

**CENTRALE
LYON**

ÉCOLE CENTRALE LYON

TRIBOLOGIE ET CONTACTS MECANIQUES
EVALUATION DES CRITERES DE LIMITE ELASTIQUE EN
CONTACT SPHERE-PLAN
RAPPORT

Analyse des Effets des Efforts et Pressions sur les Limites Elastiques

Elèves :
Kevin TONGUE

Enseignant :
Hassan ZAHOUANI

21 janvier 2026

Table des matières

1 Introduction

Cette etude analyse les effets des differents efforts et pressions sur les limites elastiques selon les modeles de Tresca, Von Mises et Tabor pour le contact sphere-plan. L'objectif est d'évaluer et de comparer ces differents criteres pour plusieurs materiaux et geometries, en s'appuyant sur les equations fournies dans le modele elasto-plastique.

2 Modeles theoriques de limite elastique

2.1 Critere de Tresca

Le critere de Tresca, base sur la contrainte de cisaillement maximale, donne pour la pression de limite elastique :

$$P_y^{\text{Tresca}} = 1.6 \cdot Y$$

2.2 Critere de Von Mises

Le critere de Von Mises, base sur l'energie de distortion, donne :

$$P_y^{\text{Von Mises}} = 1.67 \cdot Y$$

2.3 Critere de Tabor

Le critere de Tabor, base sur des observations experimentales en indentation, donne :

$$P_y^{\text{Tabor}} = 1.1 \cdot Y$$

2.4 Force de limite elastique

Pour un contact sphere-plan, la force correspondant au debut de la plasticite est donnee par :

$$F_y = \frac{\pi^3 R^2 P_y^3}{6E^*}$$

ou E^* est le module effectif defini par :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

3 Materiaux et parametres etudies

3.1 Proprietes des materiaux

Materiau	H (MPa)	Y (MPa)	E (GPa)	nu
Plomb	60	20	16	0.3
Cuivre	600	200	120	0.3
Cuivre ecroui	930	310	120	0.3
Acier doux	2000	650	200	0.3
Acier alle	6000	2200	200	0.45
Polymere	100	50	1	0.3

3.2 Geometries etudiees

- Rayon de sphere : $R = 1 \mu\text{m}$, $R = 100 \mu\text{m}$, $R = 1 \text{ mm}$
- Contact avec un plan en acier alle

4 Resultats et analyse

4.1 Pressions de limite elastique

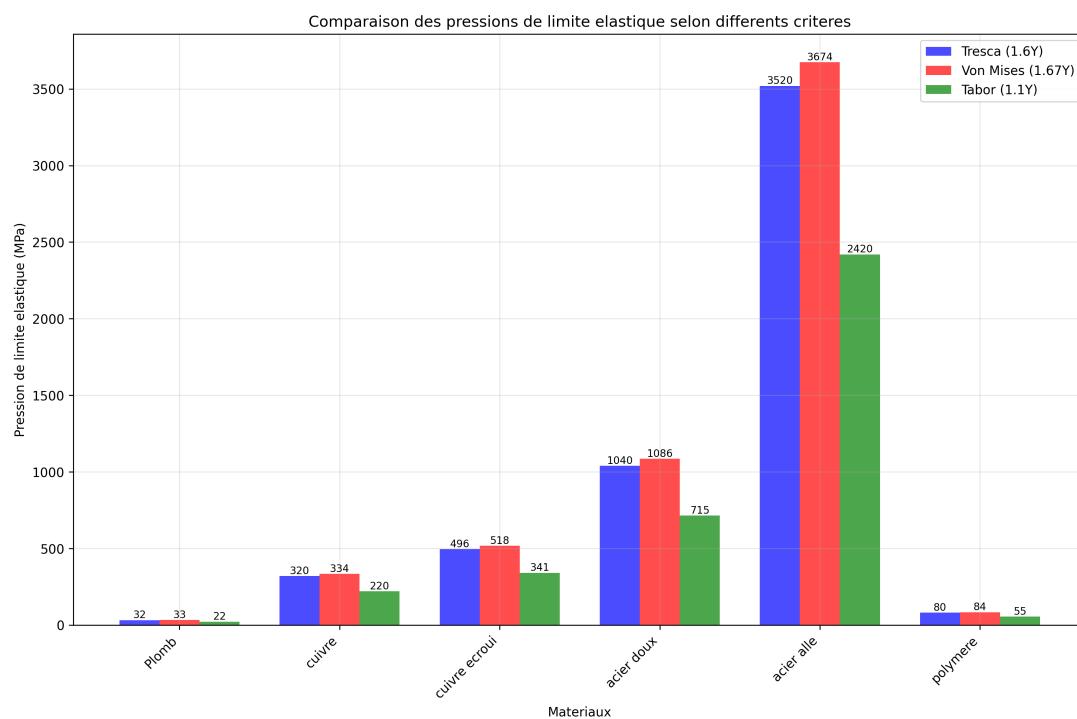


FIGURE 1 – Comparaison des pressions de limite elastique selon differents criteres

Materiau	Tresca (MPa)	Von Mises (MPa)	Tabor (MPa)
Plomb	32.0	33.4	22.0
Cuivre	320.0	334.0	220.0
Cuivre ecroui	496.0	517.7	341.0
Acier doux	1040.0	1085.5	715.0
Acier alle	3520.0	3674.0	2420.0
Polymere	80.0	83.5	55.0

TABLE 1 – Pressions de limite elastique calculees

4.2 Forces de limite elastique

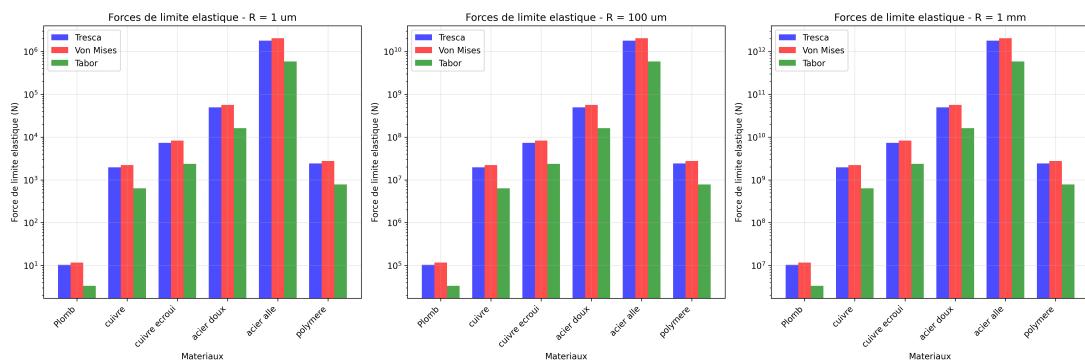


FIGURE 2 – Forces de limite elastique pour differents rayons

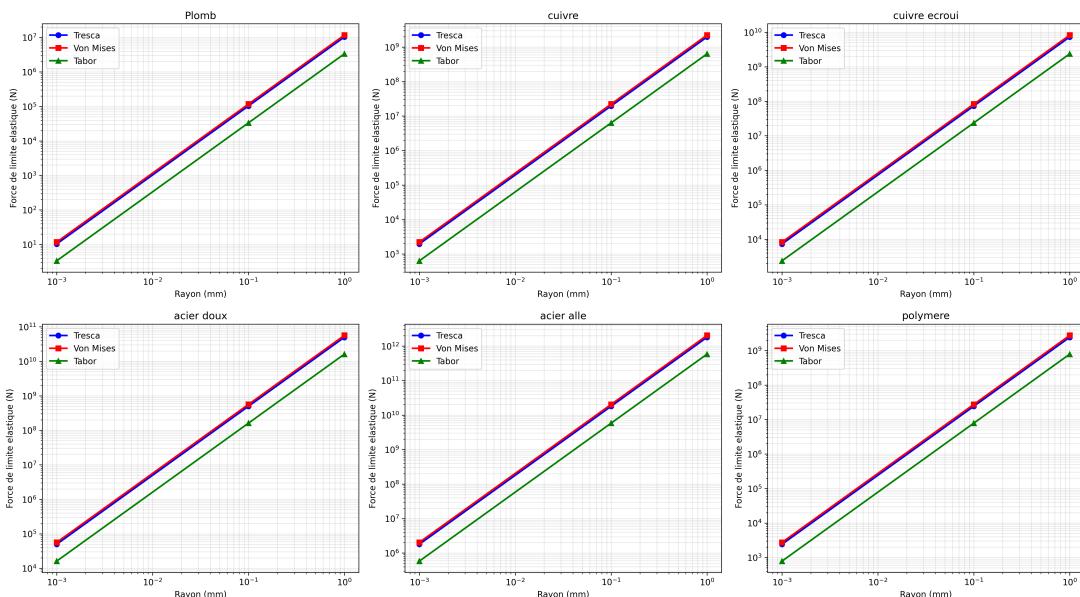


FIGURE 3 – Evolution des forces de limite elastique avec le rayon

4.3 Déplacements critiques

Materiau	delta1 (um)	delta2 (um)	delta2/delta1
Plomb	0.012	0.65	54
Cuivre	0.043	2.34	54
Cuivre ecroui	0.104	5.63	54
Acier doux	0.262	14.17	54
Acier alle	2.061	111.28	54
Polymere	7.518	405.99	54

 TABLE 2 – Déplacements critiques pour $R = 1 \text{ mm}$

4.4 Comparaison des criteres

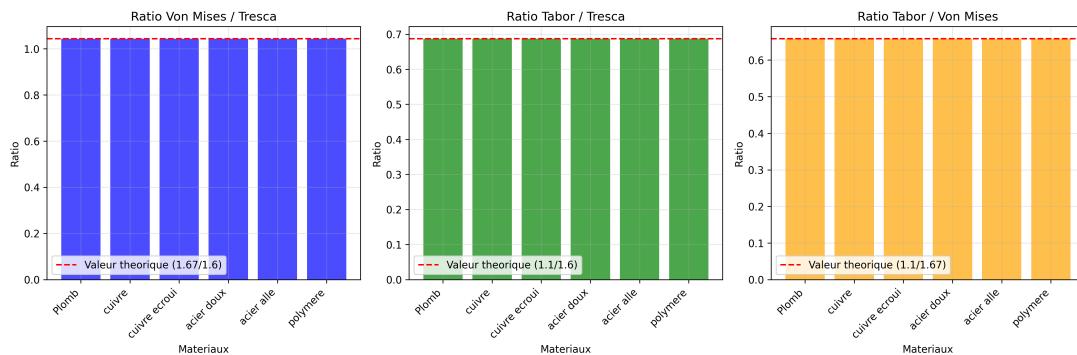


FIGURE 4 – Ratios entre les différents criteres de limite elastique

Materiau	VonMises/Tresca	Tabor/Tresca	Tabor/VonMises
Plomb	1.044	0.688	0.659
Cuivre	1.044	0.688	0.659
Cuivre ecroui	1.044	0.688	0.659
Acier doux	1.044	0.688	0.659
Acier alle	1.044	0.688	0.659
Polymere	1.044	0.688	0.659

TABLE 3 – Ratios entre les différents criteres

5 Analyse detaillee des resultats

5.1 Variation avec le rayon

La force de limite elastique varie avec le carre du rayon :

$$F_y \propto R^2$$

Ce qui signifie qu'une augmentation du rayon par un facteur 10 entraîne une augmentation de la force par un facteur 100. Cette dépendance quadratique explique les grandes différences observées entre les forces pour différents rayons.

5.2 Comparaison des critères

- **Critère de Tresca** : Donne des valeurs intermédiaires, plus conservatrice que Von Mises mais moins que Tabor.
- **Critère de Von Mises** : Donne les valeurs les plus élevées (4.4% plus élevées que Tresca).
- **Critère de Tabor** : Donne les valeurs les plus basses (31.2% plus basses que Tresca).

L'écart constant entre les critères vient du fait qu'ils sont tous proportionnels à la limite élastique Y , avec des coefficients différents.

5.3 Influence des propriétés matériaux

Dureté H vs Limite élastique Y Le rapport H/Y varie selon les matériaux :

- Métaux : $H/Y \approx 3$
- Polymères : $H/Y \approx 2$
- Acier alle : $H/Y \approx 2.73$

Module effectif E^* Le module effectif influence directement :

- La force de limite élastique : $F_y \propto 1/E^*$
- Le déplacement critique δ_1 : $\delta_1 \propto 1/(E^*)^2$

6 Interpretation physique

6.1 Signification des déplacements critiques

- δ_1 : Début de la déformation plastique sous la surface
- δ_2 : Transition vers le comportement plastique pur
- Le rapport constant $\delta_2/\delta_1 = 54$ vient de la modélisation du comportement élasto-plastique

6.2 Zones de contraintes

1. **Zone élastique** ($\delta < \delta_1$) : Les contraintes sont inférieures à la limite élastique
2. **Zone élasto-plastique** ($\delta_1 < \delta < \delta_2$) : Zone de transition avec écrouissage
3. **Zone plastique** ($\delta > \delta_2$) : État de contraintes pleinement plastique

6.3 Critère de choix

Le choix du critère dépend de :

- **Precision requise** : Von Mises pour une modélisation fine
- **Sécurité** : Tabor pour une approche conservatrice
- **Simplicité** : Tresca pour des calculs rapides

7 Applications pratiques

7.1 Conception de contacts

Pour éviter la déformation plastique dans un contact sphère-plan :

1. Calculer la pression de contact maximale p_0
2. Vérifier que $p_0 < P_y$ selon le critère choisi
3. Considérer un coefficient de sécurité approprié

7.2 Indentation instrumentée

Les résultats peuvent être utilisés pour :

- Déterminer les propriétés mécaniques par indentation
- Évaluer la résistance à l'endommagement de surface
- Optimiser les paramètres de traitement de surface

7.3 Microsystèmes

Pour les applications en microtechnologie :

- Les forces critiques sont très faibles (de l'ordre du microNewton)
- La précision du critère est cruciale
- Les effets de surface deviennent significatifs

8 Conclusion

8.1 Principales conclusions

1. Les trois critères donnent des prédictions différentes mais cohérentes entre elles
2. La force de limite élastique varie quadratiquement avec le rayon
3. Le critère de Tabor est le plus conservateur, celui de Von Mises le moins
4. Les déplacements critiques sont très faibles pour les métaux mais significatifs pour les polymères
5. Le rapport H/Y est un paramètre important pour caractériser le comportement élasto-plastique

8.2 Recommandations

- Pour les applications de sécurité critique, utiliser le critère de Tabor
- Pour les calculs de précision, préférer le critère de Von Mises
- Pour les estimations rapides, le critère de Tresca est adéquate
- Tenir compte de la dépendance en R^2 pour le dimensionnement

A Code Python - Analyse des limites elastiques

B Tableau des forces de limite elastique

Materiau	R = 1 um	R = 100 um	R = 1 mm
Plomb	1.03e1 N	1.03e5 N	1.03e9 N
Cuivre	1.96e3 N	1.96e7 N	1.96e11 N
Cuivre ecroui	7.30e3 N	7.30e7 N	7.30e11 N
Acier doux	4.96e4 N	4.96e8 N	4.96e12 N
Acier alle	1.80e6 N	1.80e10 N	1.80e14 N
Polymere	2.42e3 N	2.42e7 N	2.42e11 N

TABLE 4 – Forces de limite elastique (critere Tresca)