第五章 微分中值定理及应用

陈 颖

北京电子科技学院基础部

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

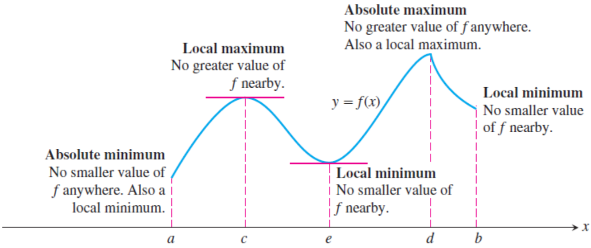
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

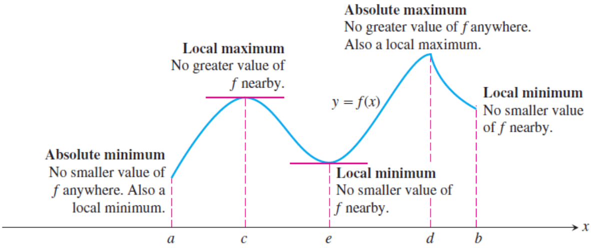
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

▶ 极值



Absolute maximum
No greater value of f anywhere.
Also a local maximum.
Local maximum
No greater value of
f nearby.
y = f(x)
Local minimum
No smaller value
of f nearby.
Absolute minimum
No smaller value of
f anywhere. Also a
local minimum.
Local minimum
No smaller value of
f nearby.
x
a
c
e
d
b

▶ 极值

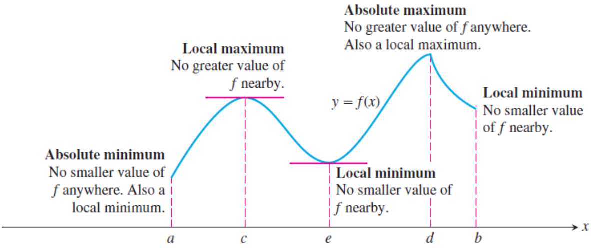


▶ 费马定理——若函数$f(x)$在点x_0 取得极值,且在x_0 处可导,则有

$$f'(x_0) = 0.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- 极值



- **费马定理**——若函数$f(x)$在点x_0 取得极值,且在x_0 处可导,则有
$$f'(x_0) = 0.$$
证:不妨设$f'(x_0) > 0$,故
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$
由极限的保号性知,当$x > x_0$, 有$f(x) > f(x_0)$;当$x < x_0$,有$f(x) < f(x_0)$. 所以$f(x_0)$不是极值,矛盾,命题得证.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

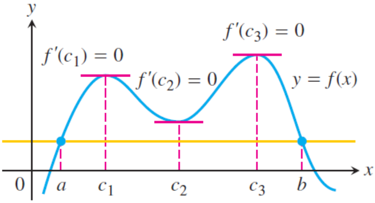
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

罗尔定理——若函数$f(x)$满足条件:

- 在闭区间$[a,b]$上连续;
- 在开区间(a,b)上可导;
- $f(a)=f(b)$,

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c)=0.$$



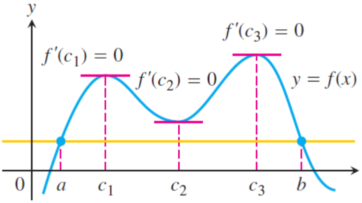
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

罗尔定理——若函数$f(x)$满足条件:

- 在闭区间$[a,b]$上连续;
- 在开区间(a,b)上可导;
- $f(a)=f(b)$,

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c)=0.$$



证:如果$f(x)$在区间$[a,b]$内为常数函数,则显然有任意的$c\in(a,b)$使得$f'(c)=0$;如果$f(x)$在区间$[a,b]$内不为常数函数,在区间存在$c\in(a,b)$,其为最大值或最小值,故也有$f'(c)=0$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

罗尔定理的三个条件若有一个不满足,则结论不一定成立.

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

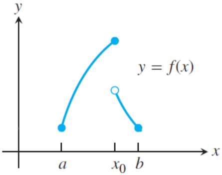
(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

罗尔定理的三个条件若有一个不满足,则结论不一定成立.

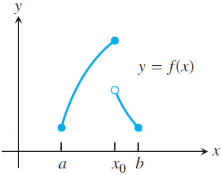
在点x_0处不连续



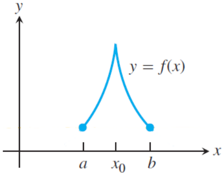
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

罗尔定理的三个条件若有一个不满足,则结论不一定成立.

在点x_0处不连续



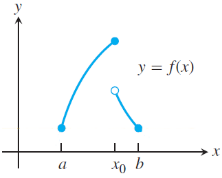
在点x_0处不可导



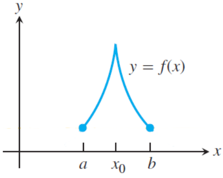
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

罗尔定理的三个条件若有一个不满足,则结论不一定成立.

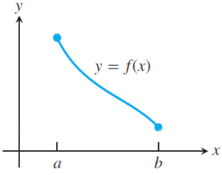
在点x_0处不连续



在点x_0处不可导



在点a, b处值不等



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.1:证明方程$x^5-5x+1=0$有且仅有一个小于1的正实根.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.1:证明方程$x^5 - 5x + 1 = 0$有且仅有一个小于1的正实根.

解:先证存在性.令$f(x) = x^5 - 5x + 1, f(0) = 1, f(1) = -3$,由介值定理知存在$x_0 \in (0,1)$,使得$f(x_0) = 0$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.1:证明方程$x^5-5x+1=0$有且仅有一个小于1的正实根.

解:先证存在性.令$f(x)=x^5-5x+1, f(0)=1, f(1)=-3$,由介值定理知存在$x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=0$.

再证唯一性.假设存在另外一个$x_1\in(0,1)$使得$f(x_1)=0$.由罗尔定理知,存在$\xi\in(\min\{x_0,x_1\},\max\{x_0,x_1\})$,使得

$$f'(\xi)=0,$$

而另一方面

$$f'(\xi)=5\xi^4-5=5(\xi^4-1)<0,$$

矛盾,故命题得证.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.2:设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明至少存在一点$\xi \in (0,1)$使得$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.2:设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明至少存在一点$\xi \in (0,1)$使得$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

证:令
$$F(x) = f(x) - x^2(f(1) - f(0)),$$
那么有
$$F(0) = f(0), F(1) = f(0),$$
由罗尔定理知存在$\xi \in (0,1)$ 使得
$$F'(\xi) = 0,$$
即
$$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0)).$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

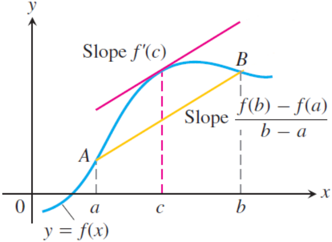
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

拉格朗日中值定理——若函数$f(x)$满足条件:

- 在闭区间$[a, b]$上连续;
- 在开区间(a, b)上可导,

那么在(a, b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



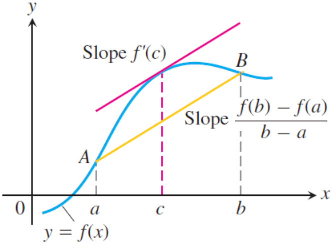
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

拉格朗日中值定理——若函数$f(x)$满足条件:

- 在闭区间$[a,b]$上连续;
- 在开区间(a,b)上可导,

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



证:构造函数$F(x)=f'(x)(b-a)-(f(b)-f(a))x$,应用罗尔定理.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

在拉格朗日中值定理中令$b=x$,我们有$c\in(a,b)$,使得

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

整理得

$$f(x)=f'(c)(x-a)+f(a).$$

这其实给出了$f(x)$的一个"线性"表示.

在拉格朗日中值定理中令$b = x$,我们有$c \in (a, b)$,使得

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

整理得

$$f(x) = f'(c)(x - a) + f(a).$$

这其实给出了$f(x)$的一个"线性"表示.

推论1:若$f(x)$在(a, b)内可导,且$f'(x) \equiv 0$, 则在(a, b)内$f(x)$为一常数.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

在拉格朗日中值定理中令$b=x$,我们有$c\in(a,b)$,使得

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

整理得

$$f(x)=f'(c)(x-a)+f(a).$$

这其实给出了$f(x)$的一个"线性"表示.

推论1:若$f(x)$在(a,b)内可导,且$f'(x)\equiv 0$, 则在(a,b)内$f(x)$为一常数.

推论2:若$f(x)$和$g(x)$在(a,b) 内可导,且$f'(x)\equiv g'(x)$, 则有

$$f(x)=g(x)+c,$$

其中c 为常数.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.3:证明不等式$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.3:证明不等式$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$.

证:令$f(x)=\ln(1+x)$,当$x>0$时,由拉格朗日中值定理知,存在$\xi\in(0,x)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0},$$

整理有

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

显然$1<1+\xi<1+x$,故

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

即

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

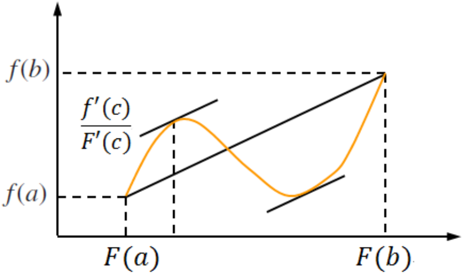
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

柯西中值定理——若函数$f(x)$和$F(x)$满足条件:

- 在闭区间$[a,b]$上连续;
- 在开区间(a,b)上可导;
- 在开区间(a,b)上$F'(x)\neq 0$,

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$\frac{f'(c)}{F'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.4:设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例1.4:设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

解:取$F(x) = x^2$,由柯西中值定理得存在$\xi \in (0,1)$使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(1) - f(0)}{F(1) - F(0)},$$

即

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0},$$

所以

$$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0)).$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(1) 试证至少存在一点$\xi \in (1, e)$,使得$\sin 1 = \cos \ln \xi$.

(2) 设$f(x) \in C[0, \pi]$,且在$(0, \pi)$内可导,证明至少存在一点$\xi \in (0, \pi)$,使得$f'(\xi) = -f(\xi)\cot \xi$.

(3) 若$f(x)$可导,试证在其两个零点间一定有$f(x) + f'(x)$的零点.

(4) 设$f(x)$在$[0, 1]$上连续,在$(0, 1)$上可导,且$f(1) = 0$,求证存在$\xi \in (0, 1)$,使得$nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

(5) 设$f'(x)$单调递减,$f(0) = 0$,证明对任意的$x_1 > 0, x_2 > 0$有$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设所求极限为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,如果满足

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设所求极限为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,如果满足

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ($\frac{0}{0}$型)
或者
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, ($\frac{\infty}{\infty}$型),

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设所求极限为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,如果满足

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ($\frac{0}{0}$型)
或者
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, ($\frac{\infty}{\infty}$型),

(2) $f(x)$和$g(x)$可导,且$g'(x)\neq 0$,

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设所求极限为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,如果满足

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ($\frac{0}{0}$型)
或者
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, ($\frac{\infty}{\infty}$型),

(2) $f(x)$和$g(x)$可导,且$g'(x)\neq 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$,

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设所求极限为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时,如果满足

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ($\frac{0}{0}$型)
或者
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, ($\frac{\infty}{\infty}$型),

(2) $f(x)$和$g(x)$可导,且$g'(x)\neq 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$,

那么,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1) $\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设所求极限为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,如果满足

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0,\ (\frac{0}{0}$型$)$
或者
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty,\ (\frac{\infty}{\infty}$型$)$,

(2) $f(x)$和$g(x)$可导,且$g'(x)\neq 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$,

那么,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这就是**洛必达法则**,它是用来把**函数的商**的极限转化为其**导数的商**的极限.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

推论1:$x \to a$换为$x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$,洛必达法则依然成立.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

推论1:$x \to a$换为$x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$,洛必达法则依然成立.

推论2:若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍属于$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,且$f'(x), g'(x)$满足洛必达法则的条件,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例2.1:求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例2.1:求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式}\,(\frac{0}{0}\text{型}) &\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\,(\frac{0}{0}\text{型})\\
&\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}\,(\text{不是}\frac{0}{0}\text{型})\\
&\overset{\text{直接代入}}{=} \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

例2.2:求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例2.2:求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

解:

$$\text{原式}\,(\frac{0}{0}\text{型}) \overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,(\frac{\infty}{\infty}\text{型})$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}$$

$$= 1$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- $\infty-\infty$型:通分后转化为$\dfrac{0}{0}$型,即

$$f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- $\infty-\infty$型:通分后转化为$\frac{0}{0}$型,即

$$f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}.$$

例2.3:求 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- $\infty-\infty$型:通分后转化为$\frac{0}{0}$型,即

$$f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}.$$

例2.3:求$\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)$.

解:

$$\text{原式} = \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- $0\cdot\infty$型:取倒数后转化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,即

$$f\cdot g=\begin{cases}\dfrac{g}{\dfrac{1}{f}}\\[2em]\dfrac{f}{\dfrac{1}{g}}\end{cases}.$$

例2.4:求$\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x\ (n>0)$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- $0\cdot\infty$型:取倒数后转化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,即

$$f\cdot g=\begin{cases}\dfrac{g}{\dfrac{1}{f}}\\[2ex] \dfrac{f}{\dfrac{1}{g}}\end{cases}.$$

例2.4:求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln x\ (n>0)$.

解:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-n}} \overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}\\ &= \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0.\end{aligned}$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- 0^0型和∞^0型:取对数后转化为$0\cdot\infty$型,即

$$f^g = e^{g\ln f}.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- 0^0型和∞^0型:取对数后转化为$0\cdot\infty$型,即

$$f^g = e^{g\ln f}.$$

例2.5:求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

- 0^0型和∞^0型:取对数后转化为$0\cdot\infty$型,即

$$f^g=e^{g\ln f}.$$

例2.5:求$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解:

$$原式 = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- 0^0型和∞^0型:取对数后转化为$0\cdot\infty$型,即

$$f^g=e^{g\ln f}.$$

例2.5:求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^0=1.$$

例2.6:求 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

- 0^0型和∞^0型:取对数后转化为$0\cdot\infty$型,即
$$f^g=e^{g\ln f}.$$

例2.5:求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln x}{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^0=1.$$

例2.6:求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\cot x}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{-\csc^2 x/\cot x}{1/x}}\\&=\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{x}{\sin x\cos x}}=e^{-1}.\end{aligned}$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(1) 使用洛必达法则陷入"死循环",例如:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

事实上,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(2) 若$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不等于∞时,不能使用洛必达法则,即这个时候

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例如:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \overset{\text{洛必达法则}}{\neq} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1},$$

事实上,右端极限不存在且不为∞,左端极限为1.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x)=?$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=?$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=?$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=?$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=?$

(6) 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-mx+8}{x^2-(2+n)x+2n}=\dfrac{1}{5}$，求常数$m,n$的值.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- 在微分中,我们可以使用如下的近似公式:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

但需要解决的问题依然存在—- 如何提高近似的精度?

1.中值定理

(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则

(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

- 在微分中,我们可以使用如下的近似公式:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

但需要解决的问题依然存在—- 如何提高近似的精度?

- 求n次多项式$p_n(x)$,要求:

$$p_n(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0), \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

- 在微分中,我们可以使用如下的近似公式:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

但需要解决的问题依然存在—- 如何提高近似的精度?

- 求n次多项式$p_n(x)$,要求:

$$p_n(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0), \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

- 为求满足条件的多项式,我们有:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ p_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ p_n''(x) &= 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\ &\cdots \\ p_n^{(n)}(x) &= n!a_n \end{aligned}$$

所以

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0), a_1 = p_n'(x_0) = f'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}p_n''(x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0), \cdots, a_n = \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- 令$r_n(x)=f(x)-p_n(x)$,则有

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=\cdots=r_n^{(n)}(x_0)=0,$$

那么对余项$r_n(x)$有如下的估计:

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{r_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

$$=\frac{r_n'(\xi_1)-r_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{r_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

$$=\cdots=\frac{r_n^{(n)}(\xi_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots2(\xi_n-x_0)-0}=\frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

注意到

$$p_n^{(n+1)}(x)=0,$$

所以

$$r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x),$$

即

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

泰勒定理:若$f(x)$在包含x_0的某开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数,则当$x\in(a,b)$时,有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots \\
&\quad +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),
\end{aligned}
$$

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

泰勒定理:若$f(x)$在包含x_0的某开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数,则当$x\in(a,b)$时,有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots \\ &\quad +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \end{aligned}$$

- 如果$r_n(x)$用$o(x-x_0)^n$来表示,则称为**带有佩亚诺余项的泰勒公式**;

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

泰勒定理:若$f(x)$在包含x_0的某开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数,则当$x\in(a,b)$时,有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots \\ &\quad +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \end{aligned}$$

- 如果$r_n(x)$用$o(x-x_0)^n$来表示,则称为**带有佩亚诺余项的泰勒公式**;
- 如果$r_n(x)$用$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$来表示,其中$\xi$在$x_0$与$x$之间,则称为**带有拉格朗日余项的泰勒公式**.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

泰勒定理:若$f(x)$在包含x_0的某开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数,则当$x\in(a,b)$时,有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots \\ &\quad +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \end{aligned}$$

- 如果$r_n(x)$用$o(x-x_0)^n$来表示,则称为**带有佩亚诺余项的泰勒公式**;
- 如果$r_n(x)$用$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$来表示,其中$\xi$在$x_0$与$x$之间,则称为**带有拉格朗日余项的泰勒公式**.
- 在泰勒定理中令$x_0=0$,就得到如下特殊的形式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),$$

这称为**麦克劳林公式**.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(i) $f(x)=e^x$.

其带有佩亚诺余项的麦克劳林公式是

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中$0<\theta<1$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(ii) $f(x) = \sin x.$

其带有佩亚诺余项的麦克劳林公式是

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m});$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ &\quad +(-1)^m\frac{\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1},\end{aligned}$$

其中$0 < \theta < 1$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(iii) $f(x) = \cos x$.

其带有佩亚诺余项的麦克劳林公式是

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1});$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &\quad +(-1)^{m+1} \frac{\cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2},\end{aligned}$$

其中$0 < \theta < 1$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(iv) $f(x) = \ln(1+x)$.

其带有佩亚诺余项的麦克劳林公式是

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\end{aligned}$$

其中$0 < \theta < 1$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(v) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$.

其带有佩亚诺余项的麦克劳林公式是

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots \\ &+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);\end{aligned}$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots \\ &+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\ &+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\end{aligned}$$

其中$0<\theta<1$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(vi) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

其带有佩亚诺余项的麦克劳林公式是

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n);$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

其中$0<\theta<1$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(i) 近似计算

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(i) 近似计算

例3.1:用近似公式$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$计算$\cos x$的近似值,使其精确到0.005,试确定$x$ 的适用范围.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(i) 近似计算

例3.1:用近似公式$\cos x \approx 1-\dfrac{x^2}{2!}$计算$\cos x$的近似值,使其精确到0.005,试确定$x$ 的适用范围.

解:对于余项$r_3(x)$,我们有

$$|r_3(x)| = |\frac{x^4}{4!}\cos(\theta x)| \leq \frac{|x|^4}{24},$$

令

$$\frac{|x|^4}{24} \leq 0.005,$$

解得

$$|x| \leq 0.588,$$

即当$|x| \leq 0.588$时,由给定的近似公式计算的结果能准确到0.005.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(ii) 求极限

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(ii) 求极限

例3.2:求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

(ii) 求极限

例3.2:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

解:用泰勒公式将分子展到x^2项,由于

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+4} &= 2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2(1+\frac{1}{2}(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2))\\ &= 2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2),\\ \sqrt{4-3x} &= 2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2(1+\frac{1}{2}(-\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}x)^2+o(x^2))\\ &= 2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

所以原式 $=-\dfrac{9}{32}$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(iii) 证明不等式

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(iii) 证明不等式

例3.3:证明$\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$,其中$x > 0$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(iii) 证明不等式

例3.3:证明$\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$,其中$x>0$.

证:

$$\sqrt{1+x} \;=\; 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3,$$

其中$0<\theta<1$,注意到当$x>0$时,

$$\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3>0,$$

故命题得证.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=?$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))=?$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=?$

(4) 函数$f(x)$在$[0,1]$上具有三阶连续函数,且$f(0)=1, f(1)=2, f'(0.5)=0$,证明$(0,1)$内至少存在一点$\xi$,使得$|f'''(\xi)|\geq 24$.

(5) 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内二阶可导,若$f'(a)=f'(b)=0$,则在(a,b)内至少有一点ξ,使得$|f(b)-f(a)|\leq\dfrac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$.

(6) 已知函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$,求$f^{(n)}(0)$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

函数单调性的判定:设函数$f(x)$在开区间I内可导,若$f'(x) \geq 0$,则$f(x)$在I内单调递增;反之,若$f'(x) \leq 0$,则$f(x)$ 在I 内单调递减.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

函数单调性的判定:设函数$f(x)$在开区间I内可导,若$f'(x) \geq 0$,则$f(x)$在I内单调递增;反之,若$f'(x) \leq 0$,则$f(x)$ 在I 内单调递减.

证:不妨设$f'(x) > 0$,令$x_1 > x_2$,由拉格朗日中值定理有

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \geq 0,$$

其中$x_2 < \xi < x_1$,所以此时$f(x)$单调递增.

函数单调性的判定:设函数$f(x)$在开区间I内可导,若$f'(x) \geq 0$,则$f(x)$在I内单调递增;反之,若$f'(x) \leq 0$,则$f(x)$ 在I 内单调递减.

证:不妨设$f'(x) > 0$,令$x_1 > x_2$,由拉格朗日中值定理有

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \geq 0,$$

其中$x_2 < \xi < x_1$,所以此时$f(x)$单调递增.

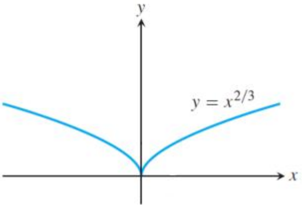
注1:满足$f'(x) = 0$的点x_0称为函数$f(x)$的**驻点或稳定点**.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

注2:单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

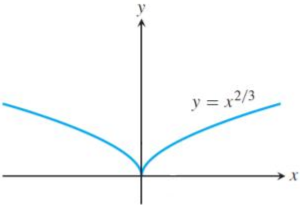
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

注2:单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

注2:单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

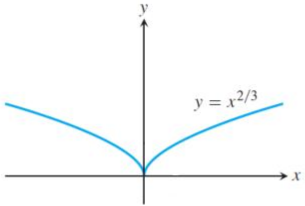


$$y = x^{\frac{2}{3}}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, y'|_{x=0} = \infty.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

注2:单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.



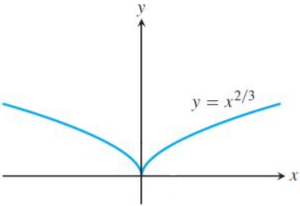
$$y = x^{\frac{2}{3}}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, y'|_{x=0} = \infty.$$

注3:如果函数在某驻点两边导数同号,则不改变函数的单调性.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

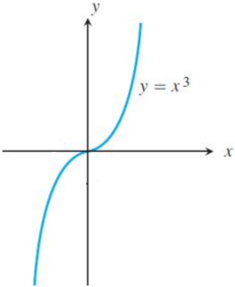
注2:单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.



$$y = x^{\frac{2}{3}}, x \in (-\infty, +\infty),$$

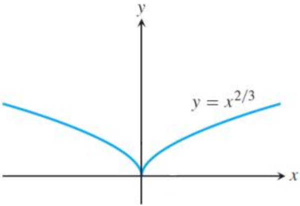
$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, y'|_{x=0} = \infty.$$

注3:如果函数在某驻点两边导数同号,则不改变函数的单调性.



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

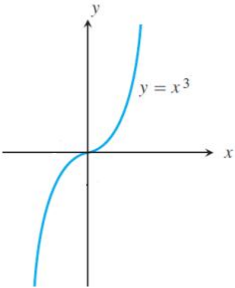
注2:单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.



$$y = x^{\frac{2}{3}}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, y'|_{x=0} = \infty.$$

注3:如果函数在某驻点两边导数同号,则不改变函数的单调性.



$$y = x^3, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$y' = 3x^2, y'|_{x=0} = 0,$$

$$y'|_{x<0} > 0, y'|_{x>0} > 0.$$

例4.1:确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.1:确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

解:$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$,令

$$f'(x)=0,$$

得到$x=1,x=2$,故列表如下,

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

故$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1),(2,+\infty)$,$f(x)$的单调递减区间为$(1,2)$.

例4.1:确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

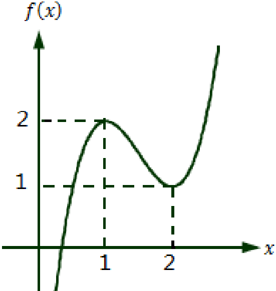
解:$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$,令

$$f'(x)=0,$$

得到$x=1,x=2$,故列表如下,

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

故$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1),(2,+\infty)$,$f(x)$的单调递减区间为$(1,2)$.



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设f为定义在区间I上的函数,若对I上的任意点x_i和任意实数$\lambda_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 总有

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq (\geq) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

则称f为I上的**凸(凹)函数**.如果上述不等式改为严格不等式,则相应的函数称为**严格凸(凹)函数**.上述不等式也称之为**詹森不等式**.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:对于I上的任意三点$x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq (\geq) \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:对于I上的任意三点$x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le (\ge) \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

可导函数f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:f'在I上是递增(减)的.这意味着可导凸(凹)函数的几何意义是该函数所对应的曲线总在它的切线上(下)方.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:对于I上的任意三点$x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le (\ge) \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

可导函数f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:f'在I上是递增(减)的.这意味着可导凸(凹)函数的几何意义是该函数所对应的曲线总在它的切线上(下)方.

二阶可导函数f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:

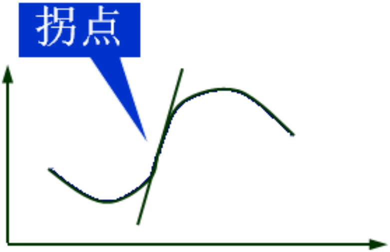
$$f''(x) \ge (\le) 0.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处有穿过曲线的切线.且在切点近旁,曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,这时称点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$ 的**拐点**.

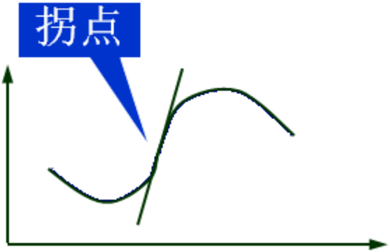
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处有穿过曲线的切线.且在切点近旁,曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,这时称点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$ 的**拐点**.



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

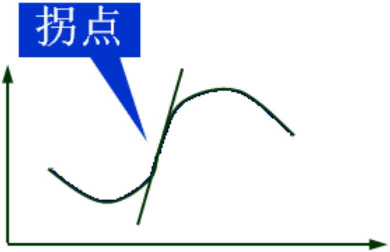
设曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有穿过曲线的切线.且在切点近旁,曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,这时称点$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$ 的**拐点**.



注1:若$f(x)$在点x_0可导,在x_0的空心邻域二阶可导,且$f''(x)$在x_0两侧异号,则点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的一个拐点.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

设曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有穿过曲线的切线.且在切点近旁,曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,这时称点$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$ 的**拐点**.



注1:若$f(x)$在点x_0可导,在x_0的空心邻域二阶可导,且$f''(x)$在x_0两侧异号,则点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的一个拐点.

注2:若$f(x)$在点x_0二阶可导,则$f''(x_0)=0$是$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的一个拐点的必要条件.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.2:求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间及拐点.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.2:求曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$的凹凸区间及拐点.

解:

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.2:求曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$的凹凸区间及拐点.

解:

- 求y'',

$$y' = 12x^3 - 12x^2, y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.2:求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间及拐点.

解:

- 求y'',

$$y'=12x^3-12x^2, y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3}).$$

- 求拐点可疑点,令$y''=0$,得

$$x_1=0, x_2=\frac{2}{3}.$$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.2:求曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$的凹凸区间及拐点.

解:

- 求y'',

$$y' = 12x^3 - 12x^2, y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

- 求拐点可疑点,令$y'' = 0$,得

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}.$$

- 列表判别

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凸	1	凹	$\frac{11}{27}$	凸

所以拐点是$(0, 1)$和$(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案
1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

极值第一判别法:设函数$f(x)$在x_0的某邻域内连续,且在空心邻域内有导数,当x由小到大通过x_0时,

- $f'(x)$"左正右负",则$f(x)$在x_0取极大值;
- $f'(x)$"左负右正",则$f(x)$在x_0取极小值.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

极值第一判别法:设函数$f(x)$在x_0的某邻域内连续,且在空心邻域内有导数,当x由小到大通过x_0时,

- $f'(x)$"左正右负",则$f(x)$在x_0取极大值;
- $f'(x)$"左负右正",则$f(x)$在x_0取极小值.

极值第二判别法:设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数,且$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$,

- $f''(x_0) < 0$,则$f(x)$在x_0取极大值;
- $f''(x_0) > 0$,则$f(x)$在x_0取极小值.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

极值第一判别法:设函数$f(x)$在x_0的某邻域内连续,且在空心邻域内有导数,当x由小到大通过x_0时,

- $f'(x)$"左正右负",则$f(x)$在x_0取极大值;
- $f'(x)$"左负右正",则$f(x)$在x_0取极小值.

极值第二判别法:设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数,且$f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$,

- $f''(x_0)<0$,则$f(x)$在x_0取极大值;
- $f''(x_0)>0$,则$f(x)$在x_0取极小值.

极值第三判别法:设函数$f(x)$在x_0处有直到n阶导数,且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则

- 当n为偶数时,x_0为极值点,
  - $f^{(n)}(x_0)<0$,则$f(x)$在x_0取极大值;
  - $f^{(n)}(x_0)>0$,则$f(x)$在x_0取极小值;
- 当n为奇数时,x_0不是极值点.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.3:求函数$f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

1.中值定理

(1)极值和费马引理

(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

(2)其他不定式

(3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

例4.3:求函数$f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解:

- 求导数,$f'(x)=\frac{5}{3}(x-\frac{2}{5})x^{-\frac{1}{3}}$,
- 求驻点,$f'(x)=0\Longrightarrow x_1=\frac{2}{5}$,
- 求不可导点,$x_2=0$,
- 列表判别,

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	$\nearrow$

所以$x=0$是极大值点,极大值为0;$x=\frac{2}{5}$是极小值点,极小值为$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.4:求函数$f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$的极值.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

例4.4:求函数$f(x)=(x^2-1)^3+1$的极值.

解:

- 求导数,$f'(x)=6x(x^2-1)^2$,
- 求驻点,$f'(x)=0\Longrightarrow x_1=0,x_2=-1,x_3=1$,
- 求二阶导数,$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$,
- 判别,因为$f''(0)=6>0$,故$x=0$是极小值点,极小值为$f(0)=0$,
- 求三阶导数,$f'''(x)=24x(5x^2-3)$,
- 再次判别,因为$f'(\pm1)=f''(\pm1)=0,f'''(1)=48\neq 0,f'''(-1)=-48\neq 0$, 所以$f(x)$ 在$x=\pm1$处没有极值.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

函数图像绘制的一般步骤:

- 确定函数的定义域,并考察函数的奇偶性和周期性;
- 针对原函数求出渐近线、与坐标轴的交点和不连续点;
- 针对一阶导数求出驻点和不可导点;
- 针对二阶导数求出拐点,并进一步求出极值点、判断单调区间和凸凹区间;
- 综合讨论结果画出函数的图像.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

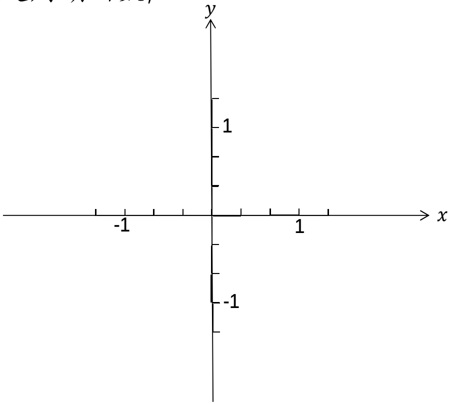
例4.5:绘制函数$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$的图像.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

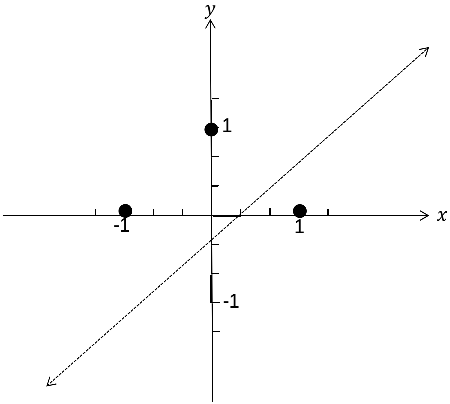
例4.5:绘制函数$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$的图像.

解:

- $f(x)$的定义域为$x\in(-\infty,+\infty)$,不是奇函数、不是偶函数、不是周期函数;



- 可以求出$f(x)$有斜渐近线$y = x - \frac{1}{3}$,且与坐标轴交于$(1,0),(-1,0),(0,1)$三个点,$f(x)$在其定义域内连续;

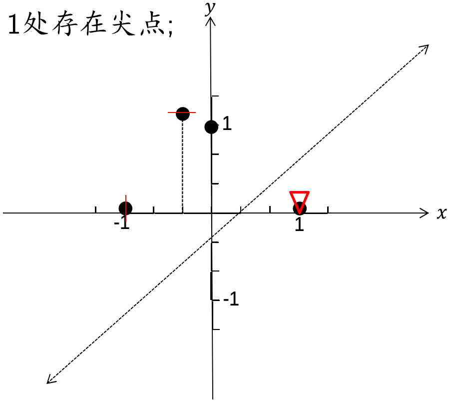


1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- $f'(x)=\dfrac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$，故得驻点$x_1=-\dfrac{1}{3}$，不可导点$x_2=-1, x_3=1$.注意到$\lim\limits_{x\to-1}f'(x)=+\infty$，故在$x_2=-1$处存在垂直的切线.而

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=-\infty,\ \lim_{x\to1^+}f'(x)=+\infty,$$

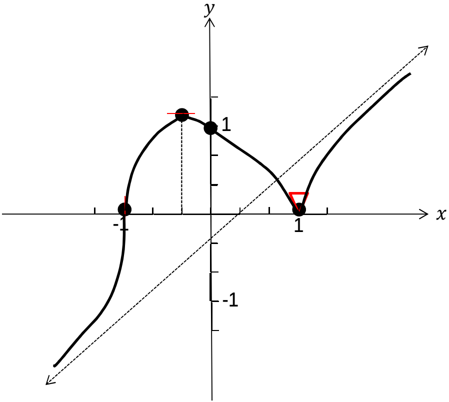
故在$x_3=1$处存在尖点;



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

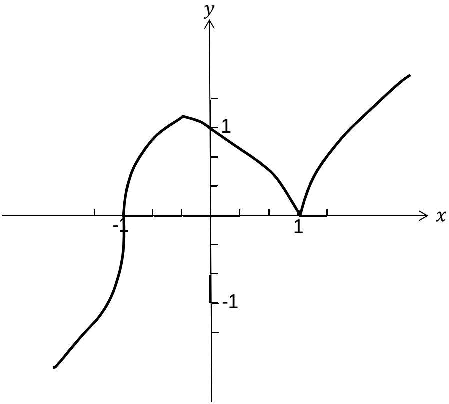
- $f''(x) = -\dfrac{8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}$，列表判断得

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f''(x)$	$+$	∞	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$-$
$f(x)$	凸~~凹~~增~~减~~	拐~~大小~~	~~凸~~凹增~~减~~	~~拐~~大~~小~~	~~凸~~凹~~增~~减	~~拐大~~小	~~凸~~凹增~~减~~



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

- 综上所述,最后的图像如下



1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(1) 设在$(-\infty,+\infty)$上$f''(x)>0$,请确定$f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 的大小关系.

(2) 证明曲线$y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$的三个拐点共线.

(3) 证明$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$,其中$0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

(4) $f(x)$在$x=0$的某邻域内连续,且$f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,请判断$x=0$是否是极值点,如果是请判断是极大值还是极小值.

(5) 设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解,若$f(x_0)>0$,且$f'(x_0)=0$,请判断$x=x_0$是否是极值点,如果是请判断是极大值还是极小值.

(6) 描绘函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图形.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

1.中值定理

(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则

(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

中值定理

(1)提示:对函数$f(x)=\cos\ln x-\sin 1$在区间$(1,e)$ 应用零点定理;或是对函数$g(x)=\sin x$在区间$(0,1)$应用拉格朗日中值定理.

(2)提示:对函数$F(x)=f(x)\sin x$在区间$(0,\pi)$应用罗尔定理.

(3)提示:对函数$F(x)=f(x)e^x$在$f(x)$的两个零点间应用罗尔定理.

(4)提示:对函数$F(x)=f(x)x^n$在在区间$(0,1)$应用罗尔定理.

(5)提示:不妨设$x_2>x_1$,则

$$\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}=f'(\xi_2)<f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}.$$

洛必达法则

(1)$-\frac{1}{2}$.　(2)0.　(3)$-\frac{1}{4}$.　(4)$\frac{1}{6}$.　(5)2.

(6)$m=6,n=12$

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

泰勒公式

(1)$\dfrac{7}{12}$.　　(2)$\dfrac{1}{2}$.　　(3)$-\dfrac{1}{12}$.

(4)提示:$f(0)=f(0.5)+\dfrac{f''(0.5)}{2}(\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}(\dfrac{1}{2})^3,$

$$f(1)=f(0.5)+\frac{f''(0.5)}{2}(\frac{1}{2})^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(\frac{1}{2})^3.$$

(5)提示:$f(b)=f(a)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(b-a)^2,$

$$f(a)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(a-b)^2.$$

(6)$0(n\leq 2)$; $\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}(n\geq 3)$.

函数图像的讨论

(1)$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(2)提示:三个拐点是$(1,1),(-2+\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}}),$

$(-2-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}-1}{8+4\sqrt{3}})$.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案

(3)提示:证明$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内单调递减.

(4)极小值.　(5)极大值.

(6)提示:偶函数,关于y轴对称;x轴是一条水平渐近线;$(-\infty,0)$内单调递增,$(0,+\infty)$内单调递减;在$x=0$取最大值;$x=\pm1$是拐点,$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$为凸区间,$(-1,1)$为凹区间.

1.中值定理
(1)极值和费马引理
(2)罗尔定理
(2)拉格朗日中值定理
(4)柯西中值定理
(5)课后习题
2.洛必达法则
(1)$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
(2)其他不定式
(3)洛必达法则的局限性
(4)课后习题
3.泰勒公式
(1)泰勒公式的建立
(2)函数的麦克劳林公式
(3)泰勒公式的应用
(4)课后习题
4.函数图像的讨论
(1)函数的单调性
(2)曲线的凹凸性
(3)极值的求法
(4)图像的绘制
(5)课后习题
5.各节参考答案