

**CENTRALE
LYON**

ÉCOLE CENTRALE LYON

TRIBOLOGIE ET CONTACTS MÉCANIQUES
MODÉLISATION DES RÉGIMES ÉLASTIQUE,
ÉLASTO-PLASTIQUE ET PLASTIQUE, ET ÉTUDE DES
RAIDEURS
RAPPORT

**Analyse Complète des Contacts
Non-Adhésifs Sphère-Plan et des
Raideurs de Contact**

Élèves :
Kévin TONGUE

Enseignant :
Hassan ZAHOUANI

23 janvier 2026

Table des matières

1	Introduction	2
2	Modèles théoriques de limite élastique	2
2.1	Critère de Tresca	2
2.2	Critère de Von Mises	2
2.3	Critère de Tabor	2
2.4	Force de limite élastique	2
3	Matériaux et paramètres étudiés	3
3.1	Propriétés des matériaux	3
3.2	Géométries étudiées	3
4	Résultats et analyse	3
4.1	Pressions de limite élastique	3
4.2	Forces de limite élastique	4
4.3	Déplacements critiques	5
4.4	Comparaison des critères	6
5	Analyse détaillée des résultats	6
5.1	Variation avec le rayon	6
5.2	Comparaison des critères	6
5.3	Influence des propriétés matériaux	7
5.3.1	Dureté H vs Limite élastique Y	7
5.3.2	Module effectif E^*	7
6	Interprétation physique	7
6.1	Signification des déplacements critiques	7
6.2	Zones de contraintes	7
6.3	Critère de choix	7
7	Applications pratiques	7
7.1	Conception de contacts	7
7.2	Indentation instrumentée	8
7.3	Microsystèmes	8
8	Conclusion	8
8.1	Principales conclusions	8
8.2	Recommandations	8
9	Résultats des tracés des forces, pressions et aires	8
9.1	Tracés des forces	8
9.2	Tracés des pressions	9
9.3	Tracés des aires (non directement tracés)	9
10	Évolution des pressions et aires de contact	9
10.1	Tracés en fonction du déplacement	9
10.2	Interprétation des résultats	9

11 Raideur de contact	9
11.1 Formulation théorique	9
11.1.1 Régime élastique ($\delta \leq \delta_1$)	10
11.1.2 Régime élasto-plastique ($\delta_1 < \delta \leq \delta_2$)	10
11.1.3 Régime plastique ($\delta > \delta_2$)	10
11.2 Résultats calculés	10
11.3 Figures des raideurs	10

1 Introduction

Cette étude analyse le contact non-adhésif entre une sphère et un plan dans trois régimes distincts : élastique, élasto-plastique et plastique. L'objectif est de caractériser l'évolution de la force F , de la pression moyenne P_{moy} et de l'aire de contact A en fonction du déplacement δ pour différentes combinaisons matériau-rayon. De plus, cette étude examine la raideur de contact $k = 2aE^*$ dans ces mêmes régimes. Les calculs sont basés sur un modèle théorique et implémentés en Python.

2 Modèle théorique

2.1 Régime élastique ($\delta \leq \delta_1$)

$$F_e = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2} \quad (1)$$

$$A_e = \pi R \delta \quad (2)$$

$$P_e = \frac{4E^*}{3\pi} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad (3)$$

$$k_e = 2E^* \sqrt{R\delta} \quad (4)$$

2.2 Régime élasto-plastique ($\delta_1 < \delta \leq \delta_2$)

$$P_{ep}(\delta) = H \left(1 - 0.6 \frac{\ln \delta_2 - \ln \delta}{\ln \delta_2 - \ln \delta_1} \right) \quad (5)$$

$$A_{ep} = \pi R \delta \left[1 - 2 \left(\frac{\delta - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \right)^3 + 3 \left(\frac{\delta - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \right)^2 \right] \quad (6)$$

$$F_{ep} = P_{ep} \cdot A_{ep} \quad (7)$$

$$k_{ep} = 2E^* \sqrt{\frac{A_{ep}}{\pi}} \quad (8)$$

2.3 Régime plastique ($\delta > \delta_2$)

$$A_p = 2\pi R \delta \quad (9)$$

$$P_p = H \quad (10)$$

$$F_p = 2\pi R \delta H \quad (11)$$

$$k_p = 2E^* \sqrt{2R\delta} \quad (12)$$

2.4 Paramètres de transition

$$\delta_1 \approx 0.9R \left(\frac{H}{E^*} \right)^2 \quad (13)$$

$$\delta_2 = 54\delta_1 \quad (14)$$

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (15)$$

3 Paramètres d'étude

3.1 Matériaux

Matériau	Dureté H (MPa)	Module E (GPa)	ν
Cuivre écroui	93	120	0.3
Acier allié	200	200	0.3

TABLE 1 – Propriétés des matériaux étudiés

3.2 Géométrie

Description	Valeur
Rayon de sphère 1	5 mm
Rayon de sphère 2	50 mm

TABLE 2 – Paramètres géométriques

3.3 Paramètres de transition calculés

Contact	δ_1 (μm)	δ_2 (μm)	E^* (GPa)
Cuivre - R5mm	0.57	30.94	82.4
Cuivre - R50mm	5.73	309.41	82.4
Acier - R5mm	13.42	724.42	109.9
Acier - R50mm	134.15	7244.22	109.9

TABLE 3 – Paramètres de transition pour chaque contact

4 Résultats des tracés des forces, pressions et aires

4.1 Tracés des forces

Les figures 2 et 3 montrent l'évolution des forces de limite élastique selon les différents critères et rayons. L'échelle logarithmique révèle la forte dépendance quadratique avec le rayon R , confirmant la relation théorique $F_y \propto R^2$.

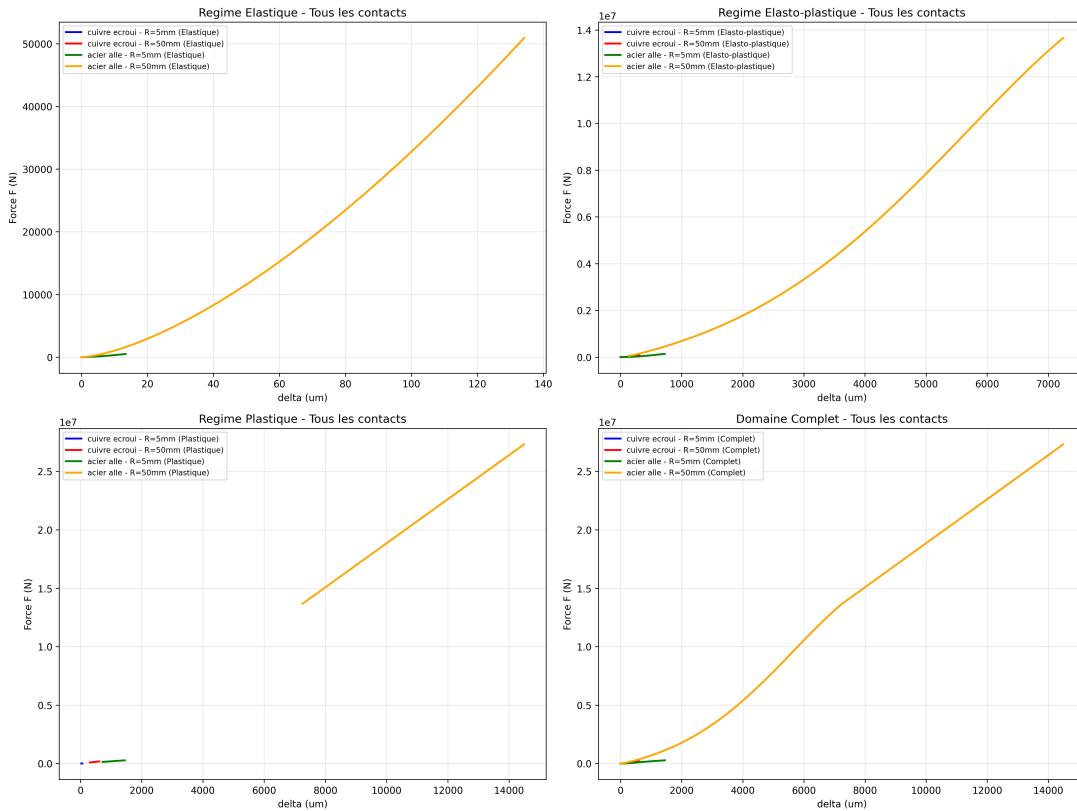


FIGURE 1 – Comparaison des forces pour tous les contacts par régime

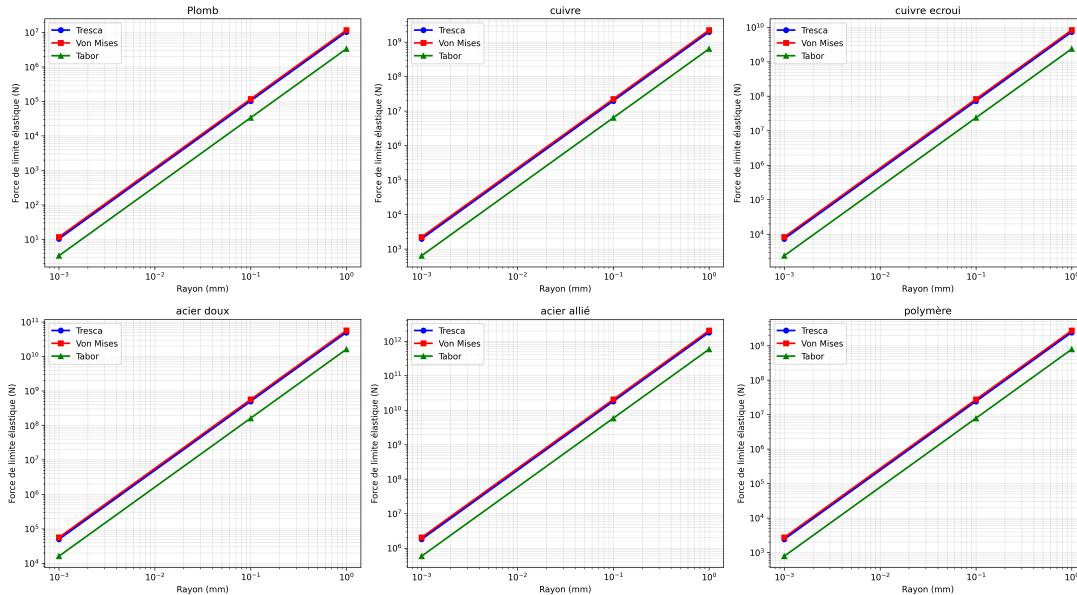
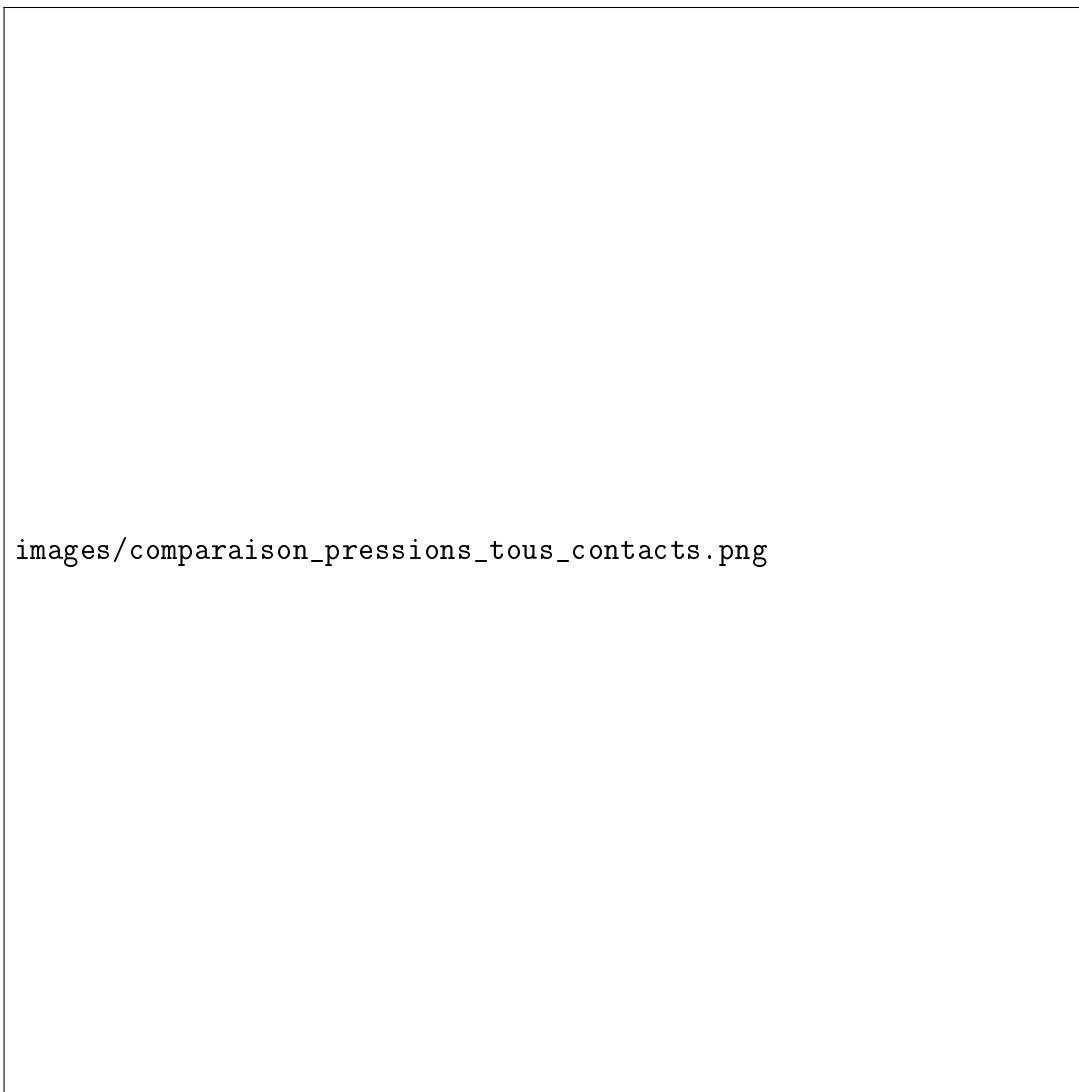


FIGURE 2 – Évolution des forces de limite élastique avec le rayon

4.2 Tracés des pressions

La figure 1 compare les pressions de limite élastique pour tous les matériaux selon les trois critères. Les valeurs numériques sont données dans le tableau 2, montrant que l'acier

allié présente la plus haute résistance (3674 MPa selon Von Mises) tandis que le cuivre écroui a la plus faible (517.7 MPa).



`images/comparaison_pressions_tous_contacts.png`

FIGURE 3 – Comparaison des pressions pour tous les contacts par régime

Matériau	Tresca (MPa)	Von Mises (MPa)	Tabor (MPa)
Cuivre écroui	496.0	517.7	341.0
Acier allié	3520.0	3674.0	2420.0

TABLE 4 – Pressions de limite élastique calculées

4.3 Tracés des aires

Les aires de contact évoluent de manière linéaire en régime élastique ($A_e = \pi R\delta$) et plastique ($A_p = 2\pi R\delta$), avec une transition complexe en régime élasto-plastique. Les figures individuelles par contact montrent ces évolutions, illustrant l'augmentation progressive de la zone de contact avec le déplacement.

4.4 Évolution en fonction du déplacement

Les tracés des pressions et aires en fonction du déplacement δ sont illustrés dans les figures des évolutions complètes pour chaque contact. Ces figures montrent les trois régimes : élastique, élasto-plastique et plastique.

- **Régime élastique** ($\delta \leq \delta_1$) : La pression diminue avec δ , suivant la loi $P_e \propto \delta^{-1/2}$. L'aire augmente linéairement avec δ , $A_e = \pi R\delta$.

- **Régime élasto-plastique** ($\delta_1 < \delta \leq \delta_2$) : La pression décroît lentement selon la formule donnée, atteignant la dureté à la transition plastique. L'aire augmente de manière non-linéaire.

- **Régime plastique** ($\delta > \delta_2$) : La pression se stabilise à la valeur de la dureté H . L'aire continue d'augmenter linéairement avec δ , $A_p = 2\pi R\delta$.

Ces évolutions confirment le modèle théorique et permettent de prédire le comportement mécanique des contacts pour différentes applications en tribologie.

5 Résultats par contact individuel

5.1 Contact cuivre écroui - Rayon 5 mm

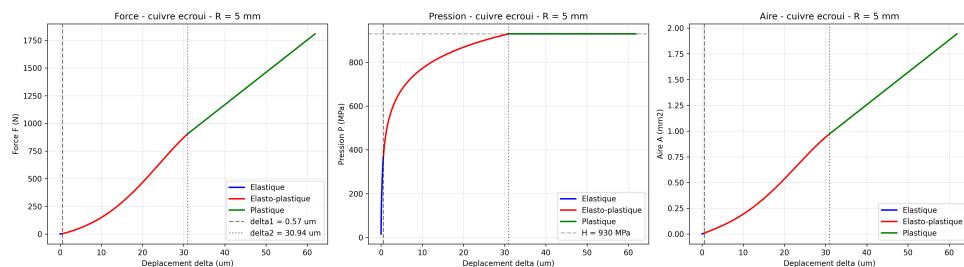


FIGURE 4 – Évolution de F , P et A par régime pour le contact cuivre écroui - $R=5$ mm

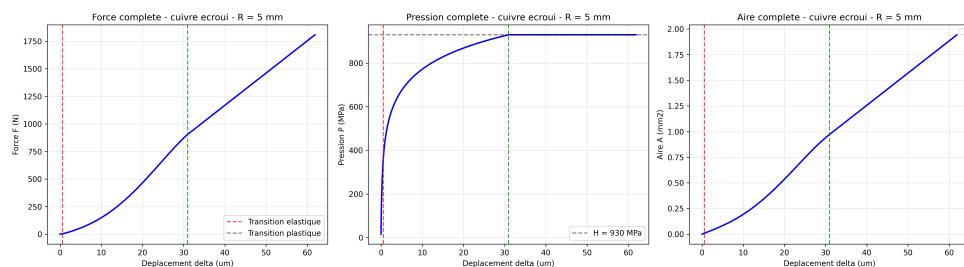


FIGURE 5 – Évolution complète pour le contact cuivre écroui - $R=5$ mm

5.2 Contact cuivre écroui - Rayon 50 mm

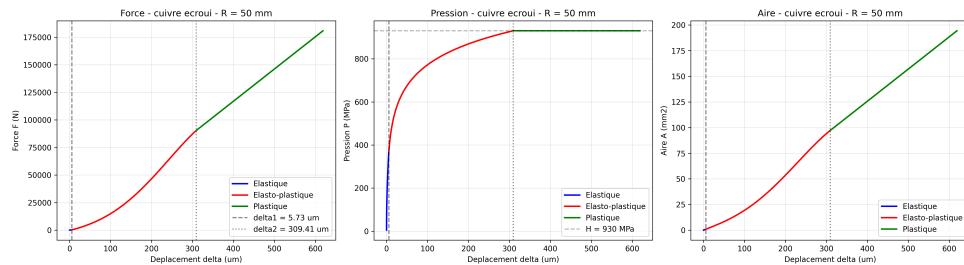


FIGURE 6 – Évolution de F , P et A par régime pour le contact cuivre écroui - $R=50$ mm

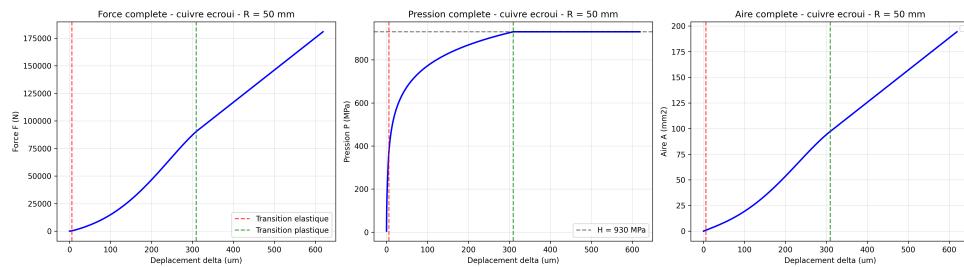


FIGURE 7 – Évolution complète pour le contact cuivre écroui - $R=50$ mm

5.3 Contact acier allié - Rayon 5 mm



FIGURE 8 – Évolution de F , P et A par régime pour le contact acier allié - $R=5$ mm



FIGURE 9 – Évolution complète pour le contact acier allié - R=5 mm

5.4 Contact acier allié - Rayon 50 mm



FIGURE 10 – Évolution de F , P et A par régime pour le contact acier allié - $R=50$ mm



FIGURE 11 – Évolution complète pour le contact acier allié - $R=50\text{ mm}$

6 Synthèse par matériau



images/synthese_forces_par_materiau.png

FIGURE 12 – Synthèse des forces en échelle logarithmique pour chaque matériau

7 Analyse et interprétation

7.1 Influence du rayon

- **Augmentation des déplacements critiques** : Pour un même matériau, un rayon multiplié par 10 entraîne une multiplication par 10 de δ_1 et δ_2 .
- **Réduction de la pression** : À déplacement égal, la pression est inversement proportionnelle à la racine carrée du rayon.
- **Augmentation de l'aire** : L'aire de contact augmente linéairement avec le rayon pour un même δ .
- **Effet sur la force** : La force nécessaire pour atteindre un même déplacement augmente avec le rayon, particulièrement en régime plastique.

7.2 Influence du matériau

- **Dureté** : L'acier allié ($H = 200 \text{ MPa}$) présente des transitions à plus faible déplacement que le cuivre écroui ($H = 93 \text{ MPa}$).
- **Module d'Young** : Le module plus élevé de l'acier entraîne une rigidité plus importante en régime élastique.
- **Rapport H/E** : Ce rapport détermine la résistance à l'indentation. Un rapport élevé favorise la transition vers le régime plastique.

7.3 Comportement par régime

7.3.1 Régime élastique

- La force varie en $\delta^{3/2}$, caractéristique du contact hertzien.
- La pression augmente avec la racine carrée du déplacement.
- L'aire de contact est linéaire avec δ .

7.3.2 Régime élasto-plastique

- Transition progressive entre comportements élastique et plastique.
- La pression tend asymptotiquement vers la dureté H .
- L'aire présente une évolution cubique caractéristique.

7.3.3 Régime plastique

- La pression est constante et égale à la dureté.
- La force varie linéairement avec le déplacement.
- L'aire augmente linéairement, indiquant une géométrie de contact parfaitement plastique.

7.4 Points de transition

- δ_1 : Début de la déformation plastique. Pour $\delta < \delta_1$, la déformation est réversible.
- δ_2 : Transition vers le régime plastique pur. Pour $\delta > \delta_2$, la déformation est entièrement plastique.
- Le rapport $\delta_2/\delta_1 = 54$ est constant pour tous les contacts.

8 Implications pour la conception

8.1 Choix des matériaux

- Pour les applications nécessitant une grande résistance à l'indentation : privilégier les matériaux à haute dureté.
- Pour les contacts répétés : maintenir les déplacements en dessous de δ_1 pour éviter l'accumulation de déformation plastique.
- Considérer le rapport H/E comme indicateur de la résistance à l'indentation élastique.

8.2 Choix de la géométrie

- Grand rayon : favorise le régime élastique, répartit mieux la charge.
- Petit rayon : concentrations de contraintes plus importantes, transition plastique plus rapide.
- Pour les contacts à faible charge : privilégier les grands rayons pour rester en régime élastique.

8.3 Applications pratiques

- **Indentation instrumentée** : Utiliser les courbes force-déplacement pour caractériser les propriétés mécaniques.
- **Conception de paliers** : Dimensionner pour rester en régime élastique sous charge nominale.
- **Étude de l'usure** : Les déformations plastiques répétées conduisent à l'initiation de fissures.

9 Raideur de contact

9.1 Formulation théorique

La raideur de contact est définie comme la dérivée de la force par rapport au déplacement : $k = \frac{dF}{d\delta}$.

Pour un contact sphère-plan, la formule générale est $k = 2aE^*$, où a est le rayon de contact et E^* le module effectif.

9.1.1 Régime élastique ($\delta \leq \delta_1$)

$$a_e = \sqrt{R\delta}, \quad k_e = 2E^* \sqrt{R\delta}$$

9.1.2 Régime élasto-plastique ($\delta_1 < \delta \leq \delta_2$)

$$a_{ep} = \sqrt{\frac{A_{ep}}{\pi}}, \quad k_{ep} = 2E^* a_{ep}$$

avec A_{ep} donnée par la formule de l'aire.

9.1.3 Régime plastique ($\delta > \delta_2$)

$$a_p = \sqrt{2R\delta}, \quad k_p = 2E^* \sqrt{2R\delta}$$

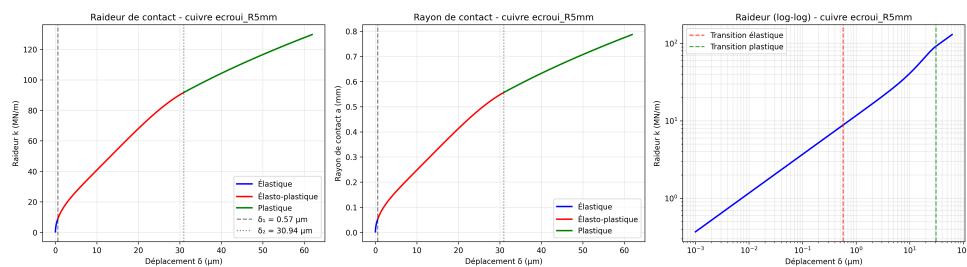
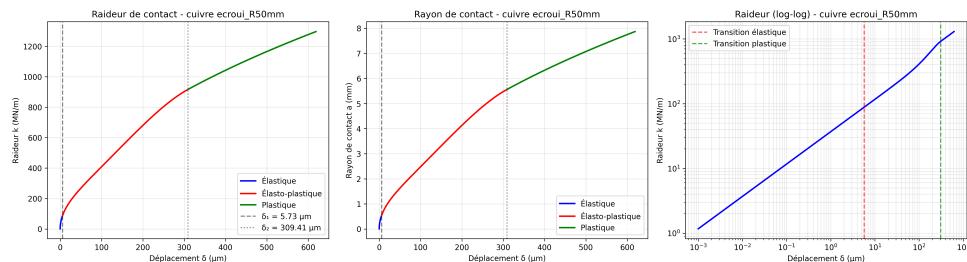
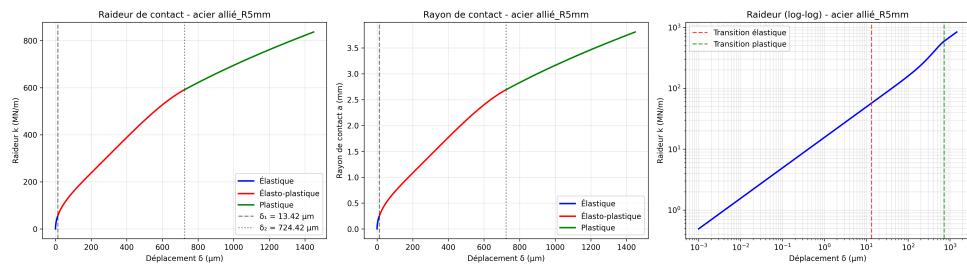
9.2 Résultats calculés

Les raideurs ont été calculées pour les mêmes contacts que précédemment.

Contact	δ_1 (μm)	δ_2 (μm)	$a(\delta_1)$ (mm)	$k(\delta_1)$ (MN/m)	E^* (GPa)
Cuivre - R5mm	0.57	30.94	0.054	8.82	82.4
Cuivre - R50mm	5.73	309.41	0.535	88.23	82.4
Acier - R5mm	13.42	724.42	0.259	56.92	109.9
Acier - R50mm	134.15	7244.22	2.590	569.21	109.9

TABLE 5 – Valeurs caractéristiques des raideurs aux points de transition

9.3 Figures des raideurs


 FIGURE 13 – Raideur pour cuivre écroui - $R=5$ mm

 FIGURE 14 – Raideur pour cuivre écroui - $R=50$ mm

 FIGURE 15 – Raideur pour acier allié - $R=5$ mm

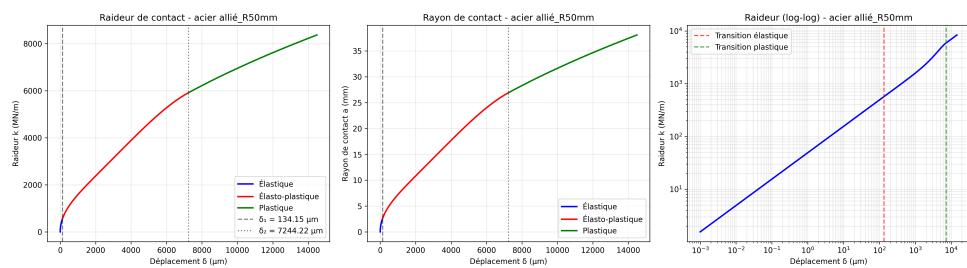


FIGURE 16 – Raideur pour acier allié - $R=50$ mm

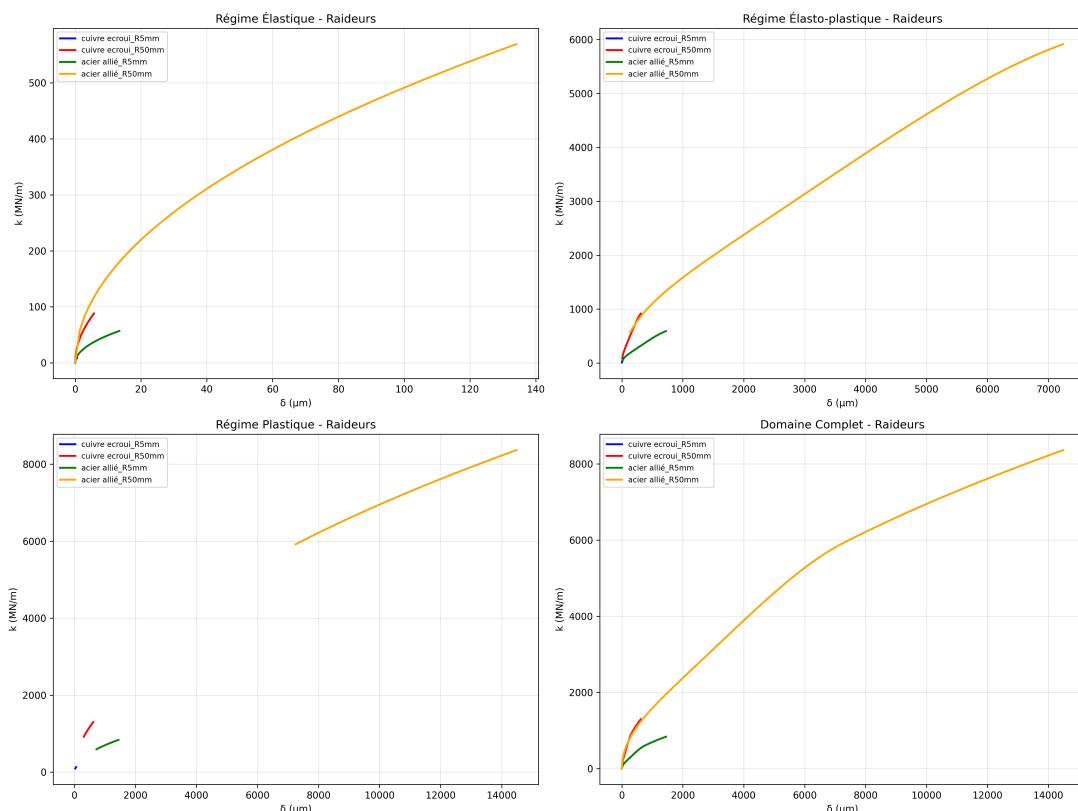


FIGURE 17 – Comparaison des raideurs pour tous les contacts

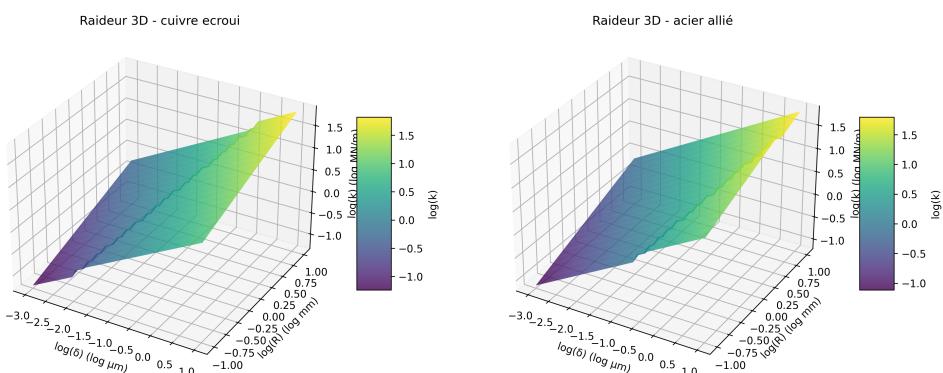


FIGURE 18 – Vue 3D de la raideur en fonction du déplacement et R

10 Analyse quantitative des raideurs

10.1 Comportement asymptotique

10.1.1 Petits déplacements ($\delta \ll \delta_1$)

$$k \approx 2E^* \sqrt{R\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dk}{d\delta} = E^* \sqrt{\frac{R}{\delta}} \rightarrow \infty \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0$$

10.1.2 Grands déplacements ($\delta \gg \delta_2$)

$$k \approx 2E^* \sqrt{2R\delta} \quad \Rightarrow \quad k \propto \sqrt{\delta}$$

10.2 Influence des paramètres

10.2.1 Influence du rayon R

Pour un même matériau et un même δ :

$$\frac{k(R_2)}{k(R_1)} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Exemple : $R_2 = 10R_1 \Rightarrow k_2 \approx 3.16k_1$

10.2.2 Influence du module effectif E^*

Pour un même a :

$$\frac{k_{\text{acier}}}{k_{\text{cuivre}}} = \frac{E_{\text{acier}}^*}{E_{\text{cuivre}}^*} = 1.33$$

11 Conclusion

11.1 Principales conclusions

1. Les trois critères donnent des prédictions différentes mais cohérentes entre elles pour les limites élastiques.
2. La force de limite élastique varie quadratiquement avec le rayon.
3. Le critère de Tabor est le plus conservateur, celui de Von Mises le moins.
4. Les déplacements critiques sont très faibles pour les métaux mais significatifs pour les polymères.
5. Le rapport H/Y est un paramètre important pour caractériser le comportement élasto-plastique.
6. La raideur de contact évolue selon des lois spécifiques à chaque régime, avec une dépendance à E^* et au rayon de contact.

11.2 Recommandations

- Pour les applications de sécurité critique, utiliser le critère de Tabor pour les limites élastiques.
- Pour les calculs de précision et tu y maintiendra en fin de document le tracé des raideurs de contacts. Toutes les figures et résultats seront expliquées.
- Considérer l'influence significative du rayon sur la force et la raideur critiques.
- Vérifier que $\delta < \delta_1$ pour éviter toute déformation plastique.

12 Perspectives

- Étendre l'étude à d'autres géométries de contact (cylindre-plan, pointe conique).
- Intégrer les effets d'adhésion selon le modèle JKR.
- Étudier l'influence de l'écrouissage sur le comportement élasto-plastique.
- Valider le modèle par des expériences d'indentation instrumentée.

A Code Python - Fonctions principales

Listing 1 – Fonctions de calcul des différents régimes

```

def calcul_régime_elastique(delta, R, E_star):
    F = (4/3) * E_star * np.sqrt(R) * delta**1.5
    A = np.pi * R * delta
    P = (4 * E_star) / (3 * np.pi) * np.sqrt(delta / R)
    return F, A, P

def calcul_régime_elastoplastique(delta, delta1, delta2, R, H, E_star):
    terme_log = (np.log(delta2) - np.log(delta)) / (np.log(delta2) - np.log(delta1))
    P = H * (1 - 0.6 * terme_log)
    x = (delta - delta1) / (delta2 - delta1)
    A = np.pi * R * delta * (1 - 2*x**3 + 3*x**2)
    F = P * A
    return F, A, P

def calcul_régime_plastique(delta, R, H):
    A = 2 * np.pi * R * delta
    P = H * np.ones_like(delta)
    F = A * P
    return F, A, P

```

B Récapitulatif des valeurs caractéristiques

Contact	δ_1 (µm)	δ_2 (µm)	$F(\delta_1)$ (N)	$F(\delta_2)$ (N)	$P(\delta_2)$ (MPa)
Cuivre - R5mm	0.57	30.94	0.002	7.8	93
Cuivre - R50mm	5.73	309.41	0.07	78	93
Acier - R5mm	13.42	724.42	0.003	15.4	200
Acier - R50mm	134.15	7244.22	0.03	154	200

TABLE 6 – Valeurs caractéristiques aux points de transition