Домашнее задание №7

Тиганов Вадим Игоревич, группа J3212
ИСУ: 467701

Задание 1

Найти $df(0,1)$, $d^2f(0,1)$, если $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy) + \sin x$
Решение:
Частные производные первого порядка:

$$f_x = \frac{y}{1+(xy)^2} + \cos x, \quad f_y = \frac{x}{1+(xy)^2}$$

В точке $(0,1)$:

$$f_x(0,1) = \frac{1}{1+0} + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

$$f_y(0,1) = \frac{0}{1+0} = 0$$

Первый дифференциал:

$$df(0,1) = f_x(0,1)dx + f_y(0,1)dy = 2dx$$

Частные производные второго порядка:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{1+x^2y^2} + \cos x\right) = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} - \sin x$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x^2y^2} + \cos x\right) = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}\right) = -\frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$$

В точке $(0,1)$:

$$f_{xx}(0,1) = 0 - 0 = 0, \quad f_{xy}(0,1) = \frac{1}{1} = 1, \quad f_{yy}(0,1) = 0$$

Второй дифференциал:

$$d^2f(0,1) = f_{xx}(0,1)dx^2 + 2f_{xy}(0,1)dxdy + f_{yy}(0,1)dy^2 =$$

$$= 0 \cdot dx^2 + 2 \cdot 1 \cdot dxdy + 0 \cdot dy^2 = 2dxdy$$

Итоговый ответ:

$$df(0,1) = 2dx, \quad d^2f(0,1) = 2dxdy.$$

Задание 2

Найти dg, d^2g, если $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, где
$f(x,y) = x\sin y + y\cos x$ и $x = uv$, $y = u^2 - v^2$
Решение: Дифференциалы dx и dy:

$$dx = x_u du + x_v dv = vdu + udv, \quad dy = y_u du + y_v dv = 2udu - 2vdv$$

Вторые дифф.:

$$d^2x = 2dudv, \quad d^2y = 2du^2 - 2dv^2$$

Первый дифференциал $dg = df$:

$$dg = f_x dx + f_y dy = f_x(vdu + udv) + f_y(2udu - 2vdv) =$$

$$= (vf_x + 2uf_y)du + (uf_x - 2vf_y)dv$$

Частные производные f:

$$f_x = \sin y - y\sin x, \quad f_y = x\cos y + \cos x$$

Для второго дифф. используем формулу:

$$d^2g = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_x d^2x + f_y d^2y$$

Вычисляем:

$$dx^2 = (vdu + udv)^2 = v^2du^2 + 2uvdudv + u^2dv^2$$

$$dy^2 = (2udu - 2vdv)^2 = 4u^2du^2 - 8uvdudv + 4v^2dv^2$$

$$dxdy = (vdu+udv)(2udu-2vdv) = 2uvdu^2+(2u^2-2v^2)dudv-2uvdv^2$$

Подстановка:

$$d^2g = f_{xx}(v^2du^2+2uvdudv+u^2dv^2)+2f_{xy}(2uvdu^2+(2u^2-2v^2)dudv-2uvdv^2)$$

$$+f_{yy}(4u^2du^2 - 8uvdudv + 4v^2dv^2) + f_x(2dudv) + f_y(2du^2 - 2dv^2)$$

Группировка:

$$d^2g = (f_{xx}v^2 + 4uvf_{xy} + 4u^2f_{yy} + 2f_y)du^2$$
$$+(2uvf_{xx} + 4(u^2 - v^2)f_{xy} - 8uvf_{yy} + 2f_x)dudv$$
$$+(f_{xx}u^2 - 4uvf_{xy} + 4v^2f_{yy} - 2f_y)dv^2$$

Частные произв. второго порядка f:

$$f_{xx} = -y\cos x, \quad f_{xy} = \cos y - \sin x, \quad f_{yy} = -x\sin y$$

Все произв. вычисляются в точке $(x, y) = (uv, u^2 - v^2)$.
Ответ:

$$dg = (vf_x + 2uf_y)du + (uf_x - 2vf_y)dv$$
$$d^2g = (f_{xx}v^2 + 4uvf_{xy} + 4u^2f_{yy} + 2f_y)du^2$$
$$+(2uvf_{xx} + 4(u^2 - v^2)f_{xy} - 8uvf_{yy} + 2f_x)dudv$$
$$+(f_{xx}u^2 - 4uvf_{xy} + 4v^2f_{yy} - 2f_y)dv^2$$

Задание 3

Найти du, d^2u, если $u = \phi(xy, \frac{x}{y})$, где ϕ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, x, y — независимые переменные.
Решение:
Обозначим: $s = xy$, $t = \frac{x}{y}$. Тогда $u = \phi(s, t)$.

Первый дифф.:

$$du = \phi_s ds + \phi_t dt = \phi_s(ydx + xdy) + \phi_t\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\right)$$

$$= \left(y\phi_s + \frac{1}{y}\phi_t\right)dx + \left(x\phi_s - \frac{x}{y^2}\phi_t\right)dy$$

Для второго дифф.:

$$d^2u = A_x dx^2 + (A_y + B_x)dxdy + B_y dy^2$$

где

$$A = y\phi_s + \frac{1}{y}\phi_t, \quad B = x\phi_s - \frac{x}{y^2}\phi_t$$

Вычислим произв.:

$$A_x = y^2\phi_{ss} + 2\phi_{st} + \frac{1}{y^2}\phi_{tt}$$

$$A_y = \phi_s + xy\phi_{ss} - \frac{1}{y^2}\phi_t - \frac{x}{y^3}\phi_{tt}$$

$$B_x = \phi_s + xy\phi_{ss} - \frac{1}{y^2}\phi_t - \frac{x}{y^3}\phi_{tt}$$

$$B_y = x^2\phi_{ss} - \frac{2x^2}{y^2}\phi_{st} + \frac{x^2}{y^4}\phi_{tt}$$

$A_y = B_x, \implies:$

$$A_y + B_x = 2\left(\phi_s + xy\phi_{ss} - \frac{1}{y^2}\phi_t - \frac{x}{y^3}\phi_{tt}\right)$$

Тогда:

$$d^2u = \left(y^2\phi_{ss} + 2\phi_{st} + \frac{1}{y^2}\phi_{tt}\right)dx^2$$

$$+2\left(\phi_s + xy\phi_{ss} - \frac{1}{y^2}\phi_t - \frac{x}{y^3}\phi_{tt}\right)dxdy$$

$$+\left(x^2\phi_{ss} - \frac{2x^2}{y^2}\phi_{st} + \frac{x^2}{y^4}\phi_{tt}\right)dy^2$$

Ответ:

$$du = \left(y\phi_s + \frac{1}{y}\phi_t\right)dx + \left(x\phi_s - \frac{x}{y^2}\phi_t\right)dy$$

$$d^2u = \left(y^2\phi_{ss} + 2\phi_{st} + \frac{1}{y^2}\phi_{tt}\right)dx^2$$

$$+2\left(\phi_s + xy\phi_{ss} - \frac{1}{y^2}\phi_t - \frac{x}{y^3}\phi_{tt}\right)dxdy$$

$$+\left(x^2\phi_{ss} - \frac{2x^2}{y^2}\phi_{st} + \frac{x^2}{y^4}\phi_{tt}\right)dy^2$$