Задача 1

• $U(a, b)$, $\theta = (a, b)$

$d = 2 \Rightarrow$ в методе моментов с-ма из 2-х ур-й:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_1) = \overline{X} \\ \mathbb{E}(X_1^2) = \overline{X^2} \end{cases}$$

Для равном. распр:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{E}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} a + b = 2\overline{X} \\ a^2 + ab + b^2 = 3\overline{X^2} \end{cases}$$

$$4\overline{X}^2 - 4\overline{X} \cdot b + b^2 + 2\overline{X} b - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} = 3\overline{X^2}$$

$$b^2 - 2\overline{X} \cdot b + 4\overline{X}^2 - 3\overline{X^2} = 0$$

$$b = \overline{X} \pm \sqrt{3(\overline{X^2} - \overline{X}^2)} = \overline{X} \pm S\sqrt{3}$$, где

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

т.к. $b \geq a$, то:

$$\begin{cases} a = \overline{X} - \sqrt{3(\overline{X^2} - \overline{X}^2)} \\ b = \overline{X} + \sqrt{3(\overline{X^2} - \overline{X}^2)} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \hat{\theta} = (\overline{X} - S\sqrt{3}, \overline{X} + S\sqrt{3})$$

• $Pois(\theta)$

$d=1$:

$\mathbb{E}(x) = \overline{x}$ $\Big| \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{x}$

$\overset{\shortparallel}{\theta}$ для $Pois(\theta)$

• $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $\theta = (a, \sigma)$

$d=2$:

Для $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x_1) = \overline{x} \\ \mathbb{E}(x_1^2) = \overline{x^2} \end{cases}$$

$\mathbb{E}(x_1) = a$

$\mathbb{E}(x_1^2) = \mathbb{D}(x_1) + \mathbb{E}^2(x_1) = \sigma^2 + a^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \overline{x} \\ \sigma^2 + a^2 = \overline{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \overline{x} \\ \sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = S \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \hat{\theta} = \left(\overline{x}, \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)$$

Задача 2

$Pois(\theta)$: По ЗБЧ: $\overline{x} \xrightarrow{P_\theta\text{-п.н.}} \mathbb{E}(x_1) = \theta$

Значит, $\hat{\theta} \xrightarrow{P_\theta\text{-п.н.}} \theta$

$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$:

По ЗБЧ: $\overline{x} \xrightarrow{P_\theta\text{-п.н.}} \mathbb{E}(x_1) = a$

$\overline{x^2} \xrightarrow{P_\theta\text{-п.н.}} \mathbb{E}(x_1^2) = a^2 + \sigma^2$

Тогда

$$\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \xrightarrow{P_\theta\text{-п.н.}} \sqrt{a^2 + \sigma^2 - a^2} = \sigma$$

Таким образом, оценка явл. сильно состоятельной

Задача 3

а) $$\overline{X^2} - \overline{X}^2 \overset{①}{=} S^2 \overset{②}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

Распишем $\overline{X}^2$:

$$\overline{X}^2 = \frac{1}{n^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + 2\sum_{i\neq j}X_iX_j\right]$$

$$① = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + 2\sum X_iX_j\right]$$

$$②: \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X}\cdot X_i + \overline{X}^2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{2\overline{X}}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 + \frac{1}{\cancel{n}}\cdot \cancel{n}\overline{X}^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2,$$ чтд