Bài Tập Chương III

Tên Thành Viên Nhóm	MSSV
Nguyễn Đình Chinh	1410383
Man Đức Trung	1414288
Võ Anh Huân	1633055
Hà Nguyễn Thuận Tâm	1413409
Hoàng Minh Trường	1414334

Bài tập chương 3

1) Hãy thể hiện đầy đủ các phần tử của ma trận M

$$M = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot\theta r_2^T + u_0 r_3^T & \alpha t_x - \alpha \cot\theta t_y + u_0 t_z \\ \dfrac{\beta}{\sin\theta} r_2^T + v_0 r_3^T & \dfrac{\beta}{\sin\theta} t_y + v_0 t_z \\ r_3^T & t_z \end{pmatrix}_{3x4}$$

$$r_1^T = [r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13}]$$
$$r_2^T = [r_{21} \quad r_{22} \quad r_{23}]$$
$$r_3^T = [r_{31} \quad r_{32} \quad r_{33}]$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha r_{11} - \alpha \cot\theta r_{21} + u_0 r_{31} & \alpha r_{12} - \alpha \cot\theta r_{22} + u_0 r_{32} & \alpha r_{13} - \alpha \cot\theta r_{23} + u_0 r_{33} & \alpha t_x - \alpha \cot\theta t_y + u_0 t_z \\ 0 + \dfrac{\beta}{\sin\theta} r_{21} + v_0 r_{31} & 0 + \dfrac{\beta}{\sin\theta} r_{22} + v_0 r_{32} & 0 + \dfrac{\beta}{\sin\theta} r_{23} + v_0 r_{33} & 0 + \dfrac{\beta}{\sin\theta} t_y + v_0 t_z \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{pmatrix}$$

2) Giải thích tại sao ma trận của affine camera có dạng như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có ma trận affine camera có dạng:

$$M = K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong đó ma trận Extrinsic là $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & t_1 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & t_2 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & t_1 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta chuyển lại sẽ ra dạng: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) CM rằng: ||**Vx**|| = ||**x**|| với **V** là một Orthogonal Matrix

V là một Orthogonal Matrix $\Rightarrow V^T V = I$

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} \quad , \quad \|Vx\| = \sqrt{(Vx)^T (Vx)}$$

$$(Vx)^T (Vx) = x^T V^T V x = x^T I x = x^T x$$

$$\Rightarrow \|Vx\| = \|x\|$$

4) Giải thích tại sao để tìm nghiệm khác 0 của một Homogeneous M x N Linear Systems: **Ax = 0**

Với M > N thì phải:

- Minimize |**Ax**|^2
- under the constraint |**x**|^2 =1

Nghiệm của một hệ homogeneous có các đặc điểm sau:

- x = 0 luôn là nghiệm (trivial solution), nhưng là nghiệm tầm thường
- Nếu $x \neq 0$ là nghiệm, thì kx, với k là đại lượng vô hướng bất kỳ, cũng là nghiệm

Vì thế để giới hạn kích thước của vector nghiệm (để loại trừ nghiệm tầm thường), ta cần một điều kiện thêm vào.
Cách đơn giản là cố định một nghiệm của vector nghiệm, ví dụ $x_j = 1$, và giải các nghiệm còn lại từ ma trận hệ thống non-homogeneous $\bar{A}\bar{x} = -A_j$. Điều này dẫn đến

khó khăn: nếu giá trị của x_j tình cờ là 0, thì ta đã sai. Vì thế nên sử dụng điều kiện tổng quát hơn:

$$||Bx|| = 1$$

Ta chọn B = I, suy ra ||Bx|| = ||x|| = 1

Ta có thể thấy hệ homogeneous Ax = 0 không có nghiệm (ngoài nghiệm x = 0) nếu như M > N và hạng của A = N (trường hợp thường thấy). Vậy nên ta sẽ tìm một nghiệm làm cho phương trình nhỏ nhất có thể, nghĩa là $Ax \approx 0$. Một điều kiện thường dùng là tiêu chuẩn Bình phương nhỏ nhất:

$$||Ax||^2 = \min$$

5) Hãy giải thích tại sao cột cuối cùng của ma trận **V** là ma trận **m**. Quan hệ giữa ma trận **m** và **M** là gì?

$$\boxed{\mathcal{P}}\boldsymbol{m} = 0$$

Compute SVD decomposition of P

$$\boxed{U_{2n\times 12}\ D_{12\times 12}\ V^T_{12\times 12}}$$

Để tìm nghiệm khác 0 của Homogeneous 2n x 12 Linear System: $Pm = 0$ ta phải:

Minimize $\|Pm\|$ under the constraint $\|m\| = 1$ (Câu 4)

$$P = U_{2n\times 12} D_{12x12} V^T_{12x12}$$

$$\Rightarrow \|Pm\| = \|UDV^T m\|$$

Vì U là Orthogonal Matrix $\Rightarrow \|UDV^T m\| = \|DV^T m\|$ (đã chứng minh ở Câu 3)

Và $\|m\| = \|V^T m\|$ (do V^T cũng là Orthogonal Matrix)

Bài toán trở thành: Minimize $\|DV^T m\|$ under the constraint $\|V^T m\| = 1$

Đặt $y = V^T m \Rightarrow$ Minimize $\|Dy\|$ under the constraint $\|y\| = 1$

D là Diagonal matrix, nghiệm của y để tối thiểu $\|Dy\|$ với ràng buộc $\|y\| = 1$ là

$$y = (0, 0, ..., 0, 1)^T_{12x1}$$

Mà $y = V^T m \Rightarrow m = V_{12x12} y_{12x1}$

Do đó ta kết luận ma trận m là cột cuối cùng của ma trận V .

6) Dẫn giải ra các kết quả sau:

Intrinsic	**Intrinsic**	**Extrinsic**
$p=\dfrac{\pm 1}{\lvert a_3\rvert}$ $\quad u_0 = p^2(a_1.a_3)$ $v_0 = p^2(a_2.a_3)$ $\cos\theta=\dfrac{(a_1\times a_3).(a_2\times a_3)}{\lvert a_1\times a_3\rvert.\lvert a_2\times a_3\rvert}$	$\alpha = p^2\lvert a_1\times a_3\rvert\sin\theta$ $\beta = p^2\lvert a_2\times a_3\rvert\sin\theta$ $\quad \Rightarrow f$	$r_1=\dfrac{(a_2\times a_3)}{\lvert a_2\times a_3\rvert}$ $\quad r_3=\dfrac{\pm 1}{\lvert a_3\rvert}$ $r_2 = r_3\times r_1$ $\quad T = pK^{-1}b$

Ta có ma trận M:

$$M=\begin{pmatrix} \alpha r_1^T-\alpha\cot\theta r_2^T+u_0r_3^T & \alpha t_x-\alpha\cot\theta t_y+u_0t_z \\ \dfrac{\beta}{\sin\theta}r_2^T+v_0r_3^T & \dfrac{\beta}{\sin\theta}t_y+v_0t_z \\ r_3^T & t_z \end{pmatrix}_{3\text{x}4}$$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha r_1^T-\alpha\cot\theta r_2^T+u_0r_3^T \\ \dfrac{\beta}{\sin\theta}r_2^T+v_0r_3^T \\ r_3^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} \alpha t_x-\alpha\cot\theta t_y+u_0t_z \\ \dfrac{\beta}{\sin\theta}t_y+v_0t_z \\ t_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

r_1, r_2, r_3 là 3 vecto trực giao của ma trận xoay R.

$$\left(a_1.a_3\right)=a_1^T.a_3=\left(\alpha r_1^T-\alpha\cot\theta r_2^T+u_0r_3^T\right).r_3=\alpha r_1^Tr_3-\alpha\cot\theta r_2^Tr_3+u_0r_3^Tr_3=u_0\lvert r_3\rvert^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \rho^2\left(a_1.a_3\right)=\frac{1}{\lvert r_3\rvert^2}u_0\lvert r_3\rvert^2=u_0}$$

$$\left(a_2.a_3\right)=a_2^T.a_3=\left(\frac{\beta}{\sin\theta}r_2^T+v_0r_3^T\right).r_3=\frac{\beta}{\sin\theta}r_2^Tr_3+v_0r_3^Tr_3=v_0\left|r_3\right|^2$$

$$\boxed{\Rightarrow\rho^2\left(a_2.a_3\right)=\frac{1}{\left|r_3\right|^2}v_0\left|r_3\right|^2=v_0}$$

$$\left(a_1\times a_3\right)=\left(\left(\alpha r_1-\alpha\cot\theta r_2+u_0r_3\right)\times r_3\right)=\alpha(r_1\times r_3)-\alpha\cot\theta(r_2\times r_3)+u_0(r_3\times r_3)=\alpha r_2-\alpha\cot\theta r_1$$

$$\left(a_2\times a_3\right)=\left(\left(\frac{\beta}{\sin\theta}r_2+v_0r_3\right)\times r_3\right)=\frac{\beta}{\sin\theta}(r_2\times r_3)+v_0(r_3\times r_3)=\frac{\beta}{\sin\theta}r_1$$

$$\Rightarrow\left(a_1\times a_3\right).\left(a_2\times a_3\right)=(\alpha r_2^T-\alpha\cot\theta r_1^T).\frac{\beta}{\sin\theta}r_1=-\alpha\cot\theta\frac{\beta}{\sin\theta}\left|r_1\right|^2$$

$$\left|a_1\times a_3\right|.\left|a_2\times a_3\right|=\left|\alpha r_2-\alpha\cot\theta r_1\right|.\left|\frac{\beta}{\sin\theta}r_1\right|=\sqrt{\alpha^2\left|r_2\right|^2+\alpha^2\cot^2\theta\left|r_1\right|^2}.\frac{\beta}{\sin\theta}\left|r_1\right|$$

Ta có $\left|r_1\right|=\left|r_2\right|=\left|r_3\right|$. Do R là ma trận xoay.

$$\boxed{\Rightarrow\frac{\left(a_1\times a_3\right).\left(a_2\times a_3\right)}{\left|a_1\times a_3\right|.\left|a_2\times a_3\right|}=\frac{-\alpha\cot\theta}{\alpha\sqrt{1+\cot^2\theta}}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}}}=\cos\theta}$$

$$\rho^2\left|a_1\times a_3\right|\sin\theta=\frac{1}{\left|r_3\right|^2}.\sqrt{\alpha^2\left|r_2\right|^2+\alpha^2\cot^2\theta\left|r_1\right|^2}.\sin\theta=\alpha$$

$$\rho^2\left|a_2\times a_3\right|\sin\theta=\frac{1}{\left|r_3\right|^2}.\frac{\beta}{\sin\theta}\left|r_1\right|.\sin\theta=\beta$$