第八章 定积分的应用

陈 颖

北京电子科技学院基础部

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平
- (2)参数方程表示的平i 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图 的面积
- (4)课后习:
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (3)课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式
 - (2)直角坐标和极坐标》 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - 4.旋转曲面的面积
 - 1) 微元法
 - (2) 疫转曲面
 - (3)课后习题
 - 5.定积分在物理上 的应用
 - (1)功
 - (2)液体的侧压
 - (4)#ESS
 - 6.各节参考答案

1.平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 而图形的而积

用定积分求由直角坐标方程表示的平面图形的面积,通常把它化为x型和y型区域上的积分来计算.分别是,

▶ x型区域:

$$A = \{(x,y)|f_1(x) \le y \le f_2(x), x \in [a,b]\},\$$

其中 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是定义在[a,b]上的连续函数;

▶ y型区域:

$$B = \{(x,y)|g_1(y) \le x \le g_2(x), y \in [c,d]\},\$$

其中 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 是定义在[c,d]上的连续函数.

1.平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

形的面积 (3)极坐标表示的平面图形

的面积 (4)误后习题

2.由平行截面面积

3.平面曲线的弧长

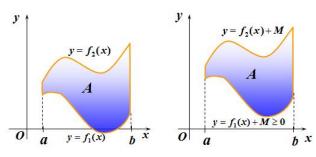
.旋转曲面的面积

(1)功

6.各节参考答案

x型区域A

通过上移



由定积分的几何意义,可知x型区域A的面积为

$$S(A) = \int_{a}^{b} (f_{2}(x) + M) dx - \int_{a}^{b} (f_{1}(x) + M) dx$$
$$= \int_{a}^{b} (f_{2}(x) - f_{1}(x)) dx.$$

同理,y型区域B的面积为

$$S(B) = \int_{a}^{d} (g_2(y) - g_1(y)) dy.$$

1.平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

(2)参数方程表示的平面图形的面积 (3)极坐标表示的平面图形

(4)课后习题

- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
- 3平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- 4.旋转曲面的面积
 - 1) 微元法
- (3)课后习题
- 的应用 (1):::
- 1)切 2)液体的侧压力
- (3)引力 (A)≈≈□™

例1.1:求由 $y^2 = x + x - y = 2$ 围成的图形A的面积.

1 平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2)参数方程表示的平面形的面积

(3)极坐标表示的 的面积

(4)课后习题

2.由平行截面面积 求体积

- (1)一般截面求体和
- (2)延行外的外部
 (3)误后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4. 旋转曲面的面积

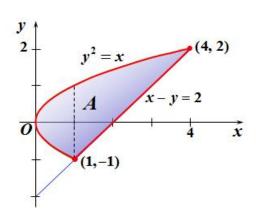
- 微元法
- (2) 校特曲面的
- (3)课后习题

5.定积分在物理上

- 的应用
- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (4)#ESS
- C夕出来其实安

例1.1:求由 $y^2 = x n - y = 2$ 围成的图形A的面积.

解: $y^2 = x \pi x - y = 2$ 的交点为(1,-1)和(4,2),图形A如下图,



1 平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

(2)参数方程表示的平面图 形的面积 (2)如如此本二公五二四形

的面积 (4)课后习题

2.由平行截面面积 求体积

- (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4. 旋转曲面的面积

- .) 微元法
- (2) 旋转曲面的面
- (3)课后习题

5.定积分在物理上 的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压
- (4)课后习题

6.各节参考答案

若把A看作x型区域,则

$$f_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 4 \end{array}, \ f_2(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4. \right.$$

由于 f_1 分段定义,所以A也分为两部分 A_1 和 A_2 ,其中

$$S(A_1) = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3},$$

$$S(A_2) = \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = (\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x) \Big|_1^4 = \frac{19}{6},$$

故

$$S(A) = S(A_1) + S(A_2) = \frac{9}{2}.$$

1 平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

- (2)参数方程表示的平面图 形的面积 (3)据坐标表示的平面图形
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积(2)旋转体的体积
 - 3平面曲线的弧长
 - (1)光潜曲线的弧长公式
 - (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 -)假九法)旋转曲面的面
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上
- (1)功
- (2)液体的侧压力 (3)引力
 - 1) 课后习题
- 6.各节参考答案

若把A看作y型区域,则

$$g_1(y) = y^2(-1 \le y \le 2), g_2(y) = y + 2(-1 \le y \le 2),$$

所以

$$S(A) = \int_{-1}^{2} ((y+2) - y^2) dy = (\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3)|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

1.平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平面图形的面积

形的面积
(3)被安标表示的平面图形

的面积 (4)课后习题

- 2.由半行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2) 验转体的体积
- (2) 收转体的体积 (3) 课后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - 1)光滑曲线的弧长公式 2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4. 旋转曲面的面积

- L) 微元法
- (2)旋转曲面的面
- (3)採后习题

5.定积分在物理上 的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (2)旋转体的体积
 - (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧卡
 - (1)光滑曲线的弧长公式
 - (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 - (1)微元法
 - (2)旋转曲面的面积
 - (3)课后习题
- 5.定积分在物理上的应用
 - (1)功
 - (2)液体的侧压力
 - (3)引力
 - (4)课后习题
- 6.各节参考答案

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2)参数方程表示的平面图 形的面积

(3)极坐标表示的平面图 的面积

(4)课后习录

- 2.由平行截面面和
 - (1)一般截面求体积
- (2) 校转体的体
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
- (3)课后习题
 - 旋转曲面的面
 - **微元法**
- (2) 收转回向的
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1) th
- (1)-27
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

设曲线C由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

表示,其中y(t)连续,x(t)连续可微,且 $x'(t) \neq 0$.

线C及直线x = a, x = b和x轴所围图形的面积为

$$S(A) = \int_a^b |y| dx = \int_\alpha^\beta |y(t)| x'(t) dt;$$

线C及直线x = a, x = b和x轴所围图形的面积为

$$S(A) = \int_{a}^{b} |y| dx = -\int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)| dt \frac{1}{2} \frac{1}$$

(2)参数方程表示的平面图

因此,不论x(t)递增或递减,总有

$$S(A) = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)|dt,$$

进一步的,若上述曲线C是封闭的,即

$$x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta),$$

则由C所围的平面图形A的面积是

$$S(A) = |\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt|.$$

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平

(2)参数方程表示的平面图

- (3)极坐标表示的平面图 的面积
- 2.由平行截面面和
- 水体积 (1)一般指面求依积
- (1)一般微曲求体积
 (2) 旋转体的体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - 1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 - L) 微元法
- (2)減輕回期的期末
 (3)減后习题
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上
- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)√17/ (A)√2 ⋈ □ □ □
- 6 久节糸老な宏

例1.2:求由摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 与x轴所围图形的面积.

- 1 平而图形的而和
- (1)直角坐标方程表示的平

而图形的面积 (2)参数方程表示的平面图

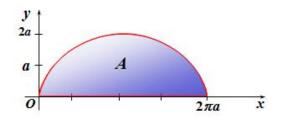
(3)极坐标表示的平面图形 的面积

形的面积

- 2.由平行截面面积
 - (1)一般截面求体积
 - (2) 旋转体的体积
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - 4 旋转曲面的面积
 - 1864年生
 - 2) 旅站曲面的
 - [分和八大松四]
 - 5.定积分在物理上 的应用
 - (1)功
- (2)液体的侧压力 (3)引力
- (4)课后习录
- 6.各节参考答案

例1.2:求由摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 与x轴所围图形的面积.

解:如下图,



$$S(A) = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)(a(t - \sin t)')dt$$
$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$
$$= 3\pi a^2.$$

1 平面图形的面和

(1)直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2)参数方程表示的平面图 形的面积

10的积 (4)课后习题

2.由平行截面面积 求体积

(1)一般截面求体积 (2) 旋转体的体积

3.平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长

(3)课后习题

4.旋转曲面的面积

微元法
 診結曲面的面:

5.定积分在物理上

的应用

(2)液体的侧压力 (3)引力

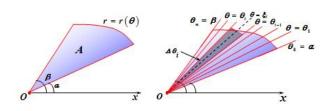
(4)课后习题

6.各节参考答案

- (3)极坐标表示的平面图形的面积

(3)极坐标表示的平面图形 的面积

设曲线C的极坐标方程为 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$,图形A由曲线C和两条射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成.如下图,



作分割
$$T: \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$$
, 射线 $\theta = \theta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 把 A 分割成 n 个"小扇形" A_1, A_2, \dots, A_n .令

$$m_i = \inf \{ r(\theta) | \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i] \},$$

$$M_i = \sup \{ r(\theta) | \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i] \},$$

则

$$\frac{1}{2}m_i^2\triangle\theta_i\leq S(A_i)\leq \frac{1}{2}M_i^2\triangle\theta_i,$$

1 平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平 形的面积

(3)极坐标表示的平面图形 的面积

- 2.由平行截面面积 表体积
 - (1)一般截面求体积 (2) 验转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和板坐标表示 的光滑曲线弧长 (3)课后习题
- (3)课后习题

4. 旋转曲面的面积

- L)版儿伝 2)旋转曲面的面形
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理
 - (1)动
 - (2)液体的侧压 (3)引力
 - (4)课后习题
 - 6.各节参考答案

从而

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i^2 \triangle \theta_i \leq \sum_{i=1}^n S(A_i) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n M_i^2 \triangle \theta_i,$$

注意到

$$\lim_{||T||\to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \triangle \theta_i = \lim_{||T||\to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \triangle \theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta,$$

因此

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

1 平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平

(2)参数方程表示的平 形的面积

(3)极坐标表示的平面图形 的面积

(4)课后习题

2.由平行截面面积 求体积

(1)一般截面求体积(2)旋转体的体积

3.平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲级弧长

(3)课后习题

4. 旋转曲面的面积

(3)课后习题

5.定积分在物理上

(1)功

(2)液体的侧压力

3)引刀 4)课后习题

6.各节参考答案

例1.3:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)(a > 0)$ 所围平面图形的面积.

| 平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

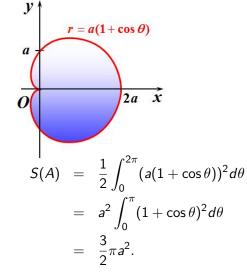
(2)参数方程表示的

(3)极坐标表示的平面图形 的面积

- 2.由平行截面面和
 - (1)一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积 (3) 课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- 1 谷柱曲面的面和
- .)假九法 !)旋转曲面的i
- 5.定积分在物理上
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1)动
- (2)液体的侧压刀
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

例1.3:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)(a > 0)$ 所围平面图形的面积.

解:如下图,



1 亚石图形的石和

(1)直角坐标方程表示的平

(2)参数方程表示的

(3)极坐标表示的平面图形 的面积

2.由平行截面面:

(1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积

3平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长

1 旋转曲面的面积

1) 微元法

(2) 政府回向的由积

5.定积分在物理上 的应用

(2)液体的侧压力 (3)引力

(4)课后习题

6.各节参考答案

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积

(4)课后习题

- 2.由平行截面面积求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (2)旋转体的体积
 - (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式
 - (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 - (1)微元法
 - (2)旋转曲面的面积
 - (3)课后习题
- 5.定积分在物理上的应用
 - (1)功
 - (2)液体的侧压力
 - (3)引力
 - (4)课后习题
- 6.各节参考答案

- 1 平面图形的面积
- (1) 直角坐标万程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图》

(4)课后习题

- 2.由平行截面面积
- 永体积 (1)一般崇而求依知
- (2) 校转体的体
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
- (3)课后习题
 - 旋转曲面的面积
 - 微元法
- (2) 収拾回询的
- (3)课后习题
- D.定积分在物理上 的应用
- (1)*3h*
- (2)液体的化
- (4)课后习题
- 6. 各节参考答案

- (1) 求由抛物线 $y^2 = x n x^2 = 8y$ 所围图形的面积.
- (2) 计算由曲线 $y = x^3 6x$ 和 $y = x^2$ 所围图形的面积.
- (3) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形的面积.
- (4) 求参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \ a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 所围封闭 图形的面积.
- (5) 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围平面图形的面积.
- (6) 求由 $r = \sin \theta, r = \cos \theta$ 所围平面图形的面积.

- 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
- (3)珠石河地
- 3.平面曲线的弧长
- (1)尤滑田致助胍长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - 很无法
 总结由面的面系
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上
- 的应用
- (2)液体的侧压力 (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面
- (3)极坐标表示的平面图 的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积 求体积

- (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- (0) 440 470

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

益結曲而約3

-) 很元法
- (2) ※結曲面的
- (3)课后习题
- (3)课后习题

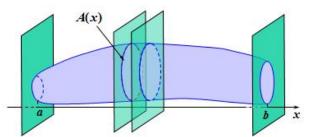
内应用

- (1) 功
- (2)液体的侧压力
- (4)课后习题
- to at to be not do
- .各节参考答案

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积

- (1)一般截面求体积



设 Ω 为三维空间中一立体,它夹在垂直于x轴的两平面x=a, x=b 之间(a<b). $\forall x\in[a,b]$, 作垂直于x轴的平面,截 得 Ω 的截面面积为A(x). 若A(x)在[a,b]上连续,作分割:

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

 $\diamondsuit[x_{i-1},x_i]$ 上A(x)的最大、最小值分别为 M_i 和 m_i ,则第i个小薄片的体积 $\triangle V_i$ 满足

$$m_i \triangle x_i \leq \triangle V_i \leq M_i \triangle x_i$$

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- 形的面积
 (3)据安标表示的平面图形
- (3) 极坐标表示的干水的面积
- (4)採店习起
- 2.由半行截由由积 求体积
 - (1)一般截面求体积 (2) 旋转体的体积
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
 - (3)课后习题
 - 4.旋转曲面的面积
 - 1) 後元法
- (3)课后习》
- 5.定积分在物理上的应用
- 的应用 (1)_功
- (2)液体的侧压
- (3)引力
 (4)课后习题
- 6.各节参考答案

于是

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i} \triangle x_{i} \leq V = \sum_{i=1}^{n} \triangle V_{i} \leq \sum_{i=1}^{n} M_{i} \triangle x_{i},$$

当||T|| → 0时,

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i} \triangle x_{i} \rightarrow \int_{a}^{b} A(x) dx,$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_{i} \triangle x_{i} \rightarrow \int_{a}^{b} A(x) dx,$$

因此

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

1 平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

(2)参数方程表示的平面 B 形的面积

(3) 似至标表示的面积

2.由平行截面面积 並休和

(1)一般截面求体积(2)旋转体的体积

3 平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长

(3)课后习题

4.旋转曲面的面积

)微元法)症結曲面的面积

(3)课后习题

5.定积分在物理上

的应

(2)液体的侧压力

(3)引力
(4)课后习题

6 夕 苔 糸 老 笠 安

例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2 与 z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

- | 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面和
- (2)参数方程表示的平
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习法
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 -) 很元法
- (2) 校转曲面的
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上
- 的应用
- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (4)课后习录
- c 夕 共 兵 平 贺 安

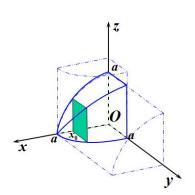
例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2 + z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

解:如下左图,

- 1.平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面
- (3)极坐标表示的平面图形 的面积
- (4)课后习法
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - (後元法
- (2) 投稿曲面的
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上
- 的应用
- (1) th
- (2)液体的侧压力
 (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2 与 z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

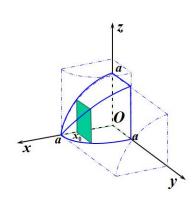
解:如下左图,



- 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图 形的面积
- (3)极坐标表示的平面的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
- (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 - 微元法
- (2) 統結曲面的
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1) ×h
- (2)液体的化
- (4)课后习题
- 6 久节糸老な宏

例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2 + z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

解:如下左图,



先考察立体在第一卦限的体 积 V_1 . $\forall x_0 \in [0,a], x = x_0$ 与立体的截面是边长为 $\sqrt{a^2 - x_0^2}$ 的正方形,所以

$$A(x)=a^2-x^2,$$

其中x ∈ [0, a],于是求得

$$V = 8V_1$$

$$= 8 \int_0^9 (a^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{16}{3} a^3.$$

平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图 形的面积
- 的面积
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2) 旋转体的体积 (3) 课后 引题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 - L)微无法 2)旋转曲面的面形
- (3)採与习题
- 5. 定积分在物理上的应用
 - (1)功(2)液体的侧压
- (2)液体的侧压 (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧卡

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

1.平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

形的面积 (3) 据安标表示的平面图:

(3)极坚标表示的平面图 的面积

(4)课后习

2.由平行截面面积 求体积

(1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积

(2) 旋转体的体积 (3) 课后习题

3.平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长

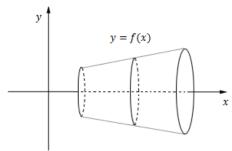
(3)课后习题

旋转曲面的面积

- () 後元法
- (2)混合引题
- (3)课后习题

5.定积分在物理上 的应用

- 1)功
- (1)37 (2)3544
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案



设f是[a,b]上的连续函数, Ω 是由平面图形

$$A = \{(x, y) | 0 \le |y| \le |f(x)|, a \le x \le b\}$$

绕x轴旋转一周所得的旋转体,则

$$A(x) = \pi f^2(x),$$

其中 $x \in [a, b]$,故

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面B 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图 的面积
- (4)课后习录
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - 1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 -) 很元法
- (2) 旋转曲面的面
- (5)加小大 46 m 上
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1)动
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \le r^2 (0 < r < R)$ 绕x轴旋转一周所得环状立体的体积.

- 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面[形的面积
 - (3)极坐标表示的平面的面积
- (4)课后习录
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体和
- (2)旋转体的体积 (3)误后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - 1)光滑曲线的弧长公式 2)直角坐标和极坐标表示
 - (3)课后习题
 - 1.旋转曲面的面积
 -) 微元法
 - (Z)放於田面的面: (3)课后习题
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1)动
- (2)液体的化
- (3)517/ (A)38 € 93
- (4)课后习题
- i.各节参考答案

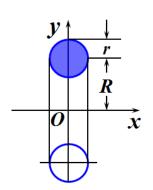
例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \le r^2 (0 < r < R)$ 绕x轴旋转一周所得环状立体的体积.

解:如下左图,

- 1.平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面医 形的面积
 - (3)极坐标表示的平面 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (2)旋转体的体积 (3)课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - 1.旋转曲面的面积
 - .) 微元法
 - (2)減程回期的期限
 - (3)课后习题
 - 5. 定积分在物理上 的应用
 - (1) th
 - (2)液体的侧
 - (4)课后习录
 - C 夕 共 矣 本 父 安

例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \le r^2 (0 < r < R)$ 绕x轴旋转一周 所得环状立体的体积。

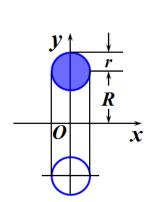
解:如下左图.



- (2)旋转体的体积

例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \le r^2 (0 < r < R)$ 绕x轴旋转一周所得环状立体的体积。

解:如下左图,



$$x^2 + (y - R)^2 = r^2$$
的上下半圆分别为

$$f_2(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2},$$

 $f_1(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2},$

因此

$$A(x) = \pi f_2^2(x) - \pi f_1^2(x)$$

= $4\pi R \sqrt{r^2 - x^2}$,

从而

$$V = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$
$$= 2\pi^2 r^2 R.$$

平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
 - (3)极坐标表示的平面目 的面积
- 2.由平行截面面积 求体积
- (2)旋转体的体积
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
- (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 -)旋转曲面的面积
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1)功 (2)液体的侧压;
- (2)液体的侧压刀
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

2.由平行截面面积求体积

- (3)课后习题

(3)课后习题

- (1) 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心,并与底面交成α角,计算该平面截圆柱体所得立体的体积.
- (2) 求由区域 $\{(x,y)|0 \le x \le 1, x \le y \le 2 x^2\}$ 绕y 轴旋转一周所得立体的体积.
- (3) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形绕x轴旋转而成的椭球体的体积.
- (4) 求曲线 $y = 3 |x^2 1|$ 与x轴围成的封闭图形绕直线y = 3旋转得到的旋转体的体积.

- 平而图形的而和
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积 (2)参数方程表示的平面图
- (3)极坐标表示的平面图形 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积 (3)课后习题
- 2 亚石曲线的孩子
- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表 的光滑曲线弧长 (3)课后习题
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - L)微元法 D)兹赫幽面的面:
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上
 - 的应用
- (2)液体的侧压力
- (3) 幻刀 (4)课后习题
- 6.各节参考答案

3 平面曲线的弧长

3.平面曲线的弧长

3 平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式

(1)光滑曲线的弧长公式

设平面曲线C由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

表示.对 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割

$$T : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

相应地对C有一个分割,即C上有分点

$$A = P_0, P_1, \cdots, P_n = B,$$

如果

$$\lim_{||T|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = s$$

存在,则称曲线是**可求长的**,并定义该极限值s为曲线的**弧 长**. 如果x(t)与y(t)在[α , β] 上连续可微,且x'(t) 与y'(t) 不同时为零,则称C为一光滑曲线.

1 平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平
 - (2)参数方程表示的平面! 形的面积
 - (3)极坐标表示的平面的面积
 - (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 並 体和
 - (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式
- 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
 - 1. 旋转曲面的面积
 - L) 微元法
- (2)旋转曲面的面
- (3)课后习:
- 5.定积分在物理上的应用
- (1)功
- (2)液体的侧压
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

设 $[\alpha, \beta]$ 的任一分割 $T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$. 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上由微分中值定理有,

$$\triangle x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i) \triangle t_i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$\triangle y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i) \triangle t_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

干是

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i}P_{i-1}| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\triangle x_{i}^{2} + \triangle y_{i}^{2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^{2}(\xi_{i}) + y'^{2}(\eta_{i})} \triangle t_{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^{2}(\xi_{i}) + y'^{2}(\xi_{i})} \triangle t_{i} + M,$$

其中

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^{2}(\xi_{i}) + y'^{2}(\eta_{i})} \triangle t_{i} - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^{2}(\xi_{i}) + y'^{2}(\xi_{i})} \triangle t_{i}.$$

平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积 (2)参数方程表示的平面图 形的面积

)课后习题

1)一般截面求体积

3.平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和板坐标表示 的光滑曲线弧长 (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

1) 假元法 2) 旋转曲面的面积

定积分在物理上 应用

)功 ()液体的侧压力 ()引力

(4)课后习题

6 冬节糸老笨宏

由于 $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,从而可积,因此

$$\lim_{||T|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^{2}(\xi_{i}) + y'^{2}(\xi_{i})} \triangle t_{i} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^{2}(t) + y'^{2}(t)} dt.$$

注意到

$$|\sqrt{x'^2(\xi_i)} + y'^2(\eta_i) - \sqrt{x'^2(\xi_i)} + y'^2(\xi_i)| \le |y'(\xi_i) - y'(\eta_i)|,$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $||T|| < \delta$ 时,

$$|y'(\xi_i) - y'(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

(1)光滑曲线的弧长公式

于是

$$|\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x'^{2}(\xi_{i}) + y'^{2}(\eta_{i})} - \sqrt{x'^{2}(\xi_{i}) + y'^{2}(\xi_{i})}) \triangle t_{i}|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |y'(\xi_{i}) - y'(\xi_{i})| \triangle t_{i} < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{||T||\to 0} M = 0,$$

从而

$$s = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_i P_{i-1}| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

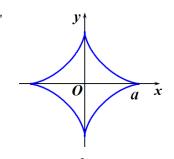
- 1 平面图形的面和
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
 - 形的面积
 - 的面积
- 2.由平行截面面和
- 求体积
- (1)一般敬由求体积
 (2)旋转体的体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和框坐标表示
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - (1) 後元法
 - 2)旋转曲面的面布
- (3)採后习题
- 5. 定积分在物理上 的应用
- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (4)课后习题
- 久节糸老父宏

例3.1:求星型线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 的 周长.

- 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平
- (2)参数方程表示的平
- (3)极坐标表示的平面图形
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 步休和
 - (1)一般截面求体积
- (2) 減於外的外
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 -) 微元法
- (2) 採兵月辰
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1)功
- (2)液体的侧/
- (A)+z = □ z
- (4)课后习录
- 5.各节参考答案

例3.1:求星型线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 的 周长

解:如下图,



 $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t, y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t,$

因此

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2} dt$$
$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 12a \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

1.平面图形的面积

(1) 且用主标力性表示的干面图形的面积 (2)参数方程表示的平面图

> 例 生标表示的于面面: 品积 课后习题

(1)一般截面求体积 (2) 旋转体的体积

3.平面曲线的弧长 (1)光滑曲线的弧长公式

(2)直角坐标和板坐标表示 的光滑曲线弧长 (3)课后习题

4.旋转曲面的面积 (1)^{微元法}

3)课后习题 定积分在物理上

6.定积分在物理上 约应用 (1)功

(3)引力 (4)课后习题

6 冬节糸老祭室

3 平面曲线的弧长

- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

- (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长

▶ 若曲线C由直角坐标方程 $y = f(x), x \in [a, b]$ 表示,则C亦可看作参数表示 $x = x, y = f(x), x \in [a, b]$,因此当f(x)在[a, b]上连续可微时,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

► 若曲线 C由极坐标方程 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ 表示,则 C又可看作参数表示 $x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta, \theta \in [\alpha, \beta],$ 由于

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,$$

$$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta,$$

$$x'^{2}(\theta) + y'^{2}(\theta) = r^{2}(\theta) + r'^{2}(\theta),$$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

| 平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- 形的面积 (3)极坐标表示的平面图形
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - 1) 假元法
 2) 旋转曲面的面积
- (3)课后习题
- 的应用
- (2)液体的侧压 (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

例3.2:求连续曲线段 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t} dt$ 的弧长.

- 1 平面图形的面和
- (1) 正角坐标万程表示的半 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面
- (3)极坐标表示的平面图
- (4)#ES
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体和
 - (3)课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - 4.旋转曲面的面积
 - 微元法
 - (2) 疫特曲面的面
 - (3)课后习题
 - 5.定积分在物理上 的应用
 - (1)功
 - (2)液体的侧层
 - (4)選点別表
 - (4)採后习题
 -).各节参考答案

例3.2:求连续曲线段 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t} dt$ 的弧长.

解:由题意知
$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$
,所以

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$= 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (\sqrt{\cos x})^2} dx$$

$$= 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} dx$$

$$= 2\sqrt{2} (2 \sin \frac{x}{2}) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4.$$

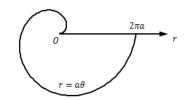
- 1 平面图形的面和
- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图 形的面积
- (3)极坐标表示的平的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积 (2) 验转体的体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - L) 微元法
- (2)旋转曲面的面
- (3)珠岳初思
- 的应用
- (1)功 (2)冰休休奶店
- (2)液体的侧压力 (3)引力
 - (4)课后习题
- 6.各节参考答案

例3.3:求阿基米德螺线 $r = a\theta(a > 0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 时的弧长.

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标万程表示的平面图形的面积
 - (2)参数方程表示的平面 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形 的面积
- (4)课后习法
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (2)旋转体的体积 (3)误后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - 1.旋转曲面的面积
 - 微元法
 - (2) 級转曲面的
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上 的应用
- (1)*th*
- (2)液体的侧压:
- (4)混合习息
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.3:求阿基米德螺线 $r = a\theta(a > 0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 时的弧长.

解:如下图



$$s = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

$$= a \left(\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= a\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}).$$

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (3) 似至标表示的干印的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - .) 微元法
- 2) 旋转曲面的面
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上 的应用
- 的应用
- (2)液体的侧压力
- (3)引力 (4)谬丘习题
- 6 各节参考签案

3 平面曲线的弧长

(3)课后习题

- (3)课后习题

(1) 求悬链线
$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
在[0, a] 上的一段弧长.

(2) 计算曲线
$$y = \int_0^{\frac{x}{n}} \sqrt{\sin \theta} d\theta$$
 的弧长,其中 $(0 \le x \le n\pi)$.

(3) 计算摆线
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
 $(a > 0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长.

```
(4) 求极坐标系下曲线r=a\sin^3\frac{\theta}{3} 的弧长,其中a>0,0\le\theta\le3\pi.
```

1 平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数万程表示的平面图 形的面积 (3)据坐标表示的平面图形
- 的面积 (4)课后习题
- 2.由平行截面面和
- 采体积 (1)一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积(3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和板坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4. 旋转曲面的面积

- | 後元法
- (2)旋转曲面的面积
- 5 定积分在物理上

5.定积分在物理上 的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
 (3)引力
 - (4)课后习题
- 6.各节参考答案

4.旋转曲面的面积

4. 旋转曲面的面积

4.旋转曲面的面积

(1)微元法

(1) 微元法

当f为[a,b]上的连续函数,若令

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

则 $\Phi'(x) = f(x)$,或 $d\Phi = f(x)dx$,且

$$\Phi(a) = 0, \Phi(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

现在,我们把问题倒过来看:设我们要求的未知函数是 $\Phi(x)$,它定义在区间[a,b]上,而且 $\Phi(a)=0$, $\Phi(b)$ 是一个需要的最终所求的值.如何求解?

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
 - (2)参数方程表示的平面 形的面积
 - (3)核坐标表示的平面的面积
 - (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
- (3)课后习题
- 1.旋转曲面的面积
- (1) 微元法
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上
- 的应用
- (2)液体的侧压力
- (3)引力 (4)课后习题
- 6.各节参考答案

在任意小的区间 $[x,x+\triangle x]\subset [a,b]$ 上,若能把Φ的微小增量 $\triangle Φ$ 近似表示为 $\triangle x$ 的线性形式

$$\triangle \Phi \approx f(x) \triangle x$$
,

其中f为某一连续函数,而且当 $\triangle x$ → 0时,

$$\triangle \Phi - f(x) \triangle x = o(\triangle x),$$

那么只要把 $\int_a^b f(x)dx$ 计算出来,就是该问题所求的结果.

- 1.平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- 形的面积 (3)据安标表示的平面图形
 - 的面积
- (4)课后习题
- 2.田平行做面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
 - (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
- (1) 微元法
 - 2)旋转曲面的面系 3)谬丘习题
- (3)珠石初思
- 5.定积分在物理」 的应用
- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

上面的方法称为微元法,在用微元法时应注意:

- 所求量Φ关于分布区间必须是可加的;
- 敝元法的关键是正确给出△Φ的近似表达式

$$\triangle \Phi \approx f(x) \triangle x.$$

在一般情况下, 要严格检验

$$\triangle \Phi - f(x) \triangle x$$

为△x的高阶无穷小量,而且这通常并不是件容易的事.

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积
 - (1)一般截面求体积
 - (2) 旋转体的体积 (3) 课后习题
 - 3 平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式
 - (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - 1.旋转曲面的面积
 - (1) 微元法
 - (3)课后习题
 - 5.定积分在物理上
 - (1)动
- (2)液体的侧压力
 - (4)课后习题
- 6.各节参考答案

4.旋转曲面的面积

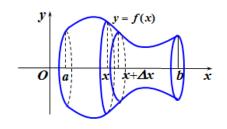
- (2)旋转曲面的面积

(2) 旋转曲面的面积

设平面光滑曲线C的方程为

$$y = f(x), x \in [a, b](f(x) \ge 0),$$

这段曲线绕x轴旋转一周得的旋转曲面,如下图.



通过x轴上点x与x + $\triangle x$ 分别作垂直于x轴的平面,它们在旋 转曲面上截下一条狭带.当△x很小时.此狭带的面积近似于 一圆台的侧面积.即

- - (2)旋转曲面的面积

$$\triangle S \approx \pi(f(x) + f(x + \triangle x))\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$$
$$= \pi(2f(x) + \triangle y)\sqrt{1 + (\frac{\triangle y}{\triangle x})^2}\triangle x,$$

其中 $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$,由于

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0, \lim_{\triangle x \to 0} \sqrt{1 + (\frac{\triangle y}{\triangle x})^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)},$$

因此由f'(x)的连续性可以保证

$$\pi(2f(x)+\triangle y)\sqrt{1+(rac{\triangle y}{\triangle x})^2}$$
 $\triangle x-2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ $\triangle x=o(\triangle x)^{3/365/38}$

所以得到

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + f'^{2}(x)} dx.$$

(2)旋转曲面的面积

如果光滑曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

给出,其中 $t \in [\alpha, \beta]$,且 $y(t) \ge 0$,则曲线C绕x轴旋转所得曲面的面积为

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

类似的,如果光滑曲线由极坐标 $r = r(\theta)$ 表示,那么

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的斗 面图形的面积
 - 形的面积
- (3) 似至标表示的干 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积(2) 旋转体的体积
- 3 平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式
- 的光滑曲线弧卡
- 4. 旋转曲面的面
 - 1) 很元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题
- 5.定积分在4
- (1)水
- (2)液体的侧压;
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

例4.1:求将椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b)$ 绕x轴旋转所得椭球面 的面积.

- - (2)旋转曲面的面积

例4.1:求将椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b)$ 绕x轴旋转所得椭球面的面积.

解:将上半椭圆写成参数方程

$$x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \le t \le \pi,$$

1 平而图形的而和

(1)直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2)参数力程表示的干面目 形的面积 (2)据率标志一的亚面图形

的面积

2.由平行截面面积

(1)一般截面求体积

(3) 球石 月 超 4 メ ソ

1)光滑曲线的弧长公式

(3)课后习题

一般特曲面的面布
 (1)卷元法

(2)旋转曲面的面积

5.定积分在物理上

的*应*用 (1)功

(2)液体的侧压力 (3)引力

(4)课后习题

6.各节参考答案

$$= 4\pi a b \left(\frac{1}{2}u\sqrt{1 - e^2u^2} + \frac{1}{2e}\arcsin eu\right)|_0^1$$

$$= 2\pi a b \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c}\arcsin \frac{c}{a}\right)$$

$$= 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right).$$

```
(2)旋转曲面的面积
```

例4.2:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$,其中a > 0,绕极轴旋转所得 曲面的面积。

- (2)旋转曲面的面积

例4.2:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$, 其中a > 0, 绕极轴旋转所得曲面的面积.

解:由题意

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^1 u^4 du$$

$$= \frac{32}{5}\pi a^2.$$

1 平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

> (2)参数方程表示的平面图 形的面积

的面积

(4)课后习题

2.由平行截面面积 求体积

(1)一般截面求体积(2)旋转体的体积

3.平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示

(3)课后习题

4.旋转曲面的面积

(1)很无法(2)旋转曲面的面积

(3)课后习题

5.定积分在物理

的应用

(2)液体的侧压力

(3)引力 (4)認益引援

6 各节参考签案

4.旋转曲面的面积

- (3)课后习题

- (3)课后习题

- (1) 求半径为a的球面的面积.
- (2) 求由曲线 $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ 绕x轴旋转所得曲面的面积.
- (3) 求由曲线 $x = 1 t^2$, y = 2t, $0 \le t \le 1$ 绕x轴旋转所得曲面的面积.
- (4) 求由星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, a > 0$ 绕x轴旋转 一周所得的旋转体的表面积.

- 平而图形的而和
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- 形的面积 (3) 核安标表示的平面图形
- 的面积 (4) 河下 口下
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2) 次标件的件和
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - 1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 - 1) 很无法 2) ** 4 + = 4 =
- (3)课后习题
- (3)课后习题
- (1)功
- (2)液体的侧压力
 - (4)课后习题
- 6.各节参考答案

5.定积分在物理上的应用

5.定积分在物理上 的应用

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图 的面积
- (4)课后习点

2.由平行截面面积 求体积

- (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- (3)珠石刁鸡

3. 平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式(2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

旋转曲面的面积

- (後元法
- (2) 旋转曲面的
- (3)课后习题
- 5 中和公左4638

的应用

(1)功

(3)引力

- (4)课后习题
- i.各节参考答案

例5.1:在一个带+q电荷所产生的电场作用下,一个单位正电荷沿直线从距离点电荷a处移动到b处(a < b),求电场力所作的功.

- 1 平面图形的面和
- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面
- (3)极坐标表示的平面图制
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (2) 旋转体的体积
 (3)课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - .旋转曲面的面积
 -) 很元法
 - (2) 旋转曲面的
- でかかりた かんか し
- 5.定积分在物理上的应用
 - (1)幼
 - (2)液体的侧压力
 - (4)课后习录
 - 6.各节参考答案

例5.1:在一个带+q电荷所产生的电场作用下,一个单位正电荷沿直线从距离点电荷a处移动到b处(a < b),求电场力所作的功.

解:当单位正电荷距离原点r时,由库伦定律,电场力为

$$F = \frac{kq}{r^2}$$

则功的微元为

$$dW = \frac{kq}{r^2}dr,$$

所求功为

$$W = \int_{a}^{b} \frac{kq}{r^{2}} dr = kq(-\frac{1}{r})|_{a}^{b} = kq(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}).$$

1 亚西图形的西和

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图 形的面积 (3)极坐标表示的平面图形
- 的面积 (4)课后习题
- 2.由平行截面面积
- (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
- (2) 旋转曲面的面:
- (3)课后习点
 - .足似为任初廷」 的应用
- (1)功 (2)済体的4
- (2)液体的侧
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

例5.2:一蓄满水的圆柱形水桶高为5m,底圆半径为3m,试问要把桶中的水全部吸出需作多少功?

平面图形的面和

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面医 形的面积
- 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (3)课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示
 - (3)课后习题
 - 1.旋转曲面的面积
 - (後元法
 - (2) 旋转曲面的面积
- 5 定和公左物理上
- 的应用

(1)功

- (2)液体的侧压力
 (3)引力
- (4)课后习
- C 夕 共 套 平 祭 安

例5.2:一蓄满水的圆柱形水桶高为5m,底圆半径为3m,试问要把桶中的水全部吸出需作多少功?

解:在任一小区间[x,x+dx]上的一薄层水的重力为

$$\rho g \pi 3^2 dx (KN),$$

这薄层水吸出桶外所做的功的微元为

$$dW = 9\pi \rho g x dx$$
,

故所求的功为

$$W = \int_0^5 9\pi \rho g x dx$$
$$= 9\pi \rho g \frac{x^2}{2} \Big|_0^5$$
$$= \frac{225}{2} \pi \rho g(KJ).$$

平而图形的而和

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
 - (2)参数力程表示的干面位 形的面积 (2)担心标志一的亚面图形
 - (3)极坐标表示的平面的面积
 - (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (3)课后习题
- 3.平面曲线的弧长
 - 1)光滑曲线的弧长公式
- (3)课后习题
- 1 25 44 Jb T 46 T
- 7.00 TO 14 14 15 14 7
- (3)课后习
- 5.定积分在
- 的应用
- (1)功(2)液体的
- (2)液体的侧
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

5.定积分在物理上的应用

- (2)液体的侧压力

(2)液体的侧压力

例5.3:一水平横放的半径为R的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平
- (2) 参数方程多子站立
- (3)极坐标表示的平面图:
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (2) 旋转体的体积
 - (3)14418
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - 4.旋转曲面的面积
 - 1) 微元法
 - (2) 收转回向的
- (3)课后习题
- 的应用
- (1) 3/1
 - (2)液体的侧压力
- (3) 1177 (A) 12 ≤ 11.
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

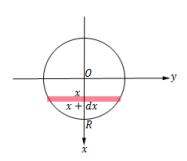
例5.3:一水平横放的半径为R的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液 体,求桶的一个端面所受的侧压力,

解:如下左图.

- (2)液体的侧压力

例5.3:一水平横放的半径为R的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解:如下左图,

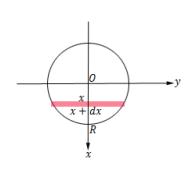


1 平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平
- (3)极坐标表示的平面图形 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (2) 旋转体的体积 (3) 课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1) 非潜曲线的盔书公式
 - (2)直角坐标和极坐标; 的光滑曲线弧长
 - (3)课后习题
 - 4.旋转曲面的面积
 - 1) 微元法
 - (2) 沒转曲面的:
- (3)课后习题
- 5.足积分在初建工的应用
- (1) 动
- (2)液体的侧压力
- (4)据自用期
- 6.各节参考答案

例5.3:一水平横放的半径为R的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解:如下左图,



显然有

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2},$$

利用对称性,侧压力的微元是

$$dP = 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

因此所受侧压力为

$$P = \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$
$$= \frac{2\rho g}{3} R^3.$$

- 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数力程表示的干回 形的面积 (2)担心标志子的恶而因
- 的面积 (A)证片 7 题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式
 - (3)课后习题
 - 4.旋转曲面的面积
 - 1) 後元法
- (2) 旋转曲面的面材
- 5.定积分在物理的应用

(1)动

(2)液体的侧压力

(3)引刀 (4)课后习题

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面 B 形的面积
- (3)核坚标表示的平面图:
- (4)课后习录

2.由平行截面面积 求体积

- (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- (3)珠石刁鸡

3. 半面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

旋转曲面的面积

- (後元法
- (2) 收转回向的
- (3) 课后习题

的应用

- 1)功
- (2)液体的侧

(3)引力

- (4)课后习
- 5.各节参考答案

例5.4:一根长为/的均匀细杆,质量为M, 在其中垂线上相距 细杆为a处有一质量为m的质点,试求细杆对质点的万有引 力.

- (3)引力

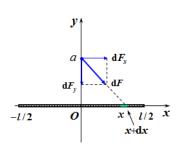
例5.4:一根长为1的均匀细杆,质量为M, 在其中垂线上相距 细杆为a处有一质量为m的质点,试求细杆对质点的万有引 力.

解:如下左图,

- (3)引力

例5.4:一根长为1的均匀细杆,质量为M,在其中垂线上相距细杆为a处有一质量为m的质点,试求细杆对质点的万有引力.

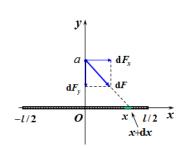
解:如下左图,



- 1 平面图形的面积
- (1) 直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
 - (1)一般截面求体积
 - (3)课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式
 - (3)福片日期
 - 4.旋转曲面的面积
 - 1) 微元法
 - 2) 疫特曲面的
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理上的应用
- (1)动
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- 6 久节糸老父宏

例5.4:一根长为1的均匀细杆,质量为M,在其中垂线上相距细杆为a处有一质量为m的质点,试求细杆对质点的万有引力.

解:如下左图,



任取 $[x, x + dx] \subset [-1/2, 1/2]$, 则其质量微元为

$$dM = \frac{M}{I}dx,$$

它对质点m的引力为

$$dF = \frac{kmdM}{r^2}$$
$$= \frac{km}{a^2 + x^2} \cdot \frac{M}{I} dx$$

- 1 平面图形的面积
- (1)直角坐标方程表示的-面图形的面积
- 面图形的面积 (2)参数方程表示的=
- (3)极坐标表示的平面图 的面积
- (4)课后习题
- 2.由半行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积 (2)旋转体的体积 (2)调应口服
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式
- (3)课后习题
- 4. 旋转曲面的面积
 - L)微尤法 2)柒标由面的面面
- (2) 旋转曲面的面布
- 5.定积分在物理上
- 的应用
- (1)动
- (2)液体的侧压; (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

由于细杆各点对质点m的引力方向不同,不能直接对dF积分,为此将dF分解到x轴和y轴两个方向上,得

$$dF_x = dF\sin\theta, dF_y = dF\cos\theta,$$

故

$$F_{y} = \int_{-I/2}^{I/2} dF_{y}$$

$$= 2 \int_{0}^{I/2} \frac{kmMa}{I} (a^{2} + x^{2})^{-3/2} dx$$

$$= \frac{2kmM}{a\sqrt{4a^{2} + I^{2}}},$$

$$F_{x} = \int_{-I/2}^{I/2} dF_{x}$$

$$= 0.$$

- 1 平面图形的面和
- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- 形的面积 (3)极坐标表示的平面图形
- 的面积 (A):理心口服
- 2.由平行截面面积
 - (1)一般截面求体积
 - (3)课后习题
 - 3.平面曲线的弧长
 - (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4. 00年 四 四 印 四 7.
 - L)版儿伝 2)旋转曲面的面形
- (3)课后习题
- 5.定积分在物理
- (1)动
- (2)液体的侧压力
- (3)引力 (4)课后习题
- 6.各节参考答案

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面 形的面积
- (3)极坐标表示的平面图: 的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积 求体积

- (1)一般截面求体积
- (2) 旋转体的体i
- (3) 採后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

旋转曲面的面积

- (後元法
- (2) 收转回向的
- (3)课后习题

5.定积分在物理上 的应用

- 1)功
- (2)液体的侧压力

(4)课后习题

- (1) 一圆锥形水池,池口直径30米,深10米,池中盛满了水,试 求将全部池水抽出池外需作的功.
- (2) 一水平横放的半径为R的圆桶,内盛满密度为ρ的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.
- (3) 设星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t (a > 0)$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点距离的立方,在原点处有一单位质点,求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

平面图形的面和

- (1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积 (2)参数方程表示的平面图
- 形的面积 (3)极坐标表示的平面图形 的面积
- (4)课后习题
- 2.由平行截面面积 求体积
- (1)一般截面求体积(2)旋转体的体积(3)運后习题
- 3.平面曲线的弧长
- (1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长
- (3)课后习题
- 4.旋转曲面的面积
 - L) 微元法 2) ※ 44 -4 - 44 -
- (2) 疫转曲面的面积 (3) 课后习题
- 5.定积分在物理上
- 1) 应用 (1) 功
- (2)液体的侧压力
- (4)课后习题
- 6.各节参考答案

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题

6.各节参考答案

1.平面图形的面积

(1)直角坐标方程表示的平 面图形的面积

(2)参数方程表示的平面E 形的面积

(3)极坐标表示的平面图的面积

(4)课后习录

2.由平行截面面积 求体积

- (1)一般截面求体积
- (3)课后习题
- (3)珠石刁鸡

3.平面曲线的弧长

(1)光滑曲线的弧长公式 (2)直角坐标和极坐标表示 的光滑曲线弧长

(3)课后习题

旋转曲面的面积

- (後元法
- (2) 疫转曲面的
- (3)课后习题

5.定积分在物理上

(1)功

(2)液体的

(4)课后习题

平面图形的面积 $(2)\frac{253}{12}$ (3) $ab\pi$ (4) πr^2 (5) a^2

(2)4n

 $(2)\rho g\pi R^3$

 $(1)\frac{2}{3}R^3 \tan \alpha$ $(2)\frac{5}{6}\pi$ $(3)\frac{4}{3}\pi ab^2$ $(4)\frac{448}{15}\pi$

由平行截面面积求体积

平面曲线的弧长

旋转曲面的面积

 $(1)1875 \rho g \pi$

定积分在物理上的应用

 $(3)8a \qquad (4)\frac{3}{2}\pi a$

 $(2)\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$ $(3)\frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$ $(4)\frac{12}{5}\pi a^2$

 $(3)\frac{3}{5}\sqrt{2}ka^2$

 $(6)\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$