

第七章 定积分

陈 颖

北京电子科技学院基础部

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

(1) 定积分的引入

(2) 定积分的几何意义

(3) 定积分的奇偶对称性

(4) 定积分的性质

(5) 定积分的中值定理

(6) 课后习题

2. 定积分的计算

(1) 变上限的定积分

(2) 牛顿——莱布尼茨公式

(3) 定积分的换元法

(4) 定积分的分部积分法

(5) 课后习题

3. 反常积分

(1) 无穷限的反常积分

(2) 无界函数的反常积分

(3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

(1) 定积分的引入

(2) 定积分的几何意义

(3) 定积分的奇偶对称性

(4) 定积分的性质

(5) 定积分的中值定理

(6) 课后习题

2. 定积分的计算

(1) 变上限的定积分

(2) 牛顿——莱布尼茨公式

(3) 定积分的换元法

(4) 定积分的分部积分法

(5) 课后习题

3. 反常积分

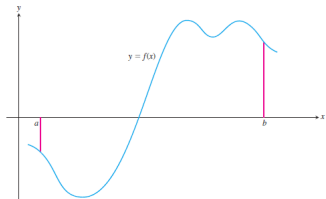
(1) 无穷限的反常积分

(2) 无界函数的反常积分

(3) 课后习题

4. 各节参考答案

(1) 考察函数 $y = f(x)$



1. 定积分的概念

(1) 定积分的引入

- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

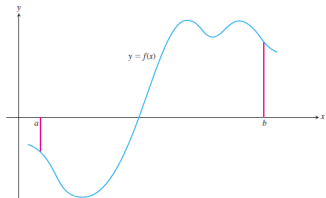
- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

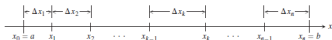
- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

(1) 考察函数 $y = f(x)$



(2) 构造子区间 Δx_i



1. 定积分的概念

(1) 定积分的引入

(2) 定积分的几何意义

(3) 定积分的奇偶对称性

(4) 定积分的性质

(5) 定积分的中值定理

(6) 课后习题

2. 定积分的计算

(1) 变上限的定积分

(2) 牛顿——莱布尼茨公式

(3) 定积分的换元法

(4) 定积分的分部积分法

(5) 课后习题

3. 反常积分

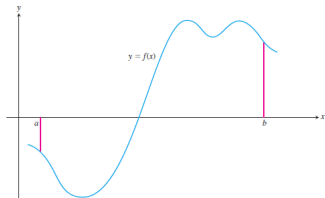
(1) 无穷限的反常积分

(2) 无界函数的反常积分

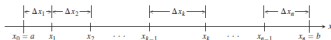
(3) 课后习题

4. 各节参考答案

(1) 考察函数 $y = f(x)$



(2) 构造子区间 Δx_i



1. 定积分的概念

(1) 定积分的引入

- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

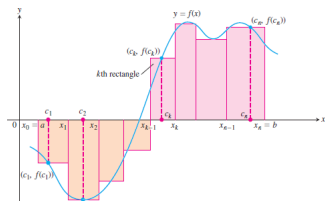
- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

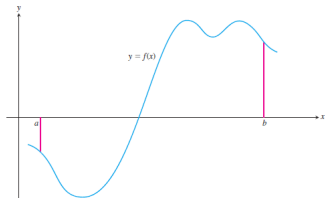
- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

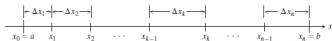
(3) 求和 $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$



(1) 考察函数 $y = f(x)$



(2) 构造子区间 Δx_i



1. 定积分的概念

(1) 定积分的引入

- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

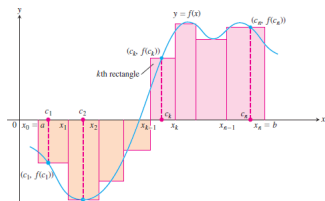
- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

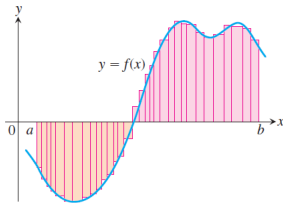
- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

(3) 求和 $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$



(4) 取极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分,其中:

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分,其中:

► a 为积分下限, b 为积分上限, $[a, b]$ 为积分区间;

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分,其中:

- ▶ a 为积分下限, b 为积分上限, $[a, b]$ 为积分区间;
- ▶ $f(x)$ 为被积函数, dx 为被积变量, $f(x)dx$ 为被积表达式;

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分,其中:

- ▶ a 为积分下限, b 为积分上限, $[a, b]$ 为积分区间;
- ▶ $f(x)$ 为被积函数, dx 为被积变量, $f(x)dx$ 为被积表达式;
- ▶ $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ 为积分和;

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分,其中:

- ▶ a 为积分下限, b 为积分上限, $[a, b]$ 为积分区间;
- ▶ $f(x)$ 为被积函数, dx 为被积变量, $f(x)dx$ 为被积表达式;
- ▶ $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ 为积分和;
- ▶ 连续函数、单调函数或者只有有限个间断点的有界函数都是可积的;

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分,其中:

- ▶ a 为积分下限, b 为积分上限, $[a, b]$ 为积分区间;
- ▶ $f(x)$ 为被积函数, dx 为被积变量, $f(x)dx$ 为被积表达式;
- ▶ $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ 为积分和;
- ▶ 连续函数、单调函数或者只有有限个间断点的有界函数都是可积的;
- ▶ 定积分仅与被积函数及积分区间有关,而与积分变量用什么字母表示无关,即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots;$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

称为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的定积分,其中:

- ▶ a 为积分下限, b 为积分上限, $[a, b]$ 为积分区间;
- ▶ $f(x)$ 为被积函数, dx 为被积变量, $f(x)dx$ 为被积表达式;
- ▶ $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ 为积分和;
- ▶ 连续函数、单调函数或者只有有限个间断点的有界函数都是可积的;
- ▶ 定积分仅与被积函数及积分区间有关,而与积分变量用什么字母表示无关,即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots;$$
- ▶ 定积分具有封闭性,即

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

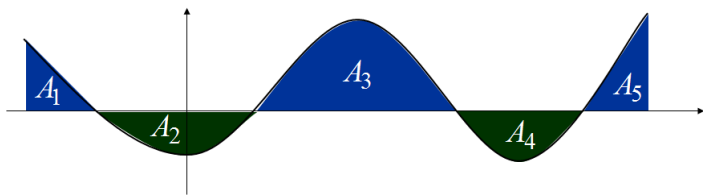
2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案



定积分其实就是各部分面积的代数和,即

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5.$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性**
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性**
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的奇偶对称性——设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数,那么

(1) 若 $f(-x) = f(x)$,则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

(2) 若 $f(-x) = -f(x)$,则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

定积分的奇偶对称性——设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数,那么

(1) 若 $f(-x) = f(x)$,则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

(2) 若 $f(-x) = -f(x)$,则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

注:偶倍奇零.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质**
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质**
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

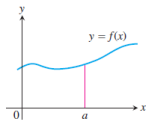
2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

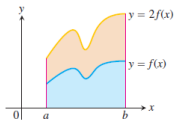
4. 各节参考答案



(a) Zero Width Interval:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

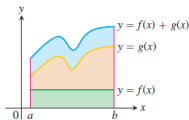
(The area over a point is 0.)



(b) Constant Multiple:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

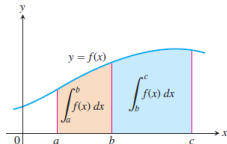
(Shown for $k = 2$.)



(c) Sum:

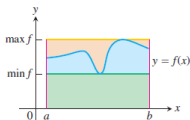
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

(Areas add)



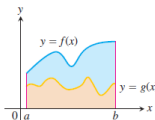
(d) Additivity for definite integrals:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



(e) Max-Min Inequality:

$$\begin{aligned} \min f \cdot (b - a) &\leq \int_a^b f(x) dx \\ &\leq \max f \cdot (b - a) \end{aligned}$$



(f) Domination:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq g(x) \text{ on } [a, b] \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &\geq \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质**
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例1.1: 设 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^4 f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^1 h(x)dx = 7$,
求

$$(1) \int_4^1 f(x)dx; (2) \int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x))dx; (3) \int_{-1}^4 f(x)dx.$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例1.1: 设 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^4 f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^1 h(x)dx = 7$,
求

$$(1) \int_4^1 f(x)dx; (2) \int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x))dx; (3) \int_{-1}^4 f(x)dx.$$

解:

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例1.1: 设 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^4 f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^1 h(x)dx = 7$,
求

$$(1) \int_4^1 f(x)dx; (2) \int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x))dx; (3) \int_{-1}^4 f(x)dx.$$

解:

$$(1) \int_4^1 f(x)dx = -\int_1^4 f(x)dx = -(-2) = 2;$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例1.1: 设 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^4 f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^1 h(x)dx = 7$,
求

$$(1) \int_4^1 f(x)dx; (2) \int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x))dx; (3) \int_{-1}^4 f(x)dx.$$

解:

$$(1) \int_4^1 f(x)dx = - \int_1^4 f(x)dx = -(-2) = 2;$$

$$(2) \int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x))dx = 2 \int_{-1}^1 f(x)dx + 3 \int_{-1}^1 h(x)dx = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31;$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例1.1: 设 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^4 f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^1 h(x)dx = 7$,
求

$$(1) \int_4^1 f(x)dx; (2) \int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x))dx; (3) \int_{-1}^4 f(x)dx.$$

解:

$$(1) \int_4^1 f(x)dx = - \int_1^4 f(x)dx = -(-2) = 2;$$

$$(2) \int_{-1}^1 (2f(x) + 3h(x))dx = 2 \int_{-1}^1 f(x)dx + 3 \int_{-1}^1 h(x)dx = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31;$$

$$(3) \int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = 5 + (-2) = 3.$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

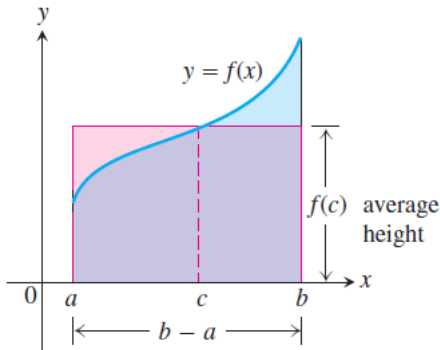
3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

如果 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数,那么存在一点 $c \in [a, b]$,使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

(1) 用定积分表示极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}.$

(2) 用定积分表示极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$

(3) 用定积分表示极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{i\pi}{n}.$

(4) 用定积分表示极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+1} \sin \frac{i\pi}{n}.$

(5) 求 $\int_0^1 \sqrt{2} dx.$

(6) 求 $\int_0^1 x dx.$

(7) 求 $\int_0^1 (Ax + B) dx.$

(8) 证明 $1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}.$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

在 $[a, b]$ 上可导, 并且

$$\Phi'(x) = f(x).$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

在 $[a, b]$ 上可导,并且

$$\Phi'(x) = f(x).$$

证:

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \\&= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \quad (x \leq c \leq x+h) \\&= f(x).\end{aligned}$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

注1:这表明任何连续的函数都有原函数,所以这也叫做**连续函数的原函数存在定理**,连续函数的变上限定积分就是它的一个原函数.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

注1:这表明任何连续的函数都有原函数,所以这也叫做**连续函数的原函数存在定理**,连续函数的变上限定积分就是它的一个原函数.

注2:因为

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

所以又可以叫做**微积分基本定理的微分形式**.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

注1:这表明任何连续的函数都有原函数,所以这也叫做**连续函数的原函数存在定理**,连续函数的变上限定积分就是它的一个原函数.

注2:因为

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

所以又可以叫做**微积分基本定理的微分形式**.

注3:我们有

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

但是没有

$$\int_a^x f(x)dx$$

这种写法.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

推论1:

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)' = f(u(x))u'(x).$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

推论1:

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)' = f(u(x))u'(x).$$

推论2:

$$\left(\int_{v(x)}^b f(t)dt\right)' = -f(v(x))v'(x).$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

推论1:

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)' = f(u(x))u'(x).$$

推论2:

$$\left(\int_{v(x)}^b f(t)dt\right)' = -f(v(x))v'(x).$$

推论3:

$$\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\right)' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例2.1: 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $f(x) > 0$, 证明

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在 $(0, +\infty)$ 内为单调递增函数.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例2.1: 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $f(x) > 0$, 证明

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在 $(0, +\infty)$ 内为单调递增函数.

证:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(\int_0^x tf(t)dt)' \cdot \int_0^x f(t)dt - (\int_0^x f(t)dt)' \cdot \int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2} \\ &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2} \end{aligned}$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

$$\begin{aligned}
 &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\
 &= \frac{f(x)x(x-c)f(c)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \quad (0 < c < x) \\
 &> 0,
 \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内为单调递增函数.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

这就是计算定积分的牛顿——莱布尼茨公式.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

这就是计算定积分的牛顿——莱布尼茨公式.

证: $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数,所以

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

令 $x = a$ 代入等式两端有 $F(a) = C$,即

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

再以 $x = b$ 代入等式两端得

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例2.2:求 $\int_0^2 |x - 1| dx$.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例2.2: 求 $\int_0^2 |x - 1| dx$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x - 1| dx &= \int_0^1 |x - 1| dx + \int_1^2 |x - 1| dx \\&= \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\&= (x - 0.5x^2)|_0^1 + (0.5x^2 - x)|_1^2 \\&= ((1 - 0.5) - 0) + ((0.5 \cdot 4 - 2) - (0.5 - 1)) \\&= 0.5 + 0.5 \\&= 1.\end{aligned}$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例2.3: 设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx$, 求 $f(x)$.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例2.3: 设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx$, 求 $f(x)$.

解: 设

$$a = \int_0^2 f(x) dx,$$

那么

$$f(x) = x^2 - ax,$$

故

$$a = \int_0^2 (x^2 - ax) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2a,$$

解得 $a = \frac{9}{8}$, 所以

$$f(x) = x^2 - \frac{9}{8}x.$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法**
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法**
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的换元公式——设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 变换 $x = \varphi(t)$ 满足:

- ▶ $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- ▶ 当 t 由 α 变到 β 时, $x = x(t)$ 由 a 变到 b ;
- ▶ $\varphi'(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的换元公式——设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 变换 $x = \varphi(t)$ 满足:

- ▶ $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- ▶ 当 t 由 α 变到 β 时, $x = x(t)$ 由 a 变到 b ;
- ▶ $\varphi'(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

注1: 当 $\beta < \alpha$ 时, 即区间换为 $[\beta, \alpha]$, 换元公式仍然成立.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的换元公式——设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 变换 $x = \varphi(t)$ 满足:

- ▶ $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- ▶ 当 t 由 α 变到 β 时, $x = x(t)$ 由 a 变到 b ;
- ▶ $\varphi'(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

注1: 当 $\beta < \alpha$ 时, 即区间换为 $[\beta, \alpha]$, 换元公式仍然成立.

注2: 换元必换限.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例2.4:求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

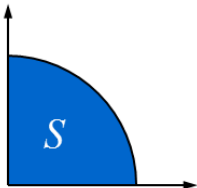
- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法**
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例2.4: 求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).



1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法**
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

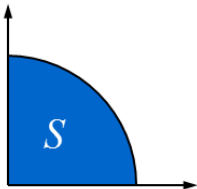
- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例2.4: 求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

解: 令 $x = a \sin t$, 则 $dx = a \cos t dt$,
且 $x = 0$ 时, $t = 0$, $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt \\&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\&= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{a^2}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) - 0 \right) \\&= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$



1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法**
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的分部积分公式——如果 $u'(x), v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\int_a^b uv' dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u' v dx.$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法**
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的分部积分公式——如果 $u'(x), v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\int_a^b uv' dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u' v dx.$$

注: 边积边代限.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法**
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的分部积分公式——如果 $u'(x), v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\int_a^b uv' dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u' v dx.$$

注: 边积边代限.

例2.5: 求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法**
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的分部积分公式——如果 $u'(x), v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\int_a^b uv' dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u' v dx.$$

注: 边积边代限.

例2.5: 求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x \arcsin x)|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d(\arcsin x) \\ &= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法**
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$.

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)$.

(3) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{i\pi}{n}$.

(4) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+1} \sin \frac{i\pi}{n}$.

(5) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x^2}$.

(6) 设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

引例: 曲线 $y = e^{-\frac{x}{2}}$ 和 y 轴以及 x 轴围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

引例: 曲线 $y = e^{-\frac{x}{2}}$ 和 y 轴以及 x 轴围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

其含义可以理解为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\frac{x}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^b) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (-2e^{-\frac{b}{2}} + 2) = 2. \end{aligned}$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

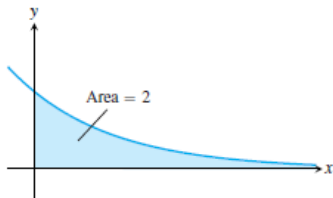
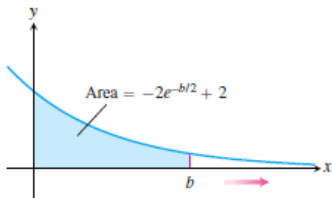
4. 各节参考答案

引例: 曲线 $y = e^{-\frac{x}{2}}$ 和 y 轴以及 x 轴围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

其含义可以理解为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\frac{x}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^b) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (-2e^{-\frac{b}{2}} + 2) = 2. \end{aligned}$$



1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

无穷限反常积分定义如下:

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

无穷限反常积分定义如下:



$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

无穷限反常积分定义如下:

▶

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

▶

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

无穷限反常积分定义如下:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

若右边两个极限都存在,则左边的反常积分收敛,若右边有一个极限不存在,则发散.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,引入记号

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x),$$

则有类似牛顿——莱布尼茨形式的计算表达式:

▶

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

▶

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty),$$

▶

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例4.1:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例4.1:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

解:

$$\text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi.$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例4.1:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

解:

$$\text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi.$$

例4.2:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿—莱布尼兹公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例4.1:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

解:

$$\text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi.$$

例4.2:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

解:因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数,所以原式为0.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼兹公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例4.1:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

解:

$$\text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi.$$

例4.2:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

解:因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数,所以原式为0.

再做一遍例4.2吧!

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼兹公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例4.1:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

解:

$$\text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi.$$

例4.2:求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

解:因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数,所以原式为0.

再做一遍例4.2吧!

$$\text{解: 原式} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

这是发散的.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿—莱布尼兹公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

引例: 曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 和 y 轴以及直线 $x = 1$ 围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

引例:曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 和 y 轴以及直线 $x = 1$ 围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

其含义可以理解为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x}|_a^1) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) \\ &= 2. \end{aligned}$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

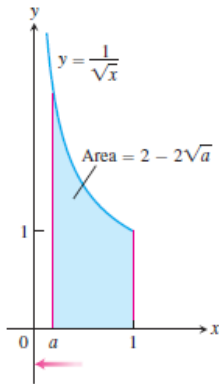
4.各节参考答案

引例: 曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 和 y 轴以及直线 $x = 1$ 围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

其含义可以理解为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} \Big|_a^1) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) \\ &= 2. \end{aligned}$$



1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

无界函数反常积分定义如下:

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

无界函数反常积分定义如下:

- 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续,在点 a 的右邻域内无界,此时 a 称为奇点,有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼兹公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

无界函数反常积分定义如下:

- 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 在点 a 的右邻域内无界, 此时 a 称为奇点, 有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

若右边极限存在, 则左边的反常积分收敛, 反之发散.

- 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, 在点 b 的左邻域内无界(奇点), 有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

若右边极限存在, 则左边的反常积分收敛, 反之发散.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

无界函数反常积分定义如下:

- 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续,在点 a 的右邻域内无界,此时 a 称为奇点,有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

- 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续,在点 b 的左邻域内无界(奇点),有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

若右边极限存在,则左边的反常积分收敛,反之发散.

- 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $c(a < c < b)$ 外连续,在点 c 的邻域内无界(奇点),有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

若右边两个极限都存在,则左边的反常积分收敛,若右边有一个极限不存在,则发散.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,也有类似牛顿——莱布尼茨形式的计算表达式:

► 若 a 为奇点,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a^+),$$

► 若 b 为奇点,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a),$$

► 若 a, b 都为奇点,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a^+),$$

► 若奇点 $c \in (a, b)$,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \underbrace{F(c^+) + F(c^-)}_{\text{不可抵消!}} - F(a).$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例4.3: 求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$).

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例4.3:求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$).

解:显然奇点为点 a ,所以

$$\text{原式} = \int_0^a \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{a-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

1.定积分的概念

- (1)定积分的引入
- (2)定积分的几何意义
- (3)定积分的奇偶对称性
- (4)定积分的性质
- (5)定积分的中值定理
- (6)课后习题

2.定积分的计算

- (1)变上限的定积分
- (2)牛顿——莱布尼茨公式
- (3)定积分的换元法
- (4)定积分的分部积分法
- (5)课后习题

3.反常积分

- (1)无穷限的反常积分
- (2)无界函数的反常积分
- (3)课后习题

4.各节参考答案

例4.3: 求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$).

解: 显然奇点为点 a , 所以

$$\text{原式} = \int_0^a \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{a-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

例4.4: 求 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例4.3: 求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$).

解: 显然奇点为点 a , 所以

$$\text{原式} = \int_0^a \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_0^{a-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

例4.4: 求 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

解: 原式 $= -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例4.3: 求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$).

解: 显然奇点为点 a , 所以

$$\text{原式} = \int_0^a \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{a-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

例4.4: 求 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

解: 原式 $= -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$.

再做一遍例4.4吧!

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

例4.3: 求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$).

解: 显然奇点为点 a , 所以

$$\text{原式} = \int_0^a \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

例4.4: 求 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

解: 原式 $= -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$.

再做一遍例4.4吧!

解: 原式 $= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{0^-} + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{0^+}^1 = \infty,$

这是发散的.

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿—莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

(1) 求 $\int_0^{+\infty} x e^{-px} dx \quad (p > 0).$

(2) 求 $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} \sin x dx.$

(3) 求 $\int_{-\infty}^2 \frac{2dx}{x^2 + 4}.$

(4) 求 $\int_2^{+\infty} \frac{2dx}{x^2 - 1}.$

(5) 求 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}.$

(6) 求 $\int_0^1 \ln x dx.$

(7) 求 $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼兹公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案

定积分的概念

$$(1) \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \quad (2) \int_0^1 x^p dx \quad (3) \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$(4) \int_0^1 \sin \pi x dx \quad (5) \sqrt{2} \quad (6) 0.5 \quad (7) 0.5A + B$$

(8) 提示: 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 考察其在 $[0, \pi/2]$ 上的最值.

定积分的计算

$$(1) \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \quad (2) \frac{1}{p+1} \quad (3) \frac{2}{\pi} \quad (4) \frac{2}{\pi} \quad (5) \infty$$

$$(6) x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

反常积分

$$(1) \frac{1}{p^2} \quad (2) 1 \quad (3) \frac{3\pi}{4} \quad (4) \ln 3 \quad (5) \ln 2 \quad (6) -1 \quad (7) 4$$

1. 定积分的概念

- (1) 定积分的引入
- (2) 定积分的几何意义
- (3) 定积分的奇偶对称性
- (4) 定积分的性质
- (5) 定积分的中值定理
- (6) 课后习题

2. 定积分的计算

- (1) 变上限的定积分
- (2) 牛顿——莱布尼茨公式
- (3) 定积分的换元法
- (4) 定积分的分部积分法
- (5) 课后习题

3. 反常积分

- (1) 无穷限的反常积分
- (2) 无界函数的反常积分
- (3) 课后习题

4. 各节参考答案