Домашнее задание №4

Тиганов Вадим Игоревич, группа J3212
ИСУ: 467701

Задача 1

Вычислить частные производные в заданной точке и проверить дифференцируемость функции в точке $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Вычисление частных производных. Используя определение, имеем

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Данный предел не определён: справа ($\Delta x \to 0^+$) он равен 1, слева ($\Delta x \to 0^-$) равен -1. По симметрии производная $f_y(0,0)$ также не существует.

Анализ дифференцируемости. В точке $(0,0)$ функция не дифференцируема, так как частные производные не определены.

(b) $f(x,y) = |y| \sin x$

Нахождение частных производных. Применяя определение, находим

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0| \sin(\Delta x) - 0}{\Delta x} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y| \sin 0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Проверка дифференцируемости. Исследуем предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Используя оценку $|\sin x| \le |x|$, имеем

$$\frac{|y|\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|y||x|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Применяя неравенство $2|x||y| \le x^2+y^2$, находим

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

Таким образом, предел существует и равен нулю, откуда функция дифференцируема в начале координат с дифференциалом $df(0,0)=0$.

(c) $f(x,y) = 2y + \cos\sqrt[3]{xy}$

Расчёт частных производных. По определению получаем

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cdot 0+\cos\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-(2\cdot 0+\cos 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos 0-1}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{2\Delta y+\cos\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-(0+\cos 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta y}{\Delta y} = 2.$$

Проверка дифференцируемости. Необходимо установить, что

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-2\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)^{1/3}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Полагая $t=(xy)^{1/3}$, используем разложение при $t\to 0$:

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2),$$

откуда

$$\cos(xy)^{1/3}-1 = -\frac{(xy)^{2/3}}{2}+o\left((xy)^{2/3}\right).$$

Введём обозначение $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Поскольку $|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{r^2}{2}$, имеем

$$|(xy)^{2/3}| \le \left(\frac{r^2}{2}\right)^{2/3} = Cr^{4/3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\cos(xy)^{1/3}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{C'r^{4/3}}{r} = C'r^{1/3} \to 0,$$

при $(x,y)\to(0,0)$. Таким образом, функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Вычисление производных. Используя определение, находим

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-1/(\Delta x)^2}}{\Delta x}.$$

Экспонента e^{-1/t^2} убывает при $t\to 0$ быстрее любой степенной функции t^n. Полагая $s = 1/|\Delta x|$, получаем, что предел равен нулю. Отсюда $f_x(0,0)=0$; аналогично $f_y(0,0)=0$.
Исследование дифференцируемости. Проверяем условие:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{e^{-1/r^2}}{r}.$$

Замена $s=1/r$ приводит к выражению $(e^{-s^2})s \to 0$ при $s\to\infty$, откуда предел равен нулю. Значит, функция дифференцируема в начале координат.

Задача 2

Дана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Требуется показать: частные производные определены в окрестности начала координат, в точке $(0,0)$ они равны нулю, однако терпят разрыв в этой точке; тем не менее функция дифференцируема в $(0,0)$.

Дифференцируемость в начале координат. Пусть $r^2 = x^2 + y^2$ для $(x,y) \neq (0,0)$. Тогда $f(x,y) = r^2 \sin(1/r^2)$, и

$$\frac{|f(x,y) - 0 - 0 \cdot x - 0 \cdot y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2|\sin(1/r^2)|}{r} = r|\sin(1/r^2)| \leq r \to 0.$$

Таким образом, функция дифференцируема в $(0,0)$ с частными производными $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Производные вне начала координат. При $(x,y) \neq (0,0)$ дифференцируем явно:

$$f_x(x,y) = 2x \sin\frac{1}{r^2} + r^2 \cos\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{r^2}.$$

Учитывая, что $\frac{d}{dx}\frac{1}{r^2} = -\frac{2x}{r^4}$, имеем

$$f_x(x,y) = 2x \sin\frac{1}{r^2} - \frac{2x}{r^2}\cos\frac{1}{r^2} \quad (r^2 = x^2 + y^2).$$

По аналогии

$$f_y(x,y) = 2y \sin\frac{1}{r^2} - \frac{2y}{r^2}\cos\frac{1}{r^2}.$$

Отсутствие непрерывности производных. Рассмотрим поведение f_x вдоль оси $y = 0$ при $x \neq 0$:

$$f_x(x,0) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

Слагаемое $-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ осциллирует с возрастающей амплитудой $2/|x|$ при $x \to 0$, поэтому предел $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ не существует. Поскольку $f_x(0,0) = 0$, производная f_x терпит разрыв в точке $(0,0)$. Аналогичное справедливо для f_y.

Задача 3

Вычислить дифференциал df функции $f(u)$ в следующих случаях.

(a) $u = x^2 + e^y$

Находим дифференциал переменной u:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 2x\,dx + e^y\,dy.$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$df = f'(u)\,du = f'(x^2 + e^y)(2x\,dx + e^y\,dy).$$

(b) $u = xyz$

Дифференциал u имеет вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

Следовательно,

$$df = f'(u)\,du = f'(xyz)(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz).$$

Задача 4

Определить дифференциал df функции $f(u, v)$ в двух случаях.

(a) $u = \frac{x}{y}$**,** $v = \frac{y}{x}$ **(при** $x \neq 0$**,** $y \neq 0$**)**

Вычисляем дифференциалы промежуточных переменных:

$$du = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy, \quad dv = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy.$$

Используя формулу полного дифференциала, получаем:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = f_u\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\right) + f_v\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right).$$

(b) $u = xy$, $v = yz$

Находим:

$$du = y\,dx + x\,dy, \quad dv = z\,dy + y\,dz.$$

Отсюда

$$df = f_u(y\,dx + x\,dy) + f_v(z\,dy + y\,dz).$$

Задача 5

(a)

Рассмотрим отображение $f : (x, y, z) \to (u, v, w)$, определённое как

$$u = xyz, \quad v = xy - xyz, \quad w = y - xy.$$

Построим якобиан $J_f = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ y - yz & x - xz & -xy \\ -y & 1 - x & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель (разложением по третьему столбцу), находим

$$\det J_f = xy^2.$$

(b)

Для функции $f(x) = (\sin x, \cos x, \tan x)$ и тождественного отображения $g(u) = u$ находим

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\sin x \\ \frac{d}{dx}\cos x \\ \frac{d}{dx}\tan x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \sec^2 x \end{pmatrix}.$$

Композиция с $g(u) = u$ даёт якобиан

$$J_{f\circ g}(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ -\sin u \\ \sec^2 u \end{pmatrix}.$$

(c)

Дано отображение $f : (x, y) \to (u, v)$ вида

$$u = x + \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad v = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$\det J_f = \frac{x^2 + y^2}{x^3}.$$

Для обратного отображения (в точках обратимости) якобиан равен

$$\det J_{f^{-1}} = \frac{1}{\det J_f} = \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$