Luvun e numeerinen approksimointi

Juha-Matti Vihtanen

20. toukokuuta 2019

Tiivistelmä

Sarjamuotoinen kokonaislukujen yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuun perustuva esitys luvulle e ja virheanalyysi numeeriselle toteutukselle.

Eksponenttifunktio $f(z) = e^z$ on tunnetusti analyyttinen joukossa $\mathbb{C}$. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ ja $R_2 < R_1$. Eksponenttifunktiolla on silloin Taylorin lauseen (lause 7.4 kirjassa [1]) perusteella Taylorin sarja

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k \,, \tag{1}$$

joka suppenee joukossa $B(z_0, R_1)$. Edelleen saman lauseen perusteella Taylorin sarja (1) suppenee joukossa $B(z_0, R_2)$ tasaisesti, missä $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$.

Tarkastellaan seuraavaksi sarjakehitelmää (1) reaalilukujen joukossa. Eksponenttifunktio toteuttaa reaaliakselilla kaavat

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x \,. \tag{2}$$

Sijoittamalla $x = 0$ kaavaan (2) saadaan

$$f^{(k)}(0) = e^0 \,.$$

Sijoittamalla $z = x$, $z_0 = x_0$ ja $x_0 = 0$ Taylorin sarjan kaavaan saadaan tunnettu erikoistapaus, eksponenttifunktion $f(x) = e^x$ Maclaurinin sarja

$$\begin{aligned} e^x &= f(x) = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^0 x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 1 x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \,.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla edelleen $x = 1$ saadaan

$$\begin{aligned}
e &= e^1 = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \,.
\end{aligned}$$

Tästä saadaan approksimaatiot

$$e \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ja $p = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Todetaan ensin

$$\begin{aligned}
n - p &= n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq n - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) = n - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \geq \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \,.
\end{aligned}$$

Todetaan myös $n - p \in \mathbb{N}$. Virhe

$$\begin{aligned}
\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} \right| \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{i=1}^{k-p} \frac{1}{i} \prod_{i=k-p+1}^{k} \frac{1}{i} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{i=1}^{k-p} \frac{1}{i} \prod_{i=k-p+1}^{k-p+p} \frac{1}{p} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{k-p} \frac{1}{i} \right] \left(\frac{1}{p} \right)^p = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^p \prod_{i=1}^{k-p} \frac{1}{i} \\
&= \left(\frac{1}{p} \right)^p \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{i=1}^{k-p} \frac{1}{i} = \left(\frac{1}{p} \right)^p \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k-p)!} \\
&= \left(\frac{1}{p} \right)^p \sum_{k=n-p}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{1}{p} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \left(\frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} e \leq \left(\frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right)^{\frac{n}{2}} e \leq \left(\frac{1}{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}} e \\
&= e^{\ln (\frac{n}{2})^{-1} \frac{n}{2}} e = e^{[-\ln (\frac{n}{2})] \frac{n}{2}} e = e^{-\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}} e \\
&= e^{-\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + 1} = e^{\ln 10 \frac{-\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + 1}{\ln 10}} = 10^{\frac{-\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + 1}{\ln 10}} \,.
\end{aligned}$$

Kun valitaan $n = 10000$ saadaan

$$\begin{aligned} \left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| &\leq 10^{\frac{-\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}+1}{\ln 10}} = 10^{\frac{-\frac{10000}{2}\ln\frac{10000}{2}+1}{\ln 10}} \\ &= 10^{\frac{-5000\ln 5000+1}{\ln 10}} \leq 10^{-18495}\,. \end{aligned}$$

Yläraja on siis riittävän suuri lukuesitykselle, jossa on desimaaleja 18495. Voidaan siis käyttää esitystarkuutta, jossa on $2^{14} = 16384$ desimaalia. Numeerisesti laskettaessa pitää ottaa huomioon myös katkaisuvirhe, joka muodostuu, kun desimaaliluku esitetään kokonaislukuna, jossa on 16384 merkitsevää numeroa. Kaavan muodossa voidaan todeta

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{2^{14}}} 10^{2^{14}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{10^{2^{14}}} \sum_{k=0}^{n} 10^{2^{14}} \frac{1}{k!}\,.$$

Sisimmäinen kertolasku toteutetaan rekursion alussa ja ulommainen pilkkua siirtämällä silmukan suoritettua. On huomioitavaa, että yhteenlaskussa muodostunut virhe on katkaisuvirheiden summa ja jakolaskussa algoritmin mukaan desimaalit ovat oikein esitystarkkuuteen asti, jonka jälkeen jakojäännöksestä määräytyy katkaisuvirhe.

Luku

$$a_k = 10^{2^{14}} \frac{1}{k!}\,.$$

Silloin

$$\begin{aligned} a_k &= 10^{2^{14}} \frac{1}{k!} = 10^{2^{14}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} 10^{2^{14}} \frac{1}{(k-1)!} \\ &= \frac{1}{k} a_{k-1}\,. \end{aligned}$$

Algoritmissa

$$\begin{aligned} s_0 &= 0\,, \\ a_0 &= 10^{2^{14}}\,, \\ s_k &= s_{k-1} + a_{k-1}\,, \\ a_k &= \frac{1}{k} a_{k-1}\,. \end{aligned}$$

Olkoon b_k algoritmissa lukua a_k vastaava rekrusiivisesti laskettu katkaistu desimaaliluku. Todetaan

$$\begin{aligned} b_0 &= 10^{2^{14}} \\ b_k &= \left\lfloor \frac{1}{k} b_{k-1} \right\rfloor = \frac{1}{k} b_{k-1} - \delta_k\,. \end{aligned}$$

Todetaan edelleen

$$\begin{aligned} \delta_k &\geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\,, \\ \delta_k &< 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Todistetaan induktiolla, että numeerinen virhe

$$|a_n - b_n| < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Todetaan ensin, että tapaukselle $n = 0$

$$|a_n - b_n| \quad = \quad |a_0 - b_0| = |10^{2^{14}} - 10^{2^{14}}| = 0 < 2\,.$$

Perusaskel $n = 1$. Erotuksen itseisarvo

$$\begin{aligned}
|a_n - b_n| &= |a_1 - b_1| = \left|\frac{1}{1}a_0 - \left\lfloor \frac{1}{1}b_0 \right\rfloor\right| = \left|a_0 - \left\lfloor b_0 \right\rfloor\right| \\
&= \left|10^{2^{14}} - \left\lfloor 10^{2^{14}} \right\rfloor\right| = |10^{2^{14}} - 10^{2^{14}}| \\
&= 0 < 2\,.
\end{aligned}$$

Induktioaskel $n = k + 1$, $n \geq 2$, $k \geq 1$. Erotuksen itseisarvo

$$\begin{aligned}
|a_n - b_n| &= |a_{k+1} - b_{k+1}| = \left|\frac{1}{k+1}a_k - (\frac{1}{k+1}b_k - \delta_{k+1})\right| \\
&= \left|\frac{1}{k+1}a_k - \frac{1}{k+1}b_k + \delta_{k+1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{k+1}(a_k - b_k) + \delta_{k+1}\right| \leq \left|\frac{1}{k+1}(a_k - b_k)\right| + |\delta_{k+1}| \\
&= \left|\frac{1}{k+1}\right||a_k - b_k| + |\delta_{k+1}| = \frac{1}{k+1}|a_k - b_k| + |\delta_{k+1}| \\
&\leq \frac{1}{1+1}|a_k - b_k| + |\delta_{k+1}| < \frac{1}{2}2 + 1 = 2\,.
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa väitteen kaikille $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Kokonaisvirhe

$$\begin{aligned}
\left|10^{2^{14}}e - \sum_{k=0}^{n} b_k\right| &= \left|10^{2^{14}}e - \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\right| \\
&= \left|10^{2^{14}}e - \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} a_k - b_k\right| \\
&\leq \left|10^{2^{14}}e - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - b_k\right| \\
&\leq \left|10^{2^{14}}e - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| + \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k| \\
&< \left|10^{2^{14}}e - \sum_{k=0}^{n} 10^{2^{14}}\frac{1}{k!}\right| + \sum_{k=0}^{n} 2 \\
&= \left|10^{2^{14}}e - 10^{2^{14}}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| + 2n \\
&= \left|10^{2^{14}}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\right| + 2n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 10^{2^{14}}\left|e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|+2n \le 10^{2^{14}}10^{-18495}+2\cdot 10000\\
&= 10^{16384}10^{-18495}+20000 < 10^{18495}10^{-18495}+20000\\
&= 10^{18495-18495}+20000 = 10^{0}+20000 = 1+20000\\
&= 20001\,.
\end{aligned}
$$

Saadun numeerisen tuloksen pilkun siirtämisen jälkeen virhe

$$
\begin{aligned}
\left|e-10^{-2^{14}}\sum_{k=0}^{n}b_k\right| &= \left|10^{-2^{14}}10^{2^{14}}e-10^{-2^{14}}\sum_{k=0}^{n}b_k\right|\\
&= 10^{-2^{14}}\left|10^{2^{14}}e-\sum_{k=0}^{n}b_k\right|\\
&\le 10^{-2^{14}}\cdot 20001\\
&= 20001\cdot 10^{-2^{14}}\,.
\end{aligned}
$$

Numeerisen tuloksen viisi viimeistä desimaalia ovat 63091. Viimeisille desimaaleille ylärajana on siis $63091+20001=83092$ ja alarajana $63091-20001=43090$, joten kuudenneksi viimeinen desimaali ei muutu tarkkuusanalyysin rajoissa. Siten numeerinen tulos antaa luvun e katkaistusta desimaaliesityksestä $2^{14}-5$ merkitsevää numeroa ja $2^{14}-5-1=16379$ desimaalia oikein.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

char * division(char * dominator, int denominat, char * ans);
char * addition(char * term1, char * term2, char * ans);

#define LENSTR 4
#define NSTR   4096
#define DATALENGTH NSTR*LENSTR

int main(void) {

  int n = 0;
  int k;

  FILE * fp;

  char * a   = malloc(DATALENGTH);
  char * sn  = malloc(DATALENGTH);

  a[0] = (char)(48+1);
  for(k=1;k<DATALENGTH;k++) {
    a[k] = (char)48;
  }
  for(k=0;k<DATALENGTH;k++) {
    sn[k] = (char)48;
  }

  n = 1;

  while(n<10000) {

    system("clear");
    printf("%d/10000\n", n);

    sn = addition(sn,a,sn);
    a = division(a,n,a);
    n++;

  }

  fp = fopen("e.dat", "w");
  fprintf(fp,"%c.",sn[0]);
  for(k=1;k<LENSTR*NSTR;k++) {
    fprintf(fp,"%c",sn[k]);
  }

  return 0;

}
```

```
char * division(char * dominator, int denominat, char * ans) {

  int k;
  int j;
  int m = denominat;
  int k10;
  int intdata[NSTR];
  int intrmadata[NSTR];
  int divdata[NSTR];
  int rma;
  char tmpchar;
  char data[NSTR][LENSTR];
  char div[NSTR][LENSTR];
  char divstr[NSTR*LENSTR];

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      data[k][j] = dominator[LENSTR*k+j];
    }
  }

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    k10=1000;
    intdata[k]=0;
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      tmpchar = data[k][j];
      intdata[k] += k10 * ((int)tmpchar-48);
      k10 /= 10;
    }
  }

  rma = 0;

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    intrmadata[k] = 10000 * rma + intdata[k];
    rma = intrmadata[k] % m;
    divdata[k] = (intrmadata[k]-rma)/m;
  }

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    k10 = 10;
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      div[k][LENSTR-j-1] = (char)(10*(divdata[k] % k10)/k10+48);
      divdata[k] -= divdata[k] % k10;
      k10 *= 10;
    }
  }

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      divstr[LENSTR*k+j] = div[k][j];
    }
  }
```

```
  for(k=0;k<LENSTR*NSTR;k++) {
    ans[k] = divstr[k];
  }

  return ans;

}

char * addition(char * term1, char * term2, char * ans) {

  int k;
  int j;
  int k10;
  int mmr;
  int intdata1[NSTR];
  int intdata2[NSTR];
  int intmmrdata[NSTR];
  char tmpchar;
  char chardata1[NSTR][LENSTR];
  char chardata2[NSTR][LENSTR];
  char sum[NSTR][LENSTR];

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      chardata1[k][j] = term1[LENSTR*k+j];
      chardata2[k][j] = term2[LENSTR*k+j];
    }
  }

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    k10=1000;
    intdata1[k]=0;
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      tmpchar = chardata1[k][j];
      intdata1[k] += k10 * ((int)tmpchar-48);
      k10 /= 10;
    }
  }

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    k10=1000;
    intdata2[k] = 0;
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      tmpchar = chardata2[k][j];
      intdata2[k] += k10 * ((int)tmpchar-48);
      k10 /= 10;
    }
  }

  mmr = 0;

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    intmmrdata[NSTR-k-1] = mmr + intdata1[NSTR-k-1] + intdata2[NSTR-k-1];
    if(intmmrdata[NSTR-k-1] >= 10000) {
```

```
      intmmrdata[NSTR-k-1] -=10000;
      mmr = 1;
    } else {
      mmr = 0;
    }
  }

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    k10 = 10;
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      sum[k][LENSTR-j-1] = (char)(10*(intmmrdata[k] % k10)/k10+48);
      intmmrdata[k] -= intmmrdata[k] % k10;
      k10 *= 10;
    }
  }

  for(k=0;k<NSTR;k++) {
    for(j=0;j<LENSTR;j++) {
      ans[LENSTR*k+j] = sum[k][j];
    }
  }

  return ans;

}
```

2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535
4759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563
07381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841
675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618
386062613313845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969
772093101416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679
468644549059879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680
331825288693984964651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970
198376793206832823764648042953118023287825098194558153017567173613320698112509
961818815930416903515988885193458072738667385894228792284998920868058257492796
104841984443634632449684875602336248270419786232090021609902353043699418491463
140934317381436405462531520961836908887070167683964243781405927145635490613031
072085103837505101157477041718986106873969655212671546889570350354021234078498
193343210681701210056278802351930332247450158539047304199577770935036604169973
297250886876966403555707162268447162560798826517871341951246652010305921236677
194325278675398558944896970964097545918569563802363701621120477427228364896134
225164450781824423529486363721417402388934412479635743702637552944483379980161
254922785092577825620926226483262779333865664816277251640191059004916449982893
150566047258027786318641551956532442586982946959308019152987211725563475463964
479101459040905862984967912874068705048958586717479854667757573205681288459205
413340539220001137863009455606881667400169842055804033637953764520304024322566
135278369511778838638744396625322498506549958862342818997077332761717839280349
465014345588970719425863987727547109629537415211151368350627526023264847287039
207643100595841166120545297030236472549296669381151373227536450988890313602057
248176585118063036442812314965507047510254465011727211555194866850800368532281
831521960037356252794495158284188294787610852639813955990067376482922443752871
846245780361929819713991475644882626039033814418232625150974827987779964373089
970388867782271383605772978824125611907176639465070633045279546618550966661856
647097113444740160704626215680717481877844371436988218559670959102596862002353
718588748569652200050311734392073211390803293634479727355955277349071783793421
637012050054513263835440001863239914907054797780566978533580489669062951194324
730995876552368128590413832411607226029983305353708761389396391779574540161372
236187893652605381558415871869255386061647798340254351284396129460352913325942
794904337299085731580290958631382683291477116396337092400316894586360606458459
251269946557248391865642097526850823075442545993769170419777800853627309417101
634349076964237222943523661255725088147792231519747780605696725380171807763603
462459278778465850656050780844211529697521890874019660906651803516501792504619
501366585436632712549639908549144200014574760819302212066024330096412704894390
397177195180699086998606636583232278709376502260149291011517177635944602023249
300280401867723910288097866605651183260043688508817157238669842242201024950551
881694803221002515426494639812873677658927688163598312477886520141174110913601
164995076629077943646005851941998560162647907615321038727557126992518275687989
302761761146162549356495903798045838182323368612016243736569846703785853305275
833337939907521660692380533698879565137285593883499894707416181550125397064648
171946708348197214488898790676503795903669672494992545279033729636162658976039
498576741397359441023744329709355477982629614591442936451428617158587339746791
897571211956187385783644758448423555581050025611492391518893099463428413936080
383091662818811503715284967059741625628236092168075150177725387402564253470879
089137291722828611515915683725241630772254406337875931059826760944203261924285
317018781772960235413060672136046000389661093647095141417185777014180606443636
815464440053316087783143174440811949422975599314011888683314832802706553833004
693290115744147563139997221703804617092894579096271662260740718749975359212756
084414737823303270330168237193648002173285734935947564334129943024850235732214
597843282641421684878721673367010615094243456984401873312810107945127223737886

1260581656680537143961278887325273738903928905068653241380627960259303877276977
7837928684093253658807339884572187460210053114833513238500478271693762180049047
7955979592905916554705057775143081751126989851884087185640260353055837378324224
9241856256442550226721559802740126179719280471396006891638286652770097527670697
7770364392602243728418408832518487704726384403795301669054659374616193238403638
8931313643271376888410268112198912752230562567562547017250863497653672886059667
7527408686274079128565769963137897530346606166698042182677245605306607738996242
2183408598820718646826232150802882863597468396543588566855037731312965879758105
5012149162076567699506597153447634703208532156036748286083786568030730626576334
4697742956346437167093971930608769634953288468336130388294310408002968738691170
0666661468000151211434422560238744743252507693870777519329994213727721125884360
6087158348356269616619805725266122067975406210620806498829184543953015299820925
5030054982570433905535701686531205264956148572492573862069174036952135337325316
6663454665885972866594511364413703313936721185695539521084584072443238355860631
1068069649248512326326995146035960372972531983684233639046321367101161928217111
1502828016044880588023820319814930963695967358327420249882456849412738605664913
3525267060462344505492275811517093149218795927180019409688669868370373022004753
3143381810927080300172059355305207007060722339994639905713115870996357773590271
1962850611465148375262095653467132900259943976631145459026858989791158370934193
3704411551219201171648805669459381311838437656206278463104903462939500294583411
1648241149697583260118007316994373935069662957124102732391387417549230718624545
5432220395527352952402459038057445028922468862853365422138157221311632881120521
1464898051800920247193917105553901139433166815158288436876069611025051710073927
7623855533862725535388309606716446623709226468096712540618695021431762116681400
0975952814939072226011126811531083873176173232352636058381731510345957365382235
5349929358228368510078108846343499835184044517042701893819942434100905753762577
7675711180900881641833192019626234162881665213747173254777277834887743665188287
7521566857195063719365653903894493664217640031215278702223664636357555035655769
9488865495002708539236171055021311474137441061344455441921013361729962856948991
1933691847294785807291560885103967819594298331864807560836795514966364489655929
9481878517840387733262470519450504198477420141839477312028158868457072905440575
5106012852580565947030468363445926525521370080687520095934536073162261187281739
9280746230946853678231060979215993600199462379934342106878134973469592464697525
5062469586169091785739765951993929939955675427146549104568607020990126068187049
9841780791739240719459963230602547079017745275131868099822847308607665368668555
5164677029113368275631072233467261137054907953658345386371962358563126183871567
7741187385277229225947433737856955384562468010139057278710165129666367644518724
4656537304024436841408144887329578473484900030194778880204603246608428753518483
3649591950828883232065221281041904480472479492913422849519700226013104300624107
7179715027934332634079959605314460532304885289729176598760166678119379323724538
8572096075822771784833616135826128962261181294559274627671377944875867536575448
8614076119311259585126557597345730153336426307679854433857617153334623252705720
0053039882894990342595662329757824887350292591668258944568946559926584547626945
5287805165017206747854178879822768065366506419109734345288783386217261562695826
6544782056729877564263253215942944180399432170000905426507630955884658951717091
1476074371368933194690909819045012903070995662266203031826493657336984195557769
9637876249188528656866076005660256054457113372868402055744160308370523122425872
2234388541231794813885500756893811249353863186352870837998456926199817945233640
0874295911807474534195514203517261842008455091708456823682008977394558426792142
2734775608796442792027083121501564063413416171664480698154837644915739001212170
0415478725919989438253649505147713793991472052195290793961376211072384942906163
3576045962312535060685376514231153496656837151166042207963944666211632551577290
0709784731562782775987881364919512574833287937715714590910648416426783099497236
6744201758622694021594079244805412553604313179926967391575424192966073123937637

542139230617876753958711436104089409966089471418340698362993675362621545247298
464213752891079884381306095552622720837518629837066787224430195793793786072107
254277289071732854874374355781966511716618330881129120245204048682200072344035
025448202834254187884653602591506445271657700044521097735585897622655484941621
714989532383421600114062950718490427789258552743035221396835679018076406042138
307308774460170842688272261177180842664333651780002171903449234264266292261456
004337383868335555343453004264818473989215627086095650629340405264943244261445
665921291225648893569655009154306426134252668472594914314239398845432486327461
842846655985332312210466259890141712103446084271616619001257195870793217569698
544013397622096749454185407118446433946990162698351607848924514058940946395267
807354579700307051163682519487701189764002827648414160587206184185297189154019
688253289309149665345753571427318482016384644832499037886069008072709327673127
581966563941148961716832980455139729506687604740915420428429993541025829113502
241690769431668574242522509026939034814856451303069925199590436384028429267412
573422447765584177886171737265462085498294498946787350929581652632072258992368
768457017823038096567883112289305809140572610865884845873101658151167533327674
887014829167419701512559782572707406431808601428149024146780472327597684269633
935773542930186739439716388611764209004068663398856841681003872389214483176070
116684503887212364367043314091155733280182977988736590916659612402021778558854
876176161989370794380056663364884365089144805571039765214696027662583599051987
042300179465536788567430285974600143785483237068701190078499404930918919181649
327259774030074879681484882342932023012128032327460392219687528340516906974194
257614673978110715464186273369091584973185011183960482533518748438923177292613
543024932562896371361977285456622924461644497284597867711574125670307871885109
336344480149675240618536569532074170533486782754827815415561966911055101472799
040386897220465550833170782394808785990501947563108984124144672821865459971596
639015641941751820935932616316888380132758752601460507676098392625726411120135
288591317848299475682472564885533357279772205543568126302535748216585414000805
314820697137262149755576051890481622376790414926742600071045922695314835188137
463887104273544767623577933993970632396604969145303273887874557905934937772320
142954803345000695256980935282887783710670585567749481373858630385762823040694
005665340584887527005308832459182183494318049834199639981458773435863115940570
443683515285383609442955964360676090221741896883548131643997437764158365242234
642619597390455450680695232850751868719449064767791886720306418630751053512149
851051207313846648717547518382979990189317751550639981016466414592102406838294
603208535554058147159273220677567669213664081505900806952540610628536408293276
621931939933861623836069111767785448236129326858199965239275488427435414402884
536455595124735546139403154952097397051896240157976832639450633230452192645049
651735466775699295718989690470902730288544945416699791992948038254980285946029
052763145580316514066229171223429375806143993484914362107993576737317948964252
488813720435579287511385856973381976083524423240466778020948399639946684833774
706725483618848273000648319163826022110555221246733323184463005504481849916996
622087746140216157021029603318588727333298779352570182393861244026868339555870
607758169954398469568540671174444932479519572159419645863736126915526457574786
985964242176592896862383506370433939811671397544736228625506803682664135541448
048997721373174119199970017293907303350869020922519124447393278376156321810842
898207706974138707053266117683698647741787180202729412982310888796831880854367
327806879771659111654224453806625861711729498038248879986504061563975629936962
809358189761491017145343556659542757064194408833816841111166200759787244137082
333917886114708228657531078536674695018462140736493917366254937783014074302668
422150335117736471853872324040421037907750266020114814935482228916663640782450
166815341213505278578539332606110249802273093636740213515386431693015267460536
064351732154701091440650878823636764236831187390937464232609021646365627553976
834019482932795750624399645272578624400375983422050808935129023122475970644105

6783618708771723335554654825989068612014101072224659040085537982352538851716223
5182565184822031252149507003783004112162121260527260599443204430562745229161288
8917668141606391312359753503903200775295873924124764518508091639114592960711566
3442043471335447209811784614510778723991406062902282766643092649005922498102911
0687594345338583303911787475759770659535709796400122240921990311582292596679133
1539915614380701292607801970225896629233681543124994122594600233994722281710566
6039318772268004938331489803385489094686851307892920642428191747958661999444111
1962087304980643850068526202584328420855823385669366498497208170461353761635844
0153428406741185875815465145982702286766718553093119233401912861706133648731833
1975608125694600894029530944291195902959685639230376899763274622839007354571444
5964141082292859222393328362101928229372435902830038844457013837716320565183511
9701001157220109569978904849644534346121292249647323561263219511557015658244277
6615993264631558066720531275969485380573642083849188870951760522878173394627477
6446568589009362661233111529108160415241002141959373497864316615567327027921099
5935430555797326605546779635520053783046195406369718429161685827341222171458855
8708142740902481854464217748769250933287856706746773812267528316535592452045788
0705413525769032535227389638474956462559403789249250076243868937764753101023233
7467337714745816255306980324990336764554303052745615129612145859444321507490511
4914539509810013887379263799648737283964168975551322759620118382486507469854922
0380976919326064376087432093856028156428497565493079097338541855835157894098144
0076918923890630905425348838968317629041202129491671958119357912031625143440966
5031328352167280213724159473440954983161383225054867081722214751384251667904455
4166173032008203309028954888085167972584958134071321805339888281393460498505322
3404725950972143314925866042485114058195797115641914588428330005256847768743055
9163904943068713431187961896374755033628209399493436903210319768981120555953699
4654247041733238953940460353253967583543953505167202616479613477909123279952644
9290451511483079233693821660107028726519381438448445326395173941101311525027500
4657493430637665418661289152644469262228843662994627324679587363835019371427866
4713980540382155134632237020715331348870831741465914924063594930209211220526100
3123906829413456967859585183934913823408842743124190991528708043328091329930788
9368671274139228900330699958759218152976124824091169515877899640903525773459388
2482320530555672380950222667904396142318529919891810655544124772045085102100711
5223523427925312669301082706339423217625700763231391593497099469332410139087799
1616512268044148097656189797350431513960669132583790337486208366954750832803188
7867077511775256639634792592197335779495554986552141933981702686399873883470100
2552620523123172152540625716367712700107609122815283265089843595689759610383722
1577268311707345522501941217015413187936518185020208773269061335921820007623277
2695032838273912438281981708711681089511878967467070733778695925655427133400522
3267060400043488434329027603604980278621607494696549892104744439278719345367011
7986739208038456337233119838558626380085163455971944419943446247611238446176155
7362420159350785208256006041015568898995017325543372980735616998611019084720966
6007083202805699170425901038769286583365577287586842504926903709342620280223999
8618034002113207421986429173836791762328264446457563303365567773748086441099699
1418277742534170109884358531893391759345115740238472929090154685591637926961966
8410006765983997449720472878818312002333832980305678654808714764645128242644788
2166442666167320960125647945148271256713266970673671446177956437523917429285033
9870225837340698523091904649672602434112703456111141498357839017934997137909133
6967064976371272484666132799082543054492955285949327938183416078270913266808655
63091

Viitteet

[1] John W. Matthews, Russell W. Howell
Complex Analysis for Mathematics and Engineering
Jones and Barlett Publishers, Sudbury, USA, 1997.