BARBECUE

Nguồn: AtCoder Grand Contest 001 - Problem E

https://atcoder.jp/contests/agc001/tasks/agc001_e

Nếu ta chọn thùng i và thùng j, sẽ có a_i+a_j miếng thịt và a_i+a_j miếng ớt nên sẽ có $f(a_i+a_j, b_i+b_j)$ với $f(x,y) = \frac{(x+y)!}{x!y!}$ (tương đương với số cách sắp xếp x viên bi màu xanh và y viên bi màu đỏ trên cùng một hàng).

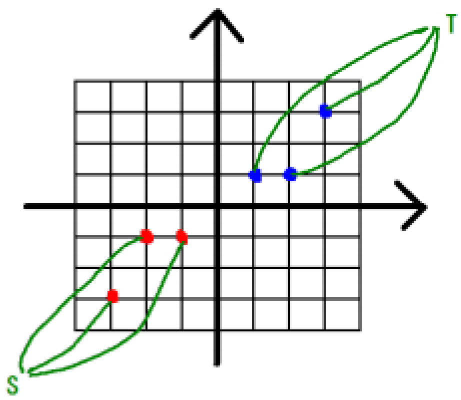
Đáp án cần tìm là giá trị biểu thức sau:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1\le i<j\le n} f(a_i+a_j, b_i+b_j) \\ &= \frac{\sum_{1\le i,j\le n} f(a_i+a_j, b_i+b_j) - \sum_{1\le i\le n} f(2a_i, 2b_i)}{2} \end{aligned}$$

Nhận xét rằng $f(x,y)$ cũng là số cách để đi từ ô $(0,0)$ đến ô (x,y) trong một lưới ô vuông mà chỉ được đi sang phải hoặc lên trên. Tương tự, $f(a_i+a_j, b_i+b_j)$ là số cách để đi từ ô $(-a_i, -b_i)$ đến ô (a_j, b_j).

Như vậy, giá trị $\sum_{1\le i,j\le n} f(a_i+a_j, b_i+b_j)$ chính là đáp án của bài toán sau:

Cho n điểm đỏ nằm ở góc phần tư thứ III và n điểm xanh nằm ở góc phần tư thứ I. Đếm số cách đi từ một điểm đỏ bất kỳ đến một điểm xanh bất kỳ (số cách đi từ S đến T trong hình vẽ dưới đây).



Có thể giải bài toán này bằng thuật toán quy hoạch động. Gọi $dp(x,y)$ là số cách đi từ một điểm đỏ bất kì đến ô (x,y). Ta có: $dp(x,y) = dp(x-1,y) + dp(x,y-1) + cnt(x,y)$ với $cnt(x,y)$ là số điểm đỏ ở ô (x,y). Khi đó, ta chỉ việc tính tổng $\sum_{i=1}^{n} dp(a_i, b_i)$.

Gọi đáp số của bài toán trên là X, thì ta có:

$$S = \frac{X - \sum_{1\le i\le n} f(2a_i, 2b_i)}{2}$$

Việc tính nghịch đảo modulo của 2 cho $10^9 + 7$ có thể được thực hiện nhờ định lí Euler (tham khảo thêm tại: `http://vnoi.info/wiki/algo/math/modular-inverse`).

Độ phức tạp: $O(n + x^2)$ với x là giới hạn a_i và b_i tối đa.

Tag: Combinatorics, DP