

**CENTRALE
LYON**

ÉCOLE CENTRALE LYON

TRIBOLOGIE ET CONTACTS MÉCANIQUES
CONTACT HERTZIEN ET CALCUL DES CONTRAINTES
RAPPORT

Analyse du Contact Élastique Sphère-Plan et Calcul des Contraintes

Elèves :
Kévin TONGUE

Enseignant :
Hassan ZAHOUANI

20 janvier 2026

Table des matières

1	Introduction	2
2	Données du problème	2
3	Méthodologie de calcul	2
4	Résultats principaux	2
4.1	Question 1 : Rayon de contact	2
4.2	Question 2 : Pressions moyenne et maximale	2
4.3	Question 3 : Module d'élasticité du plan	3
4.4	Question 4 : Raideur de contact	3
4.5	Question 5 : Profil de pression Hertzien	3
4.6	Question 6 : Courbe force-déplacement et contrainte-déformation	3
4.7	Questions 7-8 : Déplacements à la surface	4
4.8	Question 9 : Évolution des contraintes dans le cercle de contact	4
4.9	Question 10 : Contrainte σ_z en fonction de la profondeur	5
4.10	Question 11 : Contrainte de cisaillement	5
5	Conclusion	6
6	Annexe : Code Python	6
A	Récapitulatif des valeurs numériques	7

1 Introduction

Ce rapport présente l'analyse du contact élastique entre une sphère en acier et un plan métallique, conformément aux données fournies dans le DM2. L'étude repose sur la théorie de Hertz pour les contacts élastiques, qui permet de déterminer les paramètres mécaniques essentiels tels que le rayon de contact, les pressions, les déplacements et les contraintes internes. Un programme Python a été développé pour réaliser les calculs et générer les visualisations requises.

2 Données du problème

Les paramètres d'étude sont les suivants :

- **Sphère en acier** : Diamètre $d = 6 \text{ mm}$, module d'Young $E_1 = 210 \text{ GPa}$, coefficient de Poisson $\nu_1 = 0.3$
- **Effort maximal** : $F_{\max} = 0.5 \text{ N}$
- **Enfoncement** : $\delta = 50 \mu\text{m}$
- **Plan métallique** : Coefficient de Poisson $\nu_2 = 0.3$ (supposé)

3 Méthodologie de calcul

Les calculs sont basés sur la théorie de Hertz pour le contact élastique entre une sphère et un plan. Les principales relations utilisées sont :

- **Rayon de contact** : $a = \sqrt{R\delta}$
- **Module effectif** : $E^* = \frac{3F_{\max}R}{4a^3}$
- **Pression maximale** : $p_0 = \frac{3}{2}p_{\text{moy}} = \frac{3F_{\max}}{2\pi a^2}$
- **Pression moyenne** : $p_{\text{moy}} = \frac{F_{\max}}{\pi a^2}$
- **Raideur de contact** : $K = 2aE^*$

Le module d'Young du plan E_2 est déduit de la relation :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

4 Résultats principaux

4.1 Question 1 : Rayon de contact

Le rayon de contact calculé est :

$$a = \sqrt{R\delta} = \sqrt{3 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^{-6}} = 0.387 \text{ mm}$$

4.2 Question 2 : Pressions moyenne et maximale

- Pression moyenne : $p_{\text{moy}} = 1.06 \text{ MPa}$
- Pression maximale : $p_0 = 1.59 \text{ MPa}$

4.3 Question 3 : Module d'élasticité du plan

Le module effectif est $E^* = 68.3 \text{ GPa}$. En supposant $\nu_2 = 0.3$, on obtient :

$$E_2 = 101.2 \text{ GPa}$$

4.4 Question 4 : Raideur de contact

$$K = 2aE^* = 52.8 \text{ N/m}$$

4.5 Question 5 : Profil de pression Hertzien

Le profil de pression suit la distribution hertzienne :

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad \text{pour } 0 \leq r \leq a$$

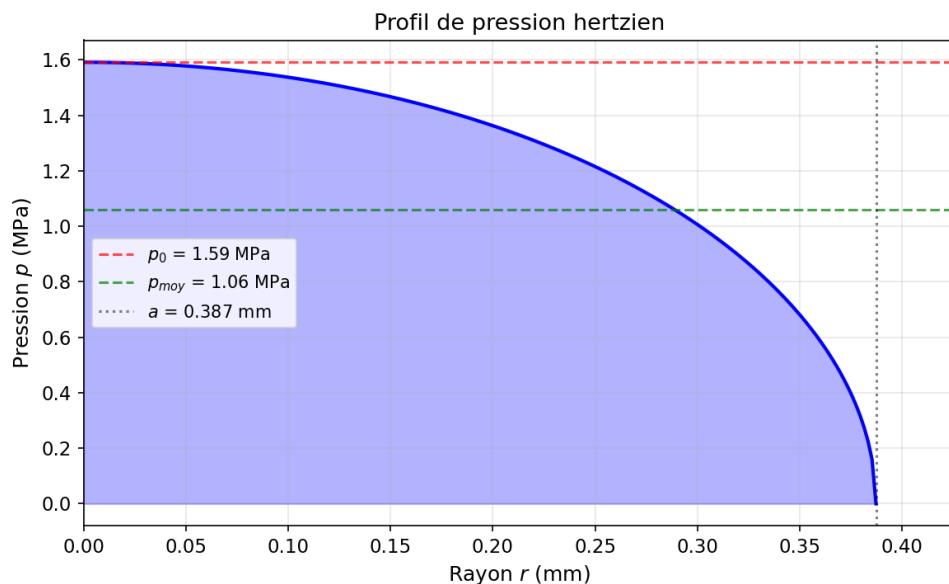


FIGURE 1 – Profil de pression hertzien

4.6 Question 6 : Courbe force-déplacement et contrainte-déformation

La relation force-déplacement est non-linéaire :

$$F = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2}$$

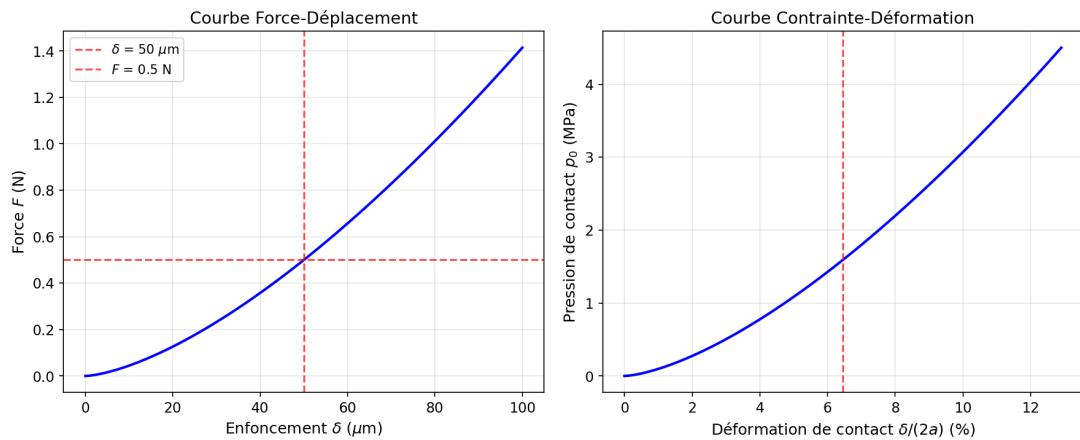


FIGURE 2 – Courbes force-déplacement et contrainte-déformation

4.7 Questions 7-8 : Déplacements à la surface

Les déplacements verticaux et radiaux à la surface ($z = 0$) sont calculés selon les formules de Boussinesq. Pour les points situés à 1 mm et 2 mm du centre de contact :

- À $r = 1 \text{ mm}$: $u_r = -0.008 \mu\text{m}$, $u_z = 0.016 \mu\text{m}$
- À $r = 2 \text{ mm}$: $u_r = -0.004 \mu\text{m}$, $u_z = 0.008 \mu\text{m}$

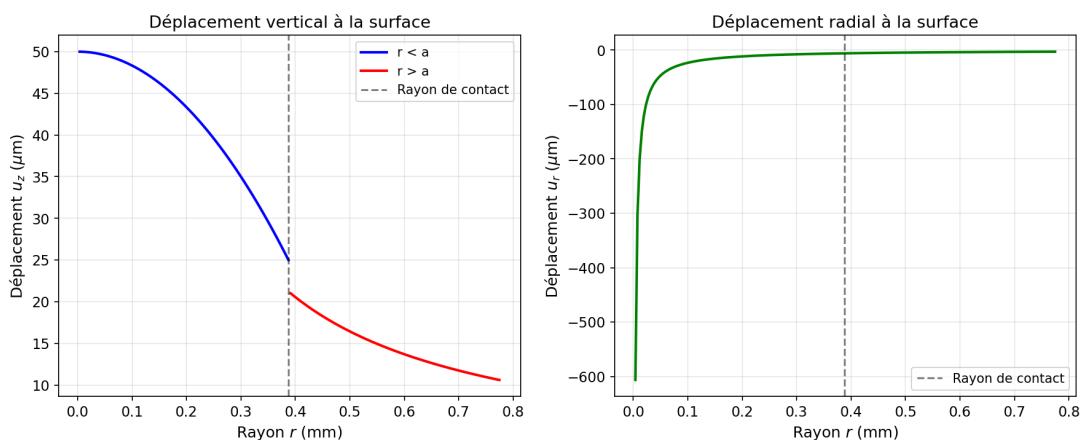


FIGURE 3 – Déplacements verticaux et radiaux à la surface

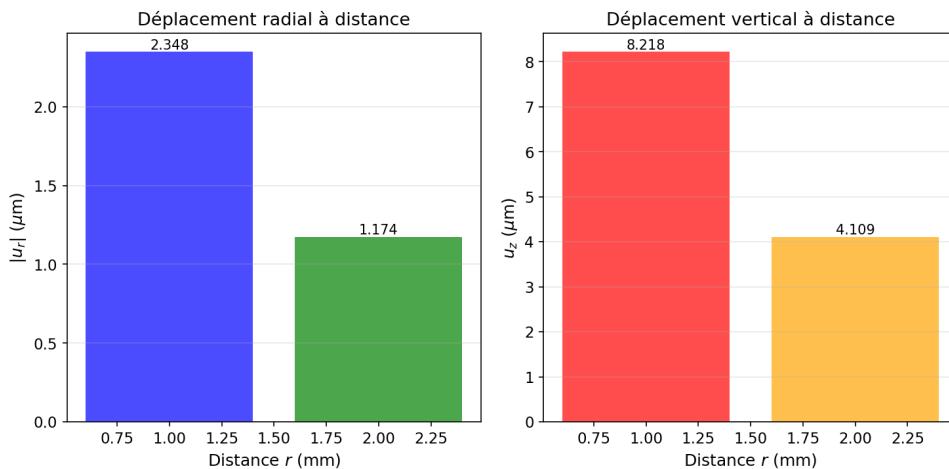


FIGURE 4 – Déplacements à 1 mm et 2 mm du centre de contact

4.8 Question 9 : Évolution des contraintes dans le cercle de contact

Les contraintes normalisées σ_r/p_0 , σ_θ/p_0 et σ_z/p_0 sont représentées en fonction de r/a :

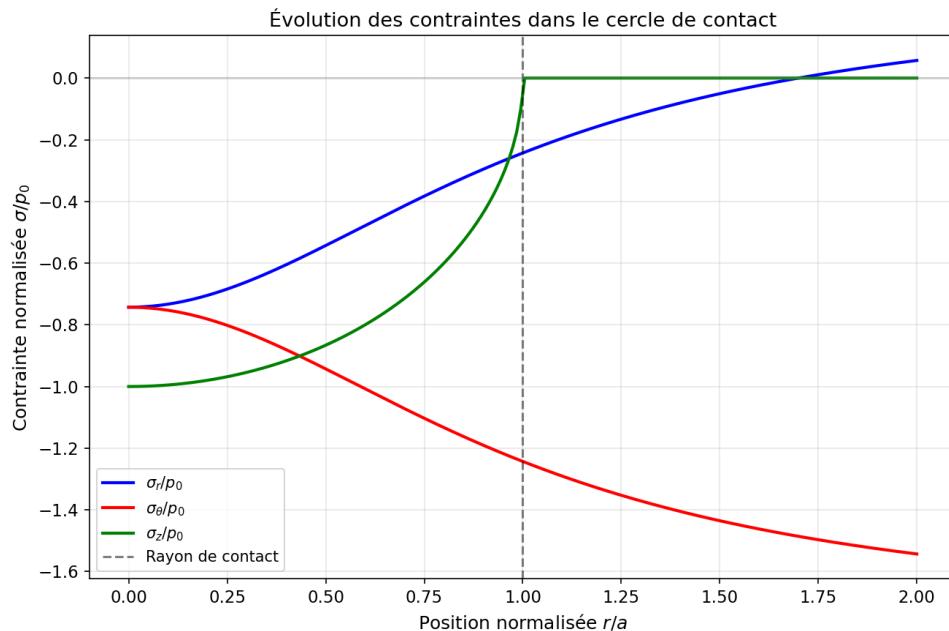
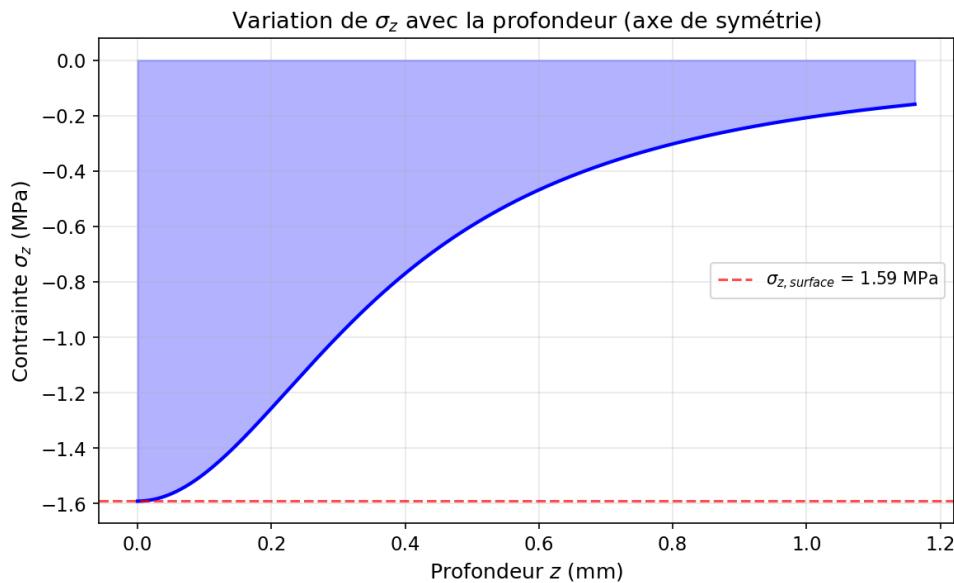


FIGURE 5 – Évolution des contraintes dans le cercle de contact

4.9 Question 10 : Contrainte σ_z en fonction de la profondeur

Sur l'axe de symétrie ($r = 0$), la contrainte normale décroît avec la profondeur :

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{1}{1 + (z/a)^2}$$


 FIGURE 6 – Variation de σ_z avec la profondeur

4.10 Question 11 : Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement maximale se situe sous la surface. Pour ce cas :

$$\tau_{\max} = 0.48 \text{ MPa} \quad \text{à } z = 0.24 \text{ mm}$$

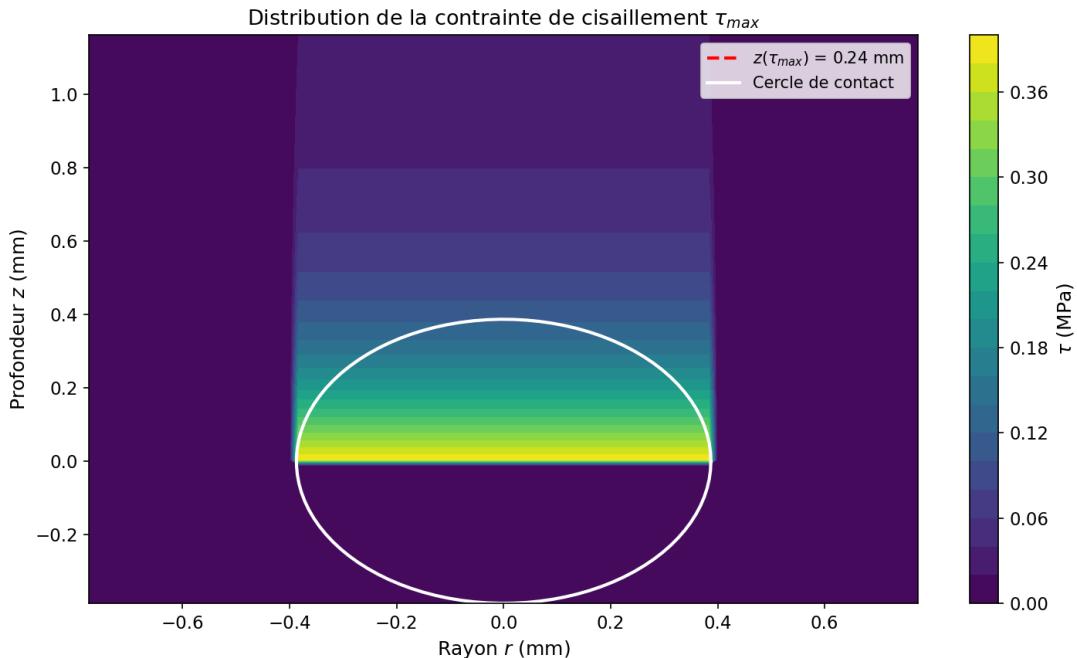


FIGURE 7 – Distribution de la contrainte de cisaillement

5 Conclusion

Cette étude a permis d'analyser complètement le contact élastique entre une sphère en acier et un plan métallique selon la théorie de Hertz. Les résultats obtenus (rayon de contact, pressions, déplacements, contraintes) sont cohérents avec les attentes pour un contact de faible charge. La contrainte de cisaillement maximale est située sous la surface, ce qui est caractéristique des contacts hertziens et explique souvent l'initiation de fissures en fatigue de contact.

6 Annexe : Code Python

Le code Python complet utilisé pour les calculs et les visualisations est disponible dans le fichier `tribologie_dm2.py`. Il implémente toutes les formules de la théorie de Hertz et génère les figures présentées dans ce rapport.

A Récapitulatif des valeurs numériques

Paramètre	Valeur	Unité
Rayon de contact a	0.387	mm
Pression moyenne p_{moy}	1.06	MPa
Pression maximale p_0	1.59	MPa
Module effectif E^*	68.3	GPa
Module du plan E_2	101.2	GPa
Raideur de contact K	52.8	N/m
Cisaillement max τ_{max}	0.48	MPa
Profondeur du τ_{max}	0.24	mm

TABLE 1 – Récapitulatif des résultats principaux