第二章 数列极限

陈颖

北京电子科技学院基础部

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习
- 2.收敛数列的性质
- (1)基本性/ (2)四别话
- (3)子列的致散性
- (4)课后习:
- 3.数列极限存在的
- 条件
- (2)致密性定理
- (2)致密性定理(3)柯西收敛准則
- (1)*****

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

(1)数列

(3)无穷小和无穷大数

(4)课后习

2.收敛数列的

(1)基本性 (2)四則运

(3)子列的致散性

3.数列极限存在的

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准》

(4)课后习题

(1)2000

(1)数列

- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2) 好密性定理
- (3) 柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

(1)数列

(2)数列极剂

(3)无穷小和无穷大数

2 16 As \$1 To 1 46 Jul 15

- (1)基本性
- (2)四则运算
- (3)子列的效散性(4)课后习题
- 3.数列极限存在的
 - (1)单调有界定理(2)対密性定理
 - (3)村西收敛准
 - (4)课后习题
 - 4.各节参考答案

若函数f的定义域为全体正整数集合N+,则称

$$f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$
 $\not \leq f(n), n \in \mathbb{N}^+$

为数列.因为 N^+ 的元素可以按由小到大的顺序排列,故数列f(n)也可写成

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

或简单的记为{an},其中{an}称为该数列的通项.

1 粉列超限的概念

(1)数列 (2)数列标题

(3)无穷小和无穷大数列

2.收敛数列的性质

(1)基本性质(2)四則近算

(4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

条件

2)致密性定理

2)双密性足理
3)柯西收敛准则

(3)村西收敛准則(4)课后习题

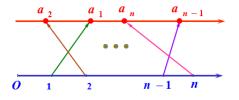
若函数f的定义域为全体正整数集合N+,则称

$$f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$
 $\not \leq f(n), n \in \mathbb{N}^+$

为数列.因为 N^+ 的元素可以按由小到大的顺序排列,故数列f(n)也可写成

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$

或简单的记为 $\{a_n\}$,其中 $\{a_n\}$ 称为该数列的通项.



1 粉列极限的概念

(1)数列

(2)数列极限
(3)主要小和主要上料剂

(4)课后习题

2. 収敛效列的性质 /1** + u #

(1)基本性质(2)四則运算

(4)採店习题

3. 数列极限存在的 条件

(1) 单调有界定理

(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则

(4)课后习题

- (2)数列极限

- (2) 数列极限

- (2)数列极限

设 $\{a_n\}$ 是一个数列,a是一个有限数,若对任意给定的正数 ϵ ,总 存在一个正整数N.使得当n > N时.总有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于a,或 $\{a_n\}$ 以a为极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{\'e} \quad a_n \to a(n\to\infty).$$

(2) 数列极限

设 $\{a_n\}$ 是一个数列,a是一个有限数,若对任意给定的正数 ϵ ,总存在一个正整数N,使得当n>N时,总有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于a,或 $\{a_n\}$ 以a为极限,记作

1 数列极限的概念

(1) 数列 (2) 数列极限

(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质 (2)四則运算
- (4)课后习题

3.数列极限存在的

- 条件 (1) ※河玄男公司
 - (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

设 $\{a_n\}$ 是一个数列,a是一个有限数,若对任意给定的正数 ϵ ,总存在一个正整数N,使得当n>N时,总有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于a,或 $\{a_n\}$ 以a为极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \;\; \c{im} \;\; a_n o a(n o\infty).$$

若数列{an}没有极限,则称它是发散的.

1 粉列材限的概念

(1) 数列 (2) 数列极限

(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后习题

(1)基本性质(2)四則运算

(4)课后习题

.数列极限存在的

条件

(2)致密性定理

(3)柯西收敛准则(4)课后习题

例1.1:证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

1 数列权限的概念

(1)数

(2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列 (4)课后习题

2.收敛数列的

(1)基本性/ (2)四則活り

(3)子列的效散

3.数列极限存在的

条件

(1)单调有界定理(2)致密性定理

(3)村西收敛/

(4)课后习题

力世会业然实

例1.1:证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$
.

证: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使得 $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立,只需

$$2^n>\frac{1}{\varepsilon},$$

也就是

$$n \lg 2 > - \lg \varepsilon$$
,

即

$$n > -\frac{\lg \varepsilon}{\lg 2}$$
.

取
$$N = \left[-\frac{\lg \varepsilon}{\lg 2} \right]$$
,则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

1 粉列树限的树余

(1) 数列 (2) 数列极限

(3)无穷小和无穷大数列

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四则运算 (3)不列的分数性

3.数列极限存在的

条件 (1)单调有界定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

例1.2:证明 $\lim_{n\to\infty}q^n=0 \ (0<|q|<1)$.

1 粉列材限的概念

(1)4

(2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列

2 16 AL \$4 TO 46 DE F

- (1)基本性质 (2)四别话能
- (3)子列的效散性
- 3.数列极限存在的
- 条件 (1) 前湖 女 男 企 明
 - (2)致密性定理
- (4)课后习题
- 1 力 世 4 基 4 4 4

例1.2:证明
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ (0<|q|<1).$$

证:对任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使得 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立,只需

$$|q|^n < \varepsilon$$
,

也就是

$$n \lg |q| < \lg \varepsilon$$
,

即

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}.$$

取
$$N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right]$$
, 则知

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

1 粉列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列(4)课后习题

2 收敛粉列的

(1)基本性质 (2)四則运算

(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理(2)致密性定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则 (4)课后习题

例1.3:证明 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (0 < a)$.

1 数列极限的概念

(1) 数列 (2) 数列极限

(3)无穷小和无穷大数列(4)课后习题

2.收敛数列的

(1)基本性质(2)四則运算(3)子列的效散性

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理(2)致密性定理(3)柯西收敛准則

1 久节糸老祭安

例1.3:证明
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (0 < a)$$
.

证:

(1)
$$a = 1$$
, 命题显然成立.

1 粉列极限的概念

(1)数列

(2)数列极限 (3)无穷小和无穷大数

(4)课后习

1人3又受义为自己生 (1)基本性质

(1)基本性质 (2)四則近算

(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理(2)致密性定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

1 久节糸老祭安

例1.3:证明
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (0 < a)$$
.

证:

(1)
$$a = 1$$
, 命题显然成立.

(2) a>1,对任意给定的 $\varepsilon>0$, 要使得 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立,只需

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \frac{a - 1}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \dots + 1} < \frac{a - 1}{n} < \varepsilon,$$

即

$$n>\frac{a-1}{\varepsilon}$$
.

取
$$N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$$
,则知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

1.数列极限的概念

(1) 数列 (2) 数列极限

(3)无穷小和无穷大数列 (4)课后习题

2.收敛数列的性

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的效散性

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理 (2)致密性定理

1 久节糸老祭宏

(3) 0 < a < 1,令 $a = t^{-1}$,则t > 1.对任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使得 $|\sqrt[q]{a} - 1| < \varepsilon$ 成立,只需

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \frac{1 - a}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \dots + 1}$$

$$= \frac{1 - t^{-1}}{t^{-\frac{n-1}{n}} + t^{-\frac{n-2}{n}} + \dots + 1}$$

$$= \frac{t - 1}{t^{\frac{1}{n}} + t^{\frac{2}{n}} + \dots + t}$$

$$< \frac{t - 1}{n} = \frac{1 - a}{na} < \varepsilon,$$

即

$$n>\frac{1-a}{\varepsilon a}$$
.

取
$$N = \left[\frac{1-a}{\varepsilon a}\right]$$
, 则知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

1 粉列权限的概念

(1)数列 (2)数列极限

收敛数列的性。
 (1)基本性质

(2)四则运弃 (3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)平詢有芥定理 (2)致密性定理 (3)柯西收敛准則

例1.4:证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-n-7} = \frac{1}{3}$.

1 粉列权限的概念

(1)数

(2)数列极限

(3)尤另小和尤另大数3 (4)课后习题

2.收敛数列的性。

(1)基本性质 (2)四則运算

(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

(2)致密性定理(3)柯西斯發流

(4)课后习题

力世会基础办

例1.4:证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-n-7} = \frac{1}{3}$.

证:对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使得 $\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ 成立,只

$$\left| \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{n + 7}{3(3n^2 - n - 7)} \right|$$

$$\leq \left| \frac{n + 7}{3n^2 - n - 7} \right| = \left| \frac{n + 7}{2n^2 + n^2 - n - 7} \right|$$

$$\frac{n > 7}{\leq} \frac{n + n}{2n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

 $\mathbb{P} n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \max\{7, [\frac{1}{\varepsilon}]\}$,则知

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}.$$

1 料列却限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(4)课后习题

2.收敛数列的性

(1)基本性原 (2)四則运算 (3)子列的致散性

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理 (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则 (4)理戶以题

例1.5:证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

1 粉列权限的概念

(1)数列

(2)数列极限

(4)课后习题

2.收敛数列的性

(1)基本性 (2)四則运

(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1)单调有界定用(2)社审社全理

(2)致密性定理(3)柯西收敛准律

(4)课后习题

例1.5:证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$
.

证:

(1)
$$|a| < 1$$
,对任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使 $|\frac{a^n}{n!} - 0| < \varepsilon$ 成立,只需

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

$$\mathbb{P}_{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$
,取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则知命题成立.

1 粉列树限的梅余

(1)数列

(2)数列极限 (3)无穷小和无穷大龄》

(4)课后习题

2.收敛数列的性/

(1) 基本性质 (2) 四則近算 (3) 子列的效散性

3.数列极限存在的

3.数列极限存在的 条件

(1) 单调有界定理(2) 效密性定理(3) 柯西收敛准则

1 久节糸老公安

例1.5:证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$
.

证:

(1)
$$|a| < 1$$
,对任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使 $|\frac{a^n}{n!} - 0| < \varepsilon$ 成立,只需

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

 $\mathbb{P}_n > \frac{1}{\varepsilon}$,取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$,则知命题成立.

(2)
$$|a| \ge 1$$
,对任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使 $|\frac{a^n}{n!} - 0| < \varepsilon$ 成立,只需

$$|\frac{a^n}{n!} - 0| = \frac{|a| \times |a| \times \dots \times |a|}{n \times \dots \times ([|a|] + 1) \times [|a|] \times \dots \times 1}$$

$$\leq \frac{|a|^{[|a|]+1}}{n} < \varepsilon,$$

即
$$n > \frac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon}$$
,取 $N = \left[\frac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon}\right]$,则知命题成立.

1 粉列极限的概念

(1) 数列 (2) 数列极限

(3)无穷小和无穷大数列(4)课后习题

) 好给粉粉到的水

- (1)基本性质 (2)四則近算 (3)不到的份數級
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的 各件
 - 1)单调有界定理
 2)致密性定理
- (4)课后习题

▶ 数列极限的几何意义

- (2)数列极限

▶ 数列极限的几何意义

任给 $\varepsilon > 0$,若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个,则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于a.

- 1 粉列超眼的概念
- (1)数列
- (2)数列极限
- (4)课后习题
- 2 收分粉列的
 - (1)基本性质
 (2)四則运算
 - (2)四則运算 (3)子列的致散性
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
- (2) 效密性定理
- (3)柯西收敛准则
- 4. 各节参考答案

▶ 数列极限的几何意义

任给 $\varepsilon > 0$,若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个,则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于a.

推论:设 $\{a_n\}$ 为给定的数列, $\{b_n\}$ 为对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列,那么 $\{b_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 同时收敛或发散,且在收敛时两者的极限相等.

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列 (4)课后习题

2 收敛粉列的性

(1)基本性质 (2)四則近算 (3)子列的效散性

2 料列根眼左左的

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理(2)致密性定理(3)柯西收敛准则

(4)球石刀思

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数列
- (1)基本性质(2)四則运算
- (3)子列的效素 (4)谬丘贝斯
- - (1)平调有界定理(2)致密性定理
 - (3) 村西收敛准
 - (4)课后习题
 - 4.各节参考答案

▶ 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

1 料列却即码据会

(1)数列

(3)无穷小和无穷大数列

2.收敛数列的性。
 (1)基本性质

(3)子列的致散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的

1)单调有界定理
 2)致密性定理
 3)柯西收敛准則

力士会並然本

▶ 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a_n 的充要条件是 $\{a_n - a\}$ 为无穷小数列.

- 1 粉列极限的概念
- (1)数列
- (2)数列极限(3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性质 (1)基本性质
- (2)四則运算(3)子列的致散性
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的
 - (1)单调有界定理
 - (2)致密性定理 (3)如而計學分別
- (4)课后习题
- 4.各节参考答案

- ▶ 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a_n 的充要条件是 $\{a_n a\}$ 为无穷小数列.
- ▶ 若数列 $\{a_n\}$ 满足:对任意正数M > 0,总存在正整数N,使得当n > N时有

$$|a_n| > M$$
,

则称数列{an}发散于无穷大,并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty, \quad \mathfrak{A} \quad a_n\to\infty.$$

1.数列极限的概念

(1)数列

(3)无穷小和无穷大数列

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)不到的体验。

(4)课后习题

3.数列极限存在的

4) 单调有界定理
 2) 致密性定理
 3) 柯西收敛准则

1 久节糸老公安

- Fahn = 0,则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $\{a_n\}$ 的充要条件是 $\{a_n-a\}$ 为无穷小数列.
- ▶ 若数列 $\{a_n\}$ 满足:对任意正数M > 0,总存在正整数N,使得当n > N时有

$$|a_n| > M$$
,

则称数列{an}发散于无穷大,并记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{\'a} \quad a_n \to \infty.$$

▶ 若数列 $\{a_n\}$ 满足:对任意正数M > 0,总存在正整数N,使得当n > N时有

$$a_n > M \ (\check{\mathfrak{A}} a_n < -M),$$

则称数列{an}发散于正(或负)无穷大,并记作

$$\lim_{n o \infty} a_n = +\infty \ (oldsymbol{\mathfrak{I}} - \infty), \ \ oldsymbol{\mathfrak{I}} \ \ a_n o +\infty \ (oldsymbol{\mathfrak{I}} - \infty).$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列标题

(3)无穷小和无穷大数列

) 收敛粉列的

(1)基本性质 (2)四则运算 (3)子列的效散的

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理 (2)致密性定理

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列

(4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2) 致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (3) チャル和チャナ料:
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四則运算 (3)子列的效散性
- (4)课后习
- 3.数列极限存在的
- 条件
- (2)致密性定理
- (3)利西联致事 (4)课后习题
- (4)课后习题
- 4.各节参考答案

(1) 按
$$\varepsilon - N$$
定义证明 $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

(2) 按
$$\varepsilon - N$$
定义证明 $\lim_{n \to \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1.$

(3) 按
$$\varepsilon - N$$
定义证明 $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1.$

(4) 按
$$\varepsilon - N$$
定义证明 $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n} - 2}{n + \sqrt{n} + 1} = 0$.

(5) 接
$$\varepsilon - N$$
定义证明 $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + 5n + 1} - \sqrt{n^2 - n}) = 3.$

(6) 按
$$\varepsilon - N$$
定义证明 $\lim_{n \to \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0.$

(1) 致列 (2) 数列极限 (3) 五宝小和五宝十龄5

(3)无穷小和无穷大数列 (4)课后习题

(1)基本性质

(2)四則近算 (3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的

(1) 单调有界定理 (2) 致密性定理

(3)村西收敛准则 (4)课后习题

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2) 致密性定理
- (3) 柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2) x + 1.5. x + 1
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性
- (2)四则运
- (4)课后习
- 3.数列极限存在的
- 条件
 - (1)平朔有芥定月
 (2)致密性定理
 - (3) 柯西收敛冶
 - (4)课后习题
 - 1 夕节糸去父子

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质

(1)基本性质

唯一性:若{an}收敛,则它只有一个极限.

1 粉列材限的概念

(1)数列 (2)数列标

(3)无穷小和无穷大数3

(4)课后

2.收敛数列的性

(1)基本性质 (2)四則运算

(3)子列的致散性(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理(2)致密性定理(3)柯西收敛准則

力士会並然本

唯一性:若{an}收敛,则它只有一个极限.

证:设a,b为{ a_n }的极限,则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$, $\exists n > N_1$ 时有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

 $\exists N_2, \exists n > N_2$ 时有

$$|a_n-b|<\varepsilon,$$

所以当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$|a-b| \le |a_n-a| + |a_n-b| < 2\varepsilon,$$

因为 ε 是任意的,所以a = b.

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- 0 1/4 AL \$1 TO 1 46 DE TH

(1)基本性质

- (2)四則运算 (3)子列的效散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- 4.各节参考答案

有界性:若 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 为有界数列,即存在M>0,使得 $|a_n|\leq M, n=1,2,\cdots$.

- 1 粉列极限的概念
- (1)数3
- (2) 数列极限
 - (3)无穷小和无穷大数列
- 2 好分粉粉到的

(1)基本性质

- (2)四則近算
- (3)子列的欽
- 2 11 11 12 12 + + 44
- 3.数列极限存在的
 - (1)单调有界定理 (2)社审社全理
 - (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题
- 4.各节参考答案

有界性:若 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 为有界数列,即存在M>0,使得 $|a_n|\leq M, n=1,2,\cdots$.

证:设
$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$
,对于正数 $\varepsilon=1,\exists N,\ \exists n>N$ 时有
$$|a_n-a|<1,\ \mathbb{P} a-1< a_n< a+1,$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|, |a-1|, |a+1|\}$,则对一切正整数n,都有

$$|a_n| \leq M$$
.

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(4)课后习题

(1)基本性质

(3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理 (2)致密性定理 (3)如恶性定理

(3) 村西收敛准则 (4) 课后习题

1 各节参考签案

有界性:若{an}收敛,则{an}为有界数列,即存在M > 0,使 $|a_n| < M, n = 1, 2, \cdots$.

证:设
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
,对于正数 $\varepsilon=1,\exists N,\ \exists n>N$ 时有
$$|a_n-a|<1,\ \mathbb{P} a-1< a_n< a+1,$$

 $\diamondsuit M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|, |a-1|, |a+1|\}$, 则对一切正 整数n.都有

 $|a_n| < M$.

注:数列{(-1)n}是有界的,但却不收敛.这就说明有界只是数 列收敛的必要条件,而不是充分条件,

(1)基本性质

保号性:设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,对于任意两个实数b, c, b < a < c,则存在N, $\exists n > N$ 时, $b < a_n < c$.

- 1.数列极限的概念
- (1)数列 (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性。
- (1)基本性质 (2)四则运算 (3)又到64.8.8.6
- (4)课后习题 3.数列极限存在的
- 3.数列极限存在的 条件
 - (1)平明引介足理
 (2)致密性定理
 (3)柯西收敛准則
- . h 2+ 6 30 m n-

保号性:设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,对于任意两个实数b, c, b < a < c,则存在N, $\exists n > N$ 时, $b < a_n < c$.

证:取
$$\varepsilon = \min\{a-b,c-a\}>0,\exists N,$$
当 $n>N$ 时,
$$b\leq a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \leq c,$$

故

$$b < a_n < c$$
.

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)粉列极限

(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后习题

) 收敛粉列的性力

(1)基本性质 (2)四則运算

(3)子列的效散性

3.数列极限存在的

条件

(1)单调有界定理 (2)致密性定理

(3)柯西收敛准则

1 久节糸老公安

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
- (4)课后习题

2 16 16 24 20 146 14 15

(1)基本性质 (2)四别运算

- (2)四则运并
- (4)课后习题

3.数列极限存在的

- (1)单调有界定理
- (2) 效密性定理 (2) 材本品品品品
- (3) 柯西收敛准则
- 4.各节参考答案

证:令 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.反设b < a,取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$,由保号性知,存在 $N > N_0$,当n > N时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故 $a_n > b_n$,矛盾,命题得证.

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列 (4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四则运算 (3)子列的效散性

3.数列极限存在的

条件 (1) 美丽女男会母

(2)致密性定理(3)柯西收敛准则

(4)课后习题

证:令 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. 反设b < a, 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, 由保号性知, 存在 $N > N_0$, 当n > N时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故 $a_n > b_n$,矛盾,命题得证.

注:若条件 $a_n \leq b_n$ 改为 $a_n < b_n$,也只能得到 $\lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} b_n$.

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列极限 (3)于实小和于实土部页

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的效散性 (4)理戶口票

3.数列极限存在的

条件
(1) 单调有界定理
(2) 致密性定理
(3) 柯西收敛准则

证:令 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. 反设b < a, 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, 由保号性知,存在 $N > N_0$, 当n > N时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故 $a_n > b_n$,矛盾,命题得证.

注:若条件 $a_n \leq b_n$ 改为 $a_n < b_n$,也只能得到 $\lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} b_n$. 例如,虽然 $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$,但 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$. 1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列极限 (3)平宏小和平宏十数列
- (2)数列极限(3)无穷小和无穷大数列(4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四则运算 (3)子列的效散性 (4)四三日等

3.数列极限存在的 冬件

条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)初西收敛准则

迫敛性:设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均以a为极限,数列 $\{c_n\}$ 满足存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时,有 $a_n < c_n < b_n$,则 $\{c_n\}$ 收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}c_n=a.$$

1.数列极限的概念

(1)

(2)数列极

(3) 九穷小和九穷大数列
(4) 谬白习题

0 1/4 AL 3/4 Til 4/4 Jul 1

(1)基本性质

(2)四则运算

(3)子列的效常

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

2)致密性定理 3)柯西收敛准则

(3)利西取致准則(4)课后习题

迫敛性:设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均以a为极限,数列 $\{c_n\}$ 满足存在正整数 N_0 ,当 $n>N_0$ 时,有 $a_n\leq c_n\leq b_n$,则 $\{c_n\}$ 收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}c_n=a.$$

证:由题意,对任意正数 ε ,分别存在正整数 N_1 , N_2 ,使得当 $n > N_1$ 时,

$$a-\varepsilon < a_n$$

而当 $n > N_2$ 时,

$$b_n < a + \varepsilon$$
.

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}, \exists n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$$
,

所以有

$$\lim_{n\to\infty}c_n=a.$$

L.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
 (3)无穷小和无穷大点
- (4)採后习题

(1)基本性质

- (1)基本性质 (2)四則运算
- (3)子列的效散性
- - 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)村西收敛准則(4)课后习题
- 4.合门分方合采

例2.1:求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

(1)基本性质

例2.1:求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

解:设
$$b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \ge 0$$
,则有

$$n=(1+b_n)^n\geq \frac{n(n-1)}{2}b_n^2 \ (n\geq 2),$$

故

$$1 \le \sqrt[n]{n} = 1 + b_n \le 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} (1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}) = 1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质 (2)四則运算
- (3)子列的效散性
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
 (2)社会社会理
- (2)双齿柱足柱 (3)柯西收敛准则 (4)课后习题
- 4.各下参考答案

例2.2:设 $a_n \ge 0$, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$,求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

1 粉列极限的概念

(1)数列(2)数列极限(3)系次小和系宏十数列

2 此效数列码料 1

(1)基本性质 (2)四則近算 (3)子列的外套統

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理 (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

力计化批燃化

例2.2:设
$$a_n \ge 0$$
, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$,求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知 $a \ge 0$.对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在正整数N,当n > N时, $|a_n - a| < \varepsilon$,于是

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

(1)基本性质

- (2)四則近非
- (2) 四则远升 (3) 子列的效散
- (4)珠石刁鸡
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
 - (2)致密性定理
- (3) 村西收敛准则
- 4 各节参考签案

例2.2:设
$$a_n \geq 0$$
, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$,求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知 $a \ge 0$.对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在正整数N,当n > N时, $|a_n - a| < \varepsilon$,于是

$$|\sqrt{a_n}-0|=\sqrt{a_n}<\sqrt{\varepsilon}.$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列却

(2)数列极限 (3)无穷小和无穷士龄列

(4)课后习题

(1)基本性质

(2)四則运算 (3)子列的致散性

3 粉列极限存在的

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理(2)致密性定理(3)柯西赦给准则

a 为 ++ 在 ** ** **

例2.2:设
$$a_n \geq 0$$
, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$,求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知a>0.对于任意的arepsilon>0.存在正整 数N,当n > N时, $|a_n - a| < \varepsilon$,于是

$$|\sqrt{a_n}-0|=\sqrt{a_n}<\sqrt{\varepsilon}.$$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

(1)基本性盾

例2.2:设
$$a_n \geq 0$$
, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$,求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知 $a \ge 0$.对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在正整数N,当n > N时, $|a_n - a| < \varepsilon$,于是

$$|\sqrt{a_n}-0|=\sqrt{a_n}<\sqrt{\varepsilon}.$$

(ii) a > 0时,有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}.$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极

(2)数列极限(3)无穷小和无穷大数列

(1)基本性质 (2)四則运算

(3)子列的致散性(4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

例2.3:设
$$a_n \geq 0$$
, $\lim_{n \to \infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

1.数列极限的概念

- (1)数列(2)数列极限(3)无穷小和无穷大龄列
- (4)课后习题

(1)基本性质 (2)四則运算

- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的
 - 1)单调有界定理
 2)致密性定理
 3)柯西收敛准則
- 4.各节参考答案

例2.3:设 $a_n \ge 0$, $\lim_{n \to \infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证:因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$,根据数列极限的保号性,存在N,当n>N时,有 $\frac{a}{2}< a_n<\frac{3a}{2}$,因此有

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1,$$

由迫敛性知命题成立.

1.数列极限的概念

(2)数列极限 (2)数列极限 (3)五字小和五字十卦;

(4)课后习题

2.收敛数列的性质 (1)基本性质

(2)四則运算 (3)子列的致散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的

条件

(2)致密性定理 (3)柯西斯舒准則

(4)课后习题

4.合门今方合采

例2.4:设 a_1, a_2, \cdots, a_m 为m个正数,证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

1 粉列极限的概念

- (1) 数列 (2) 数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列(4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质 (2)四则运算
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的
 - (1)单调有界定理
 (2)致密性定理
 (3)标码折台准则
- 1 夕节系老父安

例2.4:设a₁, a₂, ···, a_m为m个正数,证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

证:设
$$a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$$
,那么

$$a \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m}a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}a=\lim_{n\to\infty}a=a,$$

根据迫敛性知命题成立.

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)参列部
- (2) 5 00 1 5 5 00 1 00 0
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算

- (3)子列的负责
- 10 10 1 10 1 1 1 1 1

· 件

- (1)並初右見全理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- 4.各节参考答案

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2) 粉列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- 1)基本性质
- (2)四则运算
- (3) 子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2) 致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

(1)数列

(3)无穷小和无穷大数

0.16 10 40 70 46 10 45

2.收敛数列的性质

(2)四則近算 (3)子列的公費

(3)子列的效散性(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1) 单调有界定理 (2) 致密性定理 (3) 柯西收敛准则

- 1 粉列树限的榕今
- (1)数差
- (2)数列极限
- (3)元カ小和元カ大致ク (4)课后习题

2 收敛数别的胜质

- (1)基本性质(2)四則运算
- (2)四則运算 (3)子列的效散性
- (4)採后习题
- 3.数列极限存在的
 - (1)单调有界定理
 (2)科索科全理
 - (2)致密性定理
 - (4)课后习题
- 4.各节参考答案

若当 $n \to \infty$, $a_n \to a$, $b_n \to b$,则有

1 粉列材限的概念

- (1)#
- (2) 数列极限
- (4)课后习题
- 2 好分粉列的烘后
- 2. 权致效列的性
- (2)四則运算
- (3)子列的致散性
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题
- 4.各节参考答案

若当 $n \to \infty$, $a_n \to a$, $b_n \to b$,则有

 $ightharpoonup a_n \pm b_n
ightarrow a \pm b;$

1 粉列极限的概念

(1)#

(2) 数列极限

(4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算

(2)四則运算

3.数列极限存在的

条件

(2)致密性定理 (3)如而非体治的

(3)村西收敛准则

1 夕 芯 会 本 祭 安

若当 $n \to \infty$, $a_n \to a$, $b_n \to b$,则有

- $ightharpoonup a_n \pm b_n
 ightarrow a \pm b;$
- $ightharpoonup a_n b_n o ab;$

1 粉列极限的概念

(1)数:

(2) 数列极限

(4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算

(2)回則运昇 (3)子列的效散性

3.数列极限存在的

(2)效害性定理

(3)柯西收敛准则 (4)课后习题

若当 $n \to \infty$, $a_n \to a$, $b_n \to b$,则有

$$ightharpoonup a_n \pm b_n
ightarrow a \pm b;$$

$$ightharpoonup a_n b_n
ightarrow ab;$$

▶
$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} (\stackrel{.}{\Rightarrow} b \neq 0).$$

1.数列极限的概念

(1)数列

(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质

(2)四則运算 (3)子列的效散性

3 数列极限存在的

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

2)致密性定理

(3)村西收敛准则

4 各节参考签案

若当 $n \to \infty$, $a_n \to a$, $b_n \to b$,则有

$$ightharpoonup a_n \pm b_n
ightarrow a \pm b;$$

$$ightharpoonup a_n b_n
ightarrow ab;$$

▶
$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} (\, \, \exists \, b \neq 0).$$

例2.5:计算
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$
.

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列标

(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后习题

(1)基本性盾

(2)四則运算 (3)子列的效散性

(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

(2)致密性定理
(3)柯西收敛准則

(4)课后习

若当 $n \to \infty$, $a_n \to a$, $b_n \to b$,则有

$$ightharpoonup a_n \pm b_n
ightarrow a \pm b;$$

$$ightharpoonup a_n b_n o ab;$$

▶
$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} (\, \, \exists \, b \neq 0).$$

例2.5:计算
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$
.

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0.$$

1 粉列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(4) 珠石 习现

2. 收致效列的任 (1) 显太糾廣

(2)四則远算 (3)子列的效散性

(4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理(2)致密性定理

(3) 柯西收敛准则

若当 $n \to \infty$, $a_n \to a$, $b_n \to b$,则有

$$ightharpoonup a_n \pm b_n
ightarrow a \pm b;$$

$$ightharpoonup a_n b_n
ightarrow ab;$$

▶
$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} (\, \exists \, b \neq 0).$$

例2.5:计算
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$
.

解: 这是错误的做法!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0.$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质(2)四則运算

(3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

(2)致密性定理(3)柯西收敛准則

1 夕节系老父安

若当n → ∞, a_n → a, b_n → b,则有

$$ightharpoonup a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b;$$

$$ightharpoonup$$
 $a_nb_n o ab$;

▶
$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} (\, \stackrel{\checkmark}{=} \, b \neq 0).$$

例2.5:计算 $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解: 正确的做法应该是这样,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

1 数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算

(4)课后习题

3.数列极限存在的

(1) 单调有界定理 (2) 致密性定理 (3) 树西斯分准则

(4)休后刁观

4.各下参考答案

例2.6:求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

其中 $a_m b_k \neq 0$.

1 粉列极限的概念

- (1)数列 (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- 2 15 45 45 70 66 1
- (1)基本性质 (2)四則近算
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理(3)柯西收敛准則
- (1)******

例2.6:求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

其中 $a_m b_k \neq 0$.

解:

(i) m > k,

原极限 =
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^{m-k} + \dots + a_k + a_{k-1}/n + \dots + a_0/n^k}{b_k + b_{k-1}/n + \dots + b_0/n^k}$$
 = ∞ .

1.数列极限的概念

(1) 叙列 (2) 数列极限 (3) 无穷小和无穷大数歹

) 收分粉粉列的料

(1)基本性质 (2)四則延算 (3)子列的效散性 (4)選片及斯

3.数列极限存在的

条件 (1)单调有界定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

(ii)
$$m = k$$
,

原极限 =
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m + a_{m-1}/n + \dots + a_0/n^k}{b_k + b_{k-1}/n + \dots + b_0/n^k}$$
 =
$$\frac{a_m}{b_k}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0} = \infty,$$

故原极限为0.

1.数列极限的概念

- (1)数列(2)数列极限(3)无穷小和无穷大数列
- 2 收敛数列的性质
- (1)基本性质 (2)四則近算 (3)子列的效散性 (4)课后以前
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
- (2) 效密性定理 (3) 柯西收敛准则 (4) 网络公司
- 1.各节参考答案

例2.7:求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a\neq -1)$.

1.数列极限的概念

(2)数列极限

(4)课后习题

2.收敛数列的性

(1)基本性质 (2)四則选算 (3)子列的致散性

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理(2)致密性定理(3)柯西战景准則

例2.7:求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a\neq -1)$.

解:

1.数列极限的概念

(1)数列

(2) 収別収収 (2) エル・エル・ムル

(4)课月

2.收敛数列的性质

(2)四則运算

(2) 切別运升 (3) 子列的效散性

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理(2)致密性定理

(4)课后习题

4 各节参考签案

例2.7:求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a\neq -1)$.

解:

(i) |a| < 1, $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$, 所以原极限为0.

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性质
- (1)基本性质 (2)四則运算
- (2)四則运算 (3)子列的致散性
- 3.数列极限存在的
- 条件 (1) 单调有界定理
- (2) 致密性定理 (3) 村西收敛准则
- 1 久节糸老公安

例2.7:求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a \neq -1)$.

解:

- (i) |a| < 1, $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$, 所以原极限为0.
- (ii) a = 1,原极限为 $\frac{1}{2}$.

- (2)四则运算

例2.7:求极限
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} (a \neq -1)$$
.

解:

(i)
$$|a| < 1$$
, $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$, 所以原极限为0.

(ii)
$$a = 1$$
, 原极限为 $\frac{1}{2}$.

(iii)
$$|a| > 1$$
, $\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/a^n+1}=1.$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(3)尤另小和尤另大数列 (4)课后习题

2.收敛数列的性质

(2)四則近算 (3)子列的致散性

3.数列极限存在的

条件 (1)单调有界定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

2.收敛数列的性质

- (3)子列的敛散性

- (3)子列的致散性

设
$$\{a_n\}$$
为数列, $\{n_k\}$ 为 N^+ 的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的**子列**,简记为 $\{a_{n_k}\}$

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列初弱
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质 (2)四則运算
- (3)子列的致散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的

- 条件 (1)单调有界定理
 - 2)致密性定理
 - (3)村西收敛准则 (4)四二口四
- 1 久节糸老祭安

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为 N^+ 的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子列,简记为 $\{a_{n_k}\}$

注:总有 $n_k \geq k$.

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性
- (1)基本性质 (2)四則运算
- (3)子列的致散性
 (4)课后习题
- 3.数列极限存在的
- 条件
 - (1)单调有界定理(2)致密性定理
 - (2)效密性定理 (3)柯西收敛准则
- (3)利西收敛准则(4)课后习题
- 4.各节参考答案

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为 N^+ 的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的**子列**,简记为 $\{a_{n_k}\}$

注:总有 $n_k \geq k$.

原数列收敛,则其子列也收敛,且收敛到同一个极限.

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性
- (1)基本性质
- (2)四则运升 (3)子列的敛散性
- (4)球后习题
- 3.数列极限存在的
- 条件 (1) # 30 + 10 0 70
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为 N^+ 的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的**子列**,简记为 $\{a_{n_k}\}$

注:总有n_k ≥ k.

原数列收敛,则其子列也收敛,且收敛到同一个极限.

注:若某数列的两个子列收敛于不同的值,则该数列必发散.

1.数列极限的概念

(1)数:

(2) 数列极限

(4)课后习题

2 收敛粉列的师

(1)基本性质

(2)四則近算

(3)子列的致教性
(4)课后习题

3.数列极限存在的

条件

(2) 致密性定理

(3)柯西收敛准則(4)课后习题

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)元为小和元为大叔》 (4)课后习题
- ~ 11 11 10 ml 11 11 m

2.收敛数列的性质

- (2)四則运算
- (3)子列的致散性

(4)课后习题

- 3.数列极限存在的
 - (1)单调有界定用
 (2)社会社会理
 - (2)致密性定理 (3)柯西收敛准师
 - (4)课后习题
 - 1 夕共长去父母

(1) 证明数列
$$\{a_n = \cos \frac{n\pi}{2}\}$$
没有极限.

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = ?$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot (n+1)\cdot (n+2)}\right) = ?$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty} ((\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + \dots + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n})) = ?$$

(5)
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \right) = ?$$

(6)
$$\lim_{n\to\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = ?.$$

(7)
$$\lim_{n \to \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = ?$$

(8)
$$\lim_{n \to \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) = ?$$

1 粉列权限的概令

(1)数列 (2)数列标题

(3)无穷小和无穷大数列

○ 1/4 소나 보는 Tol 44 Jul 15

(1)基本性质

(2)四則运算 (3)子列的效散性

(4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

4 夕 甘 矣 去 然 亦

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2) 好密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数
- (4)课后习

2.收敛数列的性质

- (1)基本性 (2)四則运
- (3)子列的效散性
- (4)课后习

3.数列极限存在的 条件

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (4)课后习题
- (-)----
- 4.各节参考答案

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习匙

4.各节参考答案

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数:
- (4)课后习题

2.收敛数列的

- (1)基本性 (2)四則活
- (3)子列的效散性
- (4)课后只
- 3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

- (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题
- 4.各节参考答案

单调有界数列必有极限.

- 1 粉列极限的概念
- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数
- (4)课月

2.收敛数列1

- (1)基本社
- (3)子列的致教性
- (4)18478
- 3.数列极限存在的 条件
 - (1)单调有界定理
 - (2)致密性定理
 - (4)课后习题
 - 1 夕共长老父安

单调有界数列必有极限.

证:不妨设{an}单调递增,则有上界.由确界定理,存在

$$\sup\{a_n\}=\xi.$$

由上确界的定义,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 a_{n_0} ,使得 $a_{n_0}>\xi-\varepsilon$.故当 $n>n_0$ 时,

$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le \xi < \xi + \varepsilon,$$

 $\mathbb{P}\lim_{n\to\infty}a_n=\xi.$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列标

(3)无穷小和无穷大数列

) 收敛粉列的

(1)基本性质 (2)四别泛於

(2)四則运算 (3)子列的效散性 (4)選片以斯

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理
(2)每零件定理

(2)致密性定理(3)柯西收敛准則(4)课后习题

单调有界数列必有极限.

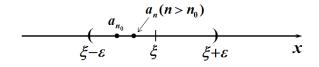
证:不妨设{an}单调递增,则有上界.由确界定理,存在

$$\sup\{a_n\}=\xi.$$

由上确界的定义,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 a_{n_0} ,使得 $a_{n_0}>\xi-\varepsilon$.故当 $n>n_0$ 时,

$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le \xi < \xi + \varepsilon,$$

 $\mathbb{P}\lim_{n\to\infty}a_n=\xi.$



1.数列极限的概念

(1)数列

(2)数列极限(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后习题

2.收敛数列的性质

(2)四則近算 (3)子列的效散性

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则 (4)课后习题

例3.1:设
$$a_1 = \sqrt{2}, \dots, a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n}, \dots, 求极$$

限 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

- 1.数列极限的概念
 - (1)数列 (2)数列极限
 - (3)无穷小和无穷大数3
 - 收敛数列的情
- (1)基本性质 (2)四则运算
- (3)子列的效散性 (4)课后习题
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
 (2)社会社会司
 - 2)致密性定理
 3)村西收敛准则
- 4. 各节参考答案

例3.1:设
$$a_1 = \sqrt{2}, \dots, a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n}, \dots, 求极$$

限 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

解:因为

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}$$

$$= \frac{a_2 - a_1}{\prod_{k=2}^{n} (\sqrt{2 + a_k} + \sqrt{2 + a_{k-1}})}$$

$$> 0.$$

所以,数列{an}是单调递增的.

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列 (4)课后习题

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理 (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则 (4)课后习题

又由上式知

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_2 - a_1}{\displaystyle \prod_{k=2}^{n} (\sqrt{2 + a_k} + \sqrt{2 + a_{k-1}})}$$

$$\leq a_n + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^{n-1}}$$

$$\leq a_n + \frac{1}{(2\sqrt{2})^{n-1}}$$

$$\leq a_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2\sqrt{2})^k}$$

$$< a_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\sqrt{2})^k} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}},$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

2 收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則近算

(4)课后习题 3.数列极限存在的

条件 (1)单调有界定理 (2)致密性定理 (3)如两折分准则

.各节参考答案

所以,数列{an}是有界的.

综上所述,极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 存在,于是由

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

知

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n},$$

即

$$A=\sqrt{2+A}$$

解得A = -1或A = 2,舍去负根有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

1.数列极限的概念

(2)数列极限

(3)尤另小和尤另大数夕
(4)课后习题

2.收敛数列的

(1)基本性质 (2)四則近算

(3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理 (2)致密性定理 (2)标系的从中期

(3) 柯西收敛准则 (4) 课后习题

4.合下今方合采

例3.2:请找出下面叙述中的错误之处.

" 设 $a_n = 2^n, n = 1, 2, \dots, 则$

$$a_{n+1}=2^{n+1}=2a_n.$$

显然有 $a_n > 0$, 所以 $\{a_n\}$ 递增.设 $\lim_{n \to \infty} a_n = A$,从而有

$$A=2A$$

$$\mathbb{P}_{n\to\infty}^{\lim} 2^n = 0.$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)終初初

(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后

2.收敛数列的性

(1)基本性质 (2)四别活能

(2)四則运昇 (3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理

(2)致密性定理(3)柯西收敛准則

(4)课后习题

例3.2:请找出下面叙述中的错误之处.

" 设 $a_n = 2^n, n = 1, 2, \dots, 则$

$$a_{n+1}=2^{n+1}=2a_n.$$

显然有 $a_n > 0$, 所以 $\{a_n\}$ 递增.设 $\lim_{n \to \infty} a_n = A$,从而有

$$A=2A$$

$$\mathbb{P}\lim_{n\to\infty}2^n=0.$$

解:{an}不是有界数列,**单调和有界**两个条件缺一不可.

1.数列极限的概念

(1)数列

(3)无穷小和无穷大数列

(4)课后。

2.收敛数列的

(1)基本性质(2)四則近算

(3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理
(2)公司公司

(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则

例3.3:证明 $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

- 1.数列极限的概念
 - (1)数列 (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列(4)课后习题
- 2.收敛数列的性 (1)基本性质
- (2)四則近算 (3)子列的效散性
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理(2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则 (4)课后习题
- 1 久节糸老祭安

例3.3:证明 $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

证:设 $b > a > 0, n \in \mathbb{N}^+,$ 则由

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \dots + ba^{n-1} + a^n)$$

< $(n+1)b^n(b-a)$

得到不等式

$$a^{n+1} > b^n((n+1)a - nb).$$
 (1)

以
$$b = 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} = a$$
代入(1)式,于是
$$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n})^n,$$

由此可知数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是递增的.

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(4)课后习题

2 收敛数列的性

(1)基本性质(2)四則近算

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

再以
$$b=1+\frac{1}{2n}>1=a$$
 代入 (1) 式,于是
$$1>(1+\frac{1}{2n})^n\cdot\frac{1}{2}$$

即

$$(1+\frac{1}{2n})^{2n}<4,$$

所以可知数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是有界的.综上所述,知命题成立.

- 1.数列极限的概念
 - (1)数列 (2)数列初和
 - (3)无穷小和无穷大数列
 - 2.收敛数列的性
- (1)基本性质 (2)四则运算 (3)子列的分龄性
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
 - (1)平朔旬介及理
 (2)致密性定理
 - (2)效密性定理(3)柯西收敛准則(4)课后习题
- 4.各节参考答案

再以
$$b=1+rac{1}{2n}>1=a$$
 代入 (1) 式,于是
$$1>(1+rac{1}{2n})^n\cdotrac{1}{2}$$

即

$$(1+\frac{1}{2n})^{2n}<4,$$

所以可知数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是有界的.综上所述,知命题成立.

注:数列
$$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$$
的极限是无理数 e .即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

- 1.数列极限的概念
 - (1)数列(2)終別据録
 - (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
- 2.收敛效列时信
- (1)基本性质 (2)四則运算
- (3)子列的致散性(4)课后习题
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理(3)柯西收敛准則
- (4)课后习题
- 4.各节参考答案

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的

- (1)基本性 (2)四則活
- (3)子列的致散性
- 3 粉列极限存在的

3.数列极限存在的 条件

- (1)单调有界定理 (2)致密性定理
- (2) 致密性足理
- (4)课后习题

▶ 求 \spadesuit [♡]类型的极限,当 \spadesuit → 1, \heartsuit → ∞ 时该极限均为e 的? 次方;

- 1 粉列材限的概念
- (1)数列 (2)数列标
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
 - 2.收敛数列的性质
- (1)基本性质(2)四則近算(3)子列的效散性
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的 条件
- (1)单调有界定理 (2)致密性定理
- (3) 柯西收敛准则 (4) 课后习题

- ▶ 求♠ $^{\circ}$ 类型的极限,当♠ → 1, $^{\circ}$ → $^{\circ}$ 时该极限均为 $^{\circ}$ 的? 次方;
- ▶ ?等于(♠ 1)♡的极限.

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
- (1)基本性质
- (2)四則近算 (3)子列的效散性
- 3.数列极限存在的 冬件
- (1)单调有界定理 (2)致密性定理
- (4) 11/20 11/20

- ▶ 求♠ $^{\circ}$ 类型的极限,当♠ → 1, $^{\circ}$ → $^{\circ}$ 时该极限均为*e* 的? 次方;
- ▶ ?等于(♠ 1)♡的极限.

请口算如下极限:

- 1. 数列极限的概念
- (1)数列 (2)数列初1
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性质
- (1)基本性质 (2)四則近算 (3)不到的供數件
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的 条件
- (1)单调有界定理(2)致密性定理
- (2)效密性定理(3)村西收敛准則(4)课后习题
- 4.各节参考答案

- ▶ 求♠ $^{\circ}$ 类型的极限,当♠ → 1, $^{\circ}$ → $^{\circ}$ 时该极限均为*e* 的? 次方;
- ▶ ?等于(♠ 1)♡的极限.

请口算如下极限:

 $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^{2n} = e^4$

1.数列极限的概念

(1) 数列 (2) 数列极用

(3)无穷小和无穷大数列

2 收敛数列的性

(1)基本性质(2)四則近算

(3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理
 (2)發宗社定理

(2)致密性定理 (3)柯西收敛准则 (4)课后日题

- ▶ 求♠ $^{\circ}$ 类型的极限,当♠ → 1, $^{\circ}$ → $^{\circ}$ 时该极限均为*e* 的? 次方;
- ▶ ?等于(♠ 1)♡的极限.

请口算如下极限:

- $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^{2n} = e^4$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$

1.数列极限的概念

(1) 数列 (2) 数列极序

(3)无穷小和无穷大数列

2.收敛数列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的效散性

(4)课后习题 3 数列极限 存在的

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理 (2)致密性定理

(2)致密性定理(3)柯西收敛准則(4)课后习题

- ▶ 求♠ $^{\circ}$ 类型的极限,当♠ → 1, $^{\circ}$ → $^{\circ}$ 时该极限均为 $^{\circ}$ 的? 次方;
- ▶ ?等于(♠ 1)♡的极限.

请口算如下极限:

- $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^{2n} = e^4$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$
- $\lim_{n \to \infty} (1 \frac{1}{n})^{\frac{n}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$

1.数列极限的概念

(1)数列(2)数列极限(3)无穷小和无穷大数列

2 收敛粉列的性质

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的致散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的 条件

(1) 单调有界定理 (2) 致密性定理 (3) 柯西收敛准则 (4)课后习题

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2) 数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2) 权列权限
- (4)课后:

2.收敛数列的

- (1)基本性
- (2)四則近算
- (4)课后习:
- 3.数列极限存在的

条件

- (1)平明有界定理(2)致密性定理
- (3) 村西收敛准
- (4)课后习题
- 4.各节参考答案

有界数列必有收敛的子列.

(2)致密性定理

证:先证数列必有单调子列.设数列为{an},

- (2)致密性定理

证:先证数列必有单调子列.设数列为{an},

(i) 如果{an}有某个子列{an,},该子列没有最大值.则该子 列必有某个单调递增的子列.

(2)致密性定理

证:先证数列必有单调子列.设数列为{an},

- (i) 如果 $\{a_n\}$ 有某个子列 $\{a_{n_k}\}$,该子列没有最大值.则该子列必有某个单调递增的子列.
- (ii) 如果不存在这样的子列{an_k},即{an} 的任意子列都有最大值,则此时一定可以找到一个单调递减的子列.

1 粉列极限的概念

(1)数列(2)数列初弱

(3)无穷小和无穷大数歹

2 此处数别的胜质

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的致散性

3.数列极限存在的

3.数列极限存在的 条件

(1)单调有界定理 (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则 (4)谬后习题

证:先证数列必有单调子列.设数列为{an},

- (i) 如果 $\{a_n\}$ 有某个子列 $\{a_{n_k}\}$,该子列没有最大值.则该子列必有某个单调递增的子列.
- (ii) 如果不存在这样的子列{a_{nk}},即{a_n} 的任意子列都有最大值,则此时一定可以找到一个单调递减的子列.

其次,又因为数列本身有界,所以有界数列必有收敛的子列.

1 粉列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

(3)无穷小和无穷大数列

2 14 公教到44 H

(1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的致散性

3.数列极限存在的

(1) 单调有界定理 (2) 致密性定理 (3) 柯西收敛准则

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2) 致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习题

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (2)数列极形
- (3)无穷小和无穷大数
- 2 近分粉到的居
- (1)基本性/
- (2)四則近非
- (4)课后习题
- 3 粉列极限存在的
- - (1)单调有界定理
- (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
- (3)村四根級庫(4)採出別額
- (4)课后习题
- 4.合门分方合采

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数N,使得当n,m>N时有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon;$$

或对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数N, 使得当n>N,及任一 $p\in N^+$,有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

- 1.数列极限的概念
 - (1)数列 (2)数列极限
 - (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题
 - 1.收敛效列的性
- (1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的分數性
- (4)课后习题
 - 3.数列极限存在的 条件
 - (1)单调有界定理
 - (2)致密性定理(3)柯西收敛准則
 - 1 夕 芯 会 本 祭 安

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是:对任给的arepsilon>0,存在正整数N,使得当n,m>N时有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon;$$

或对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数N, 使得当n>N,及任一 $p\in N^+$,有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

注1:柯西收敛准则的条件称为柯西条件,它反映这样的事实—-收敛数列各项的值愈到后面,彼此愈接近,以至于充分后面的任何两项之差的绝对值可以小于预先给定的任意小正数.或者形象地说,收敛数列的各项越到后面越是"挤"在一起.

- 1.数列极限的概念
- (2)数列极限 (2)数列极限
- (4)课后习题
 - 2.收敛数列的性质
- (1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的效散性 (4)课戶卫斯
 - 3.数列极限存在的
- 余 仟 (1) 单调有界定理
- (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
- 4.各节参考答案

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是:对任给的arepsilon>0,存在正整数N,使得当n,m>N时有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon;$$

或对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数N, 使得当n>N,及任一 $p\in N^+$,有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

注2:柯西收敛准则从理论上完全解决了数列极限的存在性问题.它把数列极限" $\varepsilon-N$ "定义中 a_n 与a的差换成了 a_n 与 a_m 之差.其好处在于无需借助数列以外的数a,只要根据数列本身的特征就可以鉴别其敛散性.

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列 (4)课后习题
 - 2.收敛数列的性
- (1)基本性质 (2)四則近算 (3)子列的效散性 (4)课后习题
- 3.数列极限存在的 条件
- (1)单调有界定理 (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- 4.各节参考答案

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数N,使得当n,m>N时有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon;$$

或对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数N, 使得当n>N,及任一 $p\in N^+$,有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

 \mathbf{i} 3:数列 $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件是:存在 $\epsilon_0 > 0$,对任意的正整数N,都可以找到n, m > N,使得

$$|a_n-a_m|\geq \varepsilon_0;$$

或都可以找到n > N,及 $p \in N^+$,有

$$|a_{n+p}-a_n|\geq \varepsilon_0.$$

1.数列极限的概念

- (1)数列 (2)数列极限
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性质
- (1)基本性质 (2)四則运算 (3)子列的致散性 (4)课后习题
- 3.数列极限存在的 条件
- 条件 (1)单调在现金增
- (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
- (3)柯西收敛准则
 (4)课后习题

例3.4:设
$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$
,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

1 松利拉眼丛挺人

- (1) 数列 (2) 数列极限
- 2 好分数列的性质
- (1)基本性质 (2)四則近算
- (4)课后习题 3 数 列 极 限 存 在 的
 - (1) 单调有界定理 (2) 致密性定理 (3) 柯西收敛准则
 - 力+企社放化

例3.4:设 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证:不妨设n > m,则

$$|a_{n} - a_{m}|$$

$$= \frac{1}{(m+1)^{2}} + \frac{1}{(m+2)^{2}} + \dots + \frac{1}{n^{2}}$$

$$< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= (\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}) + (\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m},$$

对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $N = \frac{1}{\varepsilon}$,对一切n > m > N有 $|a_n - a_m| < \varepsilon.$

由柯西收敛准则知数列{an}收敛.

(2)四則近算 (3)子列的效散性 (4)课后习题

数列极限存在的 件 1)单调有界定理 2)致密性定理

(4)课后习题 1.各节参考答案

例3.5:设
$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$$
,证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

- 1.数列极限的概念
- (1)数列
- (2) x + 1.5. x + 4 4
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性质
- (1)基本性质(2)四則运算
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的
- (1)单调有界定理(2)致密性定理
- (3)村西收敛准则
- 4 各节参考签案

例3.5:设
$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$$
,证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证:存在
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$$
,对任意的正整数 N ,任取 $n > N$,及 $p = n$,则有

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$> n \cdot \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \varepsilon_0,$$

由柯西收敛准则知该数列发散.

- 1.数列极限的概念
- (1)数列 (2)数列标
- (2)数列极限 (3)未宏小和千宏十数别
- (4)课后习题
- 2.收敛数列的性质
 - (1)基本性质 (2)四則运算
- (4)课后习题
- 3.数列极限存在的 条件
- (1)单调有界定理(2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则 (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (4)课后习题

(4)课后习题

(1)
$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{3\sqrt{n}})^{\sqrt{n+1}} = ?$$

(2)
$$\lim_{n \to \infty} n(\ln(n+2) - \ln(n+3)) = ?$$

(3)
$$\lim_{n \to \infty} n^2 (\ln(n^2 + 2) - \ln(n^2 + 5)) = ?$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3-2n^2+4n}{4n-2n^2+1}\right)^{n^2+1} = ?$$

(5)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = ?$$

(6) 设数列
$$\{a_n\}$$
满足 $a_0 > 0$, $a_1 = \frac{a_0}{2 + a_0}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2 + a_{n-1}}$, 证明该数列有极限.

(7) 设数列
$$\{a_n\}$$
满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$, 证明该数列有极限.

(8) 已知
$$\lim_{n\to\infty} (2a_n+b_n) = 5$$
, $\lim_{n\to\infty} (a_n-3b_n) = -1$, 求 $\lim_{n\to\infty} (a_n-3b_n)$ 的值.

1 粉列权限的概令

(1) 数列 (2) 数列极限

(4)课后习题

.收敛数列的性 1)基本性质

(2)四則近算 (3)子列的效散性 (4)课后习题

3.数列极限存在的

条件 (1)单调有界定理 (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则

4.各节参考答案

(4)课后习题

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (2)数列极限
- (3)无穷小和无穷大数列
- (4)课后习题

2.收敛数列的性质

- (1)基本性质
- (2)四则运算
- (3)子列的敛散性
- (4)课后习题

3.数列极限存在的条件

- (1)单调有界定理
- (2)致密性定理
- (3)柯西收敛准则
- (4)课后习匙

4.各节参考答案

1.数列极限的概念

- (1)数列
- (3)无穷小和无穷大数
- (4)课后习题

2.收敛数列的

- (1)基本性 (2)四則运
- (3)子列的致散性
- (4)课后习录

3.数列极限存在的

- 条件 (1) # 22 + 22 + 22
 - (2)致密性定理 (3)柯西收敛准则
 - 4.各节参考答案

数列极限的概念

(1)提示:
$$\left|\frac{n!}{n^n} - 0\right| \le \frac{1}{n}$$
. (2)提示: $\left|\frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$. (3)提示: $\left|\frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1\right| = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)} < \frac{a^2}{2n^2} < \frac{a^2}{n}$.

(4)提示:
$$\left|\frac{\sqrt{n}-2}{n+\sqrt{n}+1}-0\right| < \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
 (5)提示:

$$|\sqrt{n^2 + 5n + 1} - \sqrt{n^2 - n} - 3|$$

$$= |\frac{6n + 1}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + \sqrt{n^2 - n}} - 3|$$

$$= 3\frac{|\sqrt{n^2 + 5n + 1} + \sqrt{n^2 - 1} - 2n - \frac{1}{3}|}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$\leq 3\frac{|\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n| + |\sqrt{n^2 - 1} - n| + \frac{1}{3}}{2n - 1}$$

1.数列极限的概念

(1)数列 (2)数列极限

2 收分数列的性质

(1)基本性质 (2)四則近算 (3)子列的效散性

3.数列极限存在的

(1)单调有界定理(2)致密性定理

(3)柯西收敛准則(4)课后习题

$$= 3\frac{\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{3}}{2n-1}<\frac{13}{2n-1}<\frac{13}{n}.$$

$$(6)提示:|\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}-0| = \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

收敛数列的性质

(1)提示: $a_{2k+1} = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$,而 $a_{2k} = \cos k\pi \neq 0$.

(2)1. (3)
$$\frac{1}{4}$$
. (4) $\frac{3}{2}$. (5)0. (6)0. (7)0. (8)1.

数列极限存在的条件

 $(1)e^{-\frac{1}{3}}$. (2)-1. (3)-3. $(4)e^{-1}$. (5)1. (6)提示:证明an单调递减有下界.

(7)提示:证明an单调递增有上界.

(8)2.