Домашнее задание №5

Тиганов Вадим Игоревич, группа J3212
ИСУ: 467701

Задача 1: Сжимающие отображения

(a) $f(x) = \arctan(x)$

Производная $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. На $\mathbb{R}$ имеем $0 < f'(x) \leq 1$. Так как $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 1$ (достигается в $x = 0$), отображение **не является сжимающим** на $\mathbb{R}$. Оно является сжимающим на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем 0, так как на таком отрезке $\max |f'(x)| < 1$.

(b) $f(x) = \ln(1 + e^x)$

Производная $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется $0 < f'(x) < 1$. Однако $\sup_{x\in\mathbb{R}} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$. Следовательно, отображение **не является сжимающим** на $\mathbb{R}$. Оно будет сжимающим на любом конечном отрезке $[a, b]$.

(c) $f(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$

Производная $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$. Условие сжатия: $|\frac{1}{2} + \cos(x)| < 1$, что эквивалентно $-\frac{3}{2} < \cos(x) < \frac{1}{2}$. Это выполняется, когда $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k)$. Наибольшими отрезками, где отображение сжимающее, являются любые отрезки $[a, b]$, целиком лежащие внутри одного из этих интервалов.

Задача 2: Уравнение $x = e^{-x}$

Доказательство единственности. Рассмотрим функцию $g(x) = x - e^{-x}$. Её производная $g'(x) = 1 + e^{-x} > 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Так как $g'(x) > 0$, функция $g(x)$ строго монотонно возрастает. Поскольку $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, по теореме о промежуточном значении существует корень. В силу строгой монотонности он единственен.

Итерационный процесс. Используем метод простых итераций: $x_{n+1} = e^{-x_n}$. Начнём с $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-0} = 1 \\ x_2 &= e^{-1} \approx 0.3679 \\ x_3 &= e^{-0.3679} \approx 0.6922 \\ x_4 &= e^{-0.6922} \approx 0.5005 \\ x_5 &= e^{-0.5005} \approx 0.6062 \end{aligned}$$

Последовательность сходится к решению $x \approx 0.56714$.
(Считал на Python:)

```
import math

x_n = 0
sequence = [x_n]

for i in range(1, 10**6):
    x_n = math.exp(-x_n)
    sequence.append(round(x_n, 4))

print(sequence[0:6])
print(sequence[10**6 - 1])
# [0, 1.0, 0.3679, 0.6922, 0.5005, 0.6062]
# 0.5671
```

Задача 3: Производная обратной функции

Пусть f непрерывно дифференцируема в точке a, $f'(a) \neq 0$, и $g = f^{-1}$. По определению производной:

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

где $y_0 = f(a)$. Сделаем замену $x = g(y)$, $a = g(y_0)$. Из непрерывности g следует, что $y \to y_0 \implies x \to a$.

$$g'(y_0) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Так как предел знаменателя существует и равен $f'(a) \neq 0$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$