1. Событие и аксиомы Ω — множество исходов. $A \subset \Omega$ — событие. Операции: $A \cup B$ (ИЛИ), $A \cap B$ (И), $\bar{A}$ (НЕ), $A \setminus B$. Несовместные: $A \cap B = \emptyset$. Аксиомы Колмогорова: (1) $P(A) \geq 0$; (2) $P(\Omega) = 1$; (3) для несовместных $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum P(A_i)$. Свойства: $P(\emptyset) = 0$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Классическая: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$. Геометрическая: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

2. Случайная величина (СВ) $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — СВ. Функция распределения $F(x) = P(\xi \leq x)$. Свойства: (1) F неубывает; (2) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$; (3) непрерывна справа. F однозначно задаёт распределение.

3. Дискретные распределения ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_i = P(\xi = x_i)$, где $\sum p_i = 1$. Ряд: таблица (x_i, p_i). Функция: $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$ (ступенчатая). Пример: кубик: $\{1, \ldots, 6\}$, $p_i = \frac{1}{6}$.

4. Непрерывные распределения Плотность $f(x) \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Свойства: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; $P(a < \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Если F' существует: $f(x) = F'(x)$.

5. Моменты *Начальный* момент k: $M_k = E\xi^k = \int x^k dF(x)$. *Центральный* момент k: $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$. Математическое ожидание: $M(X) = E\xi = \int x dF(x)$ (1-й начальный). Дисперсия: $D(X) = \operatorname{Var}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ (2-й центральный). Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. Свойства: $E(a\xi + b) = aE\xi + b$; $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$; $\operatorname{Var}(a\xi + b) = a^2 \operatorname{Var}\xi$; $\operatorname{Var}(\xi + \eta) = \operatorname{Var}\xi + \operatorname{Var}\eta + 2\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$.

6. Дискретные распределения *Бернулли* $\operatorname{Bern}(p)$: $P(1) = p$, $P(0) = 1 - p$; $E\xi = p$, $D\xi = p(1-p)$. *Биномиальное* $\operatorname{Bin}(n, p)$: $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$; $E\xi = np$, $D\xi = np(1-p)$. *Пуассон* $\operatorname{Pois}(\lambda)$: $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $E\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$. *Геометрическое* $\operatorname{Geom}(p)$: $P(k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \geq 1$; $E\xi = \frac{1}{p}$, $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$. *Гипергеометрическое* $\operatorname{HG}(N, M, n)$: $P(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, где N — всего, M — нужных, n — выборка; $E\xi = \frac{nM}{N}$.

7. Непрерывные распределения *Равномерное* $U[a, b]$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ на $[a, b]$; $E\xi = \frac{a+b}{2}$, $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$. *Экспоненциальное* $\operatorname{Exp}(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$; $E\xi = \frac{1}{\lambda}$, $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$. *Нормальное* $\operatorname{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$; $E\xi = \mu$, $D\xi = \sigma^2$. Стандартное $\operatorname{N}(0, 1)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

8. Функция Лапласа $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция стандартного нормального. *Зачем:* вычисляем вероятности для нормальных СВ через таблицу. Свойства: $\Phi(0) = 0.5$; $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; возрастает; таблица значений. Важные: $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(2.576) \approx 0.995$. Для $\xi \sim \operatorname{N}(\mu, \sigma^2)$: $P(a < \xi \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$. Стандартизация: $Z = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim \operatorname{N}(0, 1)$.

9. Ковариация и корреляция Ковариация: $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$. Коэффициент корреляции: $\rho = \frac{\operatorname{Cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$, где $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$. Свойства: $\operatorname{Cov}(\xi, \xi) = D\xi$; симметрия $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = \operatorname{Cov}(\eta, \xi)$; билинейность $\operatorname{Cov}(a\xi + b, \eta) = a\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$; для независимых $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = 0$ (обратное НЕ верно!); $|\rho| \leq 1$; $\rho = \pm 1 \iff \eta = a\xi + b$ (линейная связь). Интерпретация: ρ измеряет силу линейной зависимости; $\rho = 0$ — некоррелированность (не означает независимость); $\rho > 0$ — положительная связь; $\rho < 0$ — отрицательная связь; чем ближе $|\rho|$ к 1, тем сильнее линейная связь.

1. Событие и аксиомы Ω — множество исходов. $A \subset \Omega$ — событие. Операции: $A \cup B$ (ИЛИ), $A \cap B$ (И), $\bar{A}$ (НЕ), $A \setminus B$. Несовместные: $A \cap B = \emptyset$. Аксиомы Колмогорова: (1) $P(A) \geq 0$; (2) $P(\Omega) = 1$; (3) для несовместных $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum P(A_i)$. Свойства: $P(\emptyset) = 0$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Классическая: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$. Геометрическая: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

2. Случайная величина (СВ) $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — СВ. Функция распределения $F(x) = P(\xi \leq x)$. Свойства: (1) F неубывает; (2) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$; (3) непрерывна справа. F однозначно задаёт распределение.

3. Дискретные распределения ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_i = P(\xi = x_i)$, где $\sum p_i = 1$. Ряд: таблица (x_i, p_i). Функция: $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$ (ступенчатая). Пример: кубик: $\{1, \ldots, 6\}$, $p_i = \frac{1}{6}$.

4. Непрерывные распределения Плотность $f(x) \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Свойства: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; $P(a < \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Если F' существует: $f(x) = F'(x)$.

5. Моменты *Начальный* момент k: $M_k = E\xi^k = \int x^k dF(x)$. *Центральный* момент k: $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$. Математическое ожидание: $M(X) = E\xi = \int x dF(x)$ (1-й начальный). Дисперсия: $D(X) = \operatorname{Var}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ (2-й центральный). Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. Свойства: $E(a\xi + b) = aE\xi + b$; $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$; $\operatorname{Var}(a\xi + b) = a^2 \operatorname{Var}\xi$; $\operatorname{Var}(\xi + \eta) = \operatorname{Var}\xi + \operatorname{Var}\eta + 2\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$.

6. Дискретные распределения *Бернулли* $\operatorname{Bern}(p)$: $P(1) = p$, $P(0) = 1 - p$; $E\xi = p$, $D\xi = p(1-p)$. *Биномиальное* $\operatorname{Bin}(n, p)$: $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$; $E\xi = np$, $D\xi = np(1-p)$. *Пуассон* $\operatorname{Pois}(\lambda)$: $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $E\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$. *Геометрическое* $\operatorname{Geom}(p)$: $P(k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \geq 1$; $E\xi = \frac{1}{p}$, $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$. *Гипергеометрическое* $\operatorname{HG}(N, M, n)$: $P(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, где N — всего, M — нужных, n — выборка; $E\xi = \frac{nM}{N}$.

7. Непрерывные распределения *Равномерное* $U[a, b]$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ на $[a, b]$; $E\xi = \frac{a+b}{2}$, $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$. *Экспоненциальное* $\operatorname{Exp}(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$; $E\xi = \frac{1}{\lambda}$, $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$. *Нормальное* $\operatorname{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$; $E\xi = \mu$, $D\xi = \sigma^2$. Стандартное $\operatorname{N}(0, 1)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

8. Функция Лапласа $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция стандартного нормального. *Зачем:* вычисляем вероятности для нормальных СВ через таблицу. Свойства: $\Phi(0) = 0.5$; $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; возрастает; таблица значений. Важные: $\Phi(1.96) \approx 0.975$, $\Phi(2.576) \approx 0.995$. Для $\xi \sim \operatorname{N}(\mu, \sigma^2)$: $P(a < \xi \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$. Стандартизация: $Z = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim \operatorname{N}(0, 1)$.

9. Ковариация и корреляция Ковариация: $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$. Коэффициент корреляции: $\rho = \frac{\operatorname{Cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$, где $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$. Свойства: $\operatorname{Cov}(\xi, \xi) = D\xi$; симметрия $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = \operatorname{Cov}(\eta, \xi)$; билинейность $\operatorname{Cov}(a\xi + b, \eta) = a\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$; для независимых $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = 0$ (обратное НЕ верно!); $|\rho| \leq 1$; $\rho = \pm 1 \iff \eta = a\xi + b$ (линейная связь). Интерпретация: ρ измеряет силу линейной зависимости; $\rho = 0$ — некоррелированность (не означает независимость); $\rho > 0$ — положительная связь; $\rho < 0$ — отрицательная связь; чем ближе $|\rho|$ к 1, тем сильнее линейная связь.