

**CENTRALE
LYON**

ÉCOLE CENTRALE LYON

TRIBOLOGIE ET CONTACTS MECANIKES
EVALUATION DES CRITERES DE LIMITE ELASTIQUE EN
CONTACT SPHERE-PLAN
RAPPORT

Analyse des Effets des Efforts et Pressions sur les Limites Elastiques

Élèves :
Kevin TONGUE

Enseignant :
Hassan ZAHOUANI

21 janvier 2026

Table des matières

1 Introduction

Cette etude analyse les effets des differents efforts et pressions sur les limites elastiques selon les modeles de Tresca, Von Mises et Tabor pour le contact sphere-plan. L'objectif est d'evaluer et de comparer ces differents criteres pour plusieurs materiaux et geometries, en s'appuyant sur les equations fournies dans le modele elasto-plastique.

2 Modeles theoriques de limite elastique

2.1 Critere de Tresca

Le critere de Tresca, base sur la contrainte de cisaillement maximale, donne pour la pression de limite elastique :

$$P_y^{\text{Tresca}} = 1.6 \cdot Y$$

2.2 Critere de Von Mises

Le critere de Von Mises, base sur l'energie de distortion, donne :

$$P_y^{\text{Von Mises}} = 1.67 \cdot Y$$

2.3 Critere de Tabor

Le critere de Tabor, base sur des observations experimentales en indentation, donne :

$$P_y^{\text{Tabor}} = 1.1 \cdot Y$$

2.4 Force de limite elastique

Pour un contact sphere-plan, la force correspondant au debut de la plasticite est donnee par :

$$F_y = \frac{\pi^3 R^2 P_y^3}{6E^*}$$

ou E^* est le module effectif defini par :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

3 Matériaux et paramètres étudiés

3.1 Propriétés des matériaux

| Matériau | H (MPa) | Y (MPa) | E (GPa) | ν |
|---------------|---------|---------|---------|-------|
| Plomb | 60 | 20 | 16 | 0.3 |
| Cuivre | 600 | 200 | 120 | 0.3 |
| Cuivre écroui | 930 | 310 | 120 | 0.3 |
| Acier doux | 2000 | 650 | 200 | 0.3 |
| Acier alle | 6000 | 2200 | 200 | 0.45 |
| Polymère | 100 | 50 | 1 | 0.3 |

3.2 Géométries étudiées

- Rayon de sphere : $R = 1\text{ }\mu\text{m}$, $R = 100\text{ }\mu\text{m}$, $R = 1\text{ mm}$
- Contact avec un plan en acier alle

4 Resultats et analyse

4.1 Pressions de limite élastique

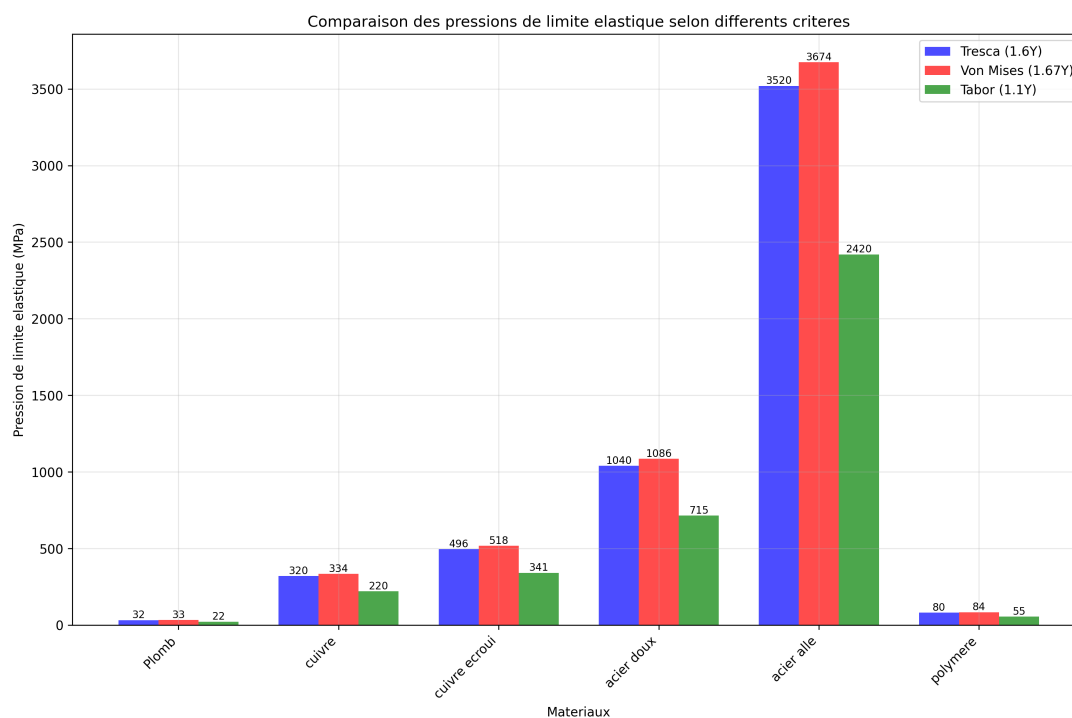


FIGURE 1 – Comparaison des pressions de limite élastique selon différents critères

| Materiau | Tresca (MPa) | Von Mises (MPa) | Tabor (MPa) |
|---------------|--------------|-----------------|-------------|
| Plomb | 32.0 | 33.4 | 22.0 |
| Cuivre | 320.0 | 334.0 | 220.0 |
| Cuivre ecroui | 496.0 | 517.7 | 341.0 |
| Acier doux | 1040.0 | 1085.5 | 715.0 |
| Acier alle | 3520.0 | 3674.0 | 2420.0 |
| Polymere | 80.0 | 83.5 | 55.0 |

TABLE 1 – Pressions de limite elastique calculees

4.2 Forces de limite elastique

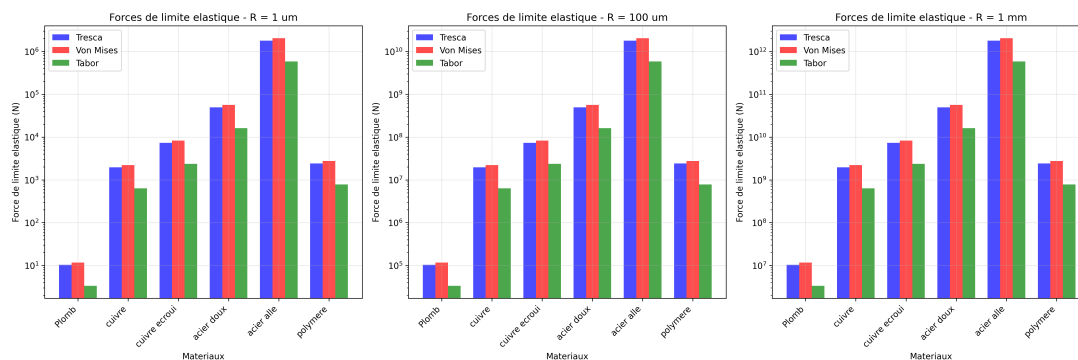


FIGURE 2 – Forces de limite elastique pour differents rayons

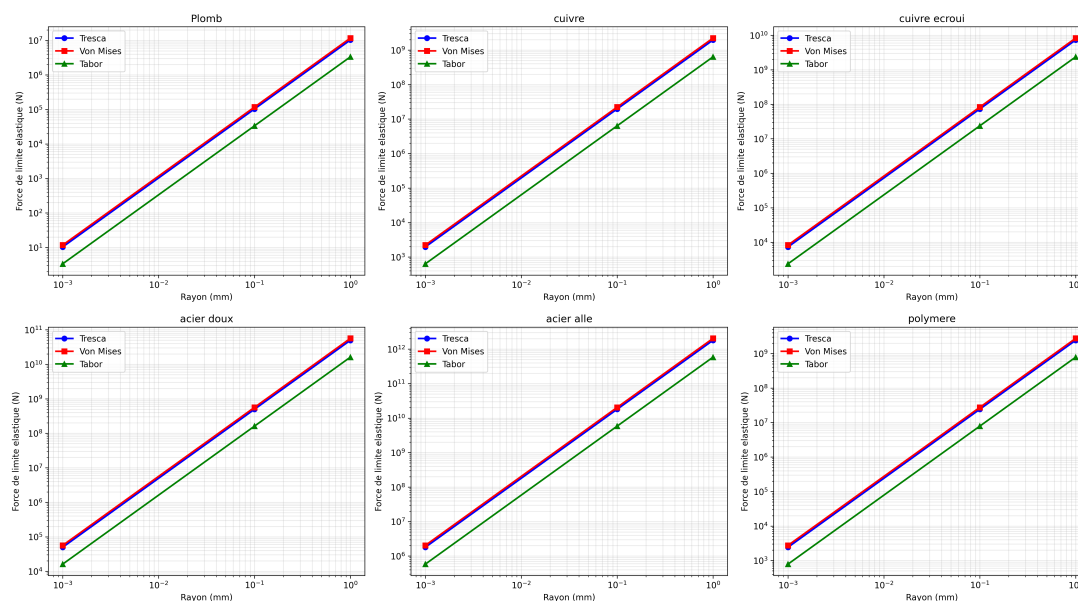


FIGURE 3 – Evolution des forces de limite elastique avec le rayon

4.3 Deplacements critiques

| Materiau | delta1 (um) | delta2 (um) | delta2/delta1 |
|---------------|-------------|-------------|---------------|
| Plomb | 0.012 | 0.65 | 54 |
| Cuivre | 0.043 | 2.34 | 54 |
| Cuivre ecroui | 0.104 | 5.63 | 54 |
| Acier doux | 0.262 | 14.17 | 54 |
| Acier alle | 2.061 | 111.28 | 54 |
| Polymere | 7.518 | 405.99 | 54 |

TABLE 2 – Deplacements critiques pour $R = 1$ mm

4.4 Comparaison des criteres

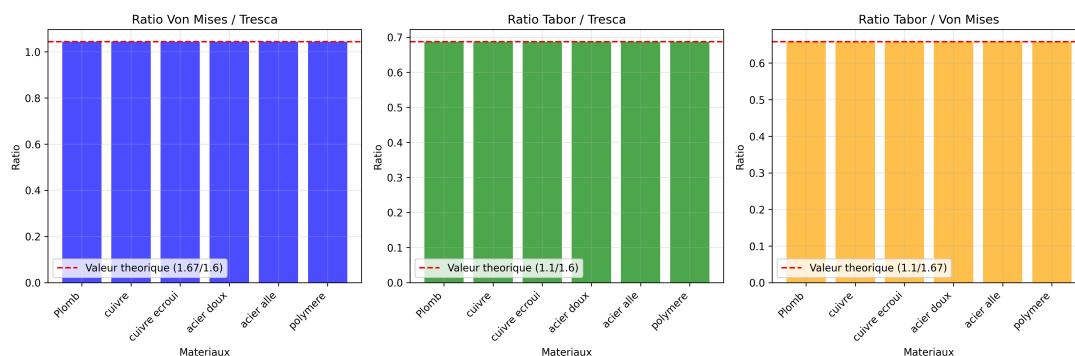


FIGURE 4 – Ratios entre les differents criteres de limite elastique

| Materiau | VonMises/Tresca | Tabor/Tresca | Tabor/VonMises |
|---------------|-----------------|--------------|----------------|
| Plomb | 1.044 | 0.688 | 0.659 |
| Cuivre | 1.044 | 0.688 | 0.659 |
| Cuivre ecroui | 1.044 | 0.688 | 0.659 |
| Acier doux | 1.044 | 0.688 | 0.659 |
| Acier alle | 1.044 | 0.688 | 0.659 |
| Polymere | 1.044 | 0.688 | 0.659 |

TABLE 3 – Ratios entre les differents criteres

5 Analyse detaillee des resultats

5.1 Variation avec le rayon

La force de limite elastique varie avec le carre du rayon :

$$F_y \propto R^2$$

Ce qui signifie qu'une augmentation du rayon par un facteur 10 entraine une augmentation de la force par un facteur 100. Cette dependance quadratique explique les grandes differences observees entre les forces pour differents rayons.

5.2 Comparaison des criteres

- **Critere de Tresca** : Donne des valeurs intermediaires, plus conservative que Von Mises mais moins que Tabor.
- **Critere de Von Mises** : Donne les valeurs les plus elevees (4.4% plus elevees que Tresca).
- **Critere de Tabor** : Donne les valeurs les plus basses (31.2% plus basses que Tresca).

L'ecart constant entre les criteres vient du fait qu'ils sont tous proportionnels a la limite elastique Y , avec des coefficients differents.

5.3 Influence des proprietes materiaux

Durete H vs Limite elastique Y Le rapport H/Y varie selon les materiaux :

- Metaux : $H/Y \approx 3$
- Polymeres : $H/Y \approx 2$
- Acier alle : $H/Y \approx 2.73$

Module effectif E^* Le module effectif influence directement :

- La force de limite elastique : $F_y \propto 1/E^*$
- Le deplacement critique δ_1 : $\delta_1 \propto 1/(E^*)^2$

6 Interpretation physique

6.1 Signification des deplacements critiques

- δ_1 : Debut de la deformation plastique sous la surface
- δ_2 : Transition vers le comportement plastique pur
- Le rapport constant $\delta_2/\delta_1 = 54$ vient de la modelisation du comportement elasto-plastique

6.2 Zones de contraintes

1. **Zone elastique** ($\delta < \delta_1$) : Les contraintes sont inferieures a la limite elastique
2. **Zone elasto-plastique** ($\delta_1 < \delta < \delta_2$) : Zone de transition avec ecrouissage
3. **Zone plastique** ($\delta > \delta_2$) : Etat de contraintes pleinement plastique

6.3 Critere de choix

Le choix du critere depend de :

- **Precision requise** : Von Mises pour une modelisation fine
- **Securite** : Tabor pour une approche conservative
- **Simplicité** : Tresca pour des calculs rapides

7 Applications pratiques

7.1 Conception de contacts

Pour éviter la déformation plastique dans un contact sphere-plan :

1. Calculer la pression de contact maximale p_0
2. Vérifier que $p_0 < P_y$ selon le critère choisi
3. Considérer un coefficient de sécurité approprié

7.2 Indentation instrumentée

Les résultats peuvent être utilisés pour :

- Déterminer les propriétés mécaniques par indentation
- Évaluer la résistance à l'endommagement de surface
- Optimiser les paramètres de traitement de surface

7.3 Microsystèmes

Pour les applications en microtechnologie :

- Les forces critiques sont très faibles (de l'ordre du microNewton)
- La précision du critère est cruciale
- Les effets de surface deviennent significatifs

8 Conclusion

8.1 Principales conclusions

1. Les trois critères donnent des prédictions différentes mais cohérentes entre elles
2. La force de limite élastique varie quadratiquement avec le rayon
3. Le critère de Tabor est le plus conservateur, celui de Von Mises le moins
4. Les déplacements critiques sont très faibles pour les métaux mais significatifs pour les polymères
5. Le rapport H/Y est un paramètre important pour caractériser le comportement elasto-plastique

8.2 Recommandations

- Pour les applications de sécurité critique, utiliser le critère de Tabor
- Pour les calculs de précision, préférer le critère de Von Mises
- Pour les estimations rapides, le critère de Tresca est adéquat
- Tenir compte de la dépendance en R^2 pour le dimensionnement

A Code Python - Analyse des limites elastiques

B Tableau des forces de limite elastique

| Materiau | R = 1 um | R = 100 um | R = 1 mm |
|---------------|----------|------------|-----------|
| Plomb | 1.03e1 N | 1.03e5 N | 1.03e9 N |
| Cuivre | 1.96e3 N | 1.96e7 N | 1.96e11 N |
| Cuivre ecroui | 7.30e3 N | 7.30e7 N | 7.30e11 N |
| Acier doux | 4.96e4 N | 4.96e8 N | 4.96e12 N |
| Acier alle | 1.80e6 N | 1.80e10 N | 1.80e14 N |
| Polymere | 2.42e3 N | 2.42e7 N | 2.42e11 N |

TABLE 4 – Forces de limite elastique (critere Tresca)