ДЗ 7. Производные высших порядков

Вагин Арсений Антонович, J3212, 465339

Задача 1

Найти $df(0,1), d^2f(0,1)$, если $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy + \sin x$

Решение:

Найдём частные производные первого порядка:

$$f_x = \frac{y}{1+(xy)^2} + \cos x, \quad f_y = \frac{x}{1+(xy)^2}.$$

Вычислим их в точке $(0,1)$:

$$f_x(0,1) = \frac{1}{1+0} + \cos 0 = 1 + 1 = 2, \quad f_y(0,1) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Тогда первый дифференциал:

$$df(0,1) = f_x(0,1)dx + f_y(0,1)dy = 2dx.$$

Найдём частные производные второго порядка:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{1+x^2y^2} + \cos x\right) = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} - \sin x,$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}\right) = \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x^2y^2} + \cos x\right) = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}.$$

Вычислим их в точке $(0,1)$:

$$f_{xx}(0,1) = 0 - 0 = 0, \quad f_{yy}(0,1) = 0, \quad f_{xy}(0,1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Тогда второй дифференциал:

$$d^2f(0,1) = f_{xx}(0,1)dx^2 + 2f_{xy}(0,1)dxdy + f_{yy}(0,1)dy^2 = 0 \cdot dx^2 + 2 \cdot 1 \cdot dxdy + 0 \cdot dy^2 = 2dxdy.$$

Ответ:

$$df(0,1) = 2dx, \quad d^2f(0,1) = 2dxdy.$$

Задача 2

Найти dg, d^2g, если $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)), f(x,y) = x\sin y + y\cos x$ и $x = uv, y = u^2 - v^2$.

Решение:

Найдём дифференциалы dx и dy:

$$dx = x_u du + x_v dv = vdu + udv, \quad dy = y_u du + y_v dv = 2udu - 2vdv.$$

Вторые дифференциалы:

$$d^2x = 2dudv, \quad d^2y = 2du^2 - 2dv^2.$$

Выразим первый дифференциал $dg = df$:

$$dg = f_x dx + f_y dy = f_x(vdu + udv) + f_y(2udu - 2vdv) = (vf_x + 2uf_y)du + (uf_x - 2vf_y)dv.$$

Частные производные функции f:

$$f_x = \sin y - y\sin x, \quad f_y = x\cos y + \cos x.$$

Для второго дифференциала используем формулу:

$$d^2g = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_x d^2x + f_y d^2y.$$

Вычислим:

$$\begin{gathered} dx^2 = (vdu + udv)^2 = v^2du^2 + 2uvdudv + u^2dv^2, \\ dy^2 = (2udu - 2vdv)^2 = 4u^2du^2 - 8uvdudv + 4v^2dv^2, \\ dxdy = (vdu + udv)(2udu - 2vdv) = 2uvdu^2 + (2u^2 - 2v^2)dudv - 2uvdv^2. \end{gathered}$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} d^2g = {} & f_{xx}(v^2du^2 + 2uvdudv + u^2dv^2) \\ & + 2f_{xy}\left(2uvdu^2 + (2u^2 - 2v^2)dudv - 2uvdv^2\right) \\ & + f_{yy}(4u^2du^2 - 8uvdudv + 4v^2dv^2) \\ & + f_x(2dudv) + f_y(2du^2 - 2dv^2). \end{aligned}$$

Группируем:

$$\begin{aligned} d^2g = {} & \left[f_{xx}v^2 + 4uvf_{xy} + 4u^2f_{yy} + 2f_y\right]du^2 \\ & + \left[2uvf_{xx} + 4(u^2 - v^2)f_{xy} - 8uvf_{yy} + 2f_x\right]dudv \\ & + \left[f_{xx}u^2 - 4uvf_{xy} + 4v^2f_{yy} - 2f_y\right]dv^2. \end{aligned}$$

Частные производные второго порядка функции f:

$$f_{xx} = -y\cos x, \quad f_{xy} = \cos y - \sin x, \quad f_{yy} = -x\sin y.$$

Все производные вычисляются в точке $(x,y) = (uv, u^2 - v^2)$.

Ответ:

$$\begin{aligned} dg &= (vf_x + 2uf_y)du + (uf_x - 2vf_y)dv, \\ d^2g &= \left[f_{xx}v^2 + 4uvf_{xy} + 4u^2f_{yy} + 2f_y\right]du^2 \\ &\quad + \left[2uvf_{xx} + 4(u^2 - v^2)f_{xy} - 8uvf_{yy} + 2f_x\right]dudv \\ &\quad + \left[f_{xx}u^2 - 4uvf_{xy} + 4v^2f_{yy} - 2f_y\right]dv^2. \end{aligned}$$

Задача 3

Найти du, d^2u, если $u = \varphi(xy, \frac{x}{y})$, где φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, x, y — независимые переменные.

Решение:

Введём обозначения: $s = xy$, $t = \frac{x}{y}$. Тогда $u = \varphi(s,t)$.

Первый дифференциал:

$$du = \varphi_s ds + \varphi_t dt = \varphi_s(ydx + xdy) + \varphi_t\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\right) = \left(y\varphi_s + \frac{1}{y}\varphi_t\right)dx + \left(x\varphi_s - \frac{x}{y^2}\varphi_t\right)dy.$$

Для второго дифференциала:

$$d^2u = A_x dx^2 + (A_y + B_x)dxdy + B_y dy^2,$$

где

$$A = y\varphi_s + \frac{1}{y}\varphi_t, \quad B = x\varphi_s - \frac{x}{y^2}\varphi_t.$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned}
A_x &= y^2\varphi_{ss} + 2\varphi_{st} + \frac{1}{y^2}\varphi_{tt}, \\
A_y &= \varphi_s + xy\varphi_{ss} - \frac{1}{y^2}\varphi_t - \frac{x}{y^3}\varphi_{tt}, \\
B_x &= \varphi_s + xy\varphi_{ss} - \frac{1}{y^2}\varphi_t - \frac{x}{y^3}\varphi_{tt}, \\
B_y &= x^2\varphi_{ss} - \frac{2x^2}{y^2}\varphi_{st} + \frac{2x}{y^3}\varphi_t + \frac{x^2}{y^4}\varphi_{tt}.
\end{aligned}$$

Заметим, что $A_y = B_x$, поэтому:

$$A_y + B_x = 2\left(\varphi_s + xy\varphi_{ss} - \frac{1}{y^2}\varphi_t - \frac{x}{y^3}\varphi_{tt}\right).$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
d^2u = &\left(y^2\varphi_{ss} + 2\varphi_{st} + \frac{1}{y^2}\varphi_{tt}\right)dx^2 \\
&+ 2\left(\varphi_s + xy\varphi_{ss} - \frac{1}{y^2}\varphi_t - \frac{x}{y^3}\varphi_{tt}\right)dxdy \\
&+ \left(x^2\varphi_{ss} - \frac{2x^2}{y^2}\varphi_{st} + \frac{2x}{y^3}\varphi_t + \frac{x^2}{y^4}\varphi_{tt}\right)dy^2.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned}
du &= \left(y\varphi_s + \frac{1}{y}\varphi_t\right)dx + \left(x\varphi_s - \frac{x}{y^2}\varphi_t\right)dy, \\
d^2u &= \left(y^2\varphi_{ss} + 2\varphi_{st} + \frac{1}{y^2}\varphi_{tt}\right)dx^2 \\
&\quad + 2\left(\varphi_s + xy\varphi_{ss} - \frac{1}{y^2}\varphi_t - \frac{x}{y^3}\varphi_{tt}\right)dxdy \\
&\quad + \left(x^2\varphi_{ss} - \frac{2x^2}{y^2}\varphi_{st} + \frac{2x}{y^3}\varphi_t + \frac{x^2}{y^4}\varphi_{tt}\right)dy^2.
\end{aligned}$$