

中国农业大学
2023~2024 学年春季学期
模拟课程 课程考试试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

(本试卷共 8 道大题)

考生诚信承诺

本人承诺自觉遵守考试纪律, 诚信应考, 服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则, 如有违纪行为, 将按照学校违纪处分规定严肃处理。

一、填空题 (共 24 分, 每题 3 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 当 $p > 0$ 时, $x^3 + px + q = 0$ 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个实根

3. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 试将下述无穷大量按由低阶至高阶的顺序排列:

$e^x, x^x, x^{100}, x^{99}(\ln x)^{100}, [x]!$ $\underline{\hspace{2cm}}$

4. $\int_0^\pi \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

5. $\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=1} \frac{\sqrt{x}}{1+2x} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 求 $\liminf_{n \rightarrow \infty} D\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$, 其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数, 即

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

7. 求 $\frac{d^n}{dx^n}(x^2 e^x) = \underline{\hspace{2cm}}$, ($n \in \mathbb{N}$, 化简所得结果)

8. 下列关于一致连续的说法中, 正确的有多少个?_____

(a) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 则对充分小的 $\delta > 0, f(x)$ 在 $[a + \delta, b - \delta]$ 上一致连续

(b) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 则在 (a, b) 上有界

(c) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 则在 (a, b) 上有界

(d) $\ln(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致连续

(e) 某区间上两个一致连续的函数之和一定一致连续

(注: a, b 均为有限值)

二、计算题 (共 24 分, 每题 6 分)

1.

$$\int \cos^2(x) \sin(x) dx$$

2.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

3.

$$\int \frac{-x^4 + x^3 - x^2 - x - 2}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} dx$$

4.

$$\int \sin(\ln x) dx$$

学院：_____ 班级：_____ 学号：_____ 姓名：_____

三、(6 分) 求 a, b , 使

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 1 \\ x^2 - 3x + 2 & x \leq 1 \end{cases}$$

为可微函数.

四、(6 分) 对于 \mathbb{R} 上有定义的函数, 若所论的导函数存在, 证明: 奇函数的导函数一定是偶函数.

五、(10 分) 求过曲线

$$x^{2n} + y^{2n} = 1$$

上 (x_0, y_0) 点的切线方程 (其中 n 为自然数, $y_0 \neq 0$). 并证明当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 除有限个点外, $y'(x)$ 要么趋于 0, 要么趋于 ∞ . (注: 实际上随着 n 的增加, 曲线越来越接近于正方形)

六、(10 分) 设 $a < b$, $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 和 $(a, +\infty)$ 均一致连续, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也一致连续.

学院：_____ 班级：_____ 学号：_____ 姓名：_____

七、(10 分) 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, $f(1) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有最大值.

八、(10 分) 用 Bolzano-Weierstrass 定理证明有界闭区间上的连续函数一定有界.