5.1 连续时间马尔可夫链

一、连续时间的马氏链及转移矩阵

二、初始概率和绝对概率

三、状态停留时间τ_i

一、 连续时间的马氏链及转移矩阵

考虑取非负整数值的连续时间随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$

1. 连续时间的马氏链

定义5.1 设随机过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$，状态空间

$I=\{0,1,2,\dots\}$，若对任意非负实数$t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$,

和非负整数$i_1, i_2, \dots, i_{n+1}$，其中$0\leq t_1< t_2<\dots<t_{n+1}$，有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2,\dots, X(t_n)=i_n\}$$

$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_n)=i_n\},$$

则称$\{X(t),\ t\geq 0\}$为连续时间马尔可夫链。

2. 转移概率

在s时刻处于状态i，经过时间t后转移到状态j的概率是：$p_{ij}(s,t)=P\{X(s+t)=j|X(s)=i\}$

定义5.2 齐次转移概率 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$

(与起始时刻s无关，只与时间间隔t有关)

- 转移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t))$，$i,j\in I$，$t\geq 0$

- **定理5.1** 齐次马尔可夫过程的转移概率具有下列性质：

$$(1)\ p_{ij}(t) \geq 0$$

$$(2)\ \sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1;$$

$$(3)\ p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

连续时间的齐次马氏链的C-K方程。

- 显然有：

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

此为转移概率的**正则性条件**。

两类马氏链的转移概率比较

	正则性	转移矩阵的随机性	转移方程（C-K方程）
时间离散	$p_{ii}^{(0)}=1,$ $p_{ij}^{(0)}=0(i\neq j)$	$p_{ij}^{(n)}\geq 0,$ $\sum\limits_{j\in I}p_{ij}^{(n)}=1$	$\boldsymbol{p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}}$
时间连续	$\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$	$p_{ij}(t)\geq 0$ $\sum\limits_{j\in I}p_{ij}(t)=1$	$\boldsymbol{p_{ij}(t+s)=\sum\limits_{k\in I}p_{ik}(t)p_{kj}(s)}$

二、初始概率和绝对概率

- **定义5.3**

(1)初始概率 $\boldsymbol{p_j = p_j(0) = P\{X(0) = j\},\ j \in I}$

(2)绝对概率 $p_j(t) = P\{X(t) = j\},\ j \in I, t > 0$

(3)初始分布 $\boldsymbol{\{p_j\ ,\ j \in I\}}$

(4)绝对分布 $\{p_j(t)\ ,\ j \in I\} \qquad t > 0$

- **定理5.2** 齐次马尔可夫过程的**绝对概率**具有下列性质：

(1) $p_j(t) \geq 0$

(2) $\sum_{j \in I} p_j(t) = 1$

(3) $p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t)$

(4) $p_j(t+\tau) = \sum_{i \in I} p_i(t) p_{ij}(\tau)$

- **定理5.2** 齐次马尔可夫过程的绝对概率及有限维概率分布具有下列性质：

(1) $p_j(t) \geq 0$

(2) $\sum_{j \in I} p_j(t) = 1$

(3) $p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t)$

(4) $p_j(t+\tau) = \sum_{i \in I} p_i(t) p_{ij}(\tau)$

(5) $P\{X(t_1) = i_1, \cdots, X(t_n) = i_n\}$

$$= \sum_{i \in I} p_i p_{ii_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

例5.1 证明泊松过程$\{X(t), t\geq 0\}$为连续时间齐次马尔可夫链。

证 先证泊松过程的马尔可夫性。

泊松过程是独立增量过程，且$X(0)=0$，对任意 $0<t_1< t_2<\ldots< t_n< t_{n+1}$有

$$
\begin{aligned}
& P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\} \\
&= P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n \mid X(t_1)-X(0)=i_1, \\
& X(t_2)-X(t_1)=i_2-i_1,\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})=i_n-i_{n-1}\} \\
&= P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}
\end{aligned}
$$

另一方面

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n \mid X(t_n)-X(0)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}$$

所以

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \mid X(t_n)=i_n\}$$

即泊松过程是一个连续时间马尔可夫链。

再证齐次性

当$j \geq i$时，

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}=P\{X(s+t)-X(s)=j-i\}$$

$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

当$j<i$时,因增量只取非负整数值,故$p_{ij}(s,t)=0$，

所以

$$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)=\begin{cases} e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i \\ 0, & j<i \end{cases}$$

即，转移概率与s无关，泊松过程具有齐次性。

所以，泊松过程是连续时间的齐次马氏链。

三、状态停留时间τ_i

设在0时刻马氏链进入状态i,而且在接下来的s个单位时间中该过程未离开状态i(即未发生转移)，问在随后的t个单位时间内仍不离开状态i的概率是多少。

可以证明： $P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$

即τ_i具有无记忆性，所以其服从指数分布。

性质：若τ_i为过程在状态转移之前停留在状态i的时间，则τ_i服从指数分布。

小结

一、连续时间的马氏链及转移矩阵

二、初始概率和绝对概率

三、泊松过程是连续时间的马氏链

四、状态停留时间τ_1服从指数分布