

TREASURE

Nguồn: Lấy ý tưởng từ bài E của Kyoto University Programming Contest 2017

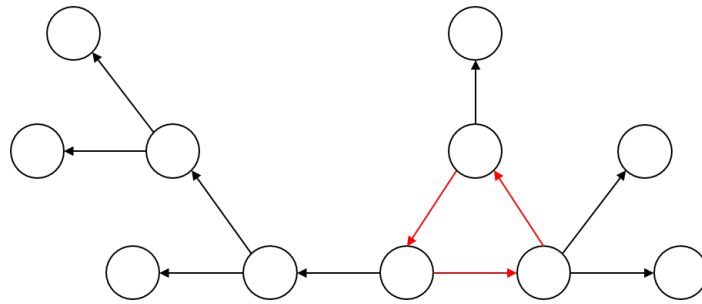
https://kupc2017.contest.atcoder.jp/tasks/kupc2017_e

Trước hết, ta xét bài toán tìm cách mở rương tối ưu với đầy đủ K chìa khoá.

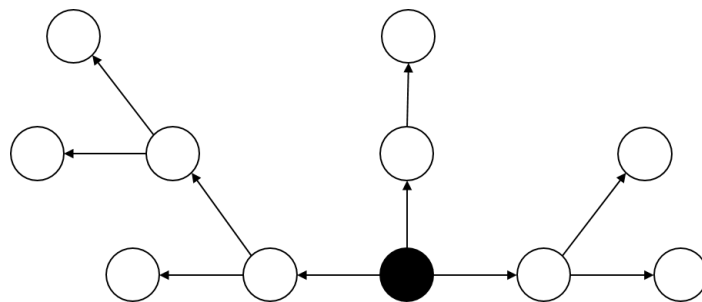
Ta cần xây dựng một đồ thị N đỉnh, với đỉnh i đại diện cho chiếc rương thứ i . Với chìa khóa thứ i , ta thêm cạnh giữa đỉnh A_i và đỉnh B_i . Ta xem việc dùng chìa khóa thứ i mở rương A_i hay B_i tương đương với việc định chiều cạnh i . Khi đó, chiếc rương thứ i sẽ được mở nếu ít nhất một cạnh đi vào đỉnh i .

Khi đó, xét từng thành phần liên thông (TPLT):

- Nếu TPLT có tồn tại chu trình p_1, p_2, \dots, p_k , thì ta có thể định hướng các cạnh trong chu trình theo chiều $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 \rightarrow \dots \rightarrow p_k \rightarrow p_1$. Sau đó, ta dùng một thuật toán DFS, xuất phát từ các đỉnh trong chu trình, và khi ta thăm đỉnh v từ đỉnh u thì định hướng cạnh $u \rightarrow v$. Khi đó, các đỉnh trong TPLT đều có ít nhất một cạnh đi vào.



- Nếu TPLT hiện tại không có chu trình, ta xuất phát từ đỉnh đại diện cho kho báu có giá trị thấp nhất trong TPLT (gọi đỉnh này là r) và thực hiện thuật toán DFS tương tự như trên. Khi đó, các đỉnh trong TPLT trừ r đều có ít nhất một cạnh đi vào.



Do đó, đáp án sẽ là tổng giá trị các kho báu trừ đi tổng giá trị nhỏ nhất của các kho báu trong mỗi TPLT.

Ta trở lại với bài toán ban đầu. Thao tác xóa chìa khóa tương ứng với việc xóa cạnh trong đồ thị. Ta sẽ thực hiện các truy vấn theo thứ tự ngược lại: ban đầu, đồ thị không có cạnh nào, và mỗi truy vấn sẽ thêm một cạnh vào đồ thị.

Free Contest 99

Khi đó, ta có thể giải quyết bài toán bằng disjoint-set union (DSU). Với mỗi thành phần liên thông, ta sẽ lưu thêm thông tin về đỉnh có giá trị nhỏ nhất trong TPLT, và TPLT đó có chu trình hay không. Các bạn có thể xem bài giải mẫu để hiểu rõ hơn chi tiết cài đặt.

Độ phức tạp: $O(N + K \log K)$ hoặc $O(N + K\alpha(K))$ (với $\alpha(K)$ là nghịch đảo hàm Ackermann, có thể xem như hằng số), tùy vào cách cài đặt DSU.

Tag: DSU, Greedy
