Задача 1: Линии уровня Дано: $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$. Найти линии уровня. Метод: записать $f(x,y)=C$, где C — константа. Получаем $\frac{y}{x^2}=C \implies y=Cx^2$ при $x\neq 0$. Это семейство парабол с вершиной в начале координат. Для разных C: $C>0$ — ветви вверх, $C<0$ — вниз, $C=0$ — ось Ox. При $C=1$: $y=x^2$, при $C=2$: $y=2x^2$ и т.д. График: все параболы проходят через $(0,0)$, но $x=0$ не в области определения. Как чертить: выбрать значения $C=-2,-1,0,1,2$, построить $y=Cx^2$ для каждого, отметить направление возрастания f (в данном случае по вертикали). Общий алгоритм: (1) $f(x,y)=C$; (2) выразить y через x или параметризовать; (3) построить несколько кривых для разных C; (4) проанализировать поведение.

Задача 2: Предел (полярные) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Общий алгоритм: (1) перейти к полярным координатам $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$; (2) получить выражение вида $r\cdot g(\theta)$; (3) если g ограничен, предел $=0$. Решение: $\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2}=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$. Так как $|\cos^3\theta+\sin^3\theta|\leq 2$, получаем ограниченную функцию, умноженную на $r\to 0$. Следовательно, предел равен 0. Проверка: при $y=kx$ получаем $\frac{x^3(1+k^3)}{x^2(1+k^2)}=x\frac{1+k^3}{1+k^2}\to 0$. Ответ: 0.

Задача 3: Касательная плоскость Поверхность: $F(x,y,z)=x^2+3xyz+4y^2+2z^3=0$, точка $M(0,2,-2)$. Общий алгоритм: (1) вычислить частные производные F'_x, F'_y, F'_z; (2) подставить координаты точки; (3) составить уравнение $F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0)=0$. Решение: $F'_x=2x+3yz, F'_y=3xz+8y, F'_z=3xy+6z^2$. В M: $F'_x=-12, F'_y=16, F'_z=24$. Уравнение: $-12x+16(y-2)+24(z+2)=0$. Упрощая: $-12x+16y-32+24z+48=0$, т.е. $-3x+4y+6z=4$. Геометрически: нормаль плоскости $\vec{n}=(-12,16,24)$, показывает направление изменения поверхности в точке M.

Задача 4: Разложение Тейлора $f(x,y,z)=\frac{\cos(y+z)}{e^x}$, разложить до $o(\|h\|^2)$ в точке $a=(0,0,0)$. Общий алгоритм: (1) вычислить $f(a)$; (2) найти первые и вторые производные в a; (3) записать $f(a+h)=f(a)+df(a,h)+\frac{1}{2}d^2f(a,h)+o(\|h\|^2)$. Решение: $f(0,0,0)=1$. Первые: $f'_x=-\frac{\cos(y+z)}{e^x}=-1, f'_y=f'_z=0$ в $(0,0,0)$. Вторые: $f''_{xx}=-\frac{2\cos(y+z)}{e^x}=0, f''_{xy}=\frac{\sin(y+z)}{e^x}=0, f''_{yy}=f''_{zz}=\frac{\cos(y+z)}{e^x}=1, f''_{yz}=-\frac{\cos(y+z)}{e^x}=-1$ в $(0,0,0)$. Разложение: $f(x,y,z)=1-x+\frac{1}{2}(y^2+z^2-2yz)+o(x^2+y^2+z^2)=1-x+\frac{1}{2}(y-z)^2+o(\|h\|^2)$.

Задача 5: Экстремумы $f(x,y)=(x-y)(1-xy)$. Общий алгоритм: (1) найти частные производные f'_x, f'_y; (2) решить систему $f'_x=0, f'_y=0$; (3) исследовать характер критических точек по Гессиану. Решение: $f'_x=1\cdot(1-xy)+(x-y)(-y)=1-2xy+y^2$; $f'_y=-1\cdot(1-xy)+(x-y)(-x)=-1-x^2+2xy$. Система: $1-2xy+y^2=0, -1-x^2+2xy=0$. Складывая: $y^2-x^2=0 \implies y=\pm x$. Для $y=x$: $1-x^2=0 \implies x=\pm 1$. Критические точки: $(1,1)$ и $(-1,-1)$. Вычисляем Гессиан: $f_{xx}=-2y, f_{xy}=-2x+2y=f_{yx}, f_{yy}=2x$. В $(1,1)$: $H=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\det H=-4<0$ — седло. В $(-1,-1)$: $H=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $\det H=-4<0$ — седло.

Задача 6: Угол между градиентами $f(x,y)=\frac{y^2}{x}, g(x,y)=2x^2+y^2$, точка $(4,2)$. Общий алгоритм: (1) вычислить градиенты $\nabla f, \nabla g$ в точке; (2) найти скалярное произведение и длины; (3) вычислить $\cos\phi=\frac{\langle\nabla f,\nabla g\rangle}{|\nabla f||\nabla g|}$. Решение: $\nabla f=(-\frac{y^2}{x^2},\frac{2y}{x}), \nabla g=(4x,2y)$. В $(4,2)$: $\nabla f=(-\frac{1}{4},1), \nabla g=(16,4)$. Скалярное: $\langle\nabla f,\nabla g\rangle=-4+4=0$. Значит $\cos\phi=0, \phi=90$ — градиенты перпендикулярны!

Задача 7: Второй дифференциал $f(x,y)=\varphi(xy,y/x)$. Общий алгоритм: (1) ввести новые переменные $u=xy, v=y/x$; (2) найти первый дифференциал по цепному правилу; (3) продифференцировать ещё раз для d^2f. Решение: Частные производные: $u'_x=y, u'_y=x, v'_x=-y/x^2, v'_y=1/x$. Шаг 1: первые производные. По цепному правилу $(f(g(x)))'=f'(g)\cdot g'$: $f'_x=\varphi'_u\cdot u'_x+\varphi'_v\cdot v'_x=\varphi'_u\cdot y+\varphi'_v\cdot(-y/x^2)$, $f'_y=\varphi'_u\cdot u'_y+\varphi'_v\cdot v'_y=\varphi'_u\cdot x+\varphi'_v\cdot(1/x)$. Шаг 2: вторые производные. Дифференцируем f'_x по x: $\frac{\partial}{\partial x}[y\varphi'_u]=y(\varphi''_{uu}\cdot u'_x+\varphi''_{uv}\cdot v'_x)=y(\varphi''_{uu}y+\varphi''_{uv}(-y/x^2))$, $\frac{\partial}{\partial x}[-\frac{y}{x^2}\varphi'_v]=\frac{2y}{x^3}\varphi'_v-\frac{y}{x^2}(\varphi''_{vu}u'_x+\varphi''_{vv}v'_x)=\frac{2y}{x^3}\varphi'_v-\frac{y}{x^2}(\varphi''_{vu}y+\varphi''_{vv}(-y/x^2))$. Итого: $f''_{xx}=y^2\varphi''_{uu}-\frac{y^2}{x^2}\varphi''_{uv}+\frac{2y}{x^3}\varphi'_v-\frac{y^2}{x^2}\varphi''_{vu}+\frac{y^2}{x^4}\varphi''_{vv}$. f''_{xy} аналогично, $d^2f=f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}dy^2$.

Задача 8: Ближайшая точка на конусе Найти ближайшую к точке $(0,2,3)$ точку на конусе $x^2=y^2+z^2$. Общий алгоритм: (1) составить функцию расстояния $D^2=(x-0)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$; (2) использовать ограничение $x^2=y^2+z^2$; (3) применить метод множителей Лагранжа или подстановку. Решение: $D^2=x^2+(y-2)^2+(z-3)^2$. Используя $x^2=y^2+z^2$: $D^2=y^2+z^2+y^2-4y+4+z^2-6z+9=2y^2+2z^2-4y-6z+13$. Минимум: $\frac{\partial D^2}{\partial y}=4y-4=0 \implies y=1$, $\frac{\partial D^2}{\partial z}=4z-6=0 \implies z=1.5$. Тогда $x^2=1+2.25=3.25$, $x=\pm\sqrt{3.25}$. Ближайшая точка: $(\sqrt{3.25},1,1.5)$. Альтернатива: метод Лагранжа: минимизировать D^2 при $g(x,y,z)=x^2-y^2-z^2=0$, система $\nabla D^2=\lambda\nabla g$, $x^2=y^2+z^2$.

ВАРИАНТ 2 З.1: Линии уровня $f=\frac{2}{xy}$. Линия уровня: $\frac{2}{xy}=C \implies xy=\frac{2}{C}$ $(C\neq 0)$. Это гиперболы $y=\frac{2}{Cx}$. При $C>0$: I и III квадранты; при $C<0$: II и IV квадранты. Алгоритм: (1) $f=C$; (2) выразить y; (3) исследовать при разных C.

З.2: Предел $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y^2)(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y^2})$. $|\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y^2}|\leq 2$ ограничен, $(x+y^2)\to 0$. Ограниченная на бесконечно малую $=0$. Ответ: 0.

З.3: Касательная плоскость $F=z+y^2-2x^3-2xy=0$, $M(-1,1,-5)$. $F'_x=-6x^2-2y=-8, F'_y=2y-2x=4, F'_z=1$. Уравнение: $-8(x+1)+4(y-1)+(z+5)=0$, т.е. $-8x+4y+z=7$.

З.4: Тейлор $f=\frac{\cos(y-z)}{1+x}$ в $(0,0,0)$. $f(0)=1$. Первые: $f'_x=-\frac{\cos(y-z)}{(1+x)^2}=-1, f'_y=f'_z=0$ в $(0,0,0)$. Вторые: $f''_{xx}=\frac{2\cos(y-z)}{(1+x)^3}=2, f''_{xy}=\frac{\sin(y-z)}{(1+x)^2}=0, f''_{yy}=f''_{zz}=-\frac{\cos(y-z)}{1+x}=-1, f''_{yz}=\frac{\cos(y-z)}{1+x}=1$ в $(0,0,0)$. Разложение: $f(x,y,z)=1-x+\frac{1}{2}(2x^2-y^2-z^2+2yz)+o(\|h\|^2)=1-x+x^2-\frac{1}{2}(y-z)^2+o(\|h\|^2)$.

З.5: Экстремум $f=3x^2y+y^3-18x-30y$. $f'_x=6xy-18=0 \implies xy=3$, $f'_y=3x^2+3y^2-30=0 \implies x^2+y^2=10$. Из $x=\frac{3}{y}$: $\frac{9}{y^2}+y^2=10, y^4-10y^2+9=0, y^2=5\pm 4$, $y=\pm 1,\pm 3$. Точки: $(3,1),(-3,-1),(1,3),(-1,-3)$. $H=\begin{pmatrix}6y & 6x\\ 6x & 6y\end{pmatrix}$. В $(1,3)$: $\det H=288>0, f_{xx}=18>0$ — мин; в $(-1,-3)$ аналогично — мин; в $(3,1)$ и $(-3,-1)$: $\det H=0$ — требуется дополнительное исследование.

З.6: Угол градиентов $f=\frac{y^2}{x}, g=2x^2+y^2$, $(3,-1)$. $\nabla f=(-\frac{1}{9},-\frac{2}{3}), \nabla g=(12,-2)$. Скалярное: 0. Угол 90 — перпендикулярны!

З.7: d^2f $f=\varphi(x^2+y^2,x/y)$. $u=x^2+y^2, v=x/y$. $df=\varphi'_u(2xdx+2ydy)+\varphi'_v(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy)=(2x\varphi'_u+\frac{\varphi'_v}{y})dx+(2y\varphi'_u-\frac{x\varphi'_v}{y^2})dy$. Первые производные: $f'_x=2x\varphi'_u+\frac{\varphi'_v}{y}, f'_y=2y\varphi'_u-\frac{x\varphi'_v}{y^2}$. Вторые: $f''_{xx}=2\varphi'_u+2x[\varphi''_{uu}2x+\varphi''_{uv}\frac{1}{y}]+\frac{1}{y}[\varphi''_{vu}2x+\varphi''_{vv}\frac{1}{y}]-\frac{\varphi'_v}{y^2}$. $f''_{xy}=2x[\varphi''_{uu}2y+\varphi''_{uv}(-\frac{x}{y^2})]+\frac{\varphi'_v}{y^2}-\frac{x}{y^2}[\varphi''_{vu}2y+\varphi''_{vv}(-\frac{x}{y^2})]+\frac{2x\varphi'_v}{y^3}$. Аналогично f''_{yy}. Формула: $d^2f=f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}dy^2$.

З.8: Ближайшая точка Минимум расстояния от $(0,2,3)$ до $x^2=y^2+z^2$. $D^2=y^2+z^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2y^2+2z^2-4y-6z+13$. $\frac{\partial D^2}{\partial y}=4y-4=0 \implies y=1, \frac{\partial D^2}{\partial z}=4z-6=0 \implies z=1.5$. $x^2=3.25, x=\pm\sqrt{3.25}$. Ответ: $(\sqrt{3.25},1,1.5)$. **Производные:** $x^n\to nx^{n-1}\to n(n-1)x^{n-2}$; $e^x\to e^x\to e^x$; $\ln x\to 1/x\to -1/x^2$; $\sin x\to\cos x\to -\sin x$; $\cos x\to -\sin x\to -\cos x$; $\arcsin x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\to\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$; $\arccos x\to -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\to -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$; $\arctan x\to\frac{1}{1+x^2}\to -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $(uv)'=u'v+uv'$; $(u/v)'=(u'v-uv')/v^2$; $(f(g))'=f'(g)\cdot g'$.