Коллоквиум 1. Математический анализ

1 Топологическое пространство. Примеры. База топологии. Окрестность точки. Различные базы плоскости.

- **Топология (Определение 1):** Пусть X — некоторое множество, τ — некоторая система подмножеств X. Говорят, что τ есть **топология** или **топологическая структура**, если выполнены следующие аксиомы:
  1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
  2. Объединение любого семейства множеств из τ также принадлежит τ.
  3. Пересечение любого конечного семейства множеств из τ также принадлежит τ.
- **Топологическое пространство:** Пара (X, τ) называется **топологическим пространством**.
- **Окрестность точки (Определение 3): Окрестностью точки** топологического пространства называют любое открытое множество, содержащее эту точку.
- **База топологии (Определение 4): Базой топологического пространства** (X, τ) (или **базой топологии**) называется такое семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств X, что каждое непустое открытое множество $G \in \tau$ является объединением некоторой совокупности элементов семейства $\mathcal{B}$.
- **Различные базы плоскости:**
  - $\Sigma^2 - (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ (открытые круги).
  - $\Sigma^\infty - \max(|x-a|, |x-b|) < r$ (открытые квадраты).
  - $\Sigma^1 - |x-a| + |y-b| < r$ (открытые ромбы).

2 Метрические пространства. Аксиомы метрики.

- **Метрика (Определение 5):** Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ называется **метрикой** на X, если:
  1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
  2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in X$.
  3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in X$ (**неравенство треугольника**).
- **Метрическое пространство:** Пара (X, ρ) называется **метрическим пространством**.

3 Нормированные пространства. Аксиомы нормы.

ВНИМАНИЕ: Строгие формулировки **нормы** и ее **аксиом отсутствуют** в предоставленном конспекте.

4 Неравенство Коши-Буняковского.

- **Теорема 1 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца):** В евклидовом пространстве X для векторов x, y справедливо неравенство:

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

- **Для случая векторов с n координатами:**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

5 Неравенство Юнга.

- **Теорема 2 (неравенство Юнга):** Пусть $a, b > 0$, а числа $p, q > 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда верно:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

6 Неравенство Гёльдера.

- **Теорема 3 (неравенство Гёльдера):** Рассмотрим наборы положительных чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, а также числа $p, q > 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда верно:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}$$

7 Неравенство Минковского.

- **Теорема 4 (неравенство Минковского):** Рассмотрим наборы положительных чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, $p \geq 1$. Тогда верно:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}$$

8 Классификация точек множеств (внутренняя, внешняя, граничная, предельная, изолированная)

Пусть $U(x)$ — окрестность точки x, а $\tilde{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}$ — проколотая окрестность точки x.

- x — **внутренняя точка** множества A, если $\exists U(x) : U(x) \subset A$.

- x — **внешняя точка** множества A, если $\exists U(x) : U(x) \cap A = \emptyset$.
- x — **граничная точка** множества A, если $\forall U(x) : U(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U(x) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$.
- x — **предельная точка** множества A, если $\forall U(x) : \tilde{U}(x) \cap A \neq \emptyset$.
- x — **изолированная точка** множества A, если $\exists U(x) : U(x) \cap A = \{x\}$.
- **Замыкание множества** A**:** $\overline{A} = A \cup A'$.

9 Понятие компакта. Доказательство леммы, что брус компакт.

- **Понятие компакта (Определение 6):** Множество K называется **компактом** в метрическом пространстве, если из любого покрытия K множествами, открытыми в X, можно выделить конечное покрытие K.
- **Лемма 2. Брус – компакт.** Используется метод деления бруса пополам (по каждой координате), построение системы вложенных брусьев, стягивающихся к точке ξ, и доказательство того, что ξ должна быть покрыта конечным числом множеств, что приводит к противоречию.

10 Диаметр множества. Ограниченные множества.

- **Диаметр множества (Определение 7): Диаметр множества** $E \subset \mathbb{R}^n$ есть величина $d(E) = \sup_{x,y \in E} \rho(x, y)$.
- **Ограниченное множество (Определение 8):** Множество называется **ограниченным**, если его диаметр конечен.

11 Леммы про компактные множества

- **Лемма 3 (1): Компакт является замкнутым ограниченным множеством**.
- **Лемма 3 (3): Замкнутое подмножество компакта – компакт**.
- **Лемма 3 (4): Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку, принадлежащую компакту**.

12 Критерий компактности.

- **Теорема 5 (Критерий компактности):** $K \subset \mathbb{R}^n$ **тогда и только тогда, когда** K **– замкнуто и ограничено**.

13 Предел функции по базе. Определение предела в метрических пространствах.

- **Предел функции по базе (Определение 9):** Число $A \in \mathbb{R}^n$ называется **пределом при базе** $\mathbb{B}$:

$$\lim_{\mathbb{B}} f(x) = A := \forall V(A) \exists B \in \mathbb{B} f(B) \subset V(A)$$

- **Определение предела в метрических пространствах (через $\epsilon - \delta$):**

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \ 0 < |x - a| < \delta |f(x) - A| < \epsilon$$

14 Фундаментальные последовательности в $\mathbb{R}^n$. Полные метрические пространства. Примеры...

ВНИМАНИЕ: Определения **фундаментальной последовательности** и **полного метрического пространства отсутствуют** в предоставленном конспекте.

15 Колебание функции на множестве.

- **Определение 11. Колебанием функции** $f : X \to \mathbb{R}^n$ **на множестве** $E \subset X$ называется величина:

$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} \rho(f(x), f(y))$$

16 Критерий Коши в терминах колебаний.

- **Теорема 6 (Критерий Коши в терминах колебаний):** Предел функции $\lim_{\mathbb{B}} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда:

$$\exists \lim_{\mathbb{B}} f(x) \iff \forall \epsilon > 0 \exists B \in \mathbb{B} : \omega(f, B) < \epsilon$$

17 Предел композиции отображений.

- **Теорема 7 (Предел композиции):** При условиях, что f отображает базу $\mathbb{B}_X$ в базу $\mathbb{B}_Y$, и оба предела существуют:

$$\lim_{\mathbb{B}_X} (g \circ f)(x) = \lim_{\mathbb{B}_Y} (g)(y)$$

18 Повторные пределы.

- **Повторные пределы** — это пределы, которые вычисляются последовательно по каждой из координат.

- **Важный вывод:** Существование и равенство повторных пределов **не гарантирует** существование предела функции по базе.

19 Непрерывность отображений. Эквивалентные определения.

- **Определение 13. Непрерывность в точке:** Функция $f : X \to Y$ **непрерывна в точке** $a \in X$, если:
$$\forall V(f(a)) \exists U(a) f(U(a)) \subset V(f(a))$$

- **Эквивалентные определения:**
  1. **По базе:** $\lim_{\mathbb{B}} f(x) = f(a)$.
  2. **По последовательностям (Гейне):** Для любой последовательности $x_n \to a$ верно, что $f(x_n) \to f(a)$.
  3. **Через открытые множества (Теорема 8):** $\forall G \in \tau_Y$, $f^{-1}(G) \in \tau_X$ (**прообраз любого открытого множества открыт**).

20 Локальные свойства непрерывности (ограниченность, знакопостоянство).

- **Теорема 9 (Локальные свойства непрерывности):** Пусть f непрерывна в точке $a \in X$.
  1. **Локальная ограниченность:** $\exists U(a) \subset X : f(U(a))$ ограничено.
  2. **Локальное знакопостоянство:** Если $f(a) \neq 0$, то $\exists U(a) : \forall x \in U(a) f(x) \neq 0$.

21 Глобальные свойства непрерывности (непрерывный образ компакта - компакт, теорема Больцано-Коши).

- **Теорема 10 (Глобальные свойства непрерывности):**
  1. **Теорема Вейерштрасса 1 (Об образе компакта):** Непрерывный образ компакта – компакт.
  2. **Теорема Больцано-Коши (О промежуточном значении):** Пусть $K \subset X$ **связное множество**, а $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда $f(K)$ – **связное множество** (т.е. функция принимает все промежуточные значения).

22 Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора.

- **Равномерная непрерывность (Определение 19):** Функция называется **равномерно непрерывной на** E, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : \rho(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$.

- **Теорема Кантора:** Строгая формулировка теоремы о равномерной непрерывности на компакте **отсутствует** в конспекте.

23 Класс функций C^k.

- **Функция класса C^1:** Это функция, для которой частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ **непрерывны**.
- **Функция класса C^k:** Функция f называется k **раз дифференцируемой** в шаре $B(a, r)$. (Общее определение класса C^k **отсутствует**).

24 Представление линейного отображения в $\mathbb{R}^n$.

Действие линейного отображения f на вектор x можно представить в виде Lx, где L – **матрица линейного оператора**.

25 Представление линейной функции через скалярное произведение.

ВНИМАНИЕ: Конкретная формула представления линейной функции через скалярное произведение $\langle a, x \rangle$ **отсутствует** в конспекте.

26 o-малое и O-большое для функций на $\mathbb{R}^n$.

- **O-большое (Определение 25):** $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to a$, если $\exists M > 0 \exists U(a) \forall x \in U(a) : \frac{|\alpha(x)|}{|\beta(x)|} \leq M$.
- **o-малое (Определение 26):** $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$, если $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

27 Лемма про линейный оператор $L(h) = O(h)$.

- **Лемма 8:** $\forall h : |h| < \delta$ (in $\mathbb{R}^m$) верно, что $L(h) = O(h)$.

28 Дифференцируемая функция в точке. Дифференциал. Дифференциал как функция между касательными пространствами.

- **Дифференцируемая функция в точке (Определение 27):** Функция $f : X \to \mathbb{R}^n$ **дифференцируема в точке** $a \in X$, если при $h \to 0$ верно разложение:

  $$f(a + h) - f(a) = L(h) + o(\rho(h, 0))$$

  где L — **линейное отображение** $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
- **Дифференциал (Определение 28): Дифференциалом** функции f в точке a называется линейная часть $L(h)$ из разложения. Обозначается $df(a, h)$.
- **Дифференциал как функция между пространствами:** Дифференциал L является **линейным отображением** $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

29 Лемма о дифференцировании покоординатно.

ВНИМАНИЕ: Строгая формулировка леммы **отсутствует** в конспекте.

Концепция: $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда каждая ее координатная функция $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a.

30 Представление полного дифференциала. Частные производные. Матрица Якоби.

- **Полный дифференциал:** $df(a,h)$ — линейная часть $L(h)$.
- **Матрица Якоби:** Линейное отображение L представляется с помощью **матрицы Якоби** $J_f(a)$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

- **Связь:** $df(a,h) = J_f(a) \cdot h$.

31 Связь непрерывности и дифференцируемости.

- **Теорема (Необходимое условие дифференцируемости):** Если функция f **дифференцируема** в точке a, то она **непрерывна** в этой точке.
- **Обратное неверно.**

32 Правила дифференцирования (сумма, произведение, частное).

- **Линейность дифференциала (Теорема 9.1):**
  - $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$.
  - $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$.
- **Дифференцирование произведения/частного:** Правила дифференцирования произведения и частного для ФНП **отсутствуют** в конспекте.

33 Дифференцирование композиции. Матричное представление производной композиции.

- **Теорема 10 (о дифференцировании композиции):** Если f дифференцируема в a, а g дифференцируема в $f(a)$, то композиция $h = g \circ f$ дифференцируема в a.
- **Матричное представление (Цепное правило):** Матрица Якоби композиции равна произведению матриц Якоби:

$$J_h(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$$

34 Производная по направлению. Градиент.

- **Производная по направлению (Определение 29):**

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$$

- **Градиент (Определение 30):**

$$\nabla f(a) = \mathrm{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

- **Связь (для дифференцируемой f):** $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \langle \nabla f(a), e\rangle$.

35 Достаточное условие дифференцируемости.

- **Теорема 11 (Достаточное условие):** Если функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ имеет в окрестности точки a **частные производные** $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$, и они **непрерывны** в точке a (т.е. $f \in C^1$), то функция f **дифференцируема** в точке a.

36 Дифференцирование обратной функции.

- **Теорема 11 (о дифференцировании обратной функции):** Если f — гомеоморфизм, дифференцируема в a, и ее дифференциал df имеет **непрерывный обратный** df^{-1}, то обратная функция f^{-1} дифференцируема в $f(a)$, и:

$$d(f^{-1}) = (df)^{-1}$$

37 Сжимающее отображение. Теорема Банаха.

- **Определение 32 (Сжимающее отображение):** Отображение $F : X \to X$ (где (X, ρ) – **полное метрическое пространство**) называется **сжимающим с параметром сжатия** q, если $\exists q \in (0,1) \forall x_1, x_2 \in X$:

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) \le q\rho(x_1, x_2)$$

- **Теорема 12 (Теорема Банаха о неподвижной точке):** Если (X, ρ) — **полное метрическое пространство** и $F : X \to X$ q-сжимающее отображение, то **существует и единственна** точка $a \in X$ (неподвижная точка) такая, что $F(a) = a$.

38 Вспомогательная лемма (а-ля теорема Лагранжа для ФНП).

- **Концепция (Неравенство о среднем значении):** В многомерном случае используется идея применения теоремы Лагранжа для функции одной переменной к каждой координате.

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}_i) h_i$$

где $\mathbf{c}_i$ — некоторые промежуточные точки.

39 Теорема об обратной функции.

- **Формулировка:** Если $f \in C^1$ в окрестности a и $\det J_f(a) \neq 0$, то существует окрестность U точки a, в которой f имеет **непрерывно дифференцируемую обратную функцию** f^{-1}.

40 Теорема о неявном отображении.

- **Формулировка:** Пусть $F(x,y) = 0$, $F \in C^1$. Если $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$, то в окрестности a существует **единственная непрерывно дифференцируемая** функция $y = f(x)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, f(x)) = 0$.

41 Функционально независимый набор функций.

- **Определение:** Набор функций $f_1, \ldots, f_k$ называется **функционально независимым** на D, если он не является функционально зависимым (т.е. не существует нетривиальной функции Φ такой, что $\Phi(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})) = 0$).

42 Теорема о функциональной независимости. Случай для $\mathbb{R}^n$ на уровне алгебраического объяснения формулировки.

- **Теорема:** Если $f_1, \ldots, f_k$ непрерывно дифференцируемы, то они **функционально независимы** в окрестности a тогда и только тогда, когда **ранг** матрицы, составленной из их градиентов, равен k.

- **Алгебраическое объяснение для случая $k = n$:** Функциональная независимость эквивалентна тому, что **определитель Якобиана** $\det J_f(a)$ **не равен нулю** (т.е. матрица Якоби невырождена).

43 Производные высокого порядка.

- **Смешанная производная второго порядка** определяется так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

- **Смешанная производная порядка** k определяется аналогично последовательным дифференцированием.

44 Теорема Шварца.

ВНИМАНИЕ: Строгая формулировка **отсутствует**.

Концепция: Если смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ **непрерывны** в точке a, то они **равны** в этой точке.

45 Теорема Юнга.

ВНИМАНИЕ: Строгая формулировка **отсутствует**.

Концепция: Если функция $f \in C^k$, то результат k-кратного дифференцирования не зависит от порядка, в котором берутся частные производные.

46 Формула Тейлора.

- **Дифференциал порядка k:**

$$d^k f(a, \mathbf{h}) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

- **Формула Тейлора (остаток в форме Лагранжа):**

$$f(a+\mathbf{h}) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(a, \mathbf{h}) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\mathbf{c}, \mathbf{h})$$

где $\mathbf{c} \in (a, a+\mathbf{h})$.

47 Локальный экстремум.

- **Локальный минимум:** $f(\mathbf{x})$ имеет **локальный минимум** в $\mathbf{x}_0$, если $\exists U(\mathbf{x}_0) : \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.
- **Локальный максимум:** $f(\mathbf{x})$ имеет **локальный максимум** в $\mathbf{x}_0$, если $\exists U(\mathbf{x}_0) : \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$.

48 Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума.

- **Необходимое условие (Теорема Ферма):** Если f имеет локальный экстремум в точке $\mathbf{a}$ и дифференцируема, то ее **градиент** в этой точке равен нулю:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

- **Достаточное условие (Матрица Гессе $H(\mathbf{a})$):** Пусть $\mathbf{a}$ — стационарная точка.
  1. Если $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ **положительно определен** ($H(\mathbf{a})$ положительно определена), то $\mathbf{a}$ — **локальный минимум**.
  2. Если $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ **отрицательно определен**, то $\mathbf{a}$ — **локальный максимум**.
  3. Если $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ **знакопеременный**, то $\mathbf{a}$ — **седловая точка** (экстремума нет).

49 Условный экстремум. Необходимое условие условного экстремума.

50 Правило множителей Лагранжа.

- **Условный экстремум:** Экстремум функции $f(\mathbf{x})$ при условиях (связях) $g_i(\mathbf{x}) = 0$.
- **Функция Лагранжа:**
$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$
- **Необходимое условие (Правило множителей Лагранжа):** Если $\mathbf{a}$ — точка условного экстремума, то должны существовать множители $\boldsymbol{\lambda}$ такие, что **градиент** функции Лагранжа по всем переменным равен нулю:
$$\nabla L(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$
(т.е. все частные производные L по x_j и λ_i равны нулю).