của các thày cô và các bạn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Hà nội, ngày 26 tháng 03 năm 2011

Học viên

Phạm Văn Nhâm

Chương 1

Các kiến thức cơ bản

1.1. Dãy số

1.1.1. Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 1.1:Dãy số là một hàm số từ $\mathbb{N}^*$ (Hoặc $\mathbb{N}$) (Hoặc tập con của $\mathbb{N}$) vào tập hợp số $\mathbb{R}$. Các số hạng của dãy số thường được ký hiệu là $u_n, v_n, x_n, y_n \ldots$ Bản thân dãy số được ký hiệu tương ứng là $\{u_n\}, \{v_n\}, \{x_n\}, \{y_n\}, \ldots$
Dãy được gọi là *vô hạn* nếu chúng có vô hạn phần tử. Dãy được gọi là *hữu hạn* nếu số phần tử của dãy là hữu hạn.
Nhận xét: *Vì dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số nên nó có các tính chất của một hàm số.*

1.1.2. Dãy số đơn điệu

Định nghĩa 1.2
* Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là:
- Dãy đơn điệu tăng nếu $u_{n+1} > u_n$, với mọi n=1,2,...
- Dãy đơn điệu không giảm nếu $u_{n+1} \geq u_n$, với mọi n=1,2,...
- Dãy đơn điệu giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi n=1,2,...
- Dãy đơn điệu không tăng nếu $u_{n+1} \leq u_n$, với mọi n=1,2,...

Thí dụ:- Dãy 1, 3, 5, 7, 9,... là dãy đơn điệu tăng.
- Dãy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ là dãy đơn điệu giảm.
- Dãy 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6,...là dãy đơn điệu không giảm. - $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ là dãy đơn điệu không tăng.
** Dãy số tăng hoặc dãy số giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.*

1.1.3. Dãy số bị chặn

Định nghĩa 1.3
* Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số thực M sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $x_n \leq M$.
* Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số thực m sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $x_n \geq m$.
* Một dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là dãy bị chặn.

1.1.4. Cấp số cộng, cấp số nhân

Định nghĩa 1.4(Cấp số cộng)
Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi một số hạng bằng số hạng đứng trước nó cộng với một đại lượng không đổi (đại lượng không đổi được gọi là công sai của cấp số cộng).
Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là một cấp số cộng khi và chỉ khi tồn tại $d \in R$ sao cho:

$$x_{n+1} = x_n + d, n = 1, 2, \ldots$$

d được gọi là công sai của cấp số cộng, x_0 là số hạng đầu, x_n là số hạng thứ n.
Ta có các công thức cơ bản sau:
* $x_n = x_0 + nd$
* $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} = nx_0 + n(n-1)\frac{d}{2} = \frac{n}{2}(x_0 + x_n)$

Định nghĩa 1.5(Cấp số nhân)
Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi một số hạng bằng số hạng đứng trước nó nhân với một đại lượng không đổi (đại lượng không đổi được gọi là công bội của cấp số nhân).
Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là một cấp số nhân khi và chỉ khi tồn tại $q \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$x_{n+1} = x_n.q, n = 1, 2, ...$$

q được gọi là công bội của cấp số nhân, x_0 là số hạng đầu, x_n số hạng thứ n. Ta có các công thức cơ bản sau:

* $x_n = q^n x_0$

* $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} x_0$. Nếu $|q| < 1$ thì $\{x_n\}$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức: $S = \dfrac{x_0}{1 - q}$

1.1.5. Các cách cho dãy số

Để xác định một dãy số người ta có thể tiến hành theo các cách sau đây:

a) Cho công thức số hạng tổng quát u_n.

Thí dụ: Dãy số (u_n) xác định nhờ công thức $u_n = 2n$ với mọi n=0,1,2,... Đây chính là dãy các số tự nhiên chẵn: 0,2,4,6,8,...

b) Dãy số được cho theo công thức truy hồi

*Thí dụ:*Cho dãy số $\{u_n\}$, n=0,1,2,3,... được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{1 + 2011u_n^2} \end{cases}$$

c) Dãy số được xác định theo cách miêu tả.

d) Phương pháp phương trình đặc trưng.

Trong các phương pháp để xác định dãy, chúng ta sử dụng phương pháp phương trình đặc trưng của dãy. phương pháp này dựa vào phương pháp sai phân sau đây:

<u>* Sơ lược về phương pháp sai phân:</u>

Cho dãy số $x_0; x_1; \ldots; x_n; \ldots$ Ta biết rằng một dãy số là một hàm số với đối số nguyên, kí hiệu $x_n = x(n)$.

** Định nghĩa sai phân:*

Ta gọi $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ là sai phân cấp một của dãy $x_n = x(n)$với $n \in \mathbb{N}$

Và gọi $\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$ là sai phân cấp hai của dãy $x_n = x(n)$với $n \in \mathbb{N}$. ⋮

Một cách tương tự $\Delta^k x_n = \Delta^{k-1} x_{n+1} - \Delta^{k-1} x_n$ là sai phân cấp k của dãy số.

** Vài tính chất của sai phân:*

<u>Tính chất 1</u>: Sai phân các cấp đều có thể biểu diễn qua các giá trị của hàm số

<u>Tính chất 2</u> : Sai phân cấp k của một dãy số có tính chất của một toán tử tuyến tính,

tức là

$\Delta^k(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\Delta^k x_n+\beta\Delta^k y_n, \forall\alpha;\beta\in\mathbb{R}$

<u>Tính chất 3 :</u> Sai phân cấp k của đa thức bậc m là:

i. Đa thức bậc $m-k$, nếu $m>k$

ii. Là hằng số nếu $m=k$

iii. Bằng 0 nếu $m<k$

<u>Tính chất 4 :</u> $\sum\limits_{k=m}^{n}\Delta x_k = x_{n+1}-x_m$ (với m<n)

Thí dụ 1: Tính các tổng sau:

$S_1=1.1!+2.2!+\cdots+n.n!=\sum\limits_{k=1}^{n}k.k!$

$S_2=\left(1^2+1+1\right).1!+\left(2^2+2+1\right).2!+\cdots+\left(n^2+n+1\right).n!=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right).k!$

Giải

* Ta có: $k.k!=k!(k+1-k)=(k+1)!-k!=\Delta k!$.

Như vậy: $S_1=\sum\limits_{k=1}^{n}k.k!=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta k!=2!-1!+3!-2!+4!-3!+....+(n+1)!-n!=$ $(n+1)!-1$.

* Vì $\left(k^2+k+1\right).k!=\left(k^2+2k+1-k\right).k!=(k+1)^2k!-kk!=$

$=(k+1).(k+1)!-k.k!=\Delta(k.k!)$

vậy $S_2=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right).k!=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta(k.k!)=(n+1)(n+1)!-1$

Thí dụ 2: Tính tổng sau: $T_m=1^m+2^m+3^m+\cdots n^m$ với $m=1,2,3$

Giải

1. Xét $\Delta k^2=(k+1)^2-k^2=2k+1\Rightarrow k=\dfrac{\Delta k^2-1}{2}$

do đó $T_1=\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\Delta k^2-1\right)$

$T_1=\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta k^2-\sum\limits_{k=1}^{n}1\right)==\dfrac{1}{2}\left(\left[(n+1)^2-1\right]-n\right)=\frac{n(n+1)}{2}$

2. Xét $\Delta k^3=(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1\Rightarrow k^2=\dfrac{\Delta k^3-3k-1}{3}$

Do đó ta có:

$T_2=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\Delta k^3-3k-1\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta k^3-3\sum\limits_{k=1}^{n}k-\sum\limits_{k=1}^{n}1\right)$

$$T_2 = \frac{1}{3}\left(\left[(n+2)^3 - 1\right] - 3.\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Với $T_3 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ta có $\Delta T_3 = T_4 - T_3 = (n=1)^3$ suy ra:

$\Delta^2 T_3 = \Delta(n+1)^3 = (n+2)^3 - (n+1)^3 = 3n^2 + 9n + 7$ $\Delta^3 T_3 = \Delta\left(3n^2 + 9n + 7\right) = \cdots = 6n + 12$ $\Delta^4 T_3 = \Delta(6n+12) = \cdots = 6 = const$

Vậy ta có thể tìm T_3 dưới dạng $T_3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ Thay các giá trị ban đầu $T_0 = 1; T_1 = 1; T_2 = 9; T_3 = 36; T_4 = 100$ và giải hệ phương trình với các ẩn a, b, c, d, e,ta được $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

* ***Phương trình sai phân:***

Phương trình sai phân cấp k là một hệ thức tuyến tính chứa sai phân các cấp tới k $F\left(x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n, \ldots, \Delta^k x_n\right) = 0(1.1)$ Vì sai phân các cấp đều có thể biểu diễn theo giá trị của hàm số nên (1.1) có dạng:

$a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = f(n)(1.1)$ hay $L_k[x_n] = f(n)$ Trong đó L_k là toán tử tuyến tính tác động lên hàm x_n .

Trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_k, f(n)$ đã biết, còn $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ là các giá trị chưa biết.

• Phương trình (1.2) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp k.

• Nếu $f(n) = 0$ thì phương trình (1.2) có dạng:

$a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = 0(1.3)$hay $L_k[x_n] = 0$ và được gọi là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp k.

• Nếu $f(n) \neq 0$ thì phương trình (1.2) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp k

• Hàm số x_n biến n thỏa mãn (1.2) được gọi là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính (1.2)

• Hàm số x_n phụ thuộc k tham số thỏa mãn (1.3) được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính (1.3)

• Một nghiệm x_n^* thỏa mãn (1.2) được gọi là một nghiệm riêng của (1.2)

Tính chất:

Giả sử x_n và y_n là nghiệm của phương trình $L_k[x_n] = 0$ khi đó $\alpha x_n + \beta y_n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cũng là nghiệm của phương trình $L_k[x_n] = 0$.

Chứng minh:

Do x_n và y_n là nghiệm của phương trình $L_k[x_n] = 0$ nên $L_k[x_n] = 0$ và $L_k[y_n] = 0$. Khi đó ta có $L_k[\alpha x_n + \beta y_n] = \alpha L_k[x_n] + \beta L_k[y_n] = \alpha.0 + \beta.0 = 0$. Vậy $\alpha x_n + \beta y_n$,

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ là nghiệm của $L_k[x_n] = 0$

Thí dụ : Dãy (x_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_{n+2} = -8x_{n+1} + 9x_n \\ x_0 = 2; x_1 = -8 \end{cases}$$

Hãy tìm công thức cho số hạng tổng quát x_n

Giải

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda = 1$ hoặc $\lambda = -9$. Suy ra nghiệm của phương trình có dạng $\widetilde{x}_n = A.1^n + B.(-9)^n$. Sử dụng điều kiện biên ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình là $\widetilde{x}_n = 1 + (-9)^n$.

1.1.6. Dãy Fibonacci

Định nghĩa 1.5

Dãy số Fibonacci là dãy số được định nghĩa bởi:

$f_0 = 0, f_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Dãy số Fibonacci có rất nhiều tính chất thú vị và xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Chúng ta có công thức sau đây xác định số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci:

Công thức Binet

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

1.2. Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.6 Ta nói dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn a khi n dần tới vô cùng nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số $\{x_n\}$ và ε) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có: $|x_n - a| < \varepsilon$

Ta viết: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0, |x_n - a| < \varepsilon$

Định nghĩa 1.7 Ta nói dãy số $\{x_n\}$ dần tới vô cùng khi n dần tới vô cùng nếu với mọi số thực dương M lớn tùy ý tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số và M) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có: $|x_n| > M$.

Ta viết: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0, |x_n| > M$

Định lý 1.1_(Tổng, hiệu, tích,thương các dãy hội tụ)._

Nếu $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy hội tụ và có giới hạn tương ứng là a, b thì các dãy số $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}$, $\{x_n.y_n\}$ và $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ cũng hội tụ và có giới hạn tương ứng là a+b, a - b, a.b,$\dfrac{a}{b}$ (Trong trường hợp dãy số thương, ta giả sử y_n và b khác không).

Định lý 1.2_(Sự hội tụ của dãy đơn điệu.)_

* Một dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ

* Một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ

Thí dụ: Chứng tỏ rằng dãy: $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n, n \in \mathbb{N}$ có giới hạn hữu hạn.

Chứng minh: Ta có bất đẳng thức sau: $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x, \forall x > 0(1)$

Sử dụng (1), ta thu được:

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 0$ và từ đó dãy (a_n) là dãy giảm. Ta chứng minh rằng nó bị chặn dưới. Sử dụng bất đẳng thức bên phải của (1) ta có:

$$a_n > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n =$$

$$= \ln\left(2\frac{3}{2}.\frac{4}{3}...\frac{n+1}{n}.\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} > \frac{1}{1+n} > 0$$

Do đó theo nguyên lí Weierstrass dãy (an) có giới hạn hữu hạn. Ta kí hiệu giới hạn đó là C. Đặt $a_n - C = \gamma_n, n \in \mathbb{N}$. Hiển nhiên $\gamma_n \to \infty$. Từ đó ta có:

$1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} = \ln n + C + \gamma_n$

Số C được gọi là hằng số Ơle(1).

Định lý 1.3_(Qua giới hạn dưới dấu bất đẳng thức)_

Giả sử:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

ii) $a_n \leq b_n, \forall n \in N$

Khi đó $a \leq b$

Định lý 1.4(_Định lý về dãy trung gian)_

Giả sử:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

ii) $a_n \leq z_n \leq b_n, \forall n \in N$

Khi đó: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$

Định lý 1.4 *(Tiêu chuẩn Cauchy)* Dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy. Tức là: $\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in N : \forall m, n > N_0$ ta có: $|x_m - x_n| < \varepsilon$

Thí dụ 1.

Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy để chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n^2}, n \in N$ hội tụ

Chứng minh:

Giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước tuỳ ý. Khi đó:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \forall n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall p > 0$$

Từ đó theo tiêu chuẩn Cauchy thì dãy đã cho là một dãy hội tụ.

Thí dụ 2.

Xét dãy $\{a_n\}$ với: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

Ta nhận xét rằng $\forall n$, ta lấy số tự nhiên $p = n$ ta thu được:

$\left|a_{n+p} - a_n\right| = |a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Do đó nếu lấy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ thì không tồn tại chỉ số N sao cho $p > N$ và $p \in \mathbb{N}$ thì:

$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. Điều này chứng tỏ dãy $\{a_n\}$ không phải là dãy cơ bản nên nó là một dãy phân kì.

Định nghĩa 1.8 *(Ánh xạ co)*

* Định nghĩa: Giả sử $f : R^n \to R^n$, Ánh xạ f được gọi là ánh xạ co nếu tồn tại một hằng số α (0<α<1) sao cho:$\forall x', x''$ ta có:$\| f(x') - f(x'')\| < \alpha \|x' - x''\|$.

Nhận xét: Mọi ánh xạ co đều liên tục.

* Nguyên lý ánh xạ co: Mọi ánh xạ co $f : R^n \to R^n$luôn tồn tại một điểm bất động duy nhất.

Chứng minh: Giả sử $x^o \in R^n$ là một điểm bất kỳ. Đặt: $x_1 = f(x^0), x_2 = f(x_1)$ thì:

$f(x_1) = f(f(x^0)) = f^2(x^0)$

$\ldots$
$x_k = f(x_{k-1}) = f^k(x_0)$
$\ldots$
Ta chứng minh dãy $\{x_k\}$ là dãy Cauchy.
Thật vậy: k, p là hai số nguyên dương tùy ý. Rõ ràng ta có: $\left\|x_{k+p} - x_k\right\| = \left\|f^{k+p}(x^0) - f^k(x^0)\right\| = \left\|f^k(f^p(x^0)) - f^k(x^0)\right\| = \left\|f^k(x_p) - f^k(x^0)\right\| \leq \alpha \left\|f^{k-1}(x_p) - f^{k-1}(x^0)\right\| \leq \ldots \leq \alpha^k \left\|x_p - x^0\right\| \Rightarrow \left\|x_{k+p} - x_k\right\| \leq \alpha^k \left\|x_p - x^0\right\|$
Mặt khác: $\left\|x_p - x^0\right\| = \left\|x_p - x_{p-1} + x_{p-1} - x_{p-2} + \ldots + x_1 - x^0\right\| \leq \left\|x_p - x_{p-1}\right\| + \left\|x_{p-1} - x_{p-2}\right\| + \ldots + \left\|x_1 - x^0\right\|$. Nhưng: $\left\|x_1 - x^0\right\| = \left\|x_1 - x^0\right\|$
$\|x_2 - x_1\| = \left\|f(x_1) - f(x^0)\right\| \leq \alpha \left\|x_1 - x^0\right\| \ldots \left\|x_p - x_{p-1}\right\| \leq \ldots \leq \alpha^{p-1} \left\|x_1 - x^0\right\|$.
Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được: $\left\|x_p - x^0\right\| \leq \left\|x_p - x_{p-1}\right\| + \left\|x_{p-1} - x_{p-2}\right\| + \ldots + \left\|x_1 - x^0\right\| \leq (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{p-1}) \left\|x_1 - x^0\right\|$.
Như vậy ta có: $\left\|x_{k+p} - x_k\right\| \leq \alpha^k(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{p-1}) \left\|x_1 - x^0\right\| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \left\|x_1 - x^0\right\|$.
Rõ ràng $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha^k = 0$ nên k đủ lớn ta có: $\left\|x_{k+p} - x_k\right\| < \varepsilon$ với ε tùy ý, do đó dãy $\{x_k\}$ là dãy Cauchy.
Do đó $x^* \in R^n$ sao cho: $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0$, do ánh xạ co là ánh xạ liên tục nên ta có: $\lim\limits_{k\to\infty} \|f(x_k) - f(x^*)\| = 0$. Mặt khác $f(x_k) = x_{k+1}$ nên ta có: $\lim\limits_{k\to\infty} \|f(x_k) - x^*\| = 0$ cho ta: $f(x^*) = x^*$ suy ra sự tồn tại của điểm bất động.
+ Bây giờ ta chứng minh sự duy nhất: Giả sử tồn tại hai điểm bất động x^*, x^{**}. Khi đó ta có:
$f(x^*) = x^*; f(x^{**}) = x^{**}$. Từ đó ta có: $\|x^* - x^{**}\| = \|f(x^*) - f(x^{**})\| \leq \alpha \|x^* - x^{**}\| \Rightarrow$
$(1-\alpha)\|x^* - x^{**}\| = 0$
Hay $x^* = x^{**}$. Vậy nguyên lý được chứng minh.

Như vậy xét trong tập số thực ta có: Nếu $f(x)$ là ánh xạ co trên R thì dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} x_0 = a \in R \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ hội tụ.

Chương 2

Một số lớp bài toán về dãy số

2.1. Lớp bài toán có tính chất số học của dãy

Trong mục này tác giả sẽ đưa ra các bài toán về dãy số với các yêu cầu có tính chất số học và các bài toán dãy số giải được bằng phương pháp số học. Trước tiên ta đi xét một số bài toán về **dãy nguyên.**

Dãy số nguyên là một phần quan trọng trong lý thuyết dãy số. Ngoài các vấn đề chung như tìm số hạng tổng quát của dãy số, tìm công thức tính tổng n số hạng đầu tiên... các bài toán về dãy số nguyên còn quan tâm đến tính chất số học của dãy số như chia hết, đồng dư, nguyên tố, chính phương, nguyên tố cùng nhau... Các bài toán về dãy số nguyên rất đa dạng. Trong nhiều trường hợp, dãy số chỉ là cái bề ngoài, còn bản chất bài toán là một bài toán số học.

Bài toán: Nếu (x_n) là một dãy có phương trình hồi quy: $x_{n+2} = ux_{n+1} + vx_n$ thì ta sẽ có phương trình đặc trưng của dãy hồi quy :

$$x^2 - ux - v = 0$$

với hai nghiệm a, b. Chú ý rằng $x_n = a^n$ và $x_n = b^n$ thỏa mãn phương trình hồi quy vì $a^2 = ua + v, b^2 = ub + v$.

Nếu $a = b$ thì $a = b = \frac{u}{2}$ và $x_n = na^n$ cũng thỏa mãn phương trình hồi quy.

Nếu $a \neq b$ ta tìm được $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 = c_1 a + c_2 b, x_2 = c_1 a^2 + c_2 b^2$. Khi đó ta có :$x_n = c_1 a^n + c_2 b^n$ hoàn toàn thỏa mãn phương trình hồi quy. Ta cũng có x_1, x_2 xác định duy nhất bởi c_1, c_2 và dãy x_n. Hơn nữa dãy thỏa mãn phương trình hồi quy là : $x_n = c_1 a^n + c_2 b^n$ với c_1, c_2 được xác định ở trên.

Tương tự với $a = b$ khi đó dãy thỏa mãn là :$x_n = c_1 a^n + c_2 n b^n$ ở đó c_1, c_2 được xác định qua :$x_1 = c_1 a + c_2 b$ và $x_2 = c_1 a^2 + c_2 b^2$.

Bài toán 1(RMO2002 [10])

Giả sử dãy (a_n) được định nghĩa như sau:$a_0 = a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng $2a_n - 1$ là một số chính phương.

*** Phân tích:**Từ yêu cầu của bài toán là $2a_n - 1$ là số chính phương tức là: Tồn tại dãy nguyên (c_n) sao cho:

$2a_n - 1 = c_n^2$, suy ra $\dfrac{c_n^2 + 1}{2} = a_n$. Bây giờ ta đi xác định dãy (c_n) :

Từ phương trình đặc trưng xác định a_n: $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0(1)$ ta giải ra được hai nghiệm: $\lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{48}$.

Nhận xét thấy rằng: $\lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{48} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2$. Mà $2 \pm \sqrt{3}$ lại là hai nghiệm của phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0(2)$ suy ra hệ thức truy hồi xác định nghiệm tổng quát của (2): $c_n = 4c_{n-1} - c_{n-2}, n \geq 2$.

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}$ định nghĩa c_n như sau:

$c_0 = -1; c_1 = 1$ và $c_n = 4c_{n-1} - c_{n-2}, n \geq 2$. Khi đó:

$$c_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

với $n \in \mathbb{N}$ Bình phương 2 vế trên ta có :

$$\frac{c_n^2+1}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)^n + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n.$$

Ta chỉ cần chứng minh : $\dfrac{c_n^2+1}{2} = a_n$ điều này ta dễ dàng làm được bằng cách tìm a_n theo tính chất đã nêu ở trên.

Bài toán 2(Shortlist 1988 [5]).

Cho dãy nguyên a_n định nghĩa như sau:

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, n \geq 0$. Chứng minh rằng $2^k | a_n <=> 2^k | n$

Lời giải

Sử dụng tính chất trên ta tìm được:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$$

Khi đó ta có 2 cách:

Cách 1: Chứng minh bằng quy nạp a_n lẻ khi n lẻ và xây dựng dãy b_n với $b_0 = b_1 = 2$ và $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$. Chứng minh b_n chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 với mọi n bằng quy nạp. Từ công thức tường minh của a_n và b_n và $a_{2n} = a_n b_n$.

Cách 2: Chứng minh quy nạp $a_{2n+1} = (a_n)^2 + (a_{n+1})^2$ và $a_{2n} = 2a_n(a_n + a_{n-1})$.

Bài toán 3(RMO1999 [10]) Chứng minh rằng với số nguyên dương n bất kỳ thì :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} 2^{2n-2k} 3^k$$

là tổng của 2 bình phương đúng.

Lời giải

Đặt $\alpha = 1+\sqrt{3}, \beta = 1-\sqrt{3}$ và $T_n = \frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})$. Ta có : $\alpha\beta = -2, \frac{\alpha^2}{2} = 2+\sqrt{3}$ và $\frac{\beta^2}{2} = 2-\sqrt{3}$. Áp dụng khai triển đối với nhị thức $(1+\sqrt{3})^n$ và $(1-\sqrt{3})^n$, ta tìm được: $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} 3^k$là một số nguyên với mọi n.

Áp dụng khai triển nhị thức với $(2+\sqrt{3})^{2n+1}$ và $(2-\sqrt{3})^{2n+1}$, ta có :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(\frac{\alpha^2}{2})^{2n+1} + (\frac{\beta^2}{2})^{2n+1}}{4} \\ &= \frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2}}{2^{2n+3}} \\ &= \frac{\alpha^{4n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+1} + \beta^{4n+2}}{2^{2n+3}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})^2}{2^{2n+3}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{T_n^2}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2}.$$

Do vậy : $2^{2n+1}S_n = T_n^2 + 2^{2n}$. Khi đó $2^{2n}|T_n^2$ nhưng $T_n^2 \vdots 2^{2n+1}$ và do vậy $T_n \equiv 2^n (mod 2^{2n+1})$. Hơn nữa:

$$S_n = \frac{T_n^2}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2} = \left(\frac{T_n-2^n}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{T_n+2^n}{2^{n+1}}\right)^2$$

Đây là điều phải chứng minh.

***Nhận xét** :Qua các bài toán trên ta có một số kết quả sau:

Dựa vào một số tính chất trong số học ta có một hệ thức có dạng nghiệm tổng quát của phương trình sai phân, từ đó ta suy ra phương trình đặc trưng và từ đó ta suy ra hệ thức truy hồi, như vậy ta sẽ được bài toán mới.

Thí dụ:

Dựa vào tính chất: với n là số nguyên tố thì $a^n \equiv a(\bmod n)$, ta có:

$$\begin{cases} (-3)^n \equiv -3 \pmod n \\ 2^n \equiv 2 \pmod n \end{cases}$$

Suy ra:$2^n + (-3)^n + 1 \equiv 0(\bmod n)$.

Mà -3 và 2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Hay $(-3)^n, 2^n$ chính là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân: $x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n$.

Từ đó ta có bài toán sau:

Cho (u_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = -4,\ u_2 = 10 \\ u_{n+2} + u_{n+1} = 6(u_n + 2) \quad ,\forall n \in N \end{cases}$$

CMR: $(u_n + 4) \vdots n$, với n là số nguyên tố.

Giải

Đặt $x_n = u_n + 3$, ta được: $x_1 = 1; x_2 = 13, x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n$

Xét phương trình đặc trưng : $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, ta được $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$

Ta được: $x_n = C_1(-3)^n + C_2 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$ Từ điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 13 \end{cases}$$

Suy ra $C_1 = C_2 = 1$, suy ra $x_n = (-3)^n + 2^n \to u_n + 4 = (-3)^n + 2^n + 1$

Với n là số nguyên tố $\to \begin{cases} (-3)^n \equiv -3 \pmod n \\ 2^n \equiv 2 \pmod n \end{cases}$

Suy ra:$2^n+(-3)^n+1\equiv 0(\bmod n)$.

Bài tập đề nghị:

Bài 1: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 14, u_3 = -18 \\ u_n = 7u_{n-1} - 6u_{n-2} \qquad ,n\geq 3 \end{cases}$$

CMR: Nếu p là số nguyên tố thì $u_p \vdots p$.

Hướng dẫn: Từ hệ thức truy hồi và điều kiện biên ta xác định được:

$u_n = 1+2^n+(-3)^n$.Vì p là số nguyên tố, áp dụng định lý Fecma suy ra đpcm

Bài 2: Dãy (a_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0=0, a_1=1, a_2=2; a_3=6 \\ a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n, \forall n\geq 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn:Từ giả thiết, bằng phương pháp giải phương trình sai phân ta tìm được:

$a_n = n\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\beta^n\right)$ với α,β là hai nghiệm của phương trình:$x^2-x-1=0$. Nhận xét thấy rằng: $\dfrac{a_n}{n}=F_n$ với (F_n) là dãy Fibonacci. Vậy ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét: *Những bài toán trên ta đã xét được các dãy truy hồi tuyến tính với hệ số nguyên và các số hạng đầu đều nguyên sẽ chứa toàn số nguyên. Thế nhưng có những dãy số mà trong công thức truy hồi có phân số, thậm chí có cả căn thức nhưng tất cả các số hạng của nó vẫn nguyên, đấy mới là điều bất ngờ. Tuy nhiên, nếu xem xét kỹ, ta có thể thấy chúng có một mối quan hệ rất trực tiếp.Sau đây ta xét hai bài toán mà dãy số cho dưới dạng hệ thức truy hồi có chứa căn nhưng mọi số hạng của dãy đều nguyên:*

Bài toán 4

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số a_n xác định bởi:

$a_0=1, a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2-2}$ đều nguyên.

Lời giải

Chuyển vế và bình phương công thức truy hồi, ta được:

$a_{n+1}^2-4a_na_{n+1}+4a_n^2=3a_n^2-2 \Leftrightarrow a_{n+1}^2-4a_na_{n+1}+a_n^2+2=0$

Thay n bằng $n-1$, ta được: $a_n^2-4a_na_{n-1}+a_{n-1}^2+2=0$. Từ đây suy ra a_{n-1} và a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình $x^2-4a_nx+a_n^2+2=0$. Suy ra $a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n$ hay $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$. Từ đây suy ra tất cả các số hạng trong dãy đều nguyên, vì

$a_0 = 1$ và $a_1 = 3$ nguyên.

Bài toán 5 (VMO1995[4])

Dãy $(a_n), n \in \mathbb{N}$, được xác định như sau:

$a_0 = 2, a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 - 96}$ với mọi n=0,1,2,3,...

1. Tìm công thức của số hạng tổng quát a_n theo n.

2. CMR $a_n \geq 2.5^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

1)Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 - 96} \Leftrightarrow (a_{n+1} - 5a_n)^2 = 24a_n^2 - 96$

$\Leftrightarrow a_n^2 - 10a_{n+1}a_n + a_{n+1}^2 + 96 = 0(1)$

Từ (1) thay n bởi $n+1$ ta được: $a_{n+2}^2 - 10a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 + 96 = 0(2)$.

Dãy (a_n) là dãy tăng thực sự nên $a_n < a_{n+2}$. Từ (1) và (2),suy ra a_n và a_{n+2} là hai nghiệm phân biệt của phương trình (ẩn t):$t^2 - 10a_{n+1}t + a_{n+1}^2 + 96 = 0$. Theo định lý Viet, ta có $a_{n+2} + a_n = 10a_{n+1}$

hay $a_{n+2} - 10a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Suy ra, dãy (a_n) có phương trình đặc trưng:$x^2 - 10x + 1 = 0$.

Dễ thấy phương trình trên có hai nghiệm là: $x_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ và $x_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Từ đó, $a_n = C_1(5 - 2\sqrt{6})^n + C_2(5 + 2\sqrt{6})^n$. cho n=0 và n=1 ta được:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \left(5 - 2\sqrt{6}\right)C_1 + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)C_2 = 10 \end{cases}$$

Suy ra $C_1 = C_2 = 1$. Vậy số hạng tổng quát của dãy (a_n) là:

$a_n = (5 - 2\sqrt{6})^n + (5 + 2\sqrt{6})^n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

2. Dễ dàng chứng minh được bằng phương pháp quy nạp toán học.

Nhận xét: Từ các bài toán trên ta phát triển thành bài toán tổng quát sau:

Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a^2 = b + 1$. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $u_0 = 1, u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 - c}$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số trên đều nguyên.

Lời giải bài toán tổng quát này tương tự bài toán 4.

Như vậy từ bài toán tổng quát này ta có thể sáng tác ra một hệ thống các bài toán bằng cách cho a,b,c các giá trị cụ thể.

Bình luận: Các hệ thức truy hồi trong các bài toán 4 và 5 đều gợi cho chúng ta đến với phương trình Pell. Quả thật là có thể xây dựng hàng loạt dãy số tương tự bằng cách xét phương trình Pell. Xét phương trình $x^2 - Dy^2 = k$. Giả sử phương trình có nghiệm không tầm thường (x_0, y_0) và (α, β) là nghiệm cơ sở của phương trình $x^2 - Dy^2 = 1$. Khi đó, nếu xét hai dãy $(x_n), (y_n)$ xác định bởi:
$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta D y_n, y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n$ thì x_n, y_n là nghiệm của $x^2 - Dy^2 = k$. Từ hệ phương trình trên, ta có thể tìm được $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \sqrt{D(x_n^2 - k)}; y_{n+1} = \alpha y_n + \beta \sqrt{k + D y_n^2}$ và như vậy đã xuất hiện hai dãy số nguyên được cho bởi công thức không nguyên. Ví dụ, với $D = 4a(a+1), k = 1$ thì ta có $x_0 = \alpha = 2a+1, y_0 = \beta = 1$. Ta được hai dãy số nguyên sau đây :

$$x_0 = 2a+1, x_{n+1} + \sqrt{4a(a+1)(x_n^2 - 1)}$$

$$y_0 = 1, y_{n+1} = 2a+1 + \sqrt{4a(a+1)y_n^2 + 1}$$

Cuối cùng, chú ý rằng ta có thể tạo ra một kiểu dãy số khác từ kết quả a_{n-1}, a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình :
$x^2 - 4a_n x + a_n^2 + 2 = 0$ Trên đây : Theo định lí Viète thì $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2$, suy ra:$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2}{a_{n-1}}$ và ta có bài toán: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = 3$ và $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2}{a_{n-1}}$ Chứng minh rằng a_n nguyên với mọi n

Bài toán 5(Bulgaria 1996)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ luôn tồn tại cặp số tự nhiên lẻ x_n, y_n thỏa mãn: $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.

Lời giải

Ta chứng minh sử dụng quy nạp:
$n = 3$: ta có $x_3 = y_3 = 1$.
Giả sử đúng với n: tức là có các số tự nhiên lẻ x_n, y_n sao cho $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$;
Ta cần chứng minh đúng với $n+1$ tức là chỉ ra tồn tại cặp số tự nhiên lẻ (X, Y) thỏa mãn :$7X^2 + Y^2 = 2^{n+1}$. Thật vậy, ta có:

$$7\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = 2(7x_n^2 + y_n^2) = 2^{n+1}.$$

Vì x_n, y_n lẻ ta có ít nhất $\frac{x_n+y_n}{2}$ hoặc $\frac{|x_n-y_n|}{2}$ là số tự nhiên lẻ. Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Sau đây chúng ta đi xét một bài toán về dãy có phương pháp giải bằng phương pháp số học mặc dù bài toán đó không có bản chất số học.

Bài toán 6(Czech-Slovak Match 1995)[8]:

Cho dãy số xác định bởi:

$a_1 = 2; a_2 = 5$ và $a_{n+2} = (2-n^2)a_{n+1} + (2+n^2)a_n$ với $n \geq 1$.

Có tồn tại hay không các số : p, q, r sao cho: $a_p a_q = a_r$?

Lời giải

Ta sử dụng quy nạp $a_n \equiv 2(mod 3)$:

$n = 1, 2$: Đúng

Giả sử đúng với $n+1$ ta cần chứng minh đúng với $n+2$:

Thật vậy, ta có: $a_{n+2} = (2-n^2)a_{n+1} + (2+n^2)a_n \equiv 2(2-n^2) + 2(2+n^2) \equiv 8 \equiv 2(mod 3)$

Từ đó ta có với p, q, r bất kỳ ta có: $a_p a_q \equiv 1(mod 3)$, mà $a_r \equiv 2(mod 3) \Longrightarrow a_p a_q \neq a_r$

*** Bài tập đề nghị:**

Bài 1. Cho dãy $a_1 = 20, a_2 = 30, a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, n \geq 2$. Tìm tất cả n sao cho $1 + 5a_n a_{n+1}$ là một số chính phương.

Bài 2. Cho $a_0 = a_1 = 5$ và $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}$

Chứng minh rằng :$\frac{a_n+1}{6}$ là một số chính phương.

Bài 3. Cho $a_1 = 1$ và với $n \geq 1$ ta có :

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 3}$$

Chứng minh rằng $a_{3n+1} = a_{n+1}(a_{n+1}^2 + 1)$.

Bài 4. Cho dãy :$a_0 = 1, a_1 = 2$ và $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$. Chứng minh rằng $\frac{a_{6n}}{a_{2n}}$ không phải là lập phương của một số hữu tỷ.

Bài 5. Cho $a_0 = 4, a_1 = 22$ và $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$. Chứng minh rằng có thể biểu diễn a_n như sau:

$$a_n = \frac{y_n^2 + 7}{y_n - x_n}$$

với $x_n, y_n \in \mathbb{N}$

Bài 6. Cho $c \in \mathbb{N}^*$. Cho $x_1 = 1, x_2 = c$ và $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + 2$với $n \geq 2$.

Chứng minh rằng với k bất kì thì tồn tại r sao cho $x_k x_{k+1} = x_r$

Bài 7. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$. Định nghĩa dãy (a_n) như sau: $a_0 = a, a_1 = b, a_2 = 2b - a + 2$ và $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. Tìm a, b sao cho a_n là một số chính phương với $n \geq 1998$

Bài 8. Cho dãy (a_n) sao cho $a_1 = 43, a_2 = 142, a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$. Chứng minh rằng $(a_n, a_{n+1}) = 1$.

Chứng minh rằng với bất kỳ $m \in \mathbb{N}$ tồn tại vô hạn số n sao cho:

$m|UCLN(a_n - 1, a_{n+1} - 1)$.

2.2. Lớp các bài toán dãy số có bản chất đại số

Lớp các bài toán dãy số có bản chất đại số thường là các bài toán tìm công thức tổng quát của một dãy số, tính tổng các số hạng của một dãy số. Với loại toán này, chúng ta có một số kiến thức cơ bản làm nền tảng như:

1) Các công thức về cấp số cộng, cấp số nhân

2) Phương pháp phương trình đặc trưng để giải các phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng (thuần nhất và không thuần nhất) Các phương pháp cơ bản để giải các bài toán dãy số ở loại này là bằng các biến đổi đại số, đưa bài toán về các bài toán quen thuộc, tính toán và đưa ra các dự đoán rồi chứng minh bằng quy nạp toán học. Trong một số bài toán, phép thế lượng giác sẽ rất có ích. Ta bắt đầu đi từ bài toán thi HSG của đất nước Mỹ năm 1993:

Bài toán 1(Putnam 1993 [11]).

Cho dãy các số thực thỏa mãn điều kiện: $a_n^2 - a_{n-1}.a_{n+1} = 1, \forall n \geq 1(1)$

CMR tồn tại các số thực m sao cho: $a_{n+1} = ma_n - a_{n-1}, \forall n \geq 1(2)$

phân tích: Từ kết luận (2)ta suy ra:$m = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}$

Ta cần chỉ ra tồn tại m tức là dãy: $\left\{ \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} \right\}$ không đổi

Lời giải:

Khi $n \geq 2$ ta định nghĩa $b_n = \dfrac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}$ khi đó hệ thức đã chứng tỏ $b_n = b_{n+1}, \forall n \geq 2$.

thật vậy: $b_n = b_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} \Leftrightarrow a_{n-1}^2 + a_{n-1}.a_{n+1} = a_n^2 - a_n.a_{n-2}$

Đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng theo giả thiết (Cả hai vế đều bằng 1).

Từ đó, đặt $b_n = m, \forall n \geq 2$

. Ta có:$m = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} \Leftrightarrow a_{n+1} = ma_n - a_{n-1}$

Sau cùng, với n=1suy ra $m = \dfrac{a_2 + a_0}{a_1}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

***Nhận xét**:

Mấu chốt của bài toán xuất phát từ dãy b_n với $b_n = \dfrac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}$ là dãy hằng. Vậy ta hãy cho b_n là một dãy hằng vối số hạng tổng quát khác thì ta được một bài toán mới. Ví dụ cho $b_n = \dfrac{\alpha a_n + \beta a_{n-2}}{a_{n-1}}$ suy ra $b_n = b_{n+1}$ suy ra giả thiết sẽ được thay thế bằng: $\dfrac{a_n^2 - a_{n-1}.a_{n+1}}{a_{n-1}^2 - a_n.a_{n-2}} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Hay $u_{n+1} = \dfrac{\alpha}{\beta}.u_n$, với $u_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1}.a_{n+1}$. Tức là (u_n) là cấp số nhân với công bội là $\dfrac{\alpha}{\beta}$

Suy ra bài toán mới: Cho (u_n) là cấp số nhân với công bội là $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Dãy a_n thỏa mãn: $a_n^2 - a_{n-1}.a_{n+1} = u_{n+1}$. Chứng minh rằng: tồn tại số thực m sao cho:

$\alpha.a_{n+1} = ma_n - \beta.a_{n-1}$

Tổng quát hơn nữa, cho b_n là một hàm $f(a_n, a_{n+1}, a_{n-1})$ sao cho b_n là dãy hằng, biến đổi giả thiết suy ra điều kiện của dãy a_n suy ra bài toán mới.

Bài toán 2(Poland 1997):

Cho các số nguyên dương $x_1, x_2, ..., x_7$ thỏa mãn: $x_6 = 144$, $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$ với $n = 1, 2, 3, 4$. Tìm x_7

Lời giải

Sử dụng giả thiết, ta có: $x_6 = (x_3 + x_2)[(x_3(x_2 + x_1) + x_3][x_3(x_2 + x_1)] \geq (x_3 + x_2)^2(x_3 + x_2 + 1)$ do vậy $x_3 + x_2 < 5$.

Do đó x_6 là tổ hợp của x_2, x_3. Với mỗi trường hợp sẽ cho ta một phương trình Diophant với x_1, nhưng chỉ hai trường hợp là có nghiệm. Do đó dãy có thể là:

2,1,2,6,18,144,3456

7,1,1,8,16,144,3456

Trong cả hai trường hợp thì $x_7 = 3456$.

Bài toán 3(Ireland 1998)[8].

cho dãy số thực x_n được cho bởi : x_0, x_1 là các số thực dương tùy ý, và:

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

Tìm x_{1998}.

Phân tích: Ta sẽ tìm ra quy luật của dãy dựa vào việc tính một vài số hạng đầu của dãy.

Lời giải

Ta có:

$x_2 = \dfrac{1+x_1}{x_0}, \qquad x_3 = \dfrac{x_0+x_1+1}{x_0x_1}, \qquad x_4 = \dfrac{1+x_0}{x_1}$

$x_5 = x_0$, và $x_6 = x_1$. Do vậy, x_k có chu kỳ lặp lại 5 số hạng và $x_{1998} = x_3 = \dfrac{x_0+x_1+1}{x_0x_1}$.

Bài toán 4(Russia 1995[8]):

Cho dãy $a_0, a_1, a_2, \cdots$ thỏa mãn:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

với mọi số nguyên không âm m và n với $m \geq n$. Nếu $a_1 = 1$, hãy xác định a_{1995}.

Lời giải

Ta có: $a_{2m} + a_{2m} = 2(a_{2m} + a_0) = 4(a_m + a_m)$, suy ra $a_{2m} = 4a_m$ và $a_0 = 0$. Do vậy ta sẽ tính được $a_2 = 4, a_4 = 16$. Từ đó ta cũng có $a_1 + a_3 = \dfrac{a_2+a_4}{2} = 10$ nên $a_3 = 9$.

Ta sẽ chứng minh $a_i = i^2$ với mọi $i \geq 1$.

Thật vậy sử dụng quy nạp theo i. Giả sử rằng $a_j = j^2$ với $j < i$. Khi đó ta có với $m = i-1, j = 1$ thì:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{2n-2} + a_2) - a_{n-2} = 2a_{n-1} + 2a_1 - a_{n-2} = 2(n^2 - 2n + 1) + 2 - (n^2 - 4n + 4) = n^2.$$

Do đó , ta có : $a_{1995} = 1995^2$.

Nhận xét :- Do dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số. Ta có thể giải bài toán trên bằng cách cách sử dụng phương trình hàm như sau:

Chuyển dãy về hàm, ta có: $f(x+y)+f(x-y)=\dfrac{1}{2}(f(2x)+f(2y)), f(1)=1$

Cho x=y ta được $f(0)=0$

Cho y=0 ta được:$f(2x)=4f(x)$. Từ đây suy dễ dàng suy ra $f(x)=x^2$.

Do vậy: $a_n=n^2$.

Như vậy: Ta có thể chuyển bài toán từ dãy về hàm và giải bài toán đó bằng phương trình hàm. Vậy ta có thể sáng tạo ra một số đề toán về dãy dựa theo theo một số đặc trưng của hàm như sau:

1. Dựa theo đặc trưng của hàm tuyến tính $f(x)=ax$ là $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Chuyển sang bài toán dãy sẽ là:

Xác định dãy (u_n) biết $u_{m+n}=u_m+u_n$, với mọi số nguyên không âm m, n $(m\geq n)$, $u_1=a\neq 0$

2. Dựa theo đặc trưng của hàm lũy thừa $f(x)=x^k, x>0$ là $f(xy)=f(x)f(y)$. Chuyển sang bài toán dãy sẽ là:

Xác định dãy (u_n) biết $u_{mn}=u_m.u_n$, với mọi số nguyên dương m, n .

3. Dựa theo đặc trưng của hàm mũ $f(x)=a^x,(a>0,a\neq 1)$ là $f(x+y)=f(x)f(y)$. Chuyển sang bài toán dãy sẽ là:

Xác định dãy (u_n) biết $u_{m+n}=u_m.u_n$, với mọi số nguyên dương m, n .

4. Dựa theo đặc trưng của hàm cos $f(x)=cosx$ là $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$. Chuyển sang bài toán dãy sẽ là:

Xác định dãy (u_n) biết $u_{m+n}+u_{m-n}=2u_m.u_n$, với mọi số nguyên dương m, n .

...

Bài toán 5(Shortlist 1994 [5]).

Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_1=1$, $a_2=2$ và $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ với mọi $n>1$. Chứng minh rằng với mọi m, a_ma_{m+1} cũng là một số hạng của dãy số.

Lời giải

Ta có $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ Thay n bằng n-1, ta được $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$ Trừ hai đẳng thức vế theo vế, ta được $a_{n+2}-3a_{n+1}+3a_n-a_{n-1}=0$

Phương trình đặc trưng: $x^3-3x^2+3x-1=0$ có nghiệm bội 3 $x_{1,2,3}=1$ nên ta có nghiệm tổng quát a_n có dạng $a_n=an^2+bn+c$.

Thay n = 1, 2, 3 ta được: a + b + c = 1

4a + 2b + c = 2

9a + 3b + c = 5

Từ đó giải ra được $a = 1, b = -2, c = 2$. Vậy $a_n = n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1$

Do đó:$a_m a_{m+1} = \left[(m-1)^2 + 1\right]\left(m^2+1\right) = \left(m^2 - m + 1\right)^2 + 1 = a_{m^2-m+2}$

Bài toán 6(VMO-2001 [4]). Cho dãy $(x_n), n \in \mathbb{N}^*$, được xác định như sau:$x_1 = \dfrac{2}{3}$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hãy tính tổng của 2001 số hạng đầu tiên của dãy (x_n).

Lời giải

Dễ thấy $x_n > 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $u_n = \dfrac{2}{x_n}$Từ công thức xác định dãy (x_n) của đề bài, ta có:$u_1 = 3$ và $u_{n+1} = 4(2n+1) + u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1) Từ (1), bằng phương pháp sai phân ta giải được $u_n = (2n-1)(2n+1)$,với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó: $x_n = \dfrac{2}{u_n} = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do vậy: $\sum\limits_{i=1}^{2001} x_i = 1 - \dfrac{1}{4003} = \dfrac{4002}{4003}$

2.3. Lớp các bài toán về bất đẳng thức dãy.

Bài toán 1(China 1995 [8]).

Giả sử rằng $2n$ số thực $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \quad (n \geq 3)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(a)$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(b)$0 < a_1 = a_2, a_i + a_{i+1} = a_{i+2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-2$;

(c)$0 < b_1 \leq b_2, b_i + b_{i+1} \leq b_{i+2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-2$.

Chứng minh rằng:$a_{n-1} + a_n < b_{n-1} + b_n$.

Lời giải

Cho dãy F_n là dãy Fibonacci với $F_0 = 0, F_1 = 1$, sao cho: $a_i = F_{i-1}a_1$. Đặt $d_2 = b_2 - b_1$ và $d_i = b_i - b_{i-1} - b_{i-2}$ với $i > 2$. Khi đó dễ thấy rằng:

$$b_i = F_{i-1}b_1 + F_{i-2}d_2 + \cdots + F_1 d_i.$$

Ta có tính chất sau của dãy F_n: $F_0 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$(có thể chứng minh lại bằng phương pháp quy nạp). Khi đó có:

$$\frac{b_{n-2}+b_n}{b_1+\cdots+b_{n-2}} = \frac{F_{n+1}b_1+F_nd_2+\cdots+F_2d_n}{(F_n-1)b_1+(F_{n-1}-1)d_2+\cdots+(F_1-1)d_n} \geq \frac{F_{n+1}b_1}{(F_n-1)b_1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{a_1+\cdots+a_{n-2}}$$

Bất đẳng thức đầu là hệ quả của kết quả sau: nếu $a,b,c,d>0$ và $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$thì $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d}$. Đặt $s=a_1+\cdots+a_n$; thì ta có:

$$\frac{a_{n-1}+a_n}{s-a_{n-1}-a_n} \leq \frac{b_{n-1}+b_n}{s-b_{n-1}-b_n}.$$

Vì $f(x)=\frac{x}{s-x}$ là hàm tăng trên $[0,s]$, do vậy ta có :$a_{n-1}+a_n \leq b_{n-1}+b_n$.

***Nhận xét**:

Lời giải trên đã sử dụng một tính chất của dãy Fibonacci- Một dãy đặc biệt đã được nhắc đến ở chương 1.

Sau đây ta xét thêm một số tính chất khác của dãy Fibonacci:

1. $u_{n+2}=1+u_1+u_2+...+u_n$

2.$u_1+u_3+u_5...+u_{2n-1}=u_{2n}$

3.$u_2+u_4+u_6...+u_2n=u_{2n+1}-1$

4.$u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=u_n.u_{n+1}$

5.$u_{2n}^2=u_1u_2+u_2u_3+...+u_{2n-1}.u_{2n}$

6.$u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$

7.$u_n^2-u_{n+1}u_{n-1}=(-1)^{n+1}$

Chứng minh các tính chất này khá đơn giản

Tuy nhiên sự vận dụng các tính chất trên là rất lớn. Ví dụ như bài toán sau:

Bài toán 2(Shortlist 1997 [8])

Với mọi số nguyên $n \geq 2$ hãy xác định giá trị nhỏ nhất của tổng $\sum_{i=0}^{n} a_i$ có thể đạt được từ dãy số không âm $a_0,a_1,\cdots,a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_0=1, a_i \leq a_{i+1}+a_{i+2}$ với $i=0,\cdots,n-2$.

Lời giải

Ta dễ thấy rằng giá trị nhỏ nhất của $\sum_{i=0}^{n} a_i$ sẽ đạt được khi $a_0, a_1, \cdots, a_n$ thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 + a_3 = a_1 \\ a_3 + a_4 = a_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{k-1} + a_k = a_{k-2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{n-1} + a_n = a_{n-2} \\ a_n = 0 \end{cases}$$

Do vậy $a_i = \dfrac{f_{n-i}}{f_n}$, với f_i với $i = 0, \cdots, n$ là dãy Fibonacci : $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, \cdots$

Và : $Min \sum_{i=0}^{n} a_i = \dfrac{1}{f_n}(f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + f_n) = 1 + \dfrac{f_{n+1} - 1}{f_n}$.

Bài toán 3(China 1997[10])

Cho $x_1, x_2, \cdots, x_{1997}$là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

i,$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq x_n \leq \sqrt{3}$.

ii, $\sum x_i = -318\sqrt{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $\sum x_i^{12}$.

Lời giải

Vì x^{12} là hàm lồi đối với x, $\sum x_i^{12}$ đạt lớn nhất khi x_i là điểm cuối của đoạn. Giả sử có n số x_i bằng $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $1996 - n$ bằng $\sqrt{3}$ và phần tử cuối cùng bằng

$$-318\sqrt{3} + \frac{n}{\sqrt{3}} - (1996 - n)\sqrt{3}.$$

Số này sẽ được chọn sao cho thỏa mãn:

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} \leq -318\sqrt{3} + \frac{n}{\sqrt{3}} - (1996-n)\sqrt{3} \leq \sqrt{3}.$$

Điều này tương đương với: $-1 \leq 4n - 6942 \leq 3$. Chỉ có số nguyên :$n = 1736$ thỏa mãn điều kiện này, và giá trị đó là:
$\frac{2}{\sqrt{3}}$, và giá trị lớn nhất là $1736.3^{-6} + 260.3^{6} + (\frac{4}{3})^{6}$.

Bài toán 4(VMO-1999 [4])

Cho dãy $(u)_n$ được xác định bởi: $u_1 = 1, u_2 = 2$ và $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ với n=1,2,3,...

Chứng minh rằng: $u_{n+2} + u_n \geq 2 + \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$, với mọi n=1,2,3,...

Lời giải

Dễ thấy $u_3 = 5$ và dãy (u_n) (n=1,2,...) là dãy số dương tăng. Từ hệ thức $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ ta có: $(u_{n+2} + u_n)u_n = 3u_{n+1}u_n = (u_{n+1} + u_{n-1})u_{n+1}$ (n=2,3,...)

Suy ra: $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$ (n=2,3,...)

Như vậy: $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = ... = u_3u_1 - u_2^2 = 1$. Từ đó ta có:
$u_{n+2} + u_n = \frac{1 + u_{n+1}^2}{u_n} + u_n = \frac{1}{u_n} + u_n + \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$. Hay $u_{n+2} + u_n \geq 2 + \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$, với mọi n=1,2,3,...

Bài toán 4(Bulgaria 1996 [10])

Cho dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$xác định bởi:

$a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}, \qquad n \geq 1.$

Chứng minh rằng với $n \geq 4$, $\lfloor a_n^2 \rfloor = n$.

Lời giải

Điều cần chứng minh sẽ tương đương với việc ta chứng minh:

$\sqrt{n} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n-1}}, \qquad n > 1.$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp:

$n = 1, 2, 3$ khẳng định đúng.

Giả sử đúng với n, ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n+1$:

Thật vậy, ta xét : $f_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x}$. Với $n \geq 3$, ta có:

$a_{n+1} = f_n(a_n) \geq f_n(\frac{n}{\sqrt{n-1}}) = \frac{n}{\sqrt{n-1}} > \sqrt{n+1}$

Mặt khác sử dụng: $a_n > \dfrac{n-1}{\sqrt{n-2}}$ ta có với $n \geq 4$:

$a_{n+1} = f_n(a_n) < f_n(\dfrac{n-1}{\sqrt{n-2}}) = \dfrac{(n-1)+n^2(n-2)}{(n-1)n\sqrt{n-2}} < \sqrt{n+2}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 5(China 1997 [10])

Cho $a_1, a_2, \cdots$ là các số nguyên không âm thỏa mãn $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$a_n \leq ma_1 + (\frac{n}{m} - 1)a_m.$$

Lời giải

Sử dụng quy nạp theo k, $a_n \leq ka_m + a_{n-mk}$ với $k < \dfrac{m}{n}$. Đặt $n = mk + r$ với $r \in \{1, \cdots, m\}$, khi đó:

$$a_n \leq ka_m + a_r = \frac{n-r}{m}a_m + a_r \leq \frac{n-m}{m}a_m + ma_1.$$

do $a_m \leq a_1$ và $a_r \leq ra_1$.

Bài toán 6(Taiwan 1997 [10]).

Cho $n \geq 3$ là số nguyên, và giả sử rằng dãy $a_1, a_2, \cdots a_n$ thỏa mãn $a_{i-1} + a_{i+1} = k_i a_i$ với số nguyên dương k_i. Chứng minh rằng $2n \leq \sum k_i \leq 3n$.

Lời giải

Bất đẳng thức trái $2n \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ ta sử dụng AM-GM để chứng minh với chú ý:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

Mặt khác, ta cũng chỉ ra được rằng $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leq 3n - 2$ với $n \geq 2$ bằng quy nạp theo n.

Với $n = 2$, nếu $a_1 \geq a_2$, thì $2a_2 = k_1 a_1$, và ta có : hoặc$a_1 = a_2$và $k_1 + k_2 = 4 = 3.2 - 2$,hoặc $a_1 = 2a_2$ và $k_1 + k_2 = 4 = 3.2 - 2$.

Với $n > 2$, ta có thể giả sử a_i là không đồng thời bằng sau, khi đó tồn tại i sao cho $a_i \geq a_{i-1}, a_{i+1}$ với bất đẳng thức ngặt ở ít nhất một trong hai trường hợp. Khi đó $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$ và $k_i = 1$. Ta cũng có kết luận dãy khi bỏ đi a_i vẫn thỏa mãn điều kiện đưa ra với k_{i-1}và k_{i+1} giảm dần về 1 và bỏ đi k_i. Do tổng kết quả k_i lớn nhất là $3(n-1) - 2$ do giả thiết quy nạp. , vậy tổng k_i ban đầu lớn nhất là $3n - 2$.

Bài toán 7(China 1998 [10]).

Cho n là một số nguyên. Tồn tại hay không dãy nguyên dương $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ sao cho:$\sum a_i = \sum b_i$ và

$$n-1 > \sum \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{1998}.$$

Lời giải

Câu trả lời là có. Trước hết ta sẽ chứng minh: Nếu $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ là $2n$ số nguyên dương phân biệt sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, khi đó:

$$n-1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i}$$

Thật vậy, từ điều kiện, ta thấy rằng tồn tại $i_1, 1 \le i_1 \le n$, sao cho $b_{i_1} > a_{i_1}$. Do đó $\dfrac{2b_{i_1}}{a_{i_1} + b_{i_1}} > 1$ và

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2b_i}{a_i + b_i}\right) = n - \sum_{i=1}^{n} \frac{2b_i}{a_i + b_i} < n - 1.$$

Cho N là một số nguyên dương. Với $i = 1, 2, \cdots, n-1$, đặt $a_i = N(2i-1), b_i = 2i$. Từ điều kiện $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = -(n-1)N + 2N.\frac{(n-1)n}{2} + a_n = 2.\frac{(n-1)n}{2} + b_n = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Do vậy $b_n = a_n + (n-1)[N(n-1) - n]$ với a_n đã được xác định. Từ khẳng định chứng minh lúc đầu, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong điều kiện :

$$n-1 > \sum \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{1998}.$$

Nhưng điều đó lại suy ra từ: $n - 1 > \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i - b_i}{a_i + b_i}$

$$= n - \frac{2a_n + 2(n-1)[N(n-1) - n]}{2a_n + (n-1)[N(n-1) - n]} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{4i}{2i + N(2i-1)}.$$

Đại lượng này sẽ tiến đến $n-1$ khi $N \longrightarrow +\infty$ và $\dfrac{a_n}{N} \longrightarrow +\infty$ (ví dụ, cho$a_n = N^2$). Do vậy với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, (ở đây $\varepsilon = \dfrac{1}{1998}$), ta có thể tìm được N đủ lớn và a_n, sao cho a_i, b_ilà hoàn toàn phân biệt và $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$, và

$$n-1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n-1-\varepsilon.$$

Bài toán 8(Iran 1998 [10]).

Cho $n_1 < n_2 < \cdots$ là dãy các số tự nhiên sao cho với $i < j$, biểu diễn thập phân n_i không xuất hiện trong số ngoài cùng bên trái của biểu diễn thập phân n_j. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}.$$

Lời giải

Rõ ràng ta chỉ cần với dãy hữu hạn là đủ.

Giả sử cho một dãy hữu hạn, đặt $M = 10N + d$ là phần tử lớn nhất của dãy, với $0 \leq d \leq 9$. Khi đó N sẽ không thuộc dãy.Hơn nữa, bỏ đi $10N, 10N+1, \cdots, 10N+9$ khỏi dãy nếu chúng xuất hiện và thêm N vào dãy khác sao cho tổng nghịch đảo là:

$$\sum_i \frac{1}{n_i} + \frac{1}{N} - \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{10N+i} \geq \sum_i \frac{1}{n_i}.$$

Do vậy ta bằng cách lặp lại việc thay thế và không làm giảm tổng nghịch đảo. Quá trình này là hữu hạn (vì dãy là hữu hạn) và được dãy là $\{1, \cdots, 9\}$, để dãy này có tổng các nghịch đảo là lớn nhất.

Bài toán 9(Belarus 1999):

Cho hai dãy số thực $x_1, x_2, \cdots,$ và $y_1, y_2, \cdots,$ được định nghĩa như sau:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

Với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3$ với mọi $n > 1$.

Lời giải

Đặt $z_n = \dfrac{1}{y_n}$ và chú ý rằng phương trình hồi quy y_n tương đương với :

$$z_{n+1} = z_n + \sqrt{1 + z_n^2}.$$

Chú ý rằng $z_2 = \sqrt{3} = x_1$; vì x_i và z_i thỏa mãn phương trình hồi quy giống nhau, điều này có nghĩa là $z_n = x_{n-1}$ với mọi $n > 1$. Do vậy,

$$x_n y_n = \frac{x_n}{z_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Do x_i tăng, với $n > 1$ nên ta có: $x_{n-1}^2 \geq x_1^2 = 3 > \frac{1}{3}$, suy ra $2x_{n-1} > \sqrt{1+x_{n-1}^2} \rightarrow 3x_{n-1} > x_n$. Ta lại có, $\sqrt{1+x_{n-1}^2} > x_{n-1} \rightarrow x_n > 2x_{n-1}$. Hơn nữa,

$$2 < x_n y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} < 3.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 10(Romania 1999 [10])

Cho $A = \{a_1, a_2, \cdots\} \subset \mathbb{N}$ là tập thỏa mãn với mọi dãy con phân biệt $B, C \subseteq A$, $\sum\limits_{x\in B} x \neq \sum\limits_{x\in C} x$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau: Bổ đề: Cho dãy $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$ là các số thực dương thỏa mãn:

(i), $x_1y_1 < x_2y_2 < \cdots < x_ny_n$;

(ii), $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_k$ với mọi $k = 1, 2, \cdots, n$.

Khi đó ta có :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}.$$

Thật vậy ta có: Đặt $\pi_i = \frac{1}{x_iy_i}, \delta_i = x_i - y_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Ta có thể giả sử $\pi_1 > \pi_2 > \cdots > \pi_n > 0$ và $\sum\limits_{i=1}^{k} \delta_i \geq 0$ với mọi $1 \leq k \leq n$.

Chú ý rằng:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{y_k} - \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \pi_k \delta_k \right)$$

$$= \pi_n \sum_{i=1}^{n} \delta_i + \sum_{k=1}^{n-1} (\pi_k - \pi_{k+1})(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k) \geq 0,$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

Quay lại bài toán, không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, và đặt $y_i = 2^{i-1}$ với mọi i. Rõ ràng:

$$a_1y_1 < a_2y_2 < \cdots < a_ny_n.$$

Với k bất kỳ, tổng $2^k - 1$ được tạo ra bằng cách chọn ít nhất một trong dãy rời rạc $a_1, a_2, \cdots, a_k$. Do vậy lớn nhất trong đó là $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, nhỏ nhất là $2^k - 1$. Do vậy với $k = 1, 2, \cdots, n$ ta có:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 2^k - 1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_k.$$

Áp dụng bổ đề, ta có:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2.$$

Đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 11(Bulgaria 1999 [8]).

Chứng minh rằng với số nguyên bất kỳ $n, n \geq 3$, tồn tại n số nguyên dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$ trong cấp số cộng, và n số nguyên dương $b_1, b_2, \cdots, b_n$ trong cấp số nhân, sao cho:

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_n < a_n.$$

Đưa ra ví dụ về 2 dãy này với mỗi dãy là ý nhất 5 số hạng.

Lời giải

Ta tìm dãy mà $b_n = a_{n-1} + 1$ và $b_{n-1} = a_{n-2} + 1$. Viết $d = a_{n-1} - a_{n-2}$. Khi đó với $2 \leq i, j \leq n-1$ ta có $b_{i+1} - b_i \leq b_n - b_{n-1} = d$, sao cho $b_j = b_n + \sum\limits_{i=j}^{n-1}(b_i - b_{i+1}) > a_{n-1} + (n-j)d = a_{j-1}$.

Và nếu ta chắc chắn $b_1 < a_1$, khi đó $b_j = b_1 + \sum\limits_{i=1}^{j-1}(b_{i+1} - b_i) \leq a_1 + (j-1)d = a_j$ với mọi j, nên chuỗi bất đẳng thức đã được thỏa mãn.

Cho $b_1, b_2, \cdots, b_n$ bằng $k^{n-1}, k^{n-2}(k+1), \cdots, k^0(k+1)^{n-1}$, ở đó k là một giá trụ đã được xác định sau đó. Ta cũng đặt $a_{n-1} = b_n - 1$ và $a_{n-2} = b_{n-1} - 1$, và định nghĩa a_i khác theo đó. Khi đó $d = a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} = (k+1)^{n-2}$, và $a_1 =$

$(k+1)^{n-2}(k+3-n)-1$. Do vậy, ta chỉ cần lấy k sao cho:

$$(k+1)^{n-2}(k+3-n)-1-k^{n-1}>0.$$

Nhìn vế trái của đa thức ẩn k, hệ số của k^{n-1} bằng 0 nhưng hệ số của k^{n-2} bằng 1. Có nghĩa là biểu thức dương với k đủ lớn và ta có thể tìm được dãy $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $b_1, b_2, \cdots, b_n$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Với $n=5$, ta tìm k sao cho:

$$(k+1)^3(k-2)-1-k^4>0.$$

Ta thấy rằng $k=5$ thỏa mãn và ta có:

$$625<647<750<863<900<1079<1080<1295<1296<1511.$$

Bài toán 12(Romania 2000 [10]):
Cho a là một số thực dương và $\{x_n\} \quad (n \geq 1)$ là một dãy số thực sao cho $x_1 = a$ và

$$x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k,$$

với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho $x_n > 1999!$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n \geq 1$ rằng:

$$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k > a.n!$$

Với $n=1$, ta có $x_2 \geq 3x_1 > x_1 = a$.
Giả sử rằng khẳng định đúng đến n. Khi đó:
$x_{n+2} \geq (n+3)x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} kx_k = (n+1)x_{n+1} + 2x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} kx_k$
$> (n+1)x_{n+1} + 2\sum\limits_{k=1}^{n} kx_k - \sum\limits_{k=1}^{n} kx_k = \sum\limits_{k=1}^{n+1} kx_k,$
Hơn nữa, $x_1 > 0$ theo định nghĩa và $x_2, x_3, \cdots, x_n$ cũng dương theo giả thiết quy nạp; do vậy $x_{n+2} > (n+1)x_{n+1} > (n+1)(a.n!) = a.(n+1)!$.
Như vậy khẳng định được chứng minh hoàn toàn.
Với n đủ lớn, ta có $x_{n+1} > n!.a > 1999!$.

Bài toán 13(APMO1999).

Cho $a_1, a_2, \cdots$ là dãy các số thực thỏa mãn:

$$a_{i+j} \leq a_i + a_j$$

với mọi $i, j = 1, 2, \cdots$. Chứng minh rằng:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n.$$

với mọi số nguyên dương n.

Lời giải

Ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Nếu m, n là các số nguyên dương với $m \geq n$, khi đó $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n(n+1)}{2m}.a_m$.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh kết quả cho $m = n$ bằng cách cộng các bất đẳng thức : $a_1 + a_{n-1} \geq a_n, a_2 + a_{n-2} \geq a_n, \cdots, a_{n-1} + a_1 \geq a_n, 2a_n \geq 2a_n$, và chia cho 2. Với số nguyên dương j, viết $\beta_j = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_j}{1 + 2 + \cdots + j}$. Khi đó bất đẳng thức với $m = n = j = k + 1$ là tương đương với $\beta_j \geq \frac{a_j}{j}$ và $\beta_k \geq \beta_{k+1}$; nên khi $m \geq n$ ta có $\beta_n \geq \beta_{n+1} \geq \cdots \geq \beta_m \geq \frac{a_m}{m}$.

Như vậy bổ đề được chứng minh.

Từ bất đẳng thức đã chứng minh ta biểu diễn $a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}$ như tổng Abel và sau đó áp dụng bổ đề nhiều lần:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_j)$$

$$\geq \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2n}a_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)}.\frac{j(j+1)}{2n}a_n = a_n,$$

Như vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài toán 14(Canada 2000 [8]).

Giả sử các số thực $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ thỏa mãn: (i), $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} \geq 0$,

(ii), $a_1 + a_2 \leq 100$,

(iii), $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} \leq 100$.

Xác định giá trị lớn nhất có thể của $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$, và tìm tất cả các dãy số dương $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ đạt giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Với $i \geq 3$, ta có : $0 \leq a_i \leq a_2$ và do vậy $a_i(a_i - a_2) \leq 0$ dấu bằng xảy ra với $a_i \in \{0, a_2\}$. Cộng theo vế 98 bất đẳng thức này với nhau ta được :

$$\sum_{i=3}^{100} \leq a_2. \sum_{i=3}^{100} a_i.$$

Do (iii) nên ta có :$a_2. \sum\limits_{i=3}^{100} a_i \leq 100a_2$ dấu bằng xảy ra với $\sum\limits_{i=3}^{100} a_i = 100$ hoặc $a_2 = 0$.
Tương tự với (i) và (ii) ta có $0 \leq a_1 \leq 100 - a_2$. Do vậy, $a_1^2 \leq (100 - a_2)^2$, với dấu bằng xảy ra khi $a_1 = 100 - a_2$.
Điều kiện (i) và (ii) kéo theo : $0 \leq a_2 \leq 100 - a_1 \leq 100 - a_2$ hoặc $0 \leq a_2 \leq 50$. Do vậy, $2a_2(a_2 - 50) \geq 0$ với dấu bằng xảy ra khi $a_2 = 0$ hoặc $a_2 = 50$.
Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \sum_{i=3}^{100} a_i^2 &\leq (100 - a_2)^2 + a_2^2 + 100a_2 \\ &= 10000 + 2a_2(a_2 - 50) \leq 10000.\end{aligned}$$

Để bất đẳng thức xảy ra dấu bằng thì tất cả các dấu bằng ở trên đều phải xảy ra, điều đó có nghĩa là ta phải có:
(a) $\{a_3, a_4, \cdots, a_{100} \subseteq \{0, a_2\}$;
(b) $\sum\limits_{i=3}^{100} = 100$ hoặc $a_2 = 0$;
(c)$a_1 = 100 - a_2$;
(d)$a_2 \in \{0, 50\}$.
Những điều trên chỉ thỏa mãn khi dãy $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ bằng :

$$100, 0, 0, \cdots, 0 \qquad \text{hoặc} \quad 50, 50, 50, 50, 0, 0, \cdots, 0.$$

Hơn nữa các dãy này thỏa mãn điều kiện (i), (ii), (iii), và $\sum\limits_{i=1}^{100} a_i^2 = 10000$ với mỗi dãy. Hơn nữa, 10000 là tổng bình phương lớn nhất, và giá trị lớn nhất này chỉ đạt được với hai dãy trên.

Bài toán 15(Rusia 2000 [8])

Cho số nguyên lẻ $a_0 > 5$, giả sử dãy $a_0, a_1, a_2, \cdots$, ở đó:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 - 5 & \text{nếu} \quad a_n \quad \text{lẻ} \\ \dfrac{a_n}{2} & \text{nếu} \quad a_n \quad \text{chẵn} \end{cases}$$

với mọi $n \geq 0$. Chứng minh rằng dãy trên là không có biên.

Lời giải

Ta sẽ sử dụng quy nạp theo n để chỉ ra rằng a_{3n} là lẻ và $a_{3n} > a_{3n-3} > \cdots > a_0 > 5$.
Với $n = 0$ khẳng định đúng do giả thiết.
Giả sử rằng khẳng định đúng với mọi $n \leq k$, ta cần chứng minh nó đúng với $k+1$.
Vì a_{3k} là lẻ, $a_{3k}^2 \equiv 1(mod 8)$ và do vậy $a_{3k+1} = a_{3k}^2 - 5 \equiv 4(mod 8)$. Do a_{3k+1} chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8, nên $a_{3(k+1)} = \dfrac{a_{3k+1}}{4}$ là số lẻ.
Hơn nữa, từ giả thiết quy nạp ta có $a_{3k}^2 > 5a_{3k} > 4a_{3k} + 5$. Do đó, $a_{3(k+1)} = \dfrac{1}{4}(a_{3k}^2 - 5) > a_{3k}$.
Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài toán 16(Shortlist 1988 [5])

Giả sử dãy với các số thực không âm thỏa mãn $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0$ và $\sum a_i \leq 1$ với $k \geq 1$. Chứng minh rằng với k bất kỳ ta có $0 \leq a_k - a_{k+1} < \dfrac{2}{k^2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có :$a_k - a_{k+1}$ là đơn điệu giảm, đặc biệt nếu$a_k - a_{k+1} = -\delta$ với một số k nào đó và $\delta > 0$. Khi đó $a_m - a_{m+1} \leq -\delta$ với mọi $m > k$, $a_k - a_m = (a_k - a_{k+1}) + (a_{k+1} - a_{k+2}) + \cdots + (a_{m-1} - a_m) \leq -(m-k)\delta$, và $a_m \geq a_k + (m-k)\delta$ với mọi $m > k$
Đặc biệt với $a_m > 1$ với m đủ lớn, ta có mâu thuẫn. Do vậy $a_k - a_{k+1} \geq 0$ với mọi k.
Giả sử với một số k nào đó, ta có $a_k - a_{k+1} \geq \dfrac{2}{k^2}$. Khi đó $a_j - a_{j+1} \geq a_k - a_{k+1} \geq \dfrac{2}{k^2}$ với mọi $i \leq j \leq k$ và $a_j \geq a_{j+1} + \dfrac{2}{k^2} \geq a_{j+2} + 2.\dfrac{2}{k^2} \geq \cdots \geq a_{k+1} + (k - j + 1)\dfrac{2}{k^2}$.
Đặc biệt, $a_1 + \cdots + a_k \geq (1 + 2 + \cdots + k)\dfrac{2}{k^2} + ka_{k+1} > 1 + ka_{k+1} \geq 1$. Mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 17(IMO1995 [6])

Tìm giá trị lớn nhất của x_0 nếu tồn tại dãy $x_0, x_1, \cdots, x_{1995}$ là dãy số thực dương với $x_0 = x_{1995}$, thỏa mãn:

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

với mọi $i = 1, \cdots, 1995$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có phương trình sau:

$$2x_i^2 - \left(x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}}\right)x_i + 1 = 0$$

Từ đó ta có : $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$hoặc $x_i = \dfrac{1}{2}x_{i-1}$.
Ta chỉ ra rằng: $x_i = 2^{k_i}x_0^{\varepsilon_i}$ với $|k_i| \leq i$ và $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+i}$. Điều này ta có thể chứng minh bằng quy nạp với $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$ hoặc $\dfrac{x_{i-1}}{2}$. Nên ta có :
$x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$ với $\varepsilon = \varepsilon_{1995}, k = k_{1995}, 0 \leq |k| \leq 1995, \varepsilon = (-1)^{1995+k}$ và $x_0 = x_{1995}$.
Nếu k là số lẻ , thì $\varepsilon = 1$ do vậy $2^k = 1$ (vô lý). Vậy giả sử k là số chẵn , thì $\varepsilon = -1$ và $x_0^2 = 2^k$, với $|k| \leq 1995$ nên $k \leq 1994$, do vậy $x_0 \leq 2^{997}$.
Cuối cùng ta chỉ ra $x_0 = 2^{997}$ là có thể xảy ra với $x_0 = 2^{997}, x_i = \dfrac{1}{2}x_{i-1}$ với $1 \leq i \leq 1994$ và $x_{1995} = \dfrac{1}{x_{1994}}$. Khi đó ta sẽ có :
$x_0 = x_{1995} = 2^{997}$, do đó $Max x_0 = 2^{997}$.

Bài toán 18(IMO shortlist 1995 [5])

Giả sử rằng $x_1, x_2, x_3, \cdots$ là các số thực dương thỏa mãn:

$$x_n^n = \sum_{i=0}^{n-1} x_n^i$$

với $n = 1, 2, 3, \cdots$. Chứng minh rằng với mọi n, ta có :

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq x_n < 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh với $n \geq 2$ là số tự nhiên, và u là một số thực không âm thỏa mãn:

$$1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} = u^n.$$

Khi đó ta có : $2-\frac{1}{2^{n-1}} < u < 2-\frac{1}{2^n}$. Thật vậy, nhân cả hai vế của : $1+u+u^2+\cdots+u^{n-1}=u^n$ với $1-u$, ta được:

$$(1+u+u^2+\cdots+u^{n-1})(1-u)=u^n(1-u),$$

Hay $1-u^n=u^n-u^{n+1}$, Tức là $u^{n+1}-2u^n+1=0$. Do đó, u là nghiệm của : $f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$.

Ta chứng minh $f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$ có nhiều nhất hai nghiệm không âm. Thật vậy, rõ ràng $x=1$ là nghiệm, nhưng ta không quan tâm đến nghiệm này, bởi vì $u\neq 1$ (do phương trình $1+1+1^2+\cdots=1^n$ là không thể xảy ra với $n\geq 2$, ta có nghiệm này vì ta nhân phương trình với (1-u)). Điều này có nghĩa là ta cần chỉ ra một nghiệm u không âm thỏa mãn phương trình :$1+u+u^2+\cdots+u^{n-1}=u^n$.

Thật vậy, từ đạo hàm của $f(x)$ là $f(x)'=(n+1)x^n-2nx^{n-1}$, dễ thấy rằng $f(x)$ là hàm đơn điệu giảm với $x\in[0;\frac{2n}{n+1}]$ và đơn điệu tăng với $x\in[\frac{2n}{n+1};+\infty)$. Với mỗi đoạn trên , hàm $f(x)$ chỉ có thể có một nghiệm, do vậy $f(x)$ có nhiều nhất là hai nghiệm không âm. Như ta đã nói ở trên, $x=1$ là một nghiệm. Ta quan tâm đến nghiệm còn lại.

Ta cần chỉ ra nghiệm còn lại nằm trong khoảng $(2-\frac{1}{2^{n-1}};2-\frac{1}{2^n})$ bằng cách chứng minh $f(2-\frac{1}{2^{n-1}})<0$ và $f(2-\frac{1}{2^n})>0$; vì $f(x)$ là hàm liên tục, và khoảng trên không chứ một, do vậy chỉ ra khoảng trên chứa một nghiệm là bài toán được chứng minh.

Do đó, vấn đề còn lại là chứng minh $f(2-\frac{1}{2^{n-1}})<0$ và $f(2-\frac{1}{2^n})>0$.

Trước hết, ta chỉ ra $f(2-\frac{1}{2^{n-1}})<0$. Thật vậy,

Do $f(2-\frac{1}{2^{n-1}})=(2-\frac{1}{2^{n-1}})^{n+1}-2(2-\frac{1}{2^{n-1}})^n+1=1-(2-\frac{1}{2^{n-1}})^n\frac{1}{2^{n-1}}$.

Vậy chứng minh $f(2-\frac{1}{2^{n-1}})<0$ tức là $1-(2-\frac{1}{2^{n-1}})^n\frac{1}{2^{n-1}}<0$ hay $1<\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^n\frac{1}{2^{n-1}}$.

Ta viết lại thành :

$2^{n-1}<\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^n$. Chia cả hai vế cho 2^n ta được:

$\frac{1}{2}<\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. Bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức Bernoulli (với $-\frac{1}{2^n}>-1$):

$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\left(1+\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right)^n>1+n\left(-\frac{1}{2^n}\right)=1-\frac{n}{2^n}=1-\frac{1}{2}.\frac{n}{2^{n-1}}$.

Với $n \geq 2$ có $n \leq 2^{n-1}$, nên $\dfrac{n}{2^{n-1}} \leq 1$ và $\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)^n > 1-\dfrac{1}{2}.\dfrac{n}{2^{n-1}} \geq 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Ta chứng minh: $f\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right) > 0$ tương đương với

$\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)^{n+1} - 2\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)^n + 1 > 0 \longrightarrow 1 - \left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)^n.\dfrac{1}{2^n} > 0 \longrightarrow 1 > \left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)^n \dfrac{1}{2^n} \longrightarrow$ $2^n > \left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)^n$. Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài toán 18(USAMO 1997 [9])

Cho dãy số nguyên không âm $a_1, a_2, \cdots, a_{1997}$ thỏa mãn :

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1$$

với mọi $i, j \geq 1$ và $i + j \leq 1997$. Chứng minh rằng tồn tại một số thực x sao cho $a_n = \lfloor nx \rfloor$ với $1 \leq n \leq 1997$.

Lời giải

Ta phải chỉ ra $x \in [\dfrac{a_n}{n}, \dfrac{a_n+1}{n}]$. Do vậy chỉ ra sự tồn tại của x với 1997 phần tử của dãy với các đoạn là rời nhau, tức là $\forall m, n, \dfrac{a_n+1}{n} \geq \dfrac{a_m}{m}$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo $m+n$.

Trường hợp $m+n=2$ hay $m=n=1$ bất đẳng thức là hiển nhiên.

Nếu $m=n$ bất đẳng thức hiên nhiên đúng.

Nếu $n > m$, ta sử dụng thuật toán $n = mq + r$, với $r < n$. Do đó $m + r < n + m$ và ta sử dụng giả thiết quy nạp $\dfrac{a_r+1}{r} \geq \dfrac{a_m}{m} \longrightarrow a_{mq+r} + 1 \geq qa_m + a_r + 1 = qa_m + r.\dfrac{a_r+1}{r} \geq qa_m + r\dfrac{a_m}{m} = n\dfrac{a_m}{m} \longrightarrow \dfrac{a_n+1}{n} \geq \dfrac{a_m}{m}$.

Nếu $n < m$, ta sử dụng thuật toán $m = nq + r$ với $r < m$, ta có $r + n < m + n$, ta lại sử dụng giả thiết quy nạp:

$\dfrac{a_r}{r} \leq \dfrac{a_n+1}{n} \longrightarrow na_m = na_{qn+r} \leq n(qa_n + a_r + q) \leq nqa_n + nq + nr\dfrac{a_r}{r} \leq nqa_n + nq + nr\dfrac{a_n+1}{n}$

$= nqa_n + nq + ra_n + r = m(a_n+1) \longrightarrow \dfrac{a_m}{m} \geq \dfrac{a_n+1}{n}$. Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài toán 19(Shortlist 1989 [5])

Cho tập các số thực $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $a_0 = a_n = 0$,

(ii) Với $1 \le k \le n-1$,

$$a_k = c + \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}.(a_i + a_{i+1})$$

Chứng minh rằng :$c \le \dfrac{1}{4n}$.

Lời giải

Đặt $S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i (k = 0, 1, \cdots, n)$. Khi đó:

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k = nc + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1})$

$= nc + \sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{i} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}) = nc + \sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1})\sum\limits_{k=0}^{i} a_{i-k}$

$= nc + \sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1})\sum\limits_{t=0}^{i} a_i$, với $t = i - k$

$= nc + \sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1})S_1$

$= nc + (S_1S_0 + (S_2 - S_0)S_1 + (S_3 - S_1)S_2 + \cdots + (S_n - S_{n-2})S_{n-1})$

$= nc + S_n^2$ (vì $S_{n-1} = S_n$).

Do vậy ta có :$S_n^2 - S_n + nc = 0$

Vì S_n là số thực nên: $1 \ge 4nc$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 20(Shortlist 1994 [5])

Cho $a_0 = 1994$ và $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + 1}$ với $n \ge 0$. Chứng minh rằng $\lfloor a_n \rfloor = 1994 - n$ với $0 \le n \le 998$.

Lời giải

Ta có $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n^2}{a_n + 1} = 1 - \dfrac{1}{a_n + 1} > 0$. Do vậy, $a_0 > a_1 > \cdots > a_n > \cdots$

Lại có :$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 1994 - n + \dfrac{1}{a_0 + 1} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1} + 1} >$ $1994 - n$.

Với $1 \le n \le 998$, ta có :

$$\frac{1}{a_0 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + 1} < \frac{n}{a_{n-1} + 1} < \frac{998}{a_{997} + 1} < \frac{998}{1994 - 997 + 1} = 1$$

Do vậy $\lfloor a_n \rfloor = 1994 - n$.

Bài toán 21(Shortlist 1996)

Cho $a > 2$. Ta định nghĩa như sau:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\right) a_n$$

Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có

$$\frac{1}{a_0} + \cdots + \frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}\right)$$

Lời giải

Từ $a > 2$ ta có thể viết $a = b + \frac{1}{b}$ với b là một số thực dương. Khi đó ta có : $a^2 - 2 = b^2 + \frac{1}{b^2}$ và:

$$a_2 = (a^2 - 2)a = \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$$

$$a_3 = \left(\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 2\right) a_2 = \left(\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 - 2\right) a_2$$
$$= \left(b^4 + \frac{1}{b^4}\right)\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right).$$

Tiếp tục quá trình trên ta thu được:

$$a_n = \left(b^{2^{n-1}} + \frac{1}{b^{2^{n-1}}}\right) \cdots \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right).$$

Do vậy,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 1 + \frac{b}{b^2+1} + \frac{b^3}{(b^2+1)(b^4+1)} + \cdots + \frac{b^{2^n-1}}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)}$$

Ta lại có :

$$\frac{1}{2}(a + 2 - \sqrt{a^2 - 4}) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b} + 2 - \left(b - \frac{1}{b}\right)\right) = 1 + \frac{1}{b}.$$

Do vậy ta phải chứng minh với mọi $b > 0$ thì,

$$\frac{b^2}{1+b^2} + \frac{b^4}{(1+b^2)(1+b^4)} + \cdots + \frac{b^{2^n}}{(1+b^2)(1+b^4)\cdots(1+b^{2^n})} < 1.$$

Mà với mọi số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{(1+a_1)\cdots(1+a_j)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

Do vậy :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b^{2^j}}{(1+b^2)\cdots(1+b^{2^j})} = 1 - \frac{1}{(1+b^2)\cdots(1+b^{2^n})} < 1.$$

Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài toán 22(VMO1997 [4])

Tìm số thực α lớn nhất để tồn tại dãy vô hạn $a_1, a_2, \cdots$ các số nguyên dương sao cho tính chất sau được thỏa mãn:

(a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}, a_n > 1997^n$

(b)Với mọi $n \geq 2, a_n^{\alpha}$ không vượt quá ước chung lớn nhất của tập $\{a_i + a_j : i + j = n\}$.

Lời giải

Giá trị lớn nhất có thể của α là $\dfrac{1}{2}$

Trước hết, giả sử $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy sao cho thỏa mãn điều kiện (a) và (b).

Ta có kết quả sau:

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại vô hạn giá trị $n \in \mathbb{N}$ mà :$a_{2n} \geq a_n^{2-\varepsilon}$

Thật vậy, Với $\varepsilon > 0$, và giả sử tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho mọi $n > N, a_{2n} < a_n^{2-\varepsilon}$. Logarit hóa hai vế và chia cho $2n$ ta được :

$$\frac{loga_{2n}}{2n} < \frac{2-\varepsilon}{2} . \frac{loga_n}{n}$$

nên

$$\frac{a_{2^k n}}{2^k n} < \left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)^k \frac{loga_n}{n} - > 0 \quad \text{khi} \quad k - > \infty$$

điều này không thể xảy ra với $a_n \geq 1997^n$ nên $\dfrac{loga_n}{n} \geq log1997, \forall n$. Kết quả được chứng minh.

Giả sử n là một trong những giá trị cho bởi kết quả trên, sao cho: $a_n^{2-\varepsilon} \leq a_{2n}$. Khi đó

$$a_n^{(2-\varepsilon)\alpha} \leq a_{2n}^{\alpha} \leq UCLN\{a_i + a_j | i + j = 2n\} \leq 2a_n.$$

nên $2 \geq a_n^{1-(2-\varepsilon)\alpha} \geq 1997^{n(1-(2-\varepsilon)\alpha)}$; bởi vì điều này đúng với vô hạn giá trị $n \in \mathbb{N}$ nên ta phải có $\alpha \leq \dfrac{1}{2-\varepsilon}$. Từ $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, nến ta có $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

Ta sẽ đưa ra một dãy thỏa mãn điều kiện (a) và (b) với $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Ký hiệu F_n là phần tử thứ n trong dãy Fibonacci. Cho t là số nguyên chẵn sao cho $F_{2tn} > 1997^n, \forall n \in \mathbb{N}$ và định nghĩa dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bởi: $a_n = 3F_{2tn}$. Khi đó điều kiện (a) rõ ràng được thỏa mãn. Ta cần chỉ ra $F_{tn}|F_{2ti} + F_{2tj}$ khi $i + j = n$, để $UCLN\{a_i + a_j | i + j = n\} \geq 3F_{tn}$. Thật vậy:

$$F_{2ti} = F_{t(i+j)}F_{t(i-j)+1} + F_{t(i+j)-1}F_{t(i-j)}$$

$$F_{2tj} = F_{t(i+j)}F_{t(j-i)+1} + F_{t(i+j)+1}F_{t(j-1)}$$

Do vậy

$$F_{2ti} + F_{2tj} = 2F_{t(i+j)}F_{t(i-j)+1} + \left(F_{t(i+j)+1} - F_{t(i+j)-1}\right)F_{t(j-i)} = F_{t(i+j)}\left(2F_{t(i-j)+1} - F_{t(i-j)}\right)$$

Ta có :
$a_n = 3F_{2tn} = 3F_{tn}\left(F_{tn+1} + F_{tn-1}\right) \leq 9F_{tn}^2 \leq \left(UCLN\{a_i + a_j | i + j = n\}\right)^2$,
nên $a_n^{\frac{1}{2}} \leq UCLN\{a_i + a_j | i + j = n\}$ và dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện bài toán với $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

2.4. Sử dụng lượng giác giải các bài toán về dãy.

Nhận xét: Nhiều dãy số đại số với công thức phức tạp có thể trở thành đơn giản nhờ phép thế lượng giác. Đối với phương pháp này ta cần nắm vững các công thức lượng giác, tùy theo từng dãy số đại số cho trong đề bài mà ta liên tưởng và sử dụng công thức lượng giác một cách hợp lý.

Bài toán 1. Dãy số (h_n) được cho bởi điều kiện:
$h_1 = \dfrac{1}{2}$ và $h_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}; \forall n \geq 1$
Đặt $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i; \forall n \in \mathbb{N}$. Hãy chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n < 1,03$

Lời giải
Ta có: $h_1 = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{3.2} \Rightarrow h_2 = \sin\dfrac{\pi}{3.2}$

Ta sẽ chứng minh rằng:$h_n = \sin\dfrac{\pi}{3.2^n}$

Giả sử rằng:$\sin h_k = \sin\frac{\pi}{3.2^k}$ $h_{k+1} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\sin\dfrac{\pi}{3.2^k}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{3.2^k}}{2}} = \sin\dfrac{\pi}{3.2^n}$

Mặt khác:$\sin x < x; \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Nên:$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i = \dfrac{1}{2} + \sin\dfrac{\pi}{3.2^n} + ... + \sin\dfrac{\pi}{3.2^n} <$
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{3.2^2} + ... + \dfrac{\pi}{3.2^n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{3.2}$

Do Sn là dãy tăng nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \le \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3.2} < 1,03 \Rightarrow$đpcm.

Bài toán 2 Cho dãy (u_n) định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + \left(1-\sqrt{2}\right)u_n} \end{cases}$$

Tính u_{2003}

<u>**Nhận xét**</u> : với giả thiết của bài ta liên tưởng ngay đến công thức: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Đồng thời ta còn có $\sqrt{2} - 1 = \tan\dfrac{\pi}{8}, u_1 = \tan\dfrac{\pi}{3}$

Lời giải

Ta có:$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + \left(1-\sqrt{2}\right)u_n} \end{cases}$ $(*)$ Ta đã biết:$tg\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

$1 = tg\dfrac{\pi}{4} = tg\left(2.\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2tg\dfrac{\pi}{8}}{1 - tg^2\dfrac{\pi}{8}} \Rightarrow tg\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ Từ (*) ta có:$u_{n+1} = \dfrac{u_n + tg\dfrac{\pi}{8}}{1 - u_n tg\dfrac{\pi}{8}}$ (1)

Theo nguyên lý quy nạp, từ (1) và $u_1 = \sqrt{3}$.suy ra Suy ra: $u_n = tg\left[\dfrac{\pi}{3} + (n-1)\dfrac{\pi}{8}\right]$

Vậy:$u_{2003} = tg\left(\dfrac{\pi}{3} + 2002\dfrac{\pi}{8}\right) = tg\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\left(2+\sqrt{3}\right)$

Bài toán 3. Cho dãy u_n xác định bởi:

$$u_n = 2^n\sqrt{2 - \sqrt{2 + ...\sqrt{2}}}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Bài giải.

Đây là bài toán đơn giản và quen thuộc. Ta sẽ chứng minh:

$$v_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\,(1)\,.$$

Rõ ràng với n = 1 thì (1) hiển nhiên đúng. Giả sử đúng khi n = k, nghĩa là:

$$v_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Xét:$v_{k+1} = \sqrt{2+v_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$
Vậy (1) đúng khi n = k+1, suy ra (1) đúng với mọi n.
Ta có:$u_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}} = 2^{n+1}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}.2^{n+2}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$
Từ đó ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}.2^{n+2}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$$

Bài toán 4. Cho dãy số xác định bởi:
$\begin{cases} a_0 = 1; a_{1000} = 0 \\ a_{n+1} = 2a_1.a_n - a_{n-1} \end{cases}$ Tính: $a_{1999} + a_1$

Lời giải.

+ Nếu thay n=2 thì ta được $a_2 = 2a_1^2 - 1$,vậy nên nếu muốn sử dụng lượng giác(ở đây là hàm cos, vì $cos2a = 2cos^2a - 1)$) ta cần phải chứng minh được ta cần phải chứng minh được $|a_1| \leq 1$ thì mới có thể đặt $a_1 = cosa$.
+ Thật vậy, nếu $|a_1| > 1$, thì $|a_2| = \left|2a_1^2 - 1\right| > 1$,
suy ra $|a_3| = |2a_1a_2 - a_1| > |2a_2 - 1| > 1$,...,$|a_{1000}| > 1$ (trái với giả thiết).
Vậy nên $|a_1| \leq 1$, đặt $a_1 = cosa$.
Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng:
$a_{n+1} = cos(n+1)a$. Ta có:
$a_{1000} = cos1000a = 0 \Rightarrow 1000a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
$\Rightarrow a_{1999} = cos1999a = \cos(\pi + k2\pi - a) = -\cos a = -a_1 \Rightarrow a_{1999} + a_1 = 0$
Bài toán 5 (Longlist 1989 [7]). Cho dãy (u_n) và (v_n) như sau:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+v_n^2}-1}{v_n} \end{cases}$$

Chứng minh rằng:$2^{n+2}.u_n < \pi < 2^{n+2}.v_n$

Lời giải:

Ta có:

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\frac{\pi}{2^2}, u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^2}} = \sin\frac{\pi}{2^3}$$

Vậy:

$$u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{2+1}}} = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Tương tự:

$$v_0 = 1 = tg\frac{\pi}{2^2}$$

$$v_n = \frac{\sqrt{1+tg^2\frac{\pi}{2^{n+1}}}}{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}-1}{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}} = tg\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Bằng cách xét:

$$f(x) = \sin x - x$$

,

$$g(x) = tgx - x; x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Ta suy ra:

$$\sin x < x < tgx; \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Khi đó:

$$\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2^{n+2}} < tg\frac{\pi}{2^{n+2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{k+2}.u_n < \pi < 2^{k+2}.v_n$$

$\Rightarrow$ đpcm

Bài toán 6. **(*Kỳ thi HSG quốc gia lần XXVIII-1990*[4])** Cho dãy số(x_n), $n \in \mathbb{N}$, $|x_1| < 1$ được xác định bởi hệ thức:

$$x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3-3x_n^2}}{2}$$

a)Có cần thêm diều kiện gì đối với x_1 để dãy toàn số dương.

b)Dãy số này có tuần hoàn không? Tại sao?

Phân tích:Điều kiện $|x_1| < 1$ và dạng của hàm số gợi ngay cho chúng ta phép đặt $x_1 = cos\alpha$ với $\alpha \in (0;\pi)$ khi đó $x_2 = \frac{1}{2}\left(-cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$. Từ đó suy ra $x_{n+1} = cos\left(\alpha - \frac{2n\pi}{3}\right)$. Từ đây có thể dễ dàng trả lời các câu hỏi của đề bài.

Lời giải.

a. Để $x_n > 0$, trước hết ta phải có $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$.
Nhưng $x_2 > 0$ tức là $\sqrt{3-3x_n^2} > x_1$ hay $x_1^2 < \frac{3}{4}$.
Suy ra: $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ngược lại, nếu $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì tồn tại
$\alpha \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right)$ sao cho
$cos\alpha = x_1$. Khi đó ta dễ dàng chứng minh được:
$x_{n+1} = cos\left(\alpha - \frac{2n\pi}{3}\right)$.
Xét ba trường hợp của n là: $n = 3k, n = 3k+1, n = 3k-1$ đều suy ra $x_{n+1} > 0, \forall \in \mathbb{N}$

b).Xét hai trường hợp đối với x_1:

• Trường hợp $x_1 \geq 0$:

- Nếu $x_2 \geq 0$ thì tương tự phần a ta có: $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$

và $x_1 = x_3 = ...; x_2 = x_4 = ...$

- Nếu $x_2 < 0$ thì $x_3 > 0$ và cũng có $x_3 = x_1$

Thật vậy từ:$x_2 = \dfrac{-x_1 + \sqrt{3-3x_1^2}}{2}$ Suy ra:$\sqrt{3-3x_1^2} = 2x_2 + x_1\,(1)$
$\Rightarrow 3 - 3x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2\,(2)$
Do (1) mà: $2x_1 + x_2 > 0$.Suy ra:

$2x_1 + x_2 = x_1 + (x_1 + x_2) > x_1 - x_2 > 0\; x_1 \geq 0, x_2 < 0$

Vì thế từ (2) ta có:$\sqrt{3-3x_2^2} = 2x_1 + x_2$ Suy ra:$x_1 = \dfrac{-x_2 + \sqrt{3-3x_2^2}}{2} = x_3$
Vậy ta có:(x_n) là dãy tuần hoàn.

• Trường hợp $x_1 < 0$. Khi đó $x_2 > 0$ và theo trường hợp 1 suy ra x_n kể từ hạng thứ hai trở đi là dãy tuần hoàn.

Bài toán 7. (***VMO-1990***[4]) Cho $a_0 = 2, b_0 = 1$.
Lập hai dãy số(a_n), (b_n)với n = 0, 1, 2, ... theo quy tắc sau:
$a_{n+1} = \dfrac{2a_n.b_n}{a_n + b_n}; b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}.b_n}$
Chứng minh rằng các dãy (a_n), (b_n) có cùng một giới hạn khi $n \to \infty$. Tìm giới hạn đó.

Lời giải.

Ta chú ý: $a_0 = 2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3}}, b_0 = 1$

$a_1 = \dfrac{2a_0b_0}{a_0+b_0} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{b_0}} = \dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{3}+1} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{6}}; b_1 = \sqrt{a_1b_0} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{6}}$

Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh rằng:
$a_n = \left(\cos\dfrac{\pi}{2.3}.\cos\dfrac{\pi}{2^2.3}\ldots\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}.3}.\cos\dfrac{\pi}{2^n.3}\right)^{-1}$
$b_n = \left(\cos\dfrac{\pi}{2.3}.\cos\dfrac{\pi}{2^2.3}\ldots\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}.3}.\cos\dfrac{\pi}{2^n.3}\right)^{-1} \forall n \geq 1$

Lưu ý rằng: $\cos\dfrac{\pi}{2.3}.\cos\dfrac{\pi}{2^2.3}\ldots\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}.3}.\cos\dfrac{\pi}{2^n.3} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{2^n.\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}} \forall n \geq 1$

Ta có: $a_n = \dfrac{2^n.\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}.\cos\dfrac{\pi}{2^n.3}}$ (1) ;$b_n = \dfrac{2^n.\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$(2)

Từ (1), (2) tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ Ngoài ra:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n.\sin\dfrac{\pi}{2^n.3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}.\cos\dfrac{\pi}{2^n.3}} = \frac{\dfrac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2^n.3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Vậy hai dãy (a_n), (b_n) có cùng giới hạn chung là $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

Bài tập đề nghị:

Bài 1: Cho hai dãy $(a_n),(b_n)$ như sau: a < b cho trước:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}; b_1 = \sqrt{a.a_1}$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}; b_2 = \sqrt{a_2.b_1}$$

...

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}; b_n = \sqrt{a_n.b_{n-1}}$$

a.Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, b.Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Hướng dẫn:Đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{b}, \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

Bằng quy nạp ta dễ dàng có:

$$\begin{cases} a_n = b.\cos\frac{\alpha}{2}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2^n} = \dfrac{b.\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2^n}.}{2^n.\sin\dfrac{\alpha}{2^n}} \\ b_n = b.\cos\dfrac{\alpha}{2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2^n} = \dfrac{b.\sin\alpha.}{2^n.\sin\dfrac{\alpha}{2^n}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

b.Ta cũng có:

$$a_n = b_n.\cos\frac{\alpha}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}.\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

Bài 2: Tìm $\lim\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}..........\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}\right)$ (thừa số cuối có n dấu căn)

Bài 3: Cho dãy số:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) \end{cases}$$

Tìm các giá trị của t để $x_{1998} = 0$?

Hướng dẫn: Phân tích $4x_n(1-x_n) = 1-(2x_n-1)^2$ để chứng minh $|x_n| \le 1$

Đặt $t = \sin^2 a$ suy ra công thức xác định x_n

Bài 4: Cho dãy số:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát xác định x_n.
Hướng dẫn: Ta xét hai trường hợp: $|a| \leq 1$ và $|a| \geq 1$

2.5. Lớp các bài toán về giới hạn của dãy

2.5.1. Phương pháp sử dụng định nghĩa tính giới hạn

Nhận xét: ta có thể dự đoán được giới hạn của một số dãy số nhờ việc tìm nghiệm của phương trình liên quan. Dự đoán này cần được kiểm nghiệm lại bằng định nghĩa giới hạn của dãy số.
Ta nhắc lại rằng, dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ nếu tồn tại một số a sao cho dãy $\{x_n - a\}$ là vô cùng bé, nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, luôn tồn tại số $N = N(\varepsilon)$ sao cho với mọi n > N, các phần tử của dãy này thoả mãn bất đẳng thức $|x_n - a| < \varepsilon$. Khi đó số a được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$.
Bài toán 1.
Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} - 1$, $u_1 = \dfrac{1}{3}$ Chứngminh rằng dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Ta có: $-1 < u_n < 0, \forall n \geq 2$
Do đó, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ thì a phải là nghiệm âm của phương trình:
$x = \dfrac{x^2}{2} - 1$. Giải phương trình, ta được $x = 1 - \sqrt{3}$ Ta sẽ chứng minh rằng $a = 1 - \sqrt{3}$ là giới hạn của dãy. Thật vậy:
$|u_{n+1} - a| = \left|\dfrac{u_n^2}{2} - 1 - \left(\dfrac{a^2}{2} - 1\right)\right| = \dfrac{1}{2}|u_n - a| . |u_n + a|$
Vì $-1 < u_n < 0$ nên: $|u_n + a| < \left|-1 + 1 - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$
Vậy $|u_{n+1} - a| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}|u_n - a|, \forall n \geq 2.$
Do đó:$|u_{n+1} - a| < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}|u_2 - a| < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$
Vì $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}|u_{n+1} - a| = 0$
Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a = 1 - \sqrt{3}$.

2.5.2. Tính giới hạn nhờ sử dụng tính đơn điệu và bị chặn

Nội dung chính của phương pháp này chủ yếu dựa vào khẳng định sau đây: Mọi dãy đơn điệu và bị chặn đều là dãy hội tụ. Hơn nữa:
Nếu $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ thì $a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
Nếu $a_1 \geq a2 \geq \ldots$ thì $a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
Nhận xét rằng định lí trên chỉ cho ta biết về dấu hiệu hội tụ của một dãy số, mà chưa xác định được một thuật toán cụ thể để tìm giới hạn của dãy số đó. Ta cần mô tả mối liên quan giữa dãy số với nghiệm của phương trình sinh bởi dãy tương ứng. Nếu phương trình liên quan có nghiệm duy nhất thì nghiệm đó chính là giới hạn của dãy số cần tìm.
Bài toán 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định theo công thức: $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 1$ Giả sử $x_n \in [a;b], n \in \mathbb{N}$ và f là hàm tăng trên $[a;b]$. Chứng minh rằng:
a) Nếu $x_1 \leq x_2$ thì $\{x_n\}$ là dãy tăng.
b) Nếu $x_1 \geq x_2$ thì $\{x_n\}$ là dãy giảm.
c) Nếu f bị chặn thì $\{x_n\}$ hội tụ.

Lời giải

a) Vì $x_1 \leq x_2$ nên $f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow x_2 < x_3$.
Từ đó, bằng quy nạp toán học ta chứng minh được: $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
Suy ra $\{x_n\}$ là dãy tăng.
b) và c) cũng được chứng minh theo cách tương tự.
Bài toán 2 Cho dãy $\{y_n\}$ được xác định như sau :
$y_n = \dfrac{1}{3}\left(2y_{n-1} + \dfrac{a}{y_{n-1}^2}\right)$; với $n \geq 2, a > 0, y_1 > 0$
Chứng minh rằng dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

Lời giải

Dùng bất đẳng thức Cauchy và phép quy nạp, ta suy ra :
$y_n = \dfrac{1}{3}\left(y_{n-1} + y_{n-1} + \dfrac{a}{y_{n-1}^2}\right) \geq \sqrt[3]{a}$
Mặt khác :$\dfrac{y_n}{y_{n-1}} \leq \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 1 \rightarrow y_n \leq y_{n-1}$

Vậy dãy số $\{y_n\}$ hội tụ và từ hệ thức quy nạp ta suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt[3]{a}$

Bài toán 3

Xác định x_1 để dãy $\{x_n\}$ xác định như sau:

$x_n = x_{n-1}^2 + 3x_{n-1} + 1, (n \geq 2)$ là một dãy hội tụ

Lời giải

Ta có $x^2 + 3x + 1 \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dãy đã cho là dãy tăng.

Giả sử dãy $\{x_n\}$ là hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ thì $a = a^2 + 3a + 1 \Leftrightarrow a = -1$

Do đó, vì $\{x_n\}$ tăng nên $x_n \leq -1, \forall n$. Ta có $x^2 + 3x + 1 \leq -1 \leftrightarrow -2 \leq x \leq -1$.

Vì thế, nếu $x_1 \in [-2; -1]$ thì $x_2 \in [-2; -1] \forall n$ và khi đó $\{x_n\}$ sẽ hội tụ vì dãy tăng và bị chặn

Nếu $x_1 > -1$ hoặc $x_1 < -2$ thì $x_2 > -1$ và dẫn đến $x_n > -1, \forall n$ suy ra dãy $\{x_n\}$ sẽ không hội tụ.

Vậy, nếu $x_1 \in [-2; -1]$ thì $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài toán 4.

Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ với n=0, 1, 2, ...

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (\sqrt{2})^{x_n}$ thì dãy số có dạng $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_n + 1 = f(x_n)$.

Ta thấy $f(x)$ là hàm số tăng và $x_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$. Từ đó, do $f(x)$ là hàm số tăng nên ta có:

$x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1, x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, \ldots$ Suy ra $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Tiếp theo, ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n < 2$ với mọi n.

Điều này đúng với n = 0. Giả sử ra đã có $x_k < 2$ thì rõ ràng $x_{k+1} = \sqrt{2}^{x_k} < \sqrt{2}^2 = 2$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $x_n < 2$ với mọi n.

Vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn.

Gọi a là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ sang giới hạn, ta được $a = \sqrt{2}^a$.

Ngoài ra ta cũng có $a \leq 2$. Xét phương trình $x = \sqrt{2}^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2})$. Khảo sát hàm số $\dfrac{\ln x}{x}$ ta thấy rằng phương trình trên chỉ có 1 nghiệm nhỏ hơn e và một nghiệm lớn hơn e. Vì 2 là một nghiệm của phương trình nên rõ ràng chỉ có 1 nghiệm duy nhất của phương trình thoả mãn điều kiện ≤ 2. Từ đó suy ra a = 2.

Vậy giới hạn của xn khi n dần đến vô cùng là 2.

Bài toán 5.

Cho dãy $\{u_n\}$ xác định như sau:

$u_0 > 0, u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n^2 \ln n\right) = 1$

Lời giải

Dễ thấy $\{u_n\}$ là dãy giảm vì $e^x > 0, \forall x$

Mặt khác, $e^x > 1 + x, \forall x \neq 0$ nên :

$f(x) = x - e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2}\left(xe^{-1/x^2} - 1\right) > e^{-1/x^2}\left(x + \dfrac{1}{x} - 1\right) > 0, \forall x > 0$

Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u - e^{-1/u^2}$, suy ra u = 0.

Ta cũng có : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right) = \lim \dfrac{2e^{-1/u_n^2}}{u_n^3} = 0$ Sử dụng nhận xét: nếu $x_n \to \infty, y_n \to \infty, \{y_n\}$ tăng và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \alpha < +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \alpha$, ta đi đến $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n^2 \ln n\right) = 1$, vì:

$$\lim_{n\to\infty} \left(u_n^2 \ln n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1/u_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(nu) - \ln n}{\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^4 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{2u_n e^{-1/u_n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{u_n} =$$

1

Bài toán 6(VMO1998 [4]) Cho $a \geq 1$ là một số thực, và định nghĩa dãy $x_1, x_2, \cdots$ như sau: $x_1 = a$ và

$$x_{n+1} = 1 + log\left(\frac{x_n(x_n^2 + 3)}{3x_n^2 + 1}\right).$$

Chứng minh rằng dãy trên có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải

Ta có với $x \geq 1$ thì :

$$(x-1)^3 \geq 0 => x^3 + 3x \geq 3x^2 + 1 => \frac{x(x^2+3)}{3x^2+1} \geq 1$$

$$=> 1 + log\frac{x(x^2+3)}{3x^2+1} \geq 1,$$

nên một cách quy nạp ta có mọi phần tử của dãy đều lớn hơn hoặc bằng 1, và

$$1 \leq x^2 => x^2+3 \leq 3x^2+1 => \frac{x(x^2+3)}{3x^2+1} \leq x$$

$$=> 1 + log\frac{x(x^2+3)}{3x^2+1} \leq 1 + logx \leq x$$

Do vậy dãy là đơn điệu giảm và bị chặn dưới, nên tồn tại giới hạn hữu hạn. Giới hạn x phải thỏa mãn:

$$x = 1 + log\frac{x(x^2+3)}{3x^2+1}$$

và hơn nữa bất đẳng thức thứ 2 ở trên phải xảy ra dấu bằng, tức là $x = 1$. Do vậy giới hạn bằng 1.

2.5.3. Tính giới hạn nhờ sử dụng định lý hàm số co

Bài toán 1(Đề dự bị VMO 2008 [4]) Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi: $x_1 = a$ và $x_{n+1} = ln(3 + cosxn + sinxn) - 2008$ với mọi n = 1, 2, 3, ... Chứng minh rằng dãy số x_n có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Lời giải

Đặt $f(x) = ln(3 + sinx + cosx) - 2008, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $f'(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}$ Từ đó, sử dụng đánh giá:$|\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}, \quad |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ ta suy ra:
$|f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = q < 1.$
Áp dụng định lý Lagrange cho x, y thuộc R, ta có $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$
Từ đó suy ra $|f(x) - f(y)| \leq q|x-y|$ với mọi x, y thuộc R. Suy ra $f(x))$ là hàm số co trên $\mathbb{R}$ suy ra dãy đã cho hội tụ.
Bài toán 2(VMO2000 [4]) Cho số thực $c > 2$, một dãy $x_1, x_2, \cdots$ các số thực được định nghĩa như sau: $x_1 = 0$ và $x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $x_1, x_2, \cdots$ được xác định với mọi n và có giới hạn hữu hạn.

Lời giải

Để x_1 tồn tại thì $c - \sqrt{c + x_n} \geq 0$ với mọi $x_0 \in (0, c)$ hay $c(c-1) \geq x_0$ với mọi $x_0 \in (0, c)$ suy ra $c \geq 2$.
Với $c \geq 2$ thì $0 < x_1 < \sqrt{c}$.
Nếu $0 < x_n < \sqrt{c}$ thì $c - \sqrt{c + x_n} > c - 2$, suy ra x_{n+1} tồn tại và ta cũng có $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$.
Đặt $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$ thì $f''(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{c+x}\sqrt{c - \sqrt{c+x}}$
Với mọi $x \in (0, \sqrt{(c)})$ ta có:
$(c+x)\left(c - \sqrt{c+x}\right) > c\left(c - \sqrt{c + \sqrt{c}}\right) \geq 2\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) > \frac{1}{4}$
Từ đó suy ra: $|f'(x)| \leq q < 1$ với mọi $x \in (0, \sqrt{c})$
tức $f(x)$ là hàm số co trên $(0, \sqrt{c})$, suy ra dãy số đã cho hội tụ. Vậy tất cả các giá trị c cần tìm là $c \geq 2$.

2.5.4. Phương pháp sử dụng tổng tích phân tính giới hạn

Việc tính trực tiếp tổng của dãy số cho trước để từ đó xét giới hạn không phải khi nào cũng thực hiện được. Tuy nhiên ta có thể phân tích tổng này dưới một dạng khác mà từ đó cho phép ta tính giới hạn của tổng một cách dễ dàng nhờ tích phân. Theo định nghĩa về tích phân xác định thì nếu hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn [a; b] thì với mọi phép phân hoạch π của đoạn [a; b] và mọi cách chọn các điểm $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ (i = 1, 2, ..., n) ta luôn có: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$
Trong đó: $d = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$
Như vậy biểu thức dưới dấu giới hạn chính là tổng tích phân của hàm $f(x)$ trên [a; b] ứng với một phép nhân hoặc trên [a; b] nào đó. Vậy để tính giới hạn của một tổng nhờ tích phân xác định về cơ bản ta thường tiến hành theo các bước như sau:
- Biến đổi tổng dấu giới hạn về biểu thức dạng: $S_n = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$
- Chọn được hàm $f(x)$ khả tích trong [a; b]. - Tính tích phân $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ và đó chính là giới hạn cần tìm.

Bài toán 1.
Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} P_n$ với: $P_n = \left[\left(2 + \frac{3}{5n}\right)\left(2 + \frac{28}{5n}\right)\ldots\left(2 + \frac{15n-2}{5n}\right)\right]^{\frac{3}{n}}$

Lời giải

Lấy lôgarit hai vế ta nhận được: $\ln P_n = \dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln\left(2+\frac{15i-12}{5n}\right)$

Đặt $S_n = \ln P_n$ Ta chia đoạn [2; 5] thành n phần bằng nhau với các điểm chia: $x_i = 2 + i\dfrac{3}{n}$ và chọn $\xi_i = \dfrac{4}{5}x_{i-1} + \dfrac{1}{5}x_i \in [x_{i-1}; x_i]$

Xét hàm: $f(x) = lnx$ liên tục trên [2; 5] nên nó khả tích trên đoạn đó. Do đó: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int\limits_2^5 \ln t dt = 5\ln 5 - 2\ln 2 + 3$ Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^{5\ln 5 - 2\ln 2 + 3}$

Bài toán 2.

Đặt: $S_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\sin\dfrac{\pi}{2n}} + \dfrac{1}{1+\sin\dfrac{2\pi}{2n}} + \ldots + \dfrac{1}{1+\sin\dfrac{n\pi}{2n}}\right)$

Tính: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Lời giải

Ta có: $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+\sin\dfrac{i\pi}{2n}}$

Đặt: $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin\dfrac{\pi x}{2}}, x \in [0;1]$

Từ đó: $S_n = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$

Đặt $t = 1 - x$, ta suy ra:

$f(x) = \dfrac{1}{1+\cos\dfrac{\pi t}{2}}, dx = -dt$

Do đó:

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+\cos\dfrac{\pi t}{2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\cos^2\dfrac{\pi t}{4}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\dfrac{\pi t}{4}}{\cos^2\dfrac{\pi t}{4}} = \frac{2}{\pi} tg\frac{\pi t}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Do đó: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

2.5.5. Tính giới hạn dựa vào việc giải phương trình sai phân

Bài toán 1

Cho dãy số u_n xác định bởi:

$$\begin{cases} u_{n+2} - \dfrac{2(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}u_{n+1} + \dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}u_n = \dfrac{2(n+2)}{n+3}, \forall n > 2 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = -3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\lim \dfrac{u_n}{n^2} = 1$

Lời giải

Trước hết ta tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n) bằng cách giải phương sai phân:
$u_{n+2} - \dfrac{2(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}u_{n+1} + \dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}u_n = \dfrac{2(n+2)}{n+3}, \forall n > 2(*)$
với điều kiện ban đầu: $u_1 = 0$ và $u_2 = -3$.
Nhân cả hai vế của (*) với $\dfrac{n+3}{n+2}$ ta được:
(*)

$$\Leftrightarrow \frac{n+3}{n+2}u_{n+2} - \frac{2(n+2)}{n+1}u_{n+1} + \frac{n+1}{n}u_n = 2, \forall n > 2(**)$$

Đặt $v_n = \dfrac{n+1}{n}u_n$. Khi đó ta được phương trình: $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 2, \forall n > 2(***)$ và $v_1 = 0; v_2 = -9/2$. Ta có phương trình đặc trưng:$t^2 - 2t + 1 = 0$ có nghiệm kép t=1. ta giải được: $v_n = \dfrac{13}{12} - \dfrac{15}{12}n + n^2$. Suy ra:
$u_n = \dfrac{n}{n+1}v_n = \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{13}{12} - \dfrac{15}{12}n + n^2\right) = \dfrac{13n}{2(n+1)} - \dfrac{15n^2}{2(n+1)} + \dfrac{n^3}{n+1}$ Do đó: $\lim \dfrac{u_n}{n^2} = 1$

2.5.6. Sử dụng dãy phụ để tính giới hạn

*** Sử dụng dãy con để xét sự hội tụ của dãy**

Cơ sở của phương pháp là định lý: Mọi dãy con của dãy hội tụ đều hội tụ và ngược lại :

Nếu mọi dãy con của dãy (a_n) đều hội tụ thì chúng phải hội tụ đến cùng một giới hạn a và số a đó cũng chính là giới hạn của dãy (a_n).

Như vậy: Nếu $lim x_{2n} = lim x_{2n+1} = a$ thì $lim x_n = a$.

Tổng quát: Cho số nguyên $m \geq 2$, nếu: $lim x_{mn+i} = a$, mọi i=0,1,2,...,m-1 thì $lim x_n = a$.

Bài toán 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi công thức: $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ 3x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy(x_n) hội tụ.

Lời giải

Xét dãy số (a_n) được xác định bởi: $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3}$, dễ thấy (a_n) là dãy giảm dần về 0. Ta chứng tỏ $max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq a_n$, với mọi n (1).

Thật vậy, (1) đúng với n=0 và n=1. Giả sử (1) đúng với n và chú ý rằng (a_n) là dãy số giảm nên ta có: $3x_{2n+2} = x_{2n} + x_{2n+1} \leq 2a_n$ suy ra $x_{2n+2} \leq a_{n+1}$

$3x_{2n+3} = x_{2n+1} + x_{2n+2} \leq a_n + a_{n+1} \leq 2a_n$ suy ra $x_{2n+3} \leq a_{n+1}$.

Như vậy (1) đúng với n+1, theo nguyên lí quy nạp thì (1) được chứng minh. Dễ thấy $x_n > 0$ với mọi n , và từ (1) theo nguyên lý kẹp có $lim x_{2n} = lim_{2n+1} = 0$ suy ra $lim x_n = 0$.

*** Nhận xét:** Lời giải trên đã đưa vào dãy phụ a_n có tác dụng chặn cả hai dãy con dạng x_{2n}, x_{2n+1} và làm cho chúng cùng hội tụ về một điểm.

Tiếp tục phương pháp đó ta xét bài toán sau:

Bài toán 2.

Cho dãy số (x_n) xác định bởi công thức: $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ 3x_{n+2} = x_n^2 + x_{n+1}^2 \end{cases}$ Chứng minh rằng dãy(x_n) hội tụ.

Lời giải

Ta xây dựng dãy (a_n) như sau: $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2{a_n}^2}{3}$, dễ thấy (a_n) là dãy giảm dần về 0. Tương tự như bài toán 1 ta chứng minh được:

$max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq a_n$, với mọi n.

Dễ thấy $x_n > 0$,với mọi n, và từ (1) theo nguyên lý kẹp có $lim x_{2n} = lim_{2n+1} = 0$ suy ra $lim x_n = 0$.

Nhận xét: Cách cho công thức truy hồi của hai dãy là khác nhau nhưng lại cùng chung cách giải quyết và ta có thể tổng quát hoá cho lớp bài toán mà tác giả sẽ dẫn ra sau:

Bài toán 3.

Cho dãy số (x_n) xác định bởi công thức: $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ 3x_{3n+2} = x_{3n}^2 + x_{3n+1}^2 \end{cases}$ Chứng minh rằng dãy(x_n) hội tụ.

Lời giải

Ta xây dựng dãy (a_n) như sau:$a_0 = max\{x_0, x_1, x_2\}, a_{n+1} = \dfrac{2{a_n}^2}{3}$, dễ thấy (a_n) là dãy giảm dần về 0. Ta chứng minh:$max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \le a_n$, với mọi n. (3)
Thật vậy, (3) đúng với n=0 và n=1,2. Giả sử (1) đúng với n và chú ý rằng (a_n) là dãy số giảm nên ta có:

$$\begin{aligned}
&3x_{3n+3} = x_{3n}^2 + x_{3n+2}^2 \le 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+3} \le a_{n+1};\\
&3x_{3n+4} = x_{3n+1}^2 + x_{3n+3}^2 \le a_n^2 + a_{n+1}^2 \le 2a_n^2\\
&\Rightarrow x_{3n+4} \le a_{n+1}\\
&3x_{3n+5} = x_{3n+2}^2 + x_{3n+4}^2 \le a_n^2 + a_{n+1}^2 \le 2a_n^2\\
&\Rightarrow x_{3n+5} \le a_{n+1}
\end{aligned}$$

Như vậy (3) đúng với n+1, theo nguyên lí quy nạp thì (3) được chứng minh. Dễ thấy $x_n > 0$ với mọi n , và từ (1) theo nguyên lý kẹp có $lim x_{3n} = lim_{3n+1} = lim_{3n+2} = 0$ suy ra $lim x_n = 0$.
Ba bài toán trên ta sử dụng các dãy con dạng $(x_{2k+i}), i = 1,2$ và $(x_{3k+i}), i = 1,2,3$.
Sau đây ta xét một bài toán có sử dụng đến dãy con dạng $(x_{4k+i}), i = 1,2,3,4$:
Bài toán 4(VMO-2008 [4])
Cho dãy số thực (x_n) được xác định như sau:
$x_1 = 0, x_2 = 2$ và $x_{n+2} = 2^{-x_n} + \dfrac{1}{2}$ với mọi n=1,2,3,...
Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}$, xác định trên $\mathbb{R}$.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$,ta có $x_{n+4} = f(x_{n+2}) = f(f(x_n))$ hay $x_{n+4} = g(x_n)$, trong đó g là hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ (1)
Dễ thấy, hàm số f giảm trên $\mathbb{R}$; do đó hàm số g tăng trên $\mathbb{R}$. Vì thế từ (1) suy ra: với mỗi $k \in 1;2;3;4$, dãy $(x_{4n+k}), n \in \mathbb{N}$, là dãy đơn điệu. hơn nữa, từ cách xác định dãy (x_n) dễ thấy $0 \le x_n \le 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. do đó, với mỗi $k \in 1;2;3;4$ dãy (x_{4n+k}) là dãy hội tụ.
Với mỗi $k \in 1;2;3;4$ đặt $x_{4n+k} = a_k$. Ta có $0 \le a_k \le 2$. hơn nữa, do hàm số g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (1) suy ra $g(a_k) = a_k$ (2)

Xét hàm số $h(x) = g(x) - x$ trên $[0;2]$. Dễ chứng minh được hàm số h giảm trên $[0;2]$. Vì thế có không quá một điểm $x \in [0;2]$, sao cho $h(x) = 0$ hay $g(x) = x$. Mà $g(1) = 1$, nên từ (2) ta được $a_k = 1, \forall k \in 1;2;3;4$. từ đây, vì dãy (x_n) là hợp của bốn dãy con x_{4n+k} nên dãy (x_n) hội tụ và $lim x_n = 1$

***Nhận xét:** Như vậy các bài toán trên đều giải được bằng cách xét các dãy phụ, từ các dãy phụ này ta có thể tạo ra một lớp các bài tập tương tự như sau:

Chứng minh rằng các dãy số dương (x_n) cho bởi các công thức sau đều hội tụ về 0 với x_0, x_1, x_2, x_3 đều thuộc khoảng (0;1):

$$1) 3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+1}x_{n+2};$$
$$2) 3x_{n+3} = x_n^2 + x_n x_{n+1}$$
$$3) 3x_{n+3} = \frac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2} + x_{n+1}^2$$
$$4) 3x_{n+3} = \frac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2} + x_n x_{n+1}$$

*** Sử dụng dãy số phụ để tính giới hạn.**

Nhận xét: Qua các phương pháp trên ta đã thấy: Khi khảo sát sự hội tụ của một dãy số ta thường định lí về dãy đơn điệu và bị chặn. Nếu dãy không đơn điệu thì có thể thử xét dãy với chỉ số chẵn và dãy với chỉ số lẻ. Tuy nhiên, có những dãy số có "hành vi" phức tạp hơn nhiều. Chúng tăng giảm rất bất thường. Trong một số trường hợp như thế, ta có thể xây dựng một (hoặc hai) dãy số phụ đơn điệu, chứng minh các dãy số phụ có giới hạn và sau đó chứng minh dãy số ban đầu có cùng giới hạn. Tất nhiên, dãy số phụ phải được xây dựng từ dãy số chính.

Bài toán 1 Dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + a_{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Xét hai dãy (M_n) và (m_n) với:

$$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$$

$$m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$$

Ta chứng minh (M_n) là dãy số giảm (m_n) là dãy số tăng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh: $a_{n+4} \leq \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$. Suy ra $M_{n+1} = a_{n+1}$ hoặc a_{n+2} hoặc a_{n+3} và rõ ràng khi đó $M_n = max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \geq M_{n+1}$.

Thật vậy, nếu $a_{n+4} \geq a_{n+3}$ thì $\dfrac{2}{a_{n+3}+a_{n+2}} \geq a_{n+3}$ suy ra $2 \geq (a_{n+3}+a_{n+2})a_{n+3}$.

Khi đó $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_{n+3}} a_{n+2} = \frac{2}{a_{n+3}} - \frac{2}{(a_{n+2}+a_{n+3})} - a_{n+2} + a_{n+4} = \frac{2a_{n+2}}{(a_{n+3}+a_{n+2})a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4} \geq a_{n+4}$. Suy ra đpcm.

Vậy ta chứng minh được dãy (M_n) giảm. Tương tự dãy (m_n) tăng. Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ. Cuối cùng, ta chỉ còn cần chứng minh hai giới hạn bằng nhau.

Bài toán 2. Dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

Lời giải

Xét dãy số (M_n) với $M_n = max\{a_n, a_{n+1}, 4\}$

Nếu $M_n = 4$ thì $a_n, a_{n+1} \leq 4$, suy ra $a_{n+2} \leq 4$, từ đó $M_{n+1} = 4$.

Nếu $M_n = a_{n+1}$ thì $a_{n+1} \geq a_n, an+1 \geq 4$. Khi đó:

$\sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1} - \sqrt{a_n} \geq \sqrt{a_{n+1}}$, suy ra:

$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1}$. Do đó $M_{n+1} = a_{n+1}$.

Nếu $M_n = a_n$ thì $a_n \geq a_{n+1}, a_n \geq 4$. Khi đó $a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{2a_n}$. Suy ra $M_{n+1} \leq a_n = M_n$.

Vậy trong mọi trường hợp $M_{n+1} \leq Mn$, tức là dãy (M_n) là dãy số giảm. Do (M_n)bị chặn dưới bởi 4 nên dãy này có giới hạn. Ta chứng minh giới hạn này bằng 4.

Thật vậy, giả sử giới hạn là M > 4. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ thì $M - \varepsilon < Mn < M + \varepsilon$. Chọn $n \in \mathbb{N}$ sao cho $M_{n+2} = a_{n+2}$ (theo các lập luận ở trên và do M > 4 thì tồn tại chỉ số n như vậy. Ta có: $M - \varepsilon < M_{n+2} = a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} < 2\sqrt{M+\varepsilon}$ hay $M(M-4) - \varepsilon(2M+4-\varepsilon) < 0$.

Mâu thuẫn vì M > 4 và ε có thể chọn nhỏ tuỳ ý.

Bài toán 3.(VMO-1992 [4]) Cho các số dương a, b, c và 3 dãy số $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ được xác định như sau:

1) $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$.

2) $a_{k+1} = a_k + \dfrac{2}{b_k + c_k}; b_{k+1} = b_k + \dfrac{2}{c_k + a_k}\ c_{k+1} = c_k + \dfrac{2}{a_k + b_k}; \forall k \neq 0$.

Chứng minh rằng a_k dần tới vô hạn khi k dần tới vô hạn.

Lời giải

Với mỗi $k \geq 0$, đặt:
$M_k = \max\{a_k, b_k, c_k\}$ và $m_k = \min\{a_k, b_k, c_k\}$
Từ giả thiết bài toán, suy ra $\{M_k\}$ và $\{m_k\}$ là dãy các số dương.
Ta sẽ chứng minh rằng: $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$ (5)
và từ đây sẽ suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$
Để chứng minh (5), ta sẽ chứng minh rằng:
$\lim\limits_{k\to\infty} M_k = \infty$ và $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{M_k}{m_k} = p \in R$
a) Xét $\{M_k\}$.Từ giả thiết (2), ta có :
$a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 + c_{k+1}^2 > a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + 4\left(\dfrac{a_k}{b_k+c_k} + \dfrac{b_k}{c_k+a_k} + \dfrac{c_k}{a_k+b_k}\right) \geq a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + 6$
Suy ra $\forall k \geq 1$, ta có :
$a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 > 6k \to M_k^2 > 2k \to M_k > \sqrt{2k} \to \lim\limits_{k\to\infty} M_k = \infty$ (6)
b) Xét dãy $\left\{\dfrac{M_k}{m_k}\right\}$
Từ giả thiết (6), dễ thấy $\forall k \geq 0$ $m_{k+1} \geq m_k + \frac{1}{M_k}$ và $M_{k+1} \geq M_k + \frac{1}{m_k}$
Suy ra: $M_{k+1} + m_k \leq \left(M_k + \dfrac{1}{m_k}\right) m_k = M_k m_k + 1 = M_k\left(m_k + \dfrac{1}{M_k}\right) \leq$
$\leq M_k m_{k+1} \to \dfrac{M_{k+1}}{m_{k+1}} \leq \dfrac{M_k}{m_k}$
Do $\dfrac{M_k}{m_k} \geq 1, \forall k \geq 0$ nên dãy $\left\{\dfrac{M_k}{m_k}\right\}$ là dãy không tăng và bị chặn dưới bởi -1. Vì vậy, tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_k}{m_k} = p, p \in \mathbb{R}$ (7)
Từ (6) và (7) suy ra điều phải chứng minh.

2.5.7. Giới hạn của dãy sinh bởi phương trình

Nhận xét:*Trong toán học, có rất nhiều trường hợp ta không xác định được giá trị cụ thể đối tượng mà chúng ta đang xét (ví dụ số, hàm số) nhưng vẫn có thể thực hiện các phép toán trên các đối tượng đó. Ví dụ ta có thể không biết giá trị các nghiệm của một phương trình, nhưng vẫn biết được tổng của chúng, tìm được giới hạn của dãy các nghiệm...*

Bài toán 1. Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình:
$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \ldots + \dfrac{1}{x-n} = 0$ thuộc khoảng (0, 1)

a) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

b) Hãy tìm giới hạn đó.

Nhận xét: x_n được xác định duy nhất vì hàm số $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \ldots + \dfrac{1}{x-n} = 0$ liên tục và đơn điệu trên (0, 1). Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của x_n. Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của x_n, ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Với tính bị chặn, mọi thứ đều ổn vì $0 < x_n < 1$. Với tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$:

$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{x-n-1}$. Đây chính là chìa khoá để chứng minh tính đơn điệu của x_n.

Lời giải

Rõ ràng x_n được xác định một cách duy nhất, $0 < x_n < 1$. Ta có:

$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{x-n-1} = \dfrac{1}{x-n-1} < 0$, trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$.

Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số $\{x_n\}$ giảm.

Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n > ln(n)$

(Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá $ln(1 + 1/n) < 1/n$)) Thật vậy, giả sử $lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy số giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n.

Do $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có:

$1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n > 1/a$.

Khi đó với $n \geq N$ ta có:

$0 = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_n - 1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n - n} < \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{-1} + \dfrac{1}{-2} + \ldots + \dfrac{1}{-n} < \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a} = 0$.Mâu thuẫn.

Vậy ta phải có $lim x_n = 0$.

Bài toán 2. ***(VMO 2002)[4]*** Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình: $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{4x-1} + \ldots + \dfrac{1}{n^2x-1} = \dfrac{1}{2}$

có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$. Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4.

Nhận xét: Việc chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất $x_n > 1$ là hiển nhiên. Mối liên hệ $f_{n+1}(x) = f_n(x) + 1/((n+1)2x-1)$ cho thấy $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

(ở đây $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \ldots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$).

Đề bài cho sẵn giới hạn của x_n là 4 đã làm cho bài toán trở nên dễ hơn nhiều. Ta sẽ dùng định lý Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa x_n và 4. Để làm điều này, ta cần tính $f_n(4)$, với $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \ldots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$. Rất may mắn, bài tính fn(4) này liên quan đến 1 dạng tổng quen thuộc.

Lời giải

Đặt $f_n(x)$ như trên và gọi $x_n$là nghiệm > 1 duy nhất của phương trình $f_n(x) = 0$. Ta có

$$f_n(4) = \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có: $1/4n = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'(c)||x_n - 4|$ với c thuộc $(x_n, 4)$ Nhưng do:$|f_n{}'(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \ldots > \frac{1}{9}$ Nên từ đây $|x_n - 4| < 9/4n$, suy ra $lim x_n = 4$.

Nhận xét: Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng định lý Lagrange để đánh giá hiệu số giữa x_n và giá trị giới hạn.

Bình luận:Từ hai bài toán trên ta có thể rút ra cách xây dựng dãy hội tụ từ phương trình:

Xét một họ phương trình $F(n,x) = 0$. Nếu với mỗi n, phương trình $F(n,x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên một miền D nào đó thì dãy số x_n được xác định. Từ mối liên hệ giữa các hàm $F(n,x)$, dãy số này có thể có những tính chất rất thú vị

Ví dụ 1. Với mỗi số tự nhiên $n \geq 3$, gọi x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x^n - x^2 - x - 1 = 0$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} = 1$ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} [n(x_n - 1)]$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-4} + \ldots + \frac{2}{x-n^2} = 0$$

có nghiệm duy nhất x_n thuộc khoảng (0, 1). Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Để tạo ra các phương trình có nghiệm duy nhất trên một khoảng nào đó, có thể sử

dụng tổng của các hàm đơn điệu. Riêng với hàm đa thức ta có thể sử dụng quy tắc Đề-các về số nghiệm dương của phương trình. Nếu dãy các hệ số của phương trình đổi dấu k lần thì phương trình có không quá k nghiệm dương.
Ví dụ phương trình $x^4-x^2-nx-1=0$ có nghiệm dương duy nhất x_0, còn phương trình $x^4-x^2+nx-1=0$ có nhiều nhất hai nghiệm dương.
Khi xây dựng các hàm $F(n,x)$, có thể sử dụng công thức truy hồi. Như trong ví dụ trên thì: $F(n+1,x)=F(n,x)+\frac{1}{(x-n-1)}$. Xây dựng $F(n,x)$ kiểu này, dãy nghiệm xn sẽ dễ có những quy luật thú vị hơn. Ví dụ, với dãy số trên, ta có:
$F(n+1,x)=F(n,x)+\dfrac{1}{(x_n-n-1)}<0$. Từ đây, do $F(n+1,0^+)=\infty$ ta suy ra x_{n+1} nằm giữa 0 và x_n, tức dãy (x_n) giảm.

Ví dụ 3 (VMO 2002- Ngày thứ hai)
Xét phương trình: $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-4}+\ldots+\dfrac{1}{x-k^2}+\ldots+\dfrac{1}{x-n^2}=0$
Trong đó n là tham số nguyên dương.
1) CMR với mỗi số nguyên dương n, phương trình nêu trên có duy nhất nghiệm trong khoảng (0;1), ký hiệu nghiệm đó là x_n.
2) CMR dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$

Ví dụ 4. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n=x+1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n.
Chứng minh rằng x_n dần về 1 khi n dần đến vô cùng và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-1)$.

Ví dụ 5 (VMO 2007). Cho số thực $a>2$ và $f_n(x)=a^{10}x^{n+10}+x^n+\ldots+x+1$
a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình $f_n(x)$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất
b) Gọi nghiệm đó là x_n, chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

2.5.8. Giới hạn của dãy tổng

Bài toán: Tìm giới hạn các dãy có dạng tổng:$\sum\limits_1^n\dfrac{1}{x_i}$ hoặc $\sum\limits_1^n\dfrac{1}{x_i^2}$,...Trong đó dãy x_n cho trước bởi hệ thức truy hồi
Để tiến hành giải bài toán ta làm theo các bước sau:
Bước 1: Chỉ ra rằng: $\lim x_n=+\infty$

Bước 2: Tính $\sum_1^n \frac{1}{x_i}, \sum_1^n \frac{1}{x_i^2}$,... (Tùy thược vào đề bài)

Bước 3: Tính $\lim \sum_1^n \frac{1}{x_i}, \lim \sum_1^n \frac{1}{x_i^2}$

Bài toán 1. Cho dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, n = 1, 2...$ Tìm $\lim \sum_1^n \frac{1}{u_i}$

Lời giải

Do $u_1 = 2 > 1$ và $u_{n+1} = u_n + (u_n - 1)^2, n = 1, 2...$ nên $1 < 2 = u_1 < u_2 < u_3 <$ ....Tức là dãy (u_n) là dãy tăng.

Ta chứng minh dãy (u_n) không bị chặn trên. Thật vậy, nếu dãy (u_n) bị chặn trên thì (u_n) hội tụ, giả sử $limu_n = a(a > 1)$. Khi đó ta được phương trình:

$a = a + (a-1)^2 \Leftrightarrow a = 1$ (mâu thuẫn). Từ đó suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Bây giờ ta đi xét hệ thức truy hồi:

$u_{i+1} - 1 = u_i(u_i - 1) \Rightarrow \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_i - 1} - \frac{1}{u_{i+1} - 1}, i = 1, 2, ...$ suy ra: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \to 1$ khi $n \to +\infty$.

Vậy $\lim \sum_1^n \frac{1}{x_i} = 1$

Bài toán 2.(VMO 2009)

Cho dãy (x_n) được xác định bởi:$x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}$, n=1,2...

Chứng minh rằng dãy (y_n) (n=1,2,...) với $y_n = \sum_1^n \frac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Từ giả thiết ta thấy $x_n > 0, \forall x \geq 1$.

Ta có: $x_n - x_{n-1}$=$\frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1}$

=$\frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}}{2}$=$\frac{2x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n+1}} > 0, \forall n \geq 2$.

Do đó (x_n) là dãy tăng. Giả sử $limx_n = a$ suy ra a>0 và $a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0$ (vô lí). Vậy $limx_n = +\infty$

Từ $x_n = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}, \forall n \geq 2.$

suy ra:$x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1}$ suy ra: $\dfrac{1}{x_n^2} = \dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_n}, \forall n \geq 2.$

Suy ra: $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} = \dfrac{1}{x_1^2} + \left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right) + \left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_n} = 6 - \dfrac{1}{x_n}, \forall n \geq 2.$

Do đó:$lim y_n = 6.$

Bài toán 3.

Cho dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2010$ và thỏa mãn điều kiện:

$u_n^2 + 2009u_n - 2011u_{n+1} + 1 = 0$, với mọi $n \in \mathbb{Z}^*$.

Đặt $S_n = \dfrac{1}{u_1 + 2010} + \dfrac{1}{u_2 + 2010} + \ldots + \dfrac{1}{u_n + 2010}.$

Tính giới hạn của S_n khi n dần đến vô cùng.

Lời giải

Từ điều kiện:$u_n^2 + 2009u_n - 2011u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2 + 2009u_n + 1}{2011} \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \dfrac{{u_n}^2 + 2009u_n + 1}{2011} - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n - 1)(u_n + 2010)}{2011} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n + 2010} = \dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$. Khai triển và ước lượng ta có: $S_n = \dfrac{1}{u_1 + 2010} + \dfrac{1}{u_2 + 2010} + \ldots + \dfrac{1}{u_n + 2010} = \dfrac{1}{u_1 - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$

Mặt khác ta có:$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2010} \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z}^*$ suy ra dãy số:(u_n) tăng suy ra: $2010 = u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n$. Giả sử a là giới hạn của dãy, theo điều kiện ta có: $a^2 + 2009a - 2011a + 1 = 0$ suy ra a=1<2010 (Vô lý). Vậy $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$. Do đó: $\lim S_n = \dfrac{1}{u_1 - 1} = \dfrac{1}{2009}$

Bài tập đề nghị:

1. Cho dãy (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + 1\right), n = 1, 2, \ldots$

Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k + 1}$.Tìm phần nguyên $[S_{2011}]$ và tính $lim S_n$.

2. Cho dãy (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 3$ và $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4, n = 1, 2, \ldots$

Đặt $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k - 1}$. Tính $lim y_n$.

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày và đã thu được:

- Một số lớp các bài toán về dãy số (Thường trong các đề thi học sinh giỏi quốc tế và thi học sinh giỏi ở các nước).
- Các bài toán đã được phân dạng theo chủ đề
- Một số bài toán đã được phát triển dựa theo phương pháp giải của bài toán đó.

Một số hướng nghiên cứu có thể phát triển từ đề tài này là:

Dựa theo sự phân ra thành các lớp bài tập như trên, tiếp tục phát triển các bài toán khác.

Vì thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự quan tâm, đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải , *Các bài toán về dãy số*, NXBGD, 2007

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXBGD, 2007.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề chọn lọc Dãy số và áp dụng*, NXBGD, 2008.

[4] *Các bài thi Olympic toán THPT Việt Nam 1990-2006*, NXBGG, 2007.

[5] *IMO shortlist 1996-2008*, accessed March, 2003

[6] *IMO 1959-2002*, accessed March, 2003

[7] *IMO longlist 1996-2002*, accessed March, 2003

[8] Titu Andresscu, Zuming Feng, *Contests Around the World 1995-2001*, The Mathematical Assosiation of America, 2001.

[9] *USAMO 1996-2002*, accessed March, 2003

[10] *Romanian Mathematical Olympiad 1996-2002*, accessed March, 2003.

[11] *The Putnam Mathematical*.