

1. Топология τ — топология на X : (1) $\emptyset, X \in \tau$; (2) \bigcup -любое $\in \tau$; (3) \bigcap -конечное $\in \tau$. Мн-ва из τ — открытые. F замкнуто $\iff X \setminus F$ откры. База \mathcal{B} : $\forall G \in \tau = \bigcup$ элементов \mathcal{B} . Окр-ть $U(x)$ — откры. $\exists x$. Базы \mathbb{R}^2 : $\Sigma^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ (круги); $\Sigma^\infty : \max(|x - a|, |y - b|) < r$ (квадраты); $\Sigma^1 : |x - a| + |y - b| < r$ (ромбы). Все порождают одну топологию на \mathbb{R}^2 .

2. Метрика $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$: (1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$; (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; (3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

3. Норма $\|x\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$: (1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$; (2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$; (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нер-во треуг.). Норма \Rightarrow метрика: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Примеры: $\|x\|_1 = \sum |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$.

4. Неравенство Коши-Буняковского $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ или $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Для \mathbb{R}^n : $(\sum x_k y_k)^2 \leq (\sum x_k^2)(\sum y_k^2)$. Док-во: рассм. $\langle x - ty, x - ty \rangle \geq 0$ для всех t , это квадр. трёхчлен по t , дискриминант ≤ 0 .

5. Неравенство Юнга $a, b > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

6. Неравенство Гёльдера $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$: $\sum x_k y_k \leq (\sum x_k^p)^{1/p}(\sum y_k^q)^{1/q}$ или $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Док-во: нормируем x, y , применяем Юнга к $x_k y_k$, суммируем. Частный случай при $p = q = 2$ — КБШ.

7. Неравенство Минковского $p \geq 1$: $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, т.е. $(\sum (x_k + y_k)^p)^{1/p} \leq (\sum x_k^p)^{1/p} + (\sum y_k^p)^{1/p}$. Это нер-во треуг. для нормы $\|\cdot\|_p$. Док-во через Гёльдера.

8. Классификация точек $\tilde{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}$. Внутр.: $\exists U(x) \subset A$. Внешн.: $\exists U(x) : U(x) \cap A = \emptyset$. Границ.: $\forall U(x) : U(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Пред.: $\forall U(x) : \tilde{U}(x) \cap A \neq \emptyset$. Изол.: $\exists U(x) : U(x) \cap A = \{x\}$. $\overline{A} = A \cup A'$.

9. Компакт K — компакт: из любого покрытия откры. мн-вами можно выделить конечное. Лемма: брус $\prod [a_i, b_i]$ — компакт. Док-во: от противного, делим пополам по каждой координате, строим вложенные брусья $P_1 \supset P_2 \supset \dots$, $d(P_k) \rightarrow 0$, $\bigcap P_k = \{\xi\}$. ξ должна быть в конечном покрытии — противоречие.

10. Диаметр $d(E) = \sup_{x, y \in E} \rho(x, y)$. Огранич.: $d(E) < \infty$.

11. Леммы о компактах (1) Компакт замкнут и ограничен. (2) Замкн. подмн-во компакта — компакт. (3) Беск. подмн-во компакта имеет пред. точку в компакте.

12. Критерий компактности $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт $\iff K$ замкнуто и ограничено.

13. Предел по базе $\lim_B f(x) = A := \forall V(A) \exists B \in \mathbb{B} f(B) \subset V(A) \varepsilon\text{-д: } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

14. Фундаментальная посл-ть $\{x_n\}$ фундам.: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Полное МП: всякая фундам. посл-ть сходится. Примеры полных: \mathbb{R}^n (с любой $\|\cdot\|_p$), $C[a, b]$ (с $\|f\|_\infty = \max |f|$), ℓ^p . Критерий Коши: $\{x_n\}$ сходится $\iff \{x_n\}$ фундам. (в полном пр-ве).

15. Колебание $\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} \rho(f(x), f(y))$

16. Критерий Коши $\exists \lim_B f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbb{B} : \omega(f, B) < \varepsilon$

17. Предел композиции $\lim_X (g \circ f)(x) = \lim_Y g(y)$

18. Повторные пределы $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ и $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. Их равенство $\not\Rightarrow \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$.

19. Непрерывность f непр. в a : $\forall V(f(a)) \exists U(a) f(U(a)) \subset V(f(a))$. Экв.: (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; (2) Гейне: $x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$; (3) $\forall G$ откры. $f^{-1}(G)$ откры.

20. Локальные св-ва (1) Лок. огранич.: $\exists U(a) : f(U(a))$ огранич. (2) Знакопост.: $f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists U(a) : \forall x \in U(a) f(x) \neq 0$.

21. Глобальные св-ва Вейерштрасс: непр. образ компакта — компакт. Больцано-Коши: непр. образ связного — связное (промежут. знач.).

22. Равномерная непр-ть f равном. непр. на E : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (δ не зависит от точки!). Кантор: f непр. на компакте $K \Rightarrow f$ равном. непр. на K . Обычная непр.: $\delta = \delta(\varepsilon, x)$, равном.: $\delta = \delta(\varepsilon)$.

23. Класс $C^k C^0$ — непр. $C^1 : \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ непр. C^k : все частн. произв. до порядка k непр.

24. Линейное отобр. $f(x) = Lx$, где L — матрица $n \times m$.

25. Линейная ф-ция $\ell(x) = \langle a, x \rangle = \sum a_i x_i$

26. о-малое и O -большое $\alpha = O(\beta)$ при $x \rightarrow a$: $\exists M > 0 \exists U(a) \forall x \in U(a) : \frac{|\alpha(x)|}{|\beta(x)|} \leq M$ $\alpha = o(\beta)$: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

27. Лемма $\forall h : |h| < \delta$ верно $L(h) = O(h)$ (для лин. оператора).

28. Дифференцируемость f дифф. в a : $f(a+h) - f(a) = L(h) + o(|h|)$, где $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — лин. отобр. Дифф-л $df(a, h) = L(h)$ — главная лин. часть приращения. Геом.: касательное пр-во $T_a X$. $df : T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$.

29. Дифф-е покоординатно $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифф. \iff все $f_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ дифф. 30. Матрица Якоби $J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} df(a, h) = J_f(a) \cdot h$

31. Связь непр. и дифф. Дифф. \Rightarrow непр. Обратное неверно.

32. Правила дифф-я $d(f+g) = df + dg$, $d(\lambda f) = \lambda df$. $d(fg) = g df + f dg$, $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$.

33. Дифф-е композиции $(g \circ f)$ дифф.: $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$ (цепное правило).

34. Произв. по напр., градиент $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$ — произв. по ед. вектору e . $\nabla f(a) = \text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ — градиент. Связь: $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \langle \nabla f(a), e \rangle$ (если f дифф.). ∇f указывает направл. наиб. возраст. f , $|\nabla f|$ — скорость возраст.

35. Достаточн. условие f имеет $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ в окр. a и они непр. в a ($f \in C^1 \Rightarrow f$ дифф. в a).

36. Обратная ф-ция f — гомеоморфизм, дифф., df имеет непр. обратный $\Rightarrow f^{-1}$ дифф., $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$.

37. Теорема Банаха $F : X \rightarrow X$ — скжимающее ($\rho(F(x_1), F(x_2)) \leq qp(x_1, x_2)$, $q \in (0, 1)$) на полном МП $\Rightarrow \exists!$ неподв. точка a : $F(a) = a$. Док-во: берем $x_0 \in X$, строим $x_{n+1} = F(x_n)$, показываем фундам., предел — неподв. точка. Оценка: $\rho(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(x_1, x_0)$.

38. Лемма (а-ля Лагранж) $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)h_i$, c_i — промежут. точки. Оценка: $|f(a+h) - f(a)| \leq \max_i |\frac{\partial f}{\partial x_i}| \cdot |h|$.

39. Теорема об обратной ф-ции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1$ в окр. a , $\det J_f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists$ окр. U и V : $f : U \rightarrow V$ — диффеоморфизм, $f^{-1} \in C^1$. $J_{f^{-1}}(f(a)) = [J_f(a)]^{-1}$. Идея дока: метод Ньютона, теорема Банаха.

40. Теорема о неявной ф-ции $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(a, b) = 0$, $F \in C^1$, $\det(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)) \neq 0 \Rightarrow$ в окр. $a \exists! C^1$ -ф-ция $y = \varphi(x)$: $F(x, \varphi(x)) = 0$, $\varphi(a) = b$. Произв.: $\frac{\partial y}{\partial x} = -(\frac{\partial F}{\partial y})^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$ (дифф-е $F(x, \varphi(x)) = 0$ по x). Связь с обр. ф-цией: частный случай.

41. Функции независимости f_1, \dots, f_k функции независ.: не $\exists \Phi : \Phi(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) = 0$ нетривиально.

42. Теорема о функции незав. $f_1, \dots, f_k \in C^1$ функции независ. \iff ранг матр. из ∇f_i равен k . При $k = n$: $\det J_f(a) \neq 0$.

43. Произв. высш. порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^k f}{\partial x_i \dots \partial x_k}$ — посл. дифф-е.

44. Теорема Шварца $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ непр. в $a \Rightarrow$ они равны в a .

45. Теорема Юнга $f \in C^k \Rightarrow$ результат k -кратного дифф-я не зависит от порядка.

46. Формула Тейлора $d^k f(a, \mathbf{h}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \dots h_{i_k} f(a + \mathbf{h}) = f(a) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k f(a, \mathbf{h}) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\mathbf{c}, \mathbf{h})$

47. Локальный экстремум Лок. мин.: $\exists U(x_0) : \forall \mathbf{x} \in U f(\mathbf{x}) \geq f(x_0)$. Лок. макс.: $f(\mathbf{x}) \leq f(x_0)$.

48. Условия экстремума Необх. (Ферма): лок. экстр. и дифф. $\Rightarrow \nabla f(a) = 0$ (стаци. точка). Достат.: а — стаци, $H(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ — матр. Гессе. $H > 0$ (полож. опред.) \Rightarrow мин; $H < 0$ (отриц. опред.) \Rightarrow макс; H знакоперем. \Rightarrow седло; H вырожд. — ? (нужно смотреть высш. произв.). Критерий Сильвестра: $H > 0 \iff$ все гл. миноры > 0 ; $H < 0 \iff$ миноры чередуются: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

49-50. Условный экстремум Экстр. $f(\mathbf{x})$ при связях $g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m$. $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$ — ф-ция Лагранжа. Необх. (правило множ. Лагранжа): а — условн. экстр. $\Rightarrow \exists \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$: $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$ и $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{a}) = 0$. Геом. смысл: $\nabla f(\mathbf{a}) = \sum \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a})$ (градиент f — лин. комб. градиентов связей). Достат.: исследуем $d^2 L$ на многообр. $\{g_i = 0\}$.

Доп. формулы и факты: $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$. $d^2 f(a, h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \langle Hh, h \rangle$. Для $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$. Стаци. точка (a, b) : (1) $\det H > 0, f_{xx} > 0 \Rightarrow$ мин; (2) $\det H > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow$ макс; (3) $\det H < 0 \Rightarrow$ седло; (4) $\det H = 0$ — ?. Связность: А связно \iff не предст. как объед. двух непуст. непересек. откр. (в A) мн-в. \mathbb{R}^n связно. Компактность: послед. критерий: К компакт \iff из любой послед. можно выделить сходящ. подпослед. Теор. Вейерштрасса 2: непр. ф-ция на компакте достигает своих sup и inf.