NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ
VÀ
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

8.10t

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ
và
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

GIÁO TRÌNH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KĨ THUẬT

(Tái bản lần thứ mười một)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Chương trình môn toán ở trường phổ thông đã có nhiều thay đổi từ khi Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành chương trình cải cách giáo dục. Bộ giáo trình Toán học cao cấp dùng cho các trường đại học kĩ thuật này được viết vừa nhằm thích ứng với sự thay đổi đó ở trường phổ thông, vừa nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy toán ở trường đại học.

Toán học cao cấp là một môn học khó mà sinh viên các trường đại học kĩ thuật phải học trong ba học kì đầu, bao gồm những vấn đề cơ bản của đại số và giải tích toán học, đóng vai trò then chốt trong việc rèn luyện tư duy khoa học, cung cấp công cụ toán học để sinh viên học các môn học khác ở bậc đại học và xây dựng tiềm lực để tiếp tục tự học sau này.

Khi viết bộ sách này chúng tôi rất chú ý đến mối quan hệ giữa lí thuyết và bài tập. Đối với người học toán, hiểu sâu sắc lí thuyết phải vận dụng được thành thạo các phương pháp cơ bản, các kết quả cơ bản của lí thuyết trong giải toán, làm bài tập và trong quá trình làm bài tập người học hiểu lí thuyết sâu sắc hơn. Các khái niệm cơ bản của đại số và giải tích toán học được trình bày một cách chính xác với nhiều ví dụ minh hoạ. Phần lớn các định lí được chứng minh đầy đủ. Cán bộ giảng dạy, tuỳ theo quỹ thời gian của mình, có thể hướng dẫn cho sinh viên tự đọc một số phần, một số chứng minh. Cuối mỗi chương đều có phần tóm tắt với các định nghĩa chính, các định lí và các công thức chủ yếu và phần bài tập đã được chọn lọc kĩ, kèm theo đáp số và gợi ý.

Bộ sách được viết thành 3 tập :

- Tập 1 : Đại số và hình học giải tích.
- Tập 2 : Phép tính giải tích một biến số.
- Tập 3 : Phép tính giải tích nhiều biến số.

Bộ sách là công trình tập thể của nhóm tác giả gồm ba người : Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh và Nguyễn Hồ Quỳnh. Ông Tạ Văn Đĩnh phụ trách viết tập 1. Ông Nguyễn Hồ Quỳnh phụ trách viết 7 chương đầu của tập 2. Ông Nguyễn Đình Trí phụ trách viết chương 8 của tập 2 và toàn bộ tập 3. Cùng với bộ giáo trình này chúng tôi cũng viết 3 tập Bài tập Toán cao cấp nhằm hỗ trợ các bạn đọc cần lời giải chi tiết của những bài tập đã ra trong bộ giáo trình này.

Viết bộ giáo trình này, chúng tôi đã tham khảo kinh nghiệm của nhiều đồng nghiệp đã giảng dạy môn Toán học cao cấp nhiều năm ở nhiều trường đại học. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các nhà giáo, các nhà khoa học đã đọc bản thảo và đóng góp nhiều ý kiến xác đáng.

Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục về việc xuất bản bộ giáo trình này, cảm ơn các biên tập viên Nguyễn Trọng Bá, Phạm Bảo Khuê, Phạm Phu, Nguyễn Văn Thường của Nhà xuất bản Giáo dục đã làm việc tận tình và khẩn trương.

Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến nhận xét của bạn đọc đối với bộ giáo trình này.

Các tác giả

Chương I

TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

1.0. MỞ ĐẦU

1.0.1. Khái niệm về mệnh đề toán học

Ta hiểu mệnh đề toán học như là một *khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai*, không thể nhập nhằng, nghĩa là không thể vừa đúng vừa sai, cũng không thể vừa không đúng vừa không sai.

Thí dụ 1.0.1.

$2 < 3$ là một mệnh đề toán học đúng

$3 > 4$ là một mệnh đề toán học sai

1.0.2. Kí hiệu ⇒

Khi với giả thiết mệnh đề A đúng ta chứng minh được mệnh đề B cũng đúng thì ta nói từ *mệnh đề A suy ra mệnh đề B*, hay *mệnh đề A kéo theo mệnh đề B*. Để diễn đạt ý đó ta viết gọn là

$$A \Rightarrow B$$

Đôi khi ta còn viết $\qquad B \Leftarrow A$

Thí dụ 1.0.2. $\qquad (a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$

1.0.3. Kí hiệu ⇔

Khi $A \Rightarrow B$ đồng thời $B \Rightarrow A$, thì ta nói mệnh đề A *tương đương* mệnh đề B. Để diễn đạt ý đó ta viết gọn là

$$A \Leftrightarrow B$$

Thí dụ 1.0.3. $\qquad (a < b) \Leftrightarrow (b > a)$

$$(|a| < b) \Leftrightarrow (-b < a < b)$$

1.0.4. Điều kiện đủ, điều kiện cần, điều kiện cần và đủ

Khi $A \Rightarrow B$ ta nói A là *điều kiện đủ* để có B

B là *điều kiện cần* để có A

Khi $A \Leftrightarrow B$ tức $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$, ta nói A là *điều kiện cần và đủ* để có B. Lúc đó B cũng là điều kiện cần và đủ để có A.

Thí dụ 1.0.4. Rõ ràng

$(|a| < b) \Rightarrow (b > 0)$, nhưng từ $b > 0$ không suy ra được $|a| < b$.

Vậy $|a| < b$ là điều kiện đủ để có $b > 0$,

$b > 0$ là điều kiện cần để có $|a| < b$,

$|a| < b$ không phải là điều kiện cần và đủ để có $b > 0$.

1.0.5. Kí hiệu :=

Kí hiệu này dùng để đưa vào một định nghĩa, nó thay cho cụm từ "định nghĩa bởi".

Thí dụ 1.0.5. Đường tròn := Quỹ tích của các điểm trong mặt phẳng cách đều một điểm xác định.

1.0.6. Kí hiệu ∀

Kí hiệu này thay cho cụm từ "với mọi" hay "với bất kì".

Thí dụ 1.0.6. $\forall x$ thực ta có $x^2 - x + 1 > 0$.

1.0.7. Kí hiệu ∃

Kí hiệu này thay cho cụm từ "tồn tại" hay là "có".

Thí dụ 1.0.7. $\exists x$ để $x^2 - 3x + 2 = 0$, đó là $x = 1$ và $x = 2$.

BÀI TẬP : 1.1.

1.1. TẬP HỢP VÀ PHẦN TỬ

1.1.1. Khái niệm về tập hợp và phần tử

Khái niệm tập hợp và phần tử không thể định nghĩa bằng những khái niệm đã biết. Ta coi tập hợp là khái niệm nguyên sơ, không định nghĩa. Tuy nhiên ta có thể nói như sau :

Tất cả những đối tượng xác định nào đó hợp lại tạo thành một *tập hợp*, mỗi đối tượng cấu thành tập hợp là một *phần tử* của tập hợp.

Thí dụ 1.1.1. Tất cả những người Việt Nam trên thế giới tạo thành tập hợp người Việt Nam. Mỗi người Việt Nam là một phần tử của tập hợp đó.

Thí dụ 1.1.2. Tất cả các điểm trong không gian tạo thành tập hợp điểm trong không gian. Mỗi điểm là một phần tử của tập hợp đó.

Thí dụ 1.1.3. Tất cả các đường thẳng trong không gian tạo thành tập hợp các đường thẳng trong không gian. Mỗi đường thẳng là một phần tử của tập hợp đó.

1.1.2. Khái niệm thuộc và kí hiệu $\in$

Nếu a là phần tử của tập hợp E ta nói "a thuộc E" và viết

$$a \in E$$

Nếu a không là phần tử của E ta nói "a không thuộc E" và viết

$$a \notin E \text{ hay } a \,\overline{\in}\, E.$$

Thí dụ 1.1.4. $4 \in$ tập hợp các số chẵn,

$3 \notin$ tập hợp các số chẵn.

1.1.3. Cách mô tả một tập hợp

Muốn mô tả một tập hợp ta phải làm đủ rõ để khi cho một phần tử ta biết được nó có thuộc tập hợp của ta hay không. Thường có hai cách :

1) Liệt kê ra tất cả các phần tử của tập hợp.

Thí dụ 1.1.5. $A := \{x, y, z, t\}$

Tập hợp này chỉ có 4 phần tử là x, y, z, t.

Vậy $x \in A, y \in A, z \in A, t \in A$,

nhưng $u \notin A, v \notin A$.

2) Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp.

Thí dụ 1.1.6. P := {các số chẵn}.

Như vậy ta có ngay $4 \in P$ nhưng $3 \overline{\in} P$.

1.1.4. Kí hiệu |

Tập hợp các số chẵn còn có thể mô tả như sau :

$$P := \{m \mid m = 2n, n \text{ nguyên}\}$$

Cách viết này đọc là : P là tập hợp các phần tử m trong đó (hay sao cho) $m = 2n$ với n là số nguyên. Rõ ràng đó chỉ là cách diễn đạt khác của tập các số chẵn.

Kí hiệu | đặt trước phần giải thích tính chất đặc trưng của phần tử m.

Chú ý 1.1.1. Sau này để cho gọn, đôi khi ta chỉ dùng từ "tập" thay cho cụm từ "tập hợp".

1.1.5. Một số tập hợp số thường gặp

Tập các số tự nhiên

$$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\mathbf{N}^* := \{1, 2, \ldots\} = \mathbf{N} - \{0\}.$$

Tập các số nguyên

$$\mathbf{Z} := \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}.$$

Tập các số hữu tỉ

$$\mathbf{Q} := \left\{\frac{p}{q} \mid q \neq 0, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Tập các số thực

$$\mathbf{R} := \{\text{các số thực}\}.$$

1.1.6. Tập rỗng

Theo cách nói ở mục 1.1.1 thì một tập hợp phải có ít nhất một phần tử mới có nghĩa. Tuy nhiên để cho tiện về sau, ta đưa thêm vào khái niệm tập rỗng theo quy ước :

Định nghĩa 1.1.1. Tập rỗng là tập hợp không có phần tử nào.

Kí hiệu của tập rỗng là $\varnothing$ (chữ O với một gạch chéo).

Thí dụ 1.1.7. Tập nghiệm thực của phương trình

$x^2 - 3x + 2 = 0$ là $\{1, 2\}$, nhưng tập nghiệm thực của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ là $\varnothing$ vì phương trình này không có nghiệm thực.

1.1.7. Sự bằng nhau của hai tập

Định nghĩa 1.1.2. *Ta nói tập A bằng tập B nếu A và B trùng nhau,* nghĩa là mọi phần tử của A cũng là phần tử của B và ngược lại mọi phần tử của B cũng là phần tử của A.

Khi A bằng B ta viết $A = B$.

Thí dụ 1.1.8. Cho

$$A := \{x, 1, \square, \Delta\}, \qquad B := \{1, \square, x, \Delta\}$$

thì có $A = B$.

1.1.8. Sự bao hàm – Tập con

Định nghĩa 1.1.3. Nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B thì ta nói

A bao hàm trong B

B bao hàm A

A là *tập con* của B.

Để diễn đạt ý đó ta viết

$$A \subset B \text{ hay } B \supset A.$$

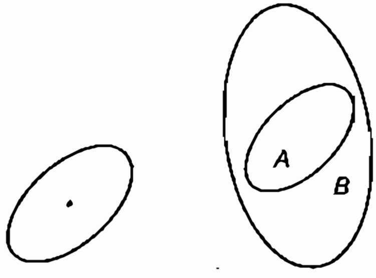
Chú ý 1.1.2. Người ta coi tập $\varnothing$ là tập con của mọi tập A.

Thí dụ 1.1.9. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Chú ý 1.1.3. Rõ ràng có

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A).$$

1.1.9. Biểu diễn hình học - Biểu đồ Ven



Hình 1 *Hình 2*

Để dễ hình dung một số quan hệ giữa các tập hợp người ta dùng cách biểu diễn hình học gọi là biểu đồ Ven : xem mỗi tập hợp là tập điểm trong một vòng phẳng, mỗi điểm trong vòng là một phần tử của tập hợp (*hình 1*). Khi đó quan hệ $A \subset B$ biểu diễn trên hình 2 bằng cách vẽ vòng A nằm trong vòng B.

BÀI TẬP : 1.2, 1.3, 1.4.

1.2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ TẬP HỢP

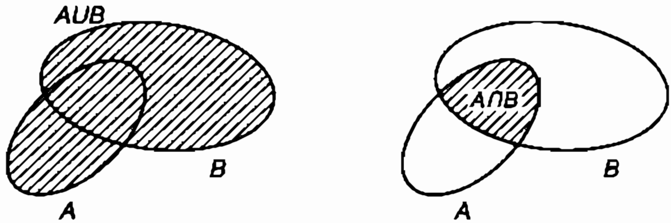
1.2.1. Phép hợp

Định nghĩa 1.2.1. *Hợp của hai tập A và B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.*

Kí hiệu hợp đó là $A \cup B$ ta có

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ hoặc } x \in B)$$

Hợp $A \cup B$ biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 3.



Hình 3 *Hình 4*

1.2.2. Phép giao

Định nghĩa 1.2.2. *Giao của hai tập A và B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.*

Kí hiệu giao đó là $A \cap B$ ta có

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \in B)$$

Giao $A \cap B$ biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 4.

Định nghĩa 1.2.3. *Khi $A \cap B = \varnothing$ ta nói A và B rời nhau.*

1.2.3. Tính chất

Các tính chất sau suy từ định nghĩa :

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup A = A,$$
$$A \cap A = A,$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ta chứng minh tính chất đầu tiên. Ta có

$x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A$ hoặc $x \in B) \Rightarrow (x \in B$ hoặc $x \in A) \Rightarrow x \in B \cup A,$

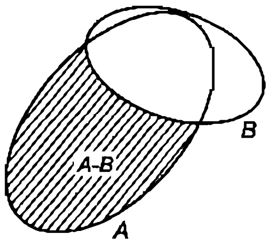
$x \in B \cup A \Rightarrow (x \in B$ hoặc $x \in A) \Rightarrow (x \in A$ hoặc $x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B.$

Vậy

$$A \cup B = B \cup A$$

1.2.4. Hiệu của hai tập

Định nghĩa 1.2.4. *Hiệu của tập A và tập B là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A mà không thuộc B.*



Hình 5

Kí hiệu hiệu đó là $A - B$ hay $A \setminus B$ ta có $(x \in A - B)$ (hay $A \setminus B$) $\Leftrightarrow$ ($x \in A$ và $x \notin B$). Hiệu của hai tập biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 5.

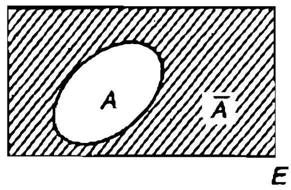
1.2.5. Tập bù (còn gọi là **tập bổ sung**)

Định nghĩa 1.2.5. Xét tập E và A là tập con của E, nghĩa là $A \subset E$. Lúc đó $E - A$ gọi là *tập bù của A trong E.*

Kí hiệu tập bù đó là $\overline{A}$ ta có

$$\overline{A} := E - A$$

Tập bù $\overline{A}$ biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 6.



Hình 6

Rõ ràng

$$\overline{A} \subset E\,,\ \overline{\overline{A}} := E - \overline{A} = A.$$

1.2.6. Định luật De Morgan

Với mọi $A \subset E$, $B \subset E$ ta có

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,,\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Ta chứng minh đẳng thức đầu. Xét $x \in E$. Ta có

$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow (x \notin A$ và $x \notin B) \Rightarrow (x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B})$
$\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$;

$x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow (x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B}) \Rightarrow (x \notin A$ và $x \notin B) \Rightarrow x \notin A \cup B$
$\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

Vậy $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Thí dụ 1.2.1. Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$. B là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$. Ta có

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{1, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$

$$A - B = \{2\}.$$

Tập nghiệm của phương trình

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

là $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.

Tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

là $A \cap B = \{1\}$.

1.2.7. Suy rộng

Giả sử I là một tập con của **N**, $I \subset \mathbf{N}$ và $(A_i)_{i \in I}$ là một họ những tập con của tập E.

Ta định nghĩa hợp

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ bởi } \{x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i\}$$

và giao

$$B = \bigcap_{i \in I} A_i \text{ bởi } \{x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i\}$$

Định luật De Morgan suy rộng cho họ những tập con của E sẽ có dạng

$$\overline{(\bigcup_{i \in I} A_i)} = \bigcap_{i \in I} \overline{A}_i$$

$$\overline{(\bigcap_{i \in I} A_i)} = \bigcup_{i \in I} \overline{A}_i$$

1.2.8. Khái niệm phủ và phân hoạch

Giả sử $I \subset \mathbf{N}$ và $S = \{(A_i)_{i \in I}\}$ là một họ những tập con của tập E.

Nếu $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = E$ thì ta nói S là một *phủ* của E.

Nếu ngoài ra, $\forall i \in I$, $A_i \neq \varnothing$ và $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, thì nói họ S là một *phân hoạch* của E.

Thí dụ 1.2.2. Xét E là mặt phẳng Oxy thì tập tất cả các đường thẳng vuông góc với Ox, $x = x_i$, $x_i \in \mathbf{R}$ tạo thành một phân hoạch của E.

BÀI TẬP : 1.5, 1.6, 1.7.

1.3. TÍCH ĐỀ CÁC

1.3.1. Tích đề các của hai tập

Định nghĩa 1.3.1. *Tích đề các của hai tập A và B là tập tất cả các cặp (a, b), a trước b sau, được tạo nên do lấy $a \in A$, $b \in B$ một cách bất kì.*

Kí hiệu tích đó là $A \times B$, ta có

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Thí dụ 1.3.1. Cho

$$A = \{1, 3\}, B = \{2, x\}$$

thì

$$A \times B := \{(1, 2), (1, x), (3, 2), (3, x)\}.$$

và

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

Chú ý 1.3.1. Chú ý rằng (1, 3) và (3, 1) là hai cặp khác nhau.

1.3.2. Tích đề các của ba tập

Định nghĩa 1.3.2. *Tích đề các của ba tập A, B, C là tập tất cả các bộ ba (a, b, c) theo thứ tự a rồi b rồi c, được tạo thành do lấy $a \in A$, rồi $b \in B$, rồi $c \in C$ một cách bất kì.*

Kí hiệu tích đó là $A \times B \times C$ ta có

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

Thí dụ 1.3.2. Nếu $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, x\}$, $C = \{\Delta\}$ thì

$$A \times B \times C = \{(1, 2, \Delta), (1, x, \Delta), (3, 2, \Delta), (3, x, \Delta)\}$$

và

$$A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 3)\}.$$

1.3.3. Tích đề các của n tập

Định nghĩa 1.3.3. *Tích đề các của n tập A_1, A_2, ..., A_n là tập tất cả các bộ n phần tử $(a_1, a_2, ..., a_n)$ theo thứ tự a_1, rồi a_2, ..., rồi a_n được tạo thành do lấy $a_1 \in A_1$, rồi $a_2 \in A_2$, ..., rồi $a_n \in A_n$ một cách bất kì.*

Kí hiệu tích đó là $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, ta có :

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n := \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$$

Tích đề các $A \times A \times ... \times A$ (n lần) viết gọn là A^n :

$$A^n := \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A, i = \overline{1, n}\}$$

BÀI TẬP : 1.8, 1.9.

1.4. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ QUAN HỆ THỨ TỰ

1.4.1. Khái niệm về quan hệ hai ngôi

Định nghĩa 1.4.1. *Cho tập E và tính chất $\mathcal{R}$ liên quan đến hai phần tử của E. Nếu a và b là hai phần tử của E thoả mãn tính chất $\mathcal{R}$ thì ta nói a có quan hệ $\mathcal{R}$ với b và viết a $\mathcal{R}$ b.*

Quan hệ này gọi là *quan hệ hai ngôi trên E.*

Xét một số thí dụ :

Thí dụ 1.4.1. Trên tập các đường thẳng trong không gian, "đường thẳng D vuông góc với đường thẳng D' " là một quan hệ hai ngôi.

Thí dụ 1.4.2. Trên tập các số tự nhiên $\mathbf{N}^*$, "a nguyên tố với b" là một quan hệ hai ngôi.

Thí dụ 1.4.3. Trên tập số thực **R**, "$a = b$" là một quan hệ hai ngôi ; "$a < b$" cũng là một quan hệ hai ngôi.

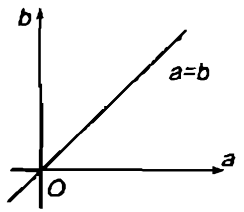
1.4.2. Đồ thị của quan hệ hai ngôi

Khi $a \mathcal{R} b$ ta cũng nói cặp (a, b) thoả mãn quan hệ $\mathcal{R}$. Cặp (a, b) là phần tử của tích $E \times E$. Ta chú ý đến tập G tất cả các cặp $(a, b) \in E \times E$ thoả mãn $\mathcal{R}$. Ta gọi G là *đồ thị* của quan hệ $\mathcal{R}$. Vậy có

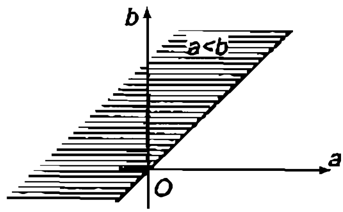
Định nghĩa 1.4.2. *Đồ thị của quan hệ $\mathcal{R}$ là tập tất cả các cặp (a, b) của $E \times E$ thoả mãn quan hệ $\mathcal{R}$.*

Thí dụ 1.4.4. Đồ thị của quan hệ "$a = b$" trên **R** là đường phân giác của các góc vuông I và III trong mặt phẳng toạ độ Oab (hình 7).

Thí dụ 1.4.5. Đồ thị của quan hệ "$a < b$" trên **R** là nửa mặt phẳng ở trên đường phân giác của các góc vuông I và III (hình 8).



Hình 7



Hình 8

1.4.3. Một số tính chất của quan hệ hai ngôi

Tuỳ theo định nghĩa, một quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên E có thể có một số tính chất sau đây :

1) *Tính phản xạ :* Quan hệ $\mathcal{R}$ có tính phản xạ nếu

$$a \mathcal{R} a, \forall a \in E$$

Thí dụ 1.4.6. Quan hệ "$a = b$" trên **R** có tính phản xạ vì $a = a$, nhưng quan hệ "$a < b$" không có tính phản xạ vì không có $a < a$.

2) *Tính đối xứng :* Quan hệ $\mathcal{R}$ có tính đối xứng nếu

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$$

Thí dụ 1.4.7. Quan hệ "$a = b$" trên **R** có tính đối xứng vì $a = b \Rightarrow b = a$.

Quan hệ "$a < b$" trên **R** không có tính đối xứng vì từ $a < b$ không suy ra $b < a$.

3) *Tính bắc cầu :* Quan hệ $\mathcal{R}$ có tính bắc cầu nếu

$$(a \mathcal{R} b \text{ và } b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c.$$

Thí dụ 1.4.8. Quan hệ "$a = b$" trên **R** có tính bắc cầu vì ($a = b$ và $b = c$) $\Rightarrow a = c$.

Quan hệ "$a < b$" cũng có tính bắc cầu vì ($a < b$ và $b < c$) $\Rightarrow a < c$.

4) *Tính phản đối xứng :* Quan hệ $\mathcal{R}$ có tính phản đối xứng nếu

$$(a \mathcal{R} b \text{ và } b \mathcal{R} a) \Rightarrow a = b.$$

Thí dụ 1.4.9. Quan hệ "$a \leq b$" trên **R** có tính phản đối xứng vì ($a \leq b$ và $b \leq a$) $\Rightarrow a = b$.

1.4.4. Quan hệ tương đương

Định nghĩa 1.4.3. *Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên tập E gọi là một quan hệ tương đương nếu nó có ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.*

Khi $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương và $a \mathcal{R} b$ ta viết

$$a \sim b \ (\mathcal{R})$$

và đọc : "a tương đương b theo quan hệ $\mathcal{R}$".

Bạn đọc có thể kiểm tra lại các khẳng định trong các thí dụ sau.

Thí dụ 1.4.10. Trong **N**, **Z**, **Q**, **R** quan hệ "$a = b$" là một quan hệ tương đương (xem các thí dụ 1.4.6, 1.4.7, 1.4.8).

Thí dụ 1.4.11. Trong **Z** quan hệ "$a - b$ là bội của một số nguyên p khác 0 cho trước" là một quan hệ tương đương. Lúc đó ta viết

$$a \equiv b\ (p) \text{ hay } a \equiv b \pmod p$$

và đọc : "a đồng dư b môđulô p".

Thí dụ 1.4.12. Trong tập các đường thẳng trong không gian quan hệ "đường thẳng D đồng phương với đường thẳng D' " là một quan hệ tương đương.

Thí dụ 1.4.13. Trong tập các vectơ tự do trong không gian quan hệ "vectơ $\vec{u}$ bằng vectơ $\vec{v}$" là một quan hệ tương đương.

1.4.5. Lớp tương đương

Xét tập E trong đó có một quan hệ tương đương $\mathscr{R}$; gọi a là một phần tử xác định của E. Khi đó tất cả các phần tử $b \in E$ tương đương với a lập thành một tập gọi là *lớp tương đương* của a theo quan hệ $\mathscr{R}$. Kí hiệu lớp đó là $\mathscr{C}(a, \mathscr{R})$ ta có

$$\mathscr{C}(a, \mathscr{R}) := \{b \mid b \in E, b \sim a\ (\mathscr{R})\}$$

Có thể xem a là phần tử đại diện cho lớp $\mathscr{C}(a, \mathscr{R})$.

Thí dụ 1.4.14. Trong tập các đường thẳng trong không gian, tất cả các đường thẳng đồng phương với một đường thẳng Δ cho trước tạo thành lớp tương đương của Δ theo quan hệ "đồng phương" mà phần tử đại diện là Δ. Có thể nói mỗi lớp tương đương đó xác định một phương trong không gian.

Thí dụ 1.4.15. Trong tập tất cả các vectơ tự do trong không gian, tất cả các vectơ bằng một vectơ $\overline{OA}$ gốc O cho trước tạo thành một lớp tương đương theo quan hệ "bằng nhau" mà phần tử đại diện là $\overline{OA}$.

Thí dụ 1.4.16. Trong **R** lớp tương đương của một số xác định a theo quan hệ "$a = b$" chỉ có một phần tử là a.

Chú ý 1.4.1 : Tập tất cả các lớp tương đương $\mathscr{C}(a, \mathscr{R})$ tạo thành một phân hoạch trên E.

1.4.6. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 1.4.4. *Quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên tập E gọi là một quan hệ thứ tự nếu nó có ba tính chất : phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.*

Bạn đọc có thể kiểm tra lại các khẳng định trong các thí dụ sau :

Thí dụ 1.4.17. Trong **N**, **Z**, **Q**, **R** quan hệ "$a \leq b$" là một quan hệ thứ tự.

Thí dụ 1.4.18. Trong **N** quan hệ "a chia hết cho b" là một quan hệ thứ tự.

Thí dụ 1.4.19. Trong tập các tập con của một tập E cho trước, quan hệ $A \subset B$ là một quan hệ thứ tự.

1.4.7. Quan hệ thứ tự toàn phần

Định nghĩa 1.4.5. *Một quan hệ thứ tự $\mathscr{R}$ trên tập E gọi là quan hệ thứ tự toàn phần nếu $\forall a$, $b \in E$, ta đều có hoặc $a \mathscr{R} b$ hoặc $b \mathscr{R} a$.*

Thí dụ 1.4.20. Trên **N**, **Z**, **Q**, **R**, quan hệ "$a \leq b$" là một quan hệ thứ tự toàn phần vì $\forall a, b \in$ **N** hay **Z** hay **Q** hay **R** ta đều có hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.

Thí dụ 1.4.21. Trên tập các tập con của một tập cho trước E, quan hệ "$\subset$" là một quan hệ thứ tự không toàn phần vì nếu A và B rời nhau chẳng hạn thì không có $A \subset B$ cũng không có $B \subset A$.

1.4.8. Tập có thứ tự

Định nghĩa 1.4.6. Xét tập E trong đó có một quan hệ thứ tự $\mathscr{R}$. Cho hai phần tử bất kì a và b của E. Nếu $a \mathscr{R} b$ ta nói *a có thể so sánh được với b*. Các phần tử so sánh được với nhau sắp xếp theo một thứ tự xác định theo quan hệ $\mathscr{R}$.

Định nghĩa 1.4.7. Nếu $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự toàn phần thì tất cả các phần tử của E đều được sắp thứ tự theo quan hệ $\mathscr{R}$. Ta nói E *được sắp thứ tự toàn phần* bởi quan hệ $\mathscr{R}$.

Nếu $\mathscr{R}$ là một *quan hệ thứ tự không toàn phần* thì chỉ có một số phần tử của E được sắp xếp theo quan hệ $\mathscr{R}$. Ta nói E là *tập có thứ tự bộ phận* hay *E được sắp thứ tự bộ phận.*

Thí dụ 1.4.22. Các tập **N**, **Z**, **Q**, **R** là những tập có thứ tự toàn phần theo quan hệ thứ tự "$a \le b$".

Thí dụ 1.4.23. Tập các tập con của một tập E cho trước là một tập có thứ tự bộ phận theo quan hệ "$\subset$".

BÀI TẬP : 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15.

1.5. ÁNH XẠ

1.5.1. Mở đầu

Cho hai tập E và F và một quy luật f liên hệ các phần tử của E với một số phần tử của F.

Thí dụ 1.5.1. $E = F = \mathbf{R}$

$x \in \mathbf{R}$ liên hệ với $y \in \mathbf{R}$ bởi $y = x^3$.

Thí dụ 1.5.2. $E = F = \mathbf{R}$

$x \in \mathbf{R}$ liên hệ với $y \in \mathbf{R}$ bởi quy luật $y = x^2$.

Thí dụ 1.5.3. $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{Z}$

$x \in \mathbf{R}$ liên hệ với $y \in \mathbf{Z}$ bởi quy luật $y = [x]$,

$[x]$ kí hiệu phần nguyên của x.

Thí dụ 1.5.4. $E = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1 \le x \le 1\}$

$F = \mathbf{R}$

$x \in E$ liên hệ với $y \in \mathbf{R}$ bởi quy luật

$y =$ cung có sin là x.