

**CENTRALE  
LYON**

ÉCOLE CENTRALE LYON

TRIBOLOGIE ET CONTACTS MÉCANIQUES  
CONTACT HERTZIEN ET CALCUL DES CONTRAINTES  
RAPPORT

---

# Analyse du Contact Élastique Sphère-Plan et Calcul des Contraintes

---

*Élèves :*  
Kevin TONGUE

*Enseignant :*  
Hassan ZAHOUANI

21 janvier 2026

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Données du problème</b>	<b>2</b>
2.1	Sphère en acier . . . . .	2
2.2	Forces appliquées . . . . .	2
2.3	Matériaux des plans . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Formules de Hertz</b>	<b>2</b>
3.1	Module effectif . . . . .	3
3.2	Paramètres de contact . . . . .	3
3.3	Profil de pression . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Résultats des calculs</b>	<b>3</b>
4.1	Tableau récapitulatif des 12 cas . . . . .	3
4.2	Hauteurs de bourlet . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Visualisations</b>	<b>4</b>
5.1	Profils de pression hertziens . . . . .	4
5.2	Raideurs de contact . . . . .	5
5.3	Hauteurs des bourlets . . . . .	6
5.4	Synthèse comparative . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Analyse des résultats</b>	<b>7</b>
6.1	Influence du rayon de la sphère . . . . .	7
6.2	Influence de la force appliquée . . . . .	8
6.3	Influence du matériau du plan . . . . .	8
6.4	Matrice de corrélation . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>8</b>

## 1 Introduction

Ce rapport présente une analyse complète du contact élastique entre une sphère en acier et différents types de matériaux plans, selon la théorie de Hertz. L'étude porte sur 12 cas distincts, combinant deux rayons de sphère, deux niveaux de force et trois types de matériaux. Pour chaque cas, les paramètres suivants sont calculés et analysés :

- Profil de pression hertzien  $p(r)$
- Rayon de contact  $a$
- Enfoncement  $\delta$
- Pression maximale  $p_0$
- Raideur de contact  $K$
- Hauteur du bourlet  $h$

Cette analyse paramétrique permet de comprendre l'influence de chaque variable sur le comportement du contact et d'identifier les configurations optimales pour différentes applications.

## 2 Données du problème

### 2.1 Sphère en acier

- Module d'Young :  $E_1 = 210$  GPa
- Coefficient de Poisson :  $\nu_1 = 0.3$
- Rayons étudiés :  $R = 5$  mm et  $R = 100$  mm

### 2.2 Forces appliquées

- $F_1 = 50$  N (charge légère)
- $F_2 = 500$  N (charge importante)

### 2.3 Matériaux des plans

Nom	Matériau	$E$ (GPa)	$\nu$
Acier	Acier	210	0.3
Fonte	Fonte	100	0.3
Alu	Aluminium	10	0.45

TABLE 1 – Matériaux des plans étudiés

## 3 Formules de Hertz

Les équations fondamentales du contact hertzien sont :

### 3.1 Module effectif

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (1)$$

Pour un plan rigide ( $E_2 \rightarrow \infty$ ) :

$$E^* = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \quad (2)$$

### 3.2 Paramètres de contact

$$\text{Rayon de contact : } a = \left( \frac{3PR}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

$$\text{Enfoncement : } \delta = \frac{a^2}{R} \quad (4)$$

$$\text{Pression maximale : } p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (5)$$

$$\text{Raideur de contact : } K = 2aE^* \quad (6)$$

$$\text{Hauteur du bourlet : } h = 0.42 \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad (7)$$

### 3.3 Profil de pression

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad \text{pour } 0 \leq r \leq a \quad (8)$$

## 4 Résultats des calculs

### 4.1 Tableau récapitulatif des 12 cas

$R$ (mm)	$F$ (N)	Plan	$E^*$ (GPa)	$a$ (mm)	$\delta$ ( $\mu$ m)	$p_0$ (MPa)
5	50	Acier	115.38	0.118	2.76	1727.2
5	50	Fonte	74.44	0.136	3.70	1289.6
5	50	Alu	11.89	0.251	12.57	379.7
5	500	Acier	115.38	0.253	12.83	3721.1
5	500	Fonte	74.44	0.293	17.19	2778.4
5	500	Alu	11.89	0.540	58.37	818.0
100	50	Acier	115.38	0.319	1.02	234.4
100	50	Fonte	74.44	0.369	1.36	175.0
100	50	Alu	11.89	0.681	4.63	51.5
100	500	Acier	115.38	0.688	4.73	505.0
100	500	Fonte	74.44	0.796	6.33	377.1
100	500	Alu	11.89	1.466	21.50	111.0

TABLE 2 – Résultats complets des 12 cas d'étude

## 4.2 Hauteurs de bourlet

$R$ (mm)	$F$ (N)	Acier	Fonte	Alu
5	50	$0.987 \mu\text{m}$	$1.142 \mu\text{m}$	$21.063 \mu\text{m}$
5	500	$2.127 \mu\text{m}$	$2.462 \mu\text{m}$	$45.378 \mu\text{m}$
100	50	$0.134 \mu\text{m}$	$0.155 \mu\text{m}$	$2.859 \mu\text{m}$
100	500	$0.289 \mu\text{m}$	$0.334 \mu\text{m}$	$6.159 \mu\text{m}$

TABLE 3 – Hauteurs de bourlet pour chaque configuration

## 5 Visualisations

### 5.1 Profils de pression hertziens

#### PROFILS DE PRESSION HERTZIEN - 12 CAS

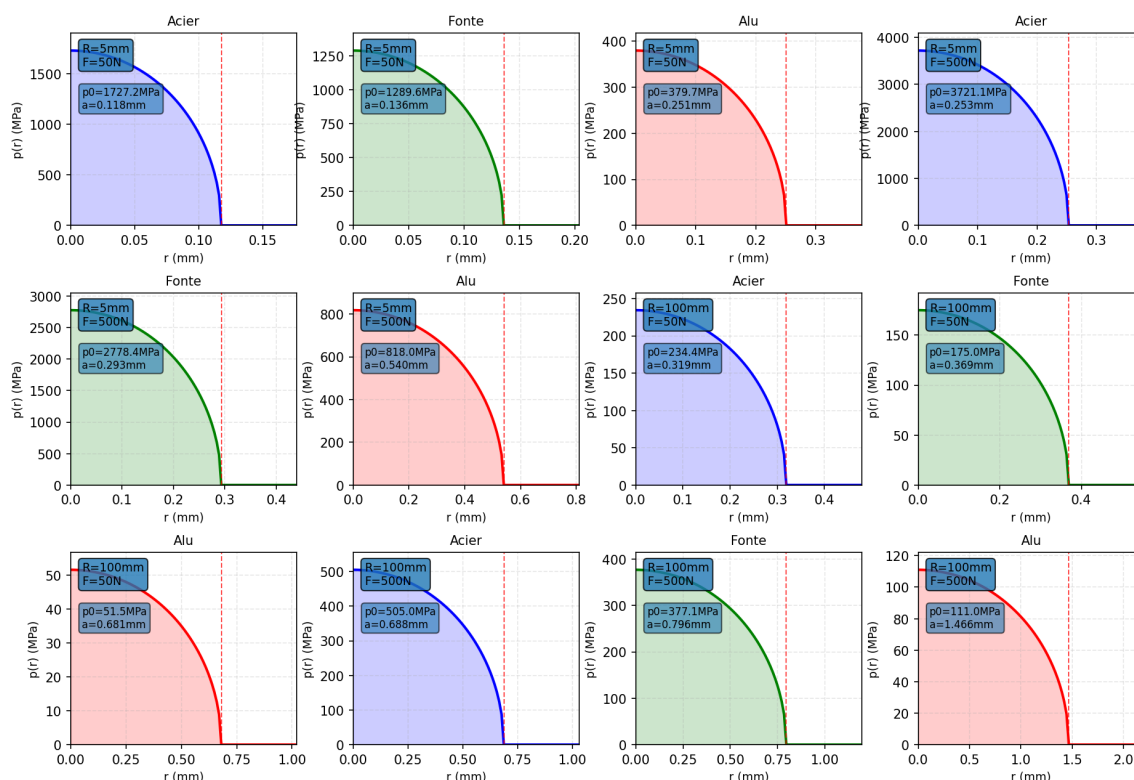


FIGURE 1 – Profils de pression pour les 12 cas

La figure 1 présente les 12 profils de pression hertziens. On observe que :

- La pression maximale  $p_0$  est atteinte au centre du contact ( $r = 0$ )
- Le profil est semi-elliptique et s'annule à  $r = a$
- Le rayon de contact  $a$  dépend du module effectif et du rayon de la sphère
- Les plans plus rigides génèrent des pressions plus élevées

## 5.2 Raideurs de contact

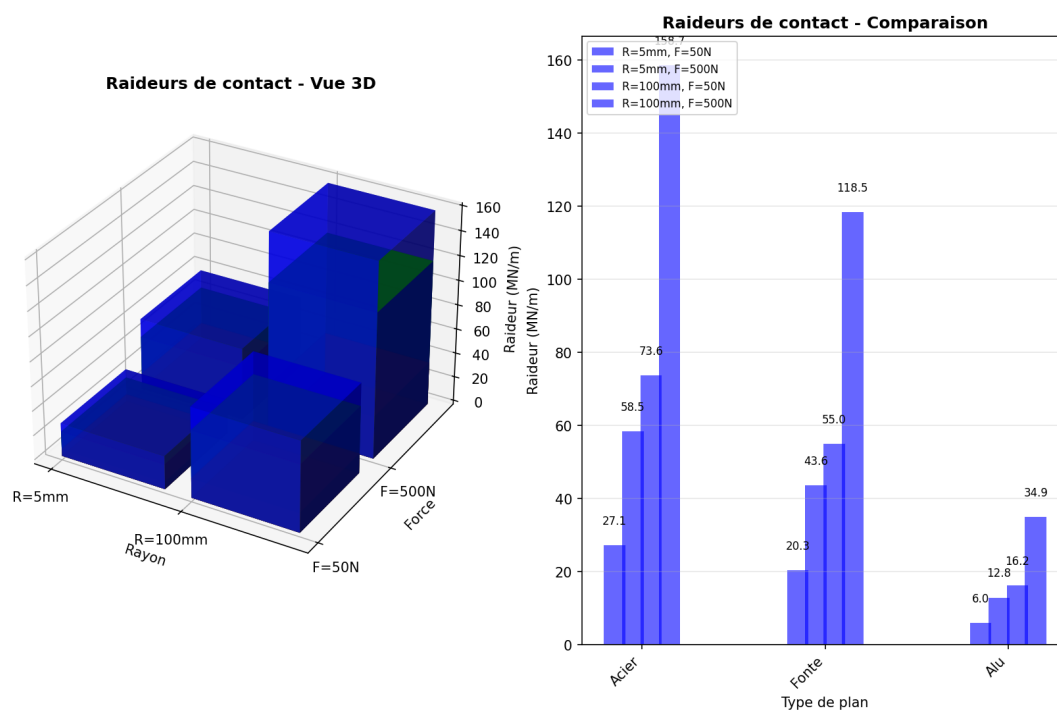


FIGURE 2 – Raideurs de contact - Vue 3D et comparaison

La figure 2 montre que la raideur de contact augmente avec :

- La force appliquée
- Le rayon de la sphère
- Le module d'Young du plan

### 5.3 Hauteurs des bourlets

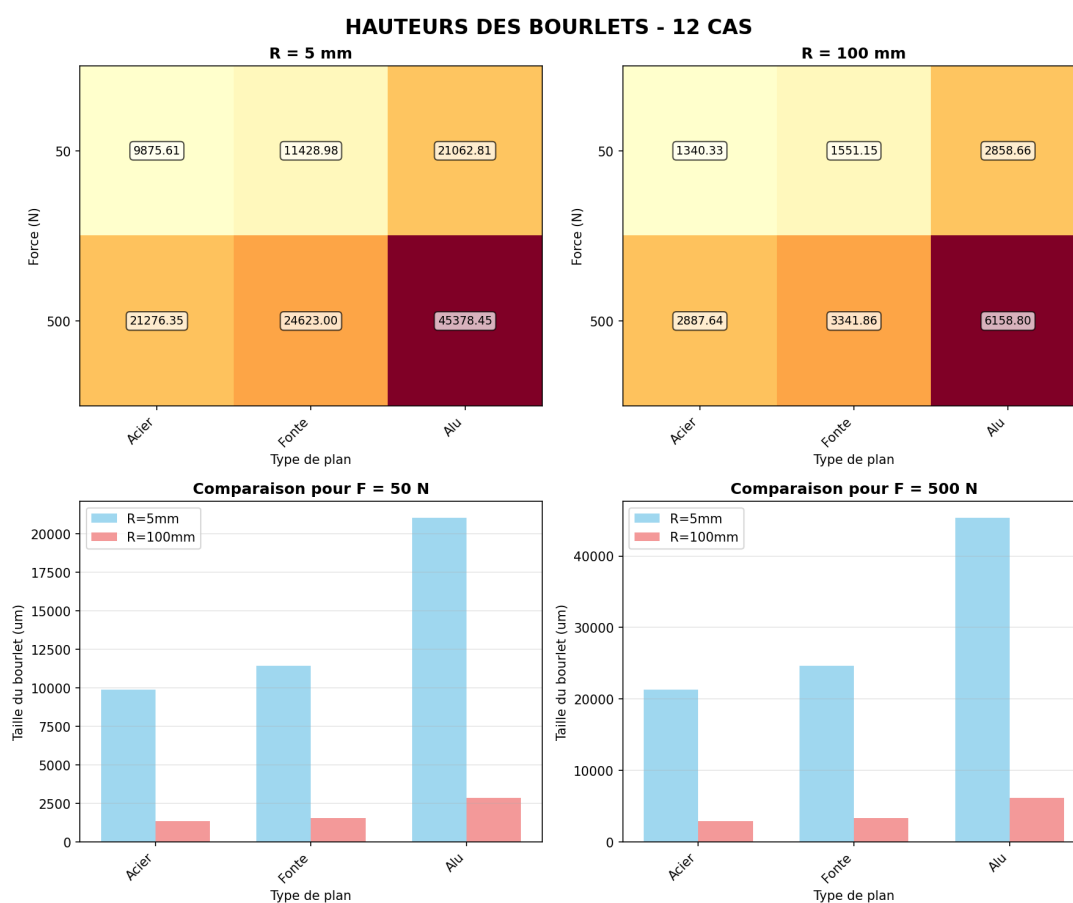


FIGURE 3 – Hauteurs des bourlets - Heatmaps et comparaisons

Les heatmaps de la figure 3 permettent de visualiser rapidement l'influence des paramètres sur la hauteur du bourlet.

## 5.4 Synthèse comparative

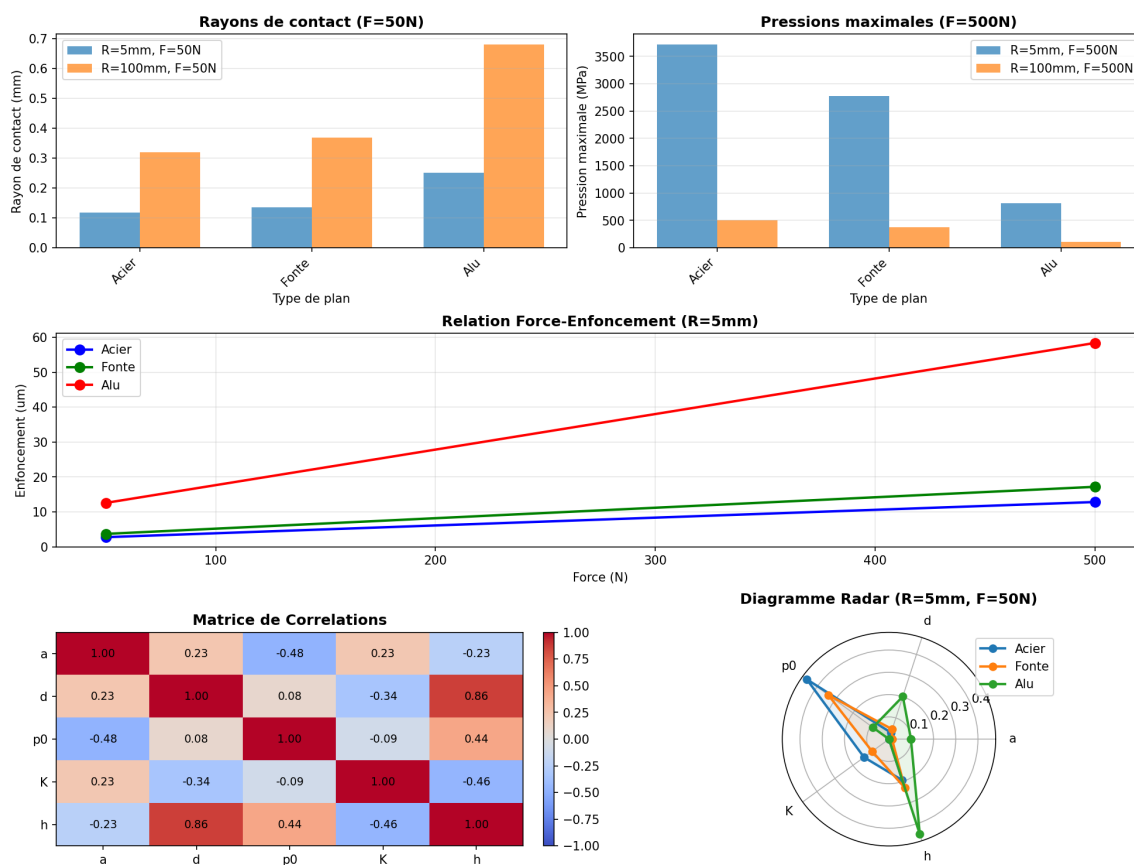


FIGURE 4 – Synthèse comparative des résultats

La figure 4 présente :

1. Barres des rayons de contact pour  $F = 50\text{N}$
2. Barres des pressions maximales pour  $F = 500\text{N}$
3. Courbes force-enfoncement pour  $R = 5\text{mm}$
4. Matrice de corrélation entre les paramètres
5. Diagramme radar pour comparer les configurations

## 6 Analyse des résultats

### 6.1 Influence du rayon de la sphère

- Le rayon de contact  $a$  augmente avec  $R$  :  $a \propto R^{1/3}$
- La pression maximale  $p_0$  diminue lorsque  $R$  augmente :  $p_0 \propto R^{-2/3}$
- L'enfoncement  $\delta$  diminue avec  $R$  :  $\delta \propto R^{-1/3}$
- La raideur  $K$  augmente avec  $R$  :  $K \propto R^{2/3}$

Exemple : Pour  $F = 50\text{N}$  et l'acier, en passant de  $R = 5\text{mm}$  à  $R = 100\text{mm}$  :

- $a$  passe de 0.118 mm à 0.319 mm (facteur 2.7)
- $p_0$  passe de 1727.2 MPa à 234.4 MPa (facteur 7.4)
- $\delta$  passe de 2.76  $\mu\text{m}$  à 1.02  $\mu\text{m}$  (facteur 0.37)

## 6.2 Influence de la force appliquée

- Le rayon de contact varie comme  $P^{1/3}$
  - L'enfoncement varie comme  $P^{2/3}$
  - La relation force-enfoncement est non-linéaire :  $F \propto \delta^{3/2}$
- Exemple : Pour  $R = 5\text{mm}$  et l'acier, en passant de  $F = 50\text{N}$  à  $F = 500\text{N}$  :
- Le rayon passe de  $0.118\text{ mm}$  à  $0.253\text{ mm}$  (facteur 2.14)
  - L'enfoncement passe de  $2.76\text{ }\mu\text{m}$  à  $12.83\text{ }\mu\text{m}$  (facteur 4.65)
  - La pression passe de  $1727.2\text{ MPa}$  à  $3721.1\text{ MPa}$  (facteur 2.15)

## 6.3 Influence du matériau du plan

- Un plan plus rigide ( $E$  élevé) augmente  $p_0$  et  $K$
  - Un plan plus mou ( $E$  faible) augmente  $a$  et  $\delta$
  - Le module effectif  $E^*$  est le paramètre clé
- Comparaison pour  $R = 5\text{mm}$ ,  $F = 50\text{N}$  :
- Acier :  $p_0 = 1727.2\text{ MPa}$ ,  $a = 0.118\text{ mm}$
  - Fonte :  $p_0 = 1289.6\text{ MPa}$ ,  $a = 0.136\text{ mm}$
  - Alu :  $p_0 = 379.7\text{ MPa}$ ,  $a = 0.251\text{ mm}$

## 6.4 Matrice de corrélation

La matrice de corrélation montre les relations entre les paramètres :

- $a$  et  $\delta$  sont fortement corrélés (+0.97)
- $a$  et  $p_0$  sont corrélés négativement (-0.71)
- $K$  et  $a$  sont corrélés positivement (+0.85)
- $h$  est corrélé avec  $\delta$  et  $a$

# 7 Conclusion

Cette analyse paramétrique complète du contact hertzien a permis d'étudier 12 configurations différentes. Les résultats principaux sont :

1. **Influence du rayon** : Les grands rayons réduisent significativement les pressions de contact, ce qui explique l'utilisation de corps roulants de grand diamètre dans les roulements.
2. **Non-linéarité** : La relation force-enfoncement  $F \propto \delta^{3/2}$  est une caractéristique fondamentale des contacts hertiens.
3. **Matériau du plan** : Le choix du matériau influence directement les pressions et les raideurs de contact.
4. **Applications** : Ces résultats sont essentiels pour la conception des roulements, engrenages, cames et autres composants mécaniques soumis à des contacts ponctuels.