# 第四章 导数和微分

陈 颖

北京电子科技学院基础部

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何意义
- (4) 单侧导数
- (6)课后习录
- 2. 求导法
- (1) 复合函数的导数(2) 四則法能的异數
- (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的导数 (5)常用函数的异数
- (5)常用函数的导
  (6)课后习题
- 3.高阶导数
- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的高户
- 1 继公
  - 1)海公的辦金
  - 2)很分的运算
  - (3)很分形式的不变
  - (4)高阶微分
  - 5)参变量函数的微:
  - 7)课后习题
- 5.各节参考答案

## 1. 异数的概念

1. 导数的概念

## 1. 异数的概念

## (1)导数的定义

## (1)导数的定义



### 1 早粉的概念

## (1) 导数的定义

- (3) 导数的几何:
- (5) 不可导的

## 2. 求导》

- 1)复合函数的导
- (2)四則运算的导
- (3)認函数的子数(A)表示甚么好的
- (5)常用函数的

## 3.高阶导数

- (4) 本西亞和(1)
- (2)高阶导数的运算法则
- (4)课后习题

### A 28 A

- (1)微分的概念
- (2)很分的运算
- (4)高阶份分
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数的微分形
  (6)微分的应用
- (7)课后习题

## 5.各节参考答案



变速直线运动中设质点运动 位置的函数为

s = f(t),

### 1. 导数的概念

### (1)导数的定义 (3)异数的几何。

- (3)导数的几何意义
  (4)单侧异数
- (5)不可导的分 (6)课后习题

## 2. 求导法则

- (1)复合函数的
- (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的导数 (5)常用函数的导数

## 3.高阶导数

- ). 向 DT 寸 级 /1\女队已私从标
- (2)高阶等数的运算法则
- (4)课后习题

### 1 器 4

- 4. 做分
  - 2) 很分的运算
  - 4)高阶微分
  - (4)向阶级分 [5]表示甚怎么么
  - (6) 微分的应用
- (7)课后习题

### 5.各节参考答案



变速直线运动中设质点运动 位置的函数为

$$s = f(t),$$

则to到t的平均速度为

$$\bar{\nu}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$$

## (1)导数的定义



变速直线运动中设质点运动 位置的函数为

$$s = f(t),$$

则to到t的平均速度为

$$\bar{\nu}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$$

因此在to时刻的瞬时速度为

$$\nu = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

## 1. 导数的概念

## (1) 导数的定义

### 2. 求导法则

## 3.高阶导数

### 4.微分



变速直线运动中设质点运动 位置的函数为

$$s = f(t),$$

则to到t的平均速度为

$$\bar{\nu} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

因此在to时刻的瞬时速度为

$$u = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

1.导数的概念

- (1)导数的定义 (3)导数的几何:
- (4)平衡导数
  (5)不可导的分
- つま早法則
- 2. 不寸 云则
- (2)四則近算的导数 (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导数
- 3.高阶导数
- ). 同 川 寸 蚁 /1) 寸 以 B 4 4 4 1 2 2 2
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导数 (4)课后习题
- 4.微分
- 1)微分的概
- 3)很分形式的不
- 1)高阶微分
- 5)参变量函数的指
- (7)课后习题
- 5.各节参考答言

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限.

设函数y = f(x)在点 $x_0$ 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

存在,则称函数f(x)在点 $x_0$ 处可导,并称此极限为y = f(x)在 点 $x_0$ 处的**导数**,记作 $f'(x_0)$ .

- (1)导数的定义

设函数y = f(x)在点 $x_0$ 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

存在,则称函数f(x)在点 $x_0$ 处可导,并称此极限为y = f(x)在 点 $x_0$ 处的**导数**,记作 $f'(x_0)$ .

若这个极限不存在,则称函数在点xn处**不可导**.

- (1)导数的定义

设函数y = f(x)在点 $x_0$ 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

存在,则称函数f(x)在点 $x_0$ 处可导,并称此极限为y = f(x)在 点 $x_0$ 处的**导数**,记作 $f'(x_0)$ .

若这个极限不存在,则称函数在点xn处不可导.

若函数在开区间/内每点都可导,就称函数在/内可导,此时导 数值构成的新函数称为**导函数**,记作f'(x).

- (1)导数的定义

## 常用函数的导数

函数名称	原函数解析式	导函数解析式
常数函数	y = c	y'=0
幂函数	$y = x^n(n$ 为正整数)	$y' = nx^{n-1}$
正弦函数	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
余弦函数	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$

- (1)导数的定义

例1.1:设
$$f'(x_0)$$
存在,求 $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ .

- (1)导数的定义

例1.1:设
$$f'(x_0)$$
存在,求 $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ .

解:原式= 
$$-\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{(-h)} = -f'(x_0).$$

### 1. 导数的概念

- (1)导数的定义 (3)导数的几何意
  - (3)导数的几何意
    (4)单侧皂料
- (5) 不可导的
- 2. 求导:
- (4) to A 7 A 11 11
  - (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参布量函数的异数
- (5)常用函数的导数
- 3高阶早粉
- 3.向所寸级
- (1)高阶导数的概念
  (2)高阶导数的运算法则
- 3)参变量函数的高阶导
- 1 微众
- 4. 微分
  - 很分的概念
     海公的运算
  - (3)微分形式的不变性
  - (4)高阶微分
  - (5)参变量函数的
- (7)课后习题
- (1)14478

例1.1:设
$$f'(x_0)$$
存在,求 $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ .

解:原式= 
$$-\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{(-h)} = -f'(x_0).$$

例1.2:设
$$f(0) = 0$$
,  $f'(0) = k_0$ , 求 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ .

### 1.导数的概念

- (1)导数的定义 (3)导数的几何点
  - (3)导数的几何意
    (A)当回已私
- (5)不可导的分
- 2. 求导》
- 2.464 (2.74
  - (2)四則近算的异。
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的异
- (5) 市川函数的。

## 3.高阶导数

- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变重函数的;
  (4)课后习题

## 4. 微分

- 1. 做分
- 2)很分的运算
- 3) 銀刀炒減的不 1) 主际涨益
- 4)高阶微分 5)点点另2点;;
- (5)参变量函数的
- (7)课后习题

例1.1:设
$$f'(x_0)$$
存在,求  $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ .

解:原式= 
$$-\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{(-h)} = -f'(x_0).$$

例1.2:设
$$f(0) = 0, f'(0) = k_0, 求 \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

解:原式= 
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = k_0.$$

- (1)导数的定义

例1.3:  $\exists x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \le x^2$ , 那么f(x)在x = 0处 是否可导,如果可导请求出其导数,

- (1)导数的定义

是否可导,如果可导请求出其导数,

解:由题意f(0) = 0,而

$$0 \le |\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}| \le |x|,$$

由两边夹定理知

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

故f(x)在x = 0处可导,且f'(0) = 0.

- (1)导数的定义

例1.4:设f(x)在x = 0处连续,且 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,证明f(x)在x = 00处可导.

- (1)导数的定义

例1.4:设f(x)在x = 0处连续,且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,证明f(x)在x = 0处可导.

证:因为 
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$
存在,有

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

又f(x)在x = 0处连续,故f(0) = 0. 所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0),$$

即f(x) 在x = 0处可导.

### 1.导数的概念

- (1)导数的定义 (3)导数的几何意
- (4) 单侧导数
- (5)不可寻的分: (6)课后习题

### 2. 求导法则

- (1)及分函数的引(2)四則运算的引
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导数
- (6)课后习题

### 3. 高阶导数

- 1)高阶异数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导
- A 100 A

### 4. 微分

- (1)微分的
  (2)微分的
- (3) 微分形式的不
- (4)高阶微分
- 5)参变量函数的
- (b) 微分的应用 (7) 调片口斯
- (-)-...
- 5.各节参考答案

例1.5:已知 
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$$
, 求  $f'(1)$ .

### 1.导数的概念

## (1)导数的定义

- 3) 导数的几何:
- (4)单侧导数
- (5)不可导的

### 2. 求导 ?

- (1)复合函数的导
- (2)四則近算的导数
- (4)参变量函数的
- (5)常用函数的

### 3.高阶异数

- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参交重函数章
  (4)课后习题

## 4. 微分

- 4.4%刀
- (2)微分的运算
- (3) 微分形式的:
- (4) 高阶微分
- (F) 6 + 2 = 0
- (6)微分的应用
- (7)课后习题
- 5 久节糸老父宏

例1.5:已知 
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$$
, 求  $f'(1)$ .

解:因为

$$-1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(1) - f(1 - x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(1 - x) - f(1)}{-2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + (-x)) - f(1)}{(-x)}$$

$$= \frac{1}{2} f'(1)$$

所以f'(1) = -2.

### 1.导数的概念

- (1)导数的定义 (3)异数的几何金
- (3) 于致的几何怎?
  (4) 单侧异数
- (5)不可导的

### 2 求异法

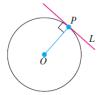
- (1)复合函数的导数
- (2)四则运算的导数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数
- 2 古队已机
- 3. 向所于效
- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (4)谬丘贝斯
- 4.微分
- T. VIC /3
- (2) 微分的运算
- 3)很分形式的不
- 4)高阶微分
- 5) 太市最高數的
- (0) M = 10 M
- (7)课后习题
- 1 + 4 + 10 10

## 1. 异数的概念

- (3)导数的几何意义

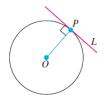
- (3) 导数的几何意义

## 圆的切线

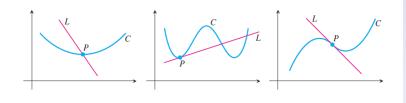


- - (3)导数的几何意义

## 圆的切线



## 下面三个图中,直线L是否为一般曲线 C 的切线?

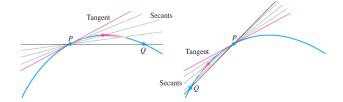


- (3)导数的几何意义

## 切线是如何定义的?

- (3)导数的几何意义

## 切线是如何定义的?



### 1 异数的概念

- (1)导数的定义
- (3)导数的几何意义
- (5)不可导的分类
- 2. 求导法
  - (1)复合函数的导数 (2)四别还曾的总数
  - (2)四則运算的导数 (3)隐函数的导数
  - (5)常用函数的导数
- 2 京阶呈粉

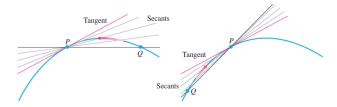
## 3.高阶导数

- 1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- 3)参变重函数的
   4)课后习题

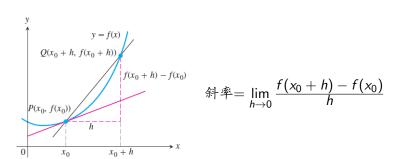
### 4.微分

- 1)很分的概念
- 2)微分的运算
- (3) 板分形式的(A) 玄阶部公
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数
- (7)课后习题

## 切线是如何定义的?

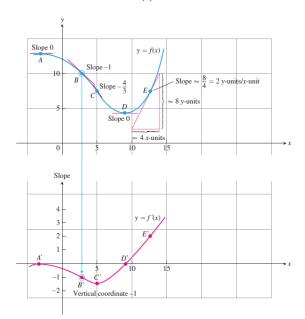


## 切线的斜率



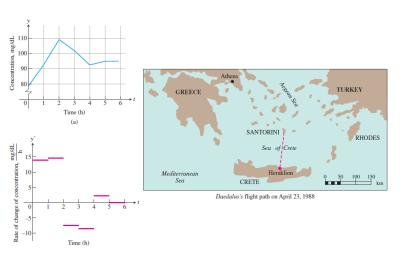
- (3)导数的几何意义

## 原函数与导函数的图形比较(I)



- 1 早粉的概念
- (1)导数的定义
- (3)导数的几何意义
- (5)不可导的分
  - (0)环后习题
- 2.求导法
  - 1)复合函数的导表
- (2)四則运算的导数
  (2)如 不如从已如
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导
- 3 高阶早粉
  - 19019 9
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导
- 4.微分
  - (1) or A 44 les 4
  - (2)很分的运算
  - 5) 微分形式的不?
  - 4)高阶微分
  - , 5)参变量函数的
- (7)课后习题
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

## 原函数与导函数的图形比较(II)



- (3)导数的几何意义

例1.6:曲线 $y = x^2$ 哪一点处的切线与直线y = 3x - 1平行?写 出其切线方程.

- (3)导数的几何意义

例1.6:曲线 $y = x^2$ 哪一点处的切线与直线y = 3x - 1平行?写出其切线方程.

解:y' = 2x,令2x = 3,解得 $x = \frac{3}{2}$ .则在点 $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ 处与直线y = 3x - 1平行的切线方程为

$$y - \frac{9}{4} = 3(x - \frac{3}{2}),$$

整理即为

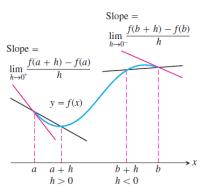
$$12x - 4y - 9 = 0.$$

- 1 异粉的概念
- (1)导数的定义 (3)导数的几何意义
- (4)单侧导数(5)不可导的分类
- 2. 求导法!
- (1)复合函数的号 (2)四则运览的易
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导射
  (6)课后习题
  - .高阶导数
- (1)高阶等数的概念
- (3)参变量函数的高阶导数
- (1)
- 4.微分
  - 1)很分的概念
     2)很分的运算
- (3)很分形式的不
- 4)高阶微分
- 5)参变量函数的
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

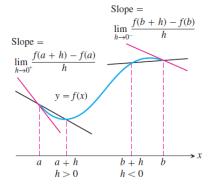
## 1. 异数的概念

## (4)单侧导数

- (4)单侧导数



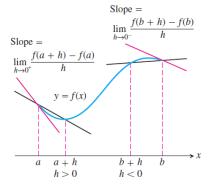
- (4)单侧导数



$$\lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \qquad \lim_{\triangle x \to 0^-}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f'_{-}(x_0) =}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

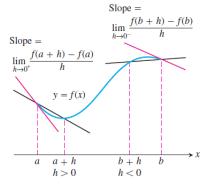
- - (4)单侧导数



$$\lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f'_{+}(x_{0}) = f'_{-}(x_{0})}{\Delta x} \qquad \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(x_{0} + \Delta x) - f(x_{0})}{\Delta x}$$

单点可导的充要条件是单侧导数存在且左导数等于右导数

- (4)单侧导数



$$f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) =$$

$$\lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \qquad \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

单点可导的充要条件是单侧导数存在且左导数等于右导数 开区间可导指的是区间内每点可导,左端点存在右导数,右端点存在左导数.

- 1 早粉的概念
- (1)寻数的足义
- (4) 单侧导数 (5) 不可导的分类
  - ) ) よ日24 m
  - 1)复合函数的导数 2)四则运算的导数
- (4)参变量函数的导数 (5)常用函数的导数
- (5)常用函数的号
  (6)课后习题
- 3.高阶导数
- (1)高阶导数的概念 (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导数 (4)课后习题
- 4.微分
- (1) 微分的概
- (3)很分形式的不 (4)高阶份分
- (4)高阶微分 (6)《亦杂不私品
- [5]参变量函数的
- 7)课后习题
- 5. 久节系老公安

例1.7:设
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ ax, & x \ge 0 \end{cases}$$
,问a取何值时, $f'(x)$ 在( $-\infty$ ,  $+\infty$ ) 都存在,并求出 $f'(x)$ .

- 1. 异数的概念
- (1) 子数时足义 (3) 子数的几何意义
- (4)单侧导数 (5)不可导的分类
- 2. 求导法
  - (1)及含函数的子数
    (2)四則还算的导数
    (3)助品數的監察
- (4) 麥艾重函数的
- 3 高阶早粉
- .高阶导数
- (1)尚阶导数的概念(2)高阶导数的运算法則
- (3)参变量函数的高阶。
- 4.微分
- +. (収分)
  - .)假分的板芯 ?)很分的运算
- (3)很分形式的不
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数
- [7]课后习题
- 力士会业效力

例1.7:设
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ ax, & x \ge 0 \end{cases}$$
,问a取何值时, $f'(x)$ 在( $-\infty$ ,  $+\infty$ ) 都存在,并求出 $f'(x)$ .

解: $\epsilon x = 0$ ,

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^{-}} \cos x = 1,$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^{+}} a = a,$$

故a=1,此时求得

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}.$$

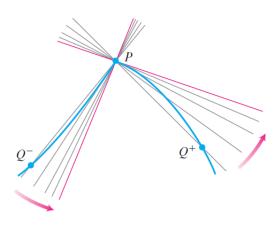
- 1. 异数的概念
- (3) 异数的几何意义
- (4)单侧导数
- (5) 不可导的分
- 2. 求导法!
- (1)复合函数的导数 (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数
- and the second
- . 尚阶于数
- (1)尚阶等数的概念
  (2)高阶等数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导数
- 4.微分
- 4.4% 77 (1) or A 11
- (2)很分的运算 (3)很分形式的不亦姓
- (3)很分形式的小:
  (4)高阶符分
- 4)两阶假分 5)旅亭苦函粉的征
- 7)课后习题
- 力士会 400 0

## 1. 异数的概念

- (5)不可导的分类

- (5)不可导的分类

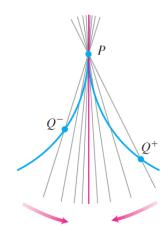
# ▶ 角点



左右导数存在但不等

- (5)不可导的分类

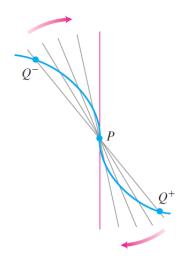
# ▶ 尖点



左右导数一个是负无穷一个是正无穷

- (5)不可导的分类

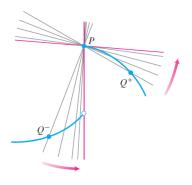
# ▶ 垂直的切线

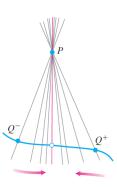


左右导数均是负无穷或均是正无穷

# (5)不可导的分类

# ▶ 间断点





### 1 异粉的概念

- (1)导数的定义
  (3)异数的几何意义
- (3)导数的几何意义
  (4)单侧异数

# (5)不可导的分类

### 2. 求导法则

- (1)复合函数的导
- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的导
- (5)常用函数的导

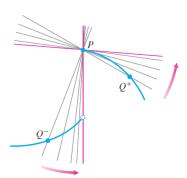
### 2 立队尼斯

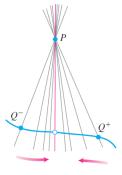
- (1)玄际监标的综合
- (2)高阶异数的运算法则
- (3)参变量函数的高压

## A 494 /

- 1)部分的概念
- 2)微分的运算
- (3)很分形式的习
- 4)高阶微分
- (5)参变量函数的
- (7)课后习题
- 5 久节糸老父宏

# ▶ 间断点

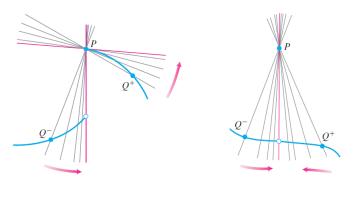




可导必连续

- (5)不可导的分类

# 间断点

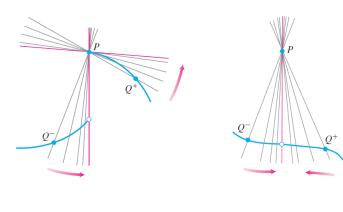


可导必连续

不连续必不可导

- (5)不可导的分类

# 间断点



可导必连续

不连续必不可导

连续未必可导

- (5)不可导的分类

## 1. 异数的概念

# (6)课后习题

- (6)课后习题

- (1) 曲线 $y = x^3$ 在点A处的切线的斜率为3, 求该曲线在点A 处的切线方程。
- (2) 在抛物线 $y = x^2$ 上依次取M(1,1), N(3,9) 两点,作过这 两点的割线,那么抛物线上哪一点处的切线平行于这条 割线,并求这条切线的方程,
- (3) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+1) & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & x > 1 \end{cases}$ ,判断f(x)在x = x = x = 11处是否可导.
- (4) 设函数f(x)在x = 1处连续,且 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x} = 2, \bar{x}f'(1)$ .
- (5) 设函数f(x)是定义在R上的函数,且对任何 $x_1, x_2 \in R$ , 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ , 若 $f(0) \neq 0$ , f'(0) = 1, 证 明:对任何 $x \in R$ 都有f(x) = f'(x).

(6)课后习题

## 2. 求导法则

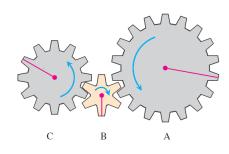
## 2. 求导法则

## 2. 求导法则

## (1)复合函数的导数

# (1)复合函数的异数

齿轮问题:如下图,齿轮B转三圈,齿轮A才转一圈,而齿轮C转一圈,齿轮B 转两圈.那么为了使得齿轮A转一圈,齿轮C得转几圈?



### 1 早粉的概念

- (1)导数的定义
  (3)导数的几何省
- (3)导数的几何意
- (5) 不可导的
- 2. 求导法则

### 2. 水寸 法则

- (1)复含函数的导数
- (2)四則近算的导数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的
  (6)课后习题

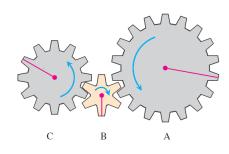
## 3. 高阶导数

- (1) 主际总标的标点
- (2)高阶等数的运算法则
- (3) 季艾重函数章
  (4) 课丘习题

### 4.微分

- 1)很分的概念
- (2) 微分的运算
- (4)高阶份分
- (寸)向所報力
  (5)参变量函数
- (7)课后习题
- (-)----

**齿轮问题**:如下图,齿轮B转三圈,齿轮A才转一圈,而齿轮C转一圈,齿轮B转两圈.那么为了使得齿轮A转一圈,齿轮C得转几圈?



### 1 异数的概念

- (1)导数的定义
  (2)坚好的几何。
- (3)导数的几何意
- (5)不可导的分
- (0)\*\*\*\*\*\*

### 2.求导法则

- (1)复合函数的导数
- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数
- 3高阶异粉

### 3.同川寸效

- (1)高阶导数的概念
  (2)高阶导数的运算法則
- (3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题

### 4.微分

- (1)微分的概念
- (2) 微分的运算
- (4)高阶徵分
- (4)同所扱力
  - 5)参变量函数的微分形 6)循分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

解:3圈.

例2.1:  $\bar{x}y = \cos x^2$ 的导数y'.

### 1. 导数的概念

- (1)导数的定义
- (3)导数的几何意义
- (5) 不可导的
- 0 1: 2: 11

## (1)复合函数的导数

- (1)及分函数的手
- (2) 均 不 約 約 5 約
  - (4)参变量函数的导
- (5)常用函数

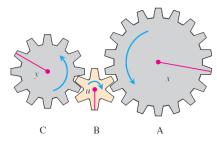
## 3. 高阶导数

- (1) 高阶异数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的;
  (4)四二〇四

## 4.微

- (4) ... . ...
  - 2)很分的运算
  - (3)银分形式的
  - (4)高阶微分
  - (F) 6 = 2 = 0.
  - (5)参变量函数
  - (7)课后引题
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例2.1:  $\bar{x}y = \cos x^2$ 的导数y'.



分析:分别将A,B,C看成是x,u,y三个变量.有如下关系

B和A	$u = x^2$
C和B	$y = \cos u$
C和A	$y = \cos x^2$

那么y对x的导数等于y对u的导数乘上u对y的导数,即

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (-\sin u) \cdot (2x) = -2x \sin x^2.$$

### 1 早粉的概念

- (1)导数的定义
  - (3)导数的几何
    (4)单侧坚料
- (6)课后习题
  - 2 求异法则

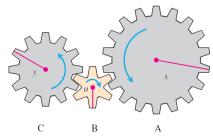
## (1)复合函数的导数

- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的导 (5)常用函数的导数
- (5)常用函数的引
  (6)课后习题
- 3.高阶导数
- (1)高阶异数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (4)课后习题

## 4.微分

- (1)很分
- (2) 微分的运
- (4)高阶微分
- (4)尚阶微分(5)糸亦黃函約;
  - 5) 微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例2.1:  $\bar{x}y = \cos x^2$ 的导数y'.



分析:分别将A,B,C看成是x,u,y三个变量.有如下关系

B和A	$u = x^2$
C和B	$y = \cos u$
C和A	$y = \cos x^2$

那么y对x的导数等于y对u的导数乘上u对y的导数,即

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (-\sin u) \cdot (2x) = -2x \sin x^2.$$

这就是复合函数求导的链条法则.

- (1)复合函数的异数

例2.2:  $xy = \sin(\cos x^3)$ 的导数y'.

### 1.导数的概念

- (1)导数的定义 (3)导数的几何意义
- (4)早倒导数
  (5)不可导的分。
- 2. 求导》

## (1)复合函数的导数

- (1)及分函数的手架
  (2)四則运算的导表
- (4)参变量函数的导
- (5)常用函数的导

## 3高阶早龄

- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (5)参发重函数的:
  (4)谬丘贝斯

## 4.微分

- (1) or A 44 in
  - (2)很分的运算
- (4) 15 15 15 15 1
- (4)高阶微分
- (5) 旅市普函数
- (O) 銀分的經 (O) 細云の照
- (7)课后习题
- (1)\*\*\*\*\*\*
- 5.各节参考答案

例2.2: 
$$xy = \sin(\cos x^3)$$
的导数 $y'$ .

解:令
$$v = x^3$$
, $u = \cos v$ ,那么 $y = \sin u$ ,由链条法则知
$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \cos u \cdot (-\sin v) \cdot (3x^2) = -3x^2 \sin x^3 \cos(\cos x^3).$$

# (1)复合函数的导数

例2.2:  $\bar{x}_{y} = \sin(\cos x^{3})$ 的导数y'.

解:令
$$v = x^3$$
, $u = \cos v$ ,那么 $y = \sin u$ ,由链条法则知  
 $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \cos u \cdot (-\sin v) \cdot (3x^2) = -3x^2 \sin x^3 \cos(\cos x^3)$ .

另解:

$$y' = \cos(\cos x^{3}) \cdot (\cos x^{3})'$$

$$= \cos(\cos x^{3}) \cdot (-\sin x^{3}) \cdot (x^{3})'$$

$$= \cos(\cos x^{3}) \cdot (-\sin x^{3}) \cdot (3x^{2})$$

$$= -3x^{2} \sin x^{3} \cos(\cos x^{3}).$$

# (1)复合函数的异数

例2.3:证明(
$$\ln |x|$$
)' =  $\frac{1}{x}$ , ( $x \neq 0$ ).

## (1)复合函数的导数

例2.3:证明(
$$\ln |x|$$
)' =  $\frac{1}{x}$ , ( $x \neq 0$ ).

证:当x > 0时,

$$(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

当x < 0时,

$$(\ln |x|)' = (\ln (-x))' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x}.$$

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义
  (2)坚新的目标会习
- (3) 导数的几何意义
- (5) 不可导的
- (6)课后习题
- 2. 永于法则
  - (1)复合函数的导数
- (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的导数 (5)常用函数的导数
- 3 京阶呈粉
  - . 同川 寸 蚁
  - (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变重函数的?
  (4)课后习题
- 4.微分
- (-)
- 2) 微分的运算
- (3)很分形式的不
- (4) 高阶微分
- (5)参变量函数
- (7)课后习题
- (1)2000

5.各节参考答案

例2.3:证明
$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, (x \neq 0).$$

证:当x > 0时,

$$(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

当x < 0时,

$$(\ln |x|)' = (\ln (-x))' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x}.$$

注:与
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}(x > 0)$$
的区别.

### 1. 导数的概念

- (1)导数的定义
  (2)坚恕的正知合。
  - (3)导数的几何意》
- (5) 不可导的
- (6)课后习题

## 2. 承于法则

## (1)复含函数的导数

- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数
- (-)

### .高阶导数

- (1) 文弘 巴北 从地。
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题

## 4. 微分

- (1) ss A.M
- (2)微分的运算
- (3) 微分形式的不变性
- (4)高阶微分
- 5)参变量函数的
- (7)课后习题
- (7)课后习题

## 5.各节参考答案

# 请求下列函数的导数:

- (1)  $y = \log_a \sin x^2$
- (2)  $y = \log_a \sin^2 x$
- $(3) y = \sin(\log_a x^2)$
- $(4) y = \sin(\log_a^2 x)$

## 1 异粉的概念

- (1)子数的定义(3)异数的几何音
- (3)导数的几何意
- (5)不可导的
- (6)课后习题

## 2.求导法》

## (1)复合函数的导数

- (1)及合函数的等数 (2)四則运算的异数
- (3)隐函数的导数
- (4)参变重函数:
- (5) 軍用函数

## 3.高阶导数

- J. 回川 寸 奴 /4) ナロロルバ
- (2)高阶导数的运算法则
- [3]参变量函数的高 [4] 細口口照

## 4.微分

- +.4%(7)
- (2)很分的运算
- (3) 微分形式的:
- (4) 高阶微分
- (5) 泰市普函數6
- (D) 微分的应用 (7) 源云 日 照
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

# 请求下列函数的导数:

(1) 
$$y = \log_a \sin x^2$$

(2) 
$$y = \log_a \sin^2 x$$

(3) 
$$y = \sin(\log_a x^2)$$

$$(4) y = \sin(\log_a^2 x)$$

# 答案:

(1) 
$$y' = \frac{2x \cos x^2}{\ln a \sin x^2}$$

$$(2) y' = \frac{2\sin x \cos x}{\ln a \sin^2 x}$$

(3) 
$$y' = \frac{2x \cos(\log_a x^2)}{x^2 \ln a}$$

$$(4) y' = \frac{2\log_a x \cos(\log_a^2 x)}{x \ln a}$$

- (1)复合函数的异数

## 2. 求导法则

- (2)四则运算的导数

- (2)四则运算的导数

$$(1)(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

## (2)四则运算的导数

$$(1)(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

注:此法则可推广到任意有限项的情形,例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

### 1.导数的概念

- (1)导数的定义(3)导数的几何意义
  - (3)导数的几何意》(4)单侧异数
- (5) 不可导的
- 6 1 2 d

## (1)复合函数的

## (2)四則远算的导数

- (3)隐函数的导数
- (4) 麥艾重函数的子 (5) 常用函数的导数
- (0) 珠石 习:

## 3.高阶导数

- (1)高阶等数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- 3)参变量函数的高
   4)课后习题

## 4.微分

- (1)部分的
- 2) 微分的运算
- 3) 很分形式的不多
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数的
- (7)课后习题
- (7)课后习题

## 5.各节参考答案

$$(1)(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

注:此法则可推广到任意有限项的情形,例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

$$(2)(uv)'=u'v+uv'.$$

### 1.导数的概念

- (1)导数的定义
  (3)异数的几何意义
  - (3)导数的几何意义
    (4)当知已知
- (5) 不可导的
  - (0) 44.0 -7.0

## (1)复合函数的

## (2)四則运算的导数

- (2)四则运并的寻数
- (4)参变量函数的 (E) 如 四 2 4 4 4 5 4
- (5)常用函数的导
  (6)课后习题

## 3 高阶早粉

- 5. 向 I 丁 寸 奴
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题

## 4.微分

- (1) 88 (2-66)
- 2) 微分的运算
- (3) 銀分形式則不:
- 4)高阶微分
- 、) (5)参变量函数的
- (7)课后习题
- (7)课后习题

## 5.各节参考答案

$$(1)(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

注:此法则可推广到任意有限项的情形,例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

$$(2)(uv)'=u'v+uv'.$$

推论:(cu(x))' = cu'(x)(c为常数).

- 1.导数的概念
- (1)导数的定义
  (3)导数的几何音》
- (3)导数的几何意义
  (A)並倡島料
- (5)不可导的分
  - (0)14272
- (1) (s A Z 4).44
- (2)四則运算的导数
- (3)隐函数的导数
- (4) 季艾重函数的 (5) 常用函数的异
- (6)课后习题
- 3.高阶导数
- 7. PO 171 Y 3X
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题
- 4. 微分
- (1) ss A
- 2)微分的运算
- 1) \* 15 % 15 /1
- 4)尚阶微分
- 5)参变量函数的
- 7)课后习题
- (/)课后习题
- 5.各节参考答案

$$(1)(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

注:此法则可推广到任意有限项的情形.例如.

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

$$(2)(uv)'=u'v+uv'.$$

推论:
$$(cu(x))' = cu'(x)(c为常数)$$
.

$$(3)(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

- - (2)四则运算的导数

例2.4:  $\bar{x}y = \tan x$ 的导数y'.

## (2)四则运算的导数

例2.4: 
$$\bar{x}y = \tan x$$
的导数 $y'$ .

解:

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

# (2)四则运算的导数

例2.4:  $\bar{x}y = \tan x$ 的导数y'.

解:

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

# 请彷此求出下列导数:

- (1)  $y = \sec x$
- (2)  $y = \cot x$
- (3)  $y = \csc x$

- 1 早粉的概念
- (1)导数的定义 (3)导数的几何。
- (3) 导数的几何
- (5)不可导的分
- (6)课后习题
- 2.求导法

### (1)复合函数的导数 (2)四则运算的导数

- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的导
- (5)常用函数的导
  (6)课戶司题
- 2 立卧足粉
- 3. 尚阶 于 数
- (1)尚阶导数的概念(2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导
- a 100 A
- .做分
- (2) 微分的运算
- 3) 微分形式的不变
- 4)高阶微分
- [5]参变量函数的微
- (7)课后习题
- (1)\*\*\*\*\*\*
  - 5.各节参考答案

例2.4:  $\bar{x}y = \tan x$ 的导数y'.

解:

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

# 请彷此求出下列导数:

$$(1) y = \sec x \qquad \qquad y' = \sec x \tan x$$

$$(2) y = \cot x \qquad \qquad y' = -\csc^2 x$$

### 1. 异数的概念

- (1)导数的定义 (3)导数的几何点
- (3) 导数的几何
- (5)不可导的分
- (6)课后习题

## 2. 永于法则

# (2)四则运算的导数

- (2)四则运并的矛数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导
- つす以巴丸

### 3. 尚阶于数

- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法則
  (3)熬布量函数的高阶异数
- (4)课后习题

### 4.微分

- (1) m A 11
- (2)微分的运算
- (3) 銀力形式的不:(A) 主路銀合
- 4)高阶微分 5) 6 克 2 7 7 11 11 11
- (5)参变量函数的往
- (7)课后习题
- (1)\*\*\*\*\*\*

5.各节参考答案

# 2. 求导法则

- (3)隐函数的导数

- (3)隐函数的导数

# 求解步骤:

- (1) 对由自变量x和因变量y确定的隐式方程两边求导.
- (2) 将v'作为未知数用自变量x表示出来.

- - (3)隐函数的导数

# 求解步骤:

- (1) 对由自变量x和因变量y确定的隐式方程两边求导.
- (2) 将y'作为未知数用自变量x表示出来.

例2.5:  $xy = x^{\alpha}(\alpha \rightarrow y)$  的导数y'.

- 1. 导数的概念
- (1) 于奴的足义
  (3) 异数的几何点
- (3)导数的几何:
  (A)单侧坚恕
- (5) 不可导的分
- 2. 求导法
- 2.40 1 12 14
  - 2)四則近算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参查量函数的异
- (5)常用函数的导数
- 3.高阶导数
- (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的? 4)课后习题
- 4.微分
- 1. (収分)
- (2) 很分的运算
- (3)很分形式的:
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数
- (7)课后习题
- (1)18478
- 5.各节参考答案

# 求解步骤:

- (1) 对由自变量x和因变量y确定的隐式方程两边求导.
- (2) 将y'作为未知数用自变量x表示出来.

例2.5:  $xy = x^{\alpha}(\alpha \rightarrow y)$  的导数y'.

解:当x > 0时,等式两边取对数有

$$\ln y = \alpha \ln x,$$

两边分别再对x求导得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\alpha}{x} \Longrightarrow y' = \frac{\alpha}{x}y = \frac{\alpha}{x}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

- 1. 导数的概念
- (1)于奴印足义
  (3)导数的几何意
  - (3)导数的几何意》(4)单侧导数
- (5)不可等的分 (6)课后习题
- 2.求导法
- 2.40 (1.64)
  - (2)四则运算的导
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导数
- 3.高阶导数
- J. 闽 川 丁蚁
- (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的高阶
     4)课后习题
- 1 24 /
- 4. 微分
- (1)微分的
- (2)微分的运算
- 4)高阶微分
- 。 5)参变量函数的征
- (7)课后习题
- 力士会业效力

例2.6:  $\bar{x}y = a^{x}(a > 0)$ 的导数y'.

- (3)隐函数的导数

例2.6: 
$$xy = a^{x}(a > 0)$$
的导数 $y'$ .

解:由题意有

$$ln y = x ln a,$$

方程两边对x取对数有

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a,$$

所以

$$y' = y \ln a = a^x \ln a$$
.

- 1. 导数的概念
- (1) 示致的定义
  (3) 导数的几何意:
- (4) 单侧导数
- (5)不可导的分
- 2. 求导 %
- (1)复合函数的导数 (2)四别还曾的总数
- (3)隐函数的导数
- (4)参发重函数的寻数
- (6)课后习题
- 3.高阶导数
- J. 图 川 寸 效
- (2)高阶导数的运算法则
  - (3)参变量函数的高阶导。
    (A)调片口题
- 4 微分
- 4. 俶分
- (1) or A 4
- (2)很分的运算
- 4) + 10, 00 0
- 4)高阶微分
- 5)参变量函数的
- 7)福台月期
- (-)-...
- 5.各节参考答案

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义 (3)异龄的几何意。
- (3) 导数的几何:
- (5)不可导的
- 2. 求导》
  - (1) 及合函数的子引
    (2) 四則活笔的异。
  - (2)四則运算的导表 (3)隐函数的导数
  - (4)参变量函数的
- (5)常用函数的。
- 3 京阶星粉
  - .高阶导数
  - (1)高阶导数的概念
  - (2)高阶导数的运算法则
  - (3) 今文里函数时间 (4) 谬丘贝斯
- 1 24 /
- 4. 微分
  - (1)很分的概念
  - (2) St A St F A T St
  - (4) 志阶部公
- (4)尚阶微分
- (5)参变量函数的
- (7);g ⋈ □ □ ≡
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

解:由题意有 $\sin y = x$ , 两边对x求导有 $\cos y \cdot y' = 1$ ,此时因为 $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\cos y \ge 0$ , 故

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

所以

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- 1. 导数的概念
- (2) 号数的定义
- (3) TX 07/17 2
- (5)不可导的分
- 2. 求导法
  - (1)复合函数的导数
- (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数
- 3.高阶导数
  - J. 时 川 寸 改
- (2)高阶导数的运算法则
- (4)课后习题
- 4.微分
- 4.7%(7)
- (2)很分的运算
- 3) 微分形式的不变的
- (4)高阶微分 (E) & = = = = = = =
- ))参发重函数的微分; 5)微分的应用
- 7)课后习题
- 5.各节参考答案

解:由题意有 $\sin v = x$ , 两边对x求导有 $\cos v \cdot v' = 1$ ,此时因 为 $y \in [-\pi/2, \pi/2], \cos y \ge 0$ ,故

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2},$$

所以

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

请彷此求出下列导数:

- (1)  $y = \arccos x$
- (2)  $y = \arctan x$
- (3)  $v = \operatorname{arccot} x$

- (3)隐函数的导数

解:由题意有 $\sin y = x$ ,两边对x求导有 $\cos y \cdot y' = 1$ ,此时因为 $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ , $\cos y \geq 0$ ,故

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

所以

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

请彷此求出下列导数:

(1) 
$$y = \arccos x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) 
$$y = \arctan x$$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

(3) 
$$y = \operatorname{arccot} x$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

- 1 异粉的概念
- (1) 导数的定义
- (3) 导数的几何点
- (5)不可导的分:
- つま早法服
- (1)自会函数的异数
- (2)四則运算的导数 (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导 (6)课后习题
  - 3 高阶早粉
- (2)高阶导数的运算法则
  - (3)参变量函数的高阶导。
    (4)课后习题
- 4.微分
- (1)很分的概念
- (2)微分的运弄 (3)微分形式的不变
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数的
- 6) 微分的应用
  7) 课后习题
- (7)採后习题
- 5.各节参考答案

例2.8: 
$$\bar{x}y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(0 < x < 1)$$
 的导数 $y'$ .

- - (3)隐函数的导数

例2.8: 
$$\bar{x}y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(0 < x < 1)$$
 的导数 $y'$ .

解:等式两边取对数有  $\ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln (1-x) - \frac{1}{2} \ln (1+x),$ 

然后两边再对x求导有

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)},$$

$$y' = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{x}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

- 1.导数的概念
- (1)于致时足义(3)异数的几何意义
- (4) 单侧导数
- (5)不可导的分:
  (6)课戶日期
- 2. 求异治
  - (1)复合函数的导数
  - (3)隐函数的导数
  - (4)参变量函数的导数 (5)常用函数的异数
- (6)课后习题
  - .高阶导数
  - (1)高阶异数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
  - (3)参变量函数的高阶。 (4)课后习题
- 4.微分
- 4.7%(7)
- (2) 微分的运算
- 3)很分形式的不
   4)高阶份分
- 4)两阶假分 5)表示最高新的
- (b) 微分的应用 (7) 混戶 以斯

# 2. 求导法则

# (4)参变量函数的导数

- (4)参变量函数的导数

给定参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 具有连续的导函数,且

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0,$$

则

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义
  (3)异数的几何意:
- (3) 于仮切几下(A) 並相及料
- (5) 不可导的
- 2. 求导法!
- (1)复合函数的导数(2)四則运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数 (6)常用函数的导数
- .高阶导数
- (1)高阶导数的概念 (2)高阶异数的运算法则
- 3)参变量函数的高品
- 1 微八
- 4.微分
- (1) 很分的玩店 (2) 很分的运算
- 3) 微分形式的不变作
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数:
- (O) 銀分的应用 (7) 课后习题
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

给定参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 具有连续的导函数,且

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0,$$

则

▶  $\varphi'(t_0) \neq 0$ 时,有

$$y_x'(t_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y/\triangle t}{\triangle x/\triangle t} = \frac{\lim_{\triangle t \to 0} (\triangle y/\triangle t)}{\lim_{\triangle t \to 0} (\triangle x/\triangle t)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

- (4)参变量函数的导数

给定参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 具有连续的导函数,且

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0,$$

则

▶  $\varphi'(t_0) \neq 0$ 时,有

$$y_x'(t_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y/\triangle t}{\triangle x/\triangle t} = \frac{\lim_{\triangle t \to 0} (\triangle y/\triangle t)}{\lim_{\triangle t \to 0} (\triangle x/\triangle t)} = \frac{\psi'(t_0)^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

▶  $\psi'(t_0) \neq 0$ 时,有

$$x_y'(t_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle y} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x/\triangle t}{\triangle y/\triangle t} = \frac{\lim_{\triangle t \to 0} (\triangle x/\triangle t)}{\lim_{\triangle t \to 0} (\triangle y/\triangle t)} = \frac{\varphi'(t_0)^{\text{(Signer)}}}{\psi'(t_0)}$$

1. 导数的概念

(1)导数的定义(3)导数的几何意

(5)不可导的分

2. 求异法则

(1)复合函数的导数 (2)四则运算的导数

(4)参变量函数的导数 (5)常用函数的导数

(6)课后习题

.高阶导数

(1)很分的概念
(2)那公的还算

3)很分形式的不多

1)高阶微分 5)出亦甚而貼的2

5)参变量函数的微 5)涨分的应用 例2.9:设由参数方程

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0 < t < \pi)$$

确定函数 $y = y(x), \bar{x}y'_x$ .

- (4)参变量函数的导数

例2.9:设由参数方程

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0 < t < \pi)$$

确定函数 $y = y(x), x y'_x$ .

解:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t.$$

- (4)参变量函数的导数

# 2. 求导法则

- (5)常用函数的导数

- (5)常用函数的异数

函数名称	原函数解析式	导函数解析式
常数函数	y = c	y'=0
幂函数	$y = x^{\alpha}(\alpha \beta y)$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
指数函数	$y=a^{x}$	$y'=a^{x}\ln a$
	$y = e^x$	$y'=e^x$
对数函数	$y = \log_a x$	$y'=1/(x\ln a)$
	$y = \ln x$	y'=1/x
	$y = \ln  x $	y'=1/x
正弦函数	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
余弦函数	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
正切函数	$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$
余切函数	$y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$
正割函数	$y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$
余割函数	$y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$
反正弦函数	$y = \arcsin x$	$y'=1/\sqrt{1-x^2}$
反余弦函数	$y = \arccos x$	$y' = -1/\sqrt{1-x^2}$
反正切函数	$y = \arctan x$	$y'=1/(1+x^2)$
反余切函数	$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -1/(1+x^2)$

- 1.导数的概念
- 1)导数的定义 3)导数的几何意义
- (5)不可导的分类
- 求异法
- )复合函数的导数 )四則近算的导数 )隐函数的导数
- (5)常用函数的导数
  - 高阶导数
- (1)高阶等数的概念 (2)高阶等数的运算法则 (2)共业是不知识实际总数
- 、, 4.微分
  - )很分的概念 )很分的运算 )那八彩之丛工
  - 微分形式的不变 高阶微分
  - 两阶假分 参变量函数的微
  - ) 微分的应用
- (1)环石刁地
- 5.各节参考名

# 2. 求导法则

# (6)课后习题

- (6)课后习题

(1) 已知
$$y = x^{\sin x}, x > 0$$
,求 $y'$ .

(2) 已知
$$y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$$
,当 $x > 4$ 时求 $y'$ .

(3) 已知
$$x^2 + y^2 - xy = 1$$
,求 $y'$ .

(4) 求隐函数
$$y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$$
在 $x = 0$ 处的导数.

(5) 设由参数方程 
$$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \sin y = 1 \end{cases}$$
  $(0 < t < 1)$  确定 函数  $y = y(x)$ , 求 $y'_x$ .

(6) 设
$$y = x + e^x$$
,求其反函数的导数.

## 1. 导数的概念

- (1)导数的定义(3)导数的几何意义
- (4)单侧导数
- (5) 不可寻的分。

### 2. 求导法则

- 1)复合函数的导数
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导数

# (6)课后习题

## 尚阶于数

- 1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则 (3)参变量函数的高阶导数
- (3)麥交重函数的尚別
  (4)课后习题

## 4.微分

- (1)部分的
- (2)微分的运昇
  (3)微分形式的不:
- 4)高阶微分
- +)问所佩刀 5)参变量函数的微
- (7)课后习题
- 5 各节参考答案

# 3.高阶异数

- 3.高阶导数

# 3.高阶异数

# (1)高阶导数的概念

# (1)高阶导数的概念

若函数y = f(x)的导数y' = f'(x)可导,则称f'(x)的导数为f(x)的**二阶导数**,记作y'',即

$$y''=(y')'.$$

同理,二阶导数的导数称为三**阶导数**,依此类推,n-1 阶导数的导数称为n **阶导数**,分别记作

$$y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}.$$

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何素
- (3)导数的几何意: (1)单個总粒
- (5) 不可导的分
- 2. 求导法则
- (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数 (6)课后习题
- 3.高阶导数
- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶等数的运算法则 (2)台亦毕不弘从亦取已叔
- (1)442
- 4.微分
- (2) 微分的运算
- (3)很分形式的不变
- (4)高阶微分
- 6) 微分的应用
- 7)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.1:设
$$y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$
,求 $y^{(n)}$ .

- 1 异粉的概念
- (1)导数的定义
  (3)异数的几何意义
- (3) 子致的几何怎义 (4) 单侧导数
- (6)课后习题
- 2. 求导?
  - (1)复合函数的号
    (2)如則还質的易
  - (3)隐函数的导数
  - (5)常用函数的
  - 0 士以已初
  - 3. 高阶导数
  - (1)高阶导数的概念
    - 2)高阶导数的运算法则
  - (3)参变量函数的(4)课后习题
- 4.微分
- (1)部分的排
- (3) 银分形式的
- (4)高阶微分
- (5) 太市最高數
- 6)很分的应用
- (7)课后习题
- - -

例3.1:设
$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, x y^{(n)}$$
.

$$y' = a_1 + 2!a_2x + \dots + na_nx^{n-1},$$
  
 $y'' = 2!a_2 + 3!a_3x + n(n-1)a_nx^{n-2},$   
 $\dots$   
 $y^{(n)} = n!a_n.$ 

- 1.导数的概念
- (1) 导数的定义(3) 导数的几何意
- (3) 于致的几円 2 (4) 单侧导数
- (5) 不可导的分
- 2. 求导法
  - (1)复合函数的导数 (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导
- 3.高阶导数
- (1)高阶导数的概念
- 高阶导数的运算法則
   参变量函数的高阶导数
- 1 24 /
- .微分
- 2)很分的运算
- 3)很分形式的不
- 4)高阶微分
- (5)参变量函数台
  (6)份公的应用
- (7)课后习题
- 5 各节参考答案

例3.1:设
$$y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, xy^{(n)}$$
.

$$y' = a_1 + 2!a_2x + \dots + na_nx^{n-1},$$
  

$$y'' = 2!a_2 + 3!a_3x + n(n-1)a_nx^{n-2},$$
  

$$\dots$$
  

$$y^{(n)} = n!a_n.$$

例3.2:设
$$y = e^{ax}$$
,求 $y^{(n)}$ .

- 1.导数的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何意义
- (4)单侧导数 (E) 不可以认为。
- (6)课后习题
- 2. 求导法
  - (2)四则运算的导数 (2)四则运算的导数
- (4)参变量函数的导数 (5)常用函数的导数
- (5)常用函数的号
  (6)课后习题
- 3.高阶导数

## (1)高阶导数的概念

- (2)高阶导数的运算法则 (3)参变量函数的高阶导数
- . . . . .
- 4.微分
  - L)很分的概念
  - 3)很分形式的不变
  - 4)高阶微分
  - 5)参变量函数的
- (7)课后习题
- 5 各节参考答案

例3.1:设
$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \bar{x} y^{(n)}$$
.

$$y' = a_1 + 2!a_2x + \dots + na_nx^{n-1},$$
  
 $y'' = 2!a_2 + 3!a_3x + n(n-1)a_nx^{n-2},$   
 $\dots$   
 $a_n(n) = n!a_n.$ 

例3.2:设
$$y = e^{ax}$$
,求 $y^{(n)}$ .

解:

$$y' = ae^{ax},$$
  

$$y'' = a^{2}e^{ax},$$
  

$$...$$
  

$$y^{(n)} = a^{n}e^{ax}.$$

### 1 早粉的概念

- (1)导数的定义
  (3)异数的几何音
  - (3)导数的几何点 (1)分别已址
- (5)不可导的分类

### 2. 求异法

- (1)复合函数的导
   (2)四則运算的导
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导
- 3.高阶导数

## (1)高阶导数的概念

- (2)高阶导数的运算法则
  (3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题

### 4. 微分

- (1) as A
- (2) 很分的运
- (3)银分形式的/ (4)高阶份公
- (4)高阶微分
  (5)カホコスれい
- (6) 微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.3:设
$$y = \ln(1+x)$$
,求 $y^{(n)}$ .

- (1)高阶导数的概念

例3.3:设
$$y = \ln(1+x)$$
,求 $y^{(n)}$ .

$$y' = \frac{1}{1+x},$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y''' = (-1)^2 \frac{2!}{(1+x)^3},$$
...
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

### 1. 异数的概念

- (1)导数的定义
  (3)异数的几何意义
- (3)导数的几何意义
- (5)不可导的

### つま早法

- (1)复合函数的导数
   (2)如則泛質的基準
- (2)四则运并的寻数
- (4)参变重函数的导数 (5)常用函数的导数
- (6)课后习题

### .高阶导数

## (1)高阶导数的概念

- (2)高阶导数的运算法則
  (3)表示最函数的高阶异数
- (3)参变量函数的高
  (4)课后习题

## 4.微

- (4) ....
- (3)很分形式的不
- 4)高阶微分
- 1)5)参查量函数的
- 0) 微分的应用 7) 四三〇四
- (7)环石习题
- 5.各节参考答案

例3.4:设
$$f(x) = 3x^3 + x^2|x|, \bar{x}f''(x).$$

- 1. 异数的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何意义
- (3) 守奴町儿門 (4) 单侧导数
- (5)不可导的

### 2. 求导

- (1)复合函数的导
  (2)如則还質的异
- (2)购买还非的干卖
- (4)参变量函数的
- (5)常用函数的
- 0 士以已初

### 3.同川寸效

## (1)高阶导数的概念

- (2)高阶等数的运算法则
- (3)分叉至四級。
  (4)课后习题

## 4.微

- 4.4%刀
  - 2) 微分的运算
- (3)很分形式的不
- (4)高阶微分
- (F) 4 + 2 z 4.
- (5)参变量函数
- (7)採后习题
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.4:设
$$f(x) = 3x^3 + x^2|x|$$
,求 $f''(x)$ .

解: 因为

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x^3, & x < 0 \end{cases}$$

又

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{2x^{3} - 0}{x - 0} = 0,$$
  
 $f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{4x^{3} - 0}{x - 0} = 0,$ 

所以

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 6x^2, & x < 0 \end{cases}$$

- 1 早粉的概念
- (1) 导数的定义
  - (3) 子数的几何恋(4) 单侧导数
- (5)不可导的分
- 2 求异法
- (1)复合函数的导致
- (2)四則近算的导数 (3)限函数的异数
- (4)参变量函数的引
  (5)常用函数的异构
- (5)常用函数的引
  (6)课后习题
  - 3.高阶导数
- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
  (3)熬市最高數的高阶异數
- (3)分叉里四致。(4)课后习题
- 4.微分
- 4. 微分
  - 2) 微分的运算
  - 5)微分形式的不: 4)高阶微分
  - 1)高阶微分 5)参变量函数的/
  - 6) 很分的应用7) 课后习题
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

此时

$$f''_{-}(0) = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{6x^{2} - 0}{x - 0} = 0,$$
  
 $f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{12x^{2} - 0}{x - 0} = 0,$ 

故

$$f''(x) = \begin{cases} 24x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 12x, & x < 0 \end{cases}.$$

- 1.导数的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何意义
- (4)单侧导数(5)不可导的分类
- (0)140000
- 2.求导法则
- (1)及合函数的寻数 (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导表
- 3高阶早粉
  - (1)高阶导数的概念
  - (1)尚所等数的概念(2)京助专业从注意计
  - 3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题
- 4. 微分
  - 4. 似分
  - (2)微分的运算
  - (3) 微分形式的不
  - (4)高阶微分
  - 3) 微分的应用
  - 7)课后习题
  - 5.各节参考答案

# 3.高阶异数

- (2)高阶导数的运算法则

- (2)高阶导数的运算法则

设函数u = u(x)和v = v(x)都有n阶导数,则

- 1.导数的概念
- (1)导数的定义(2)坚料的几何音
- (3) 导数的几何:
- (5) 不可导的
- 2. 求导》
- - (2)四则运算的导
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的异
- (6)课后习题
- 3.高阶导数
- /11 of th. 15. 41. 44. 44. 44.
- (2)高阶导数的运算法则
- (2)出水等无料的主体及料
- 4)课后习题
- A 404 A
- 4. 微分
  - (1)很分的概念
- (2) 110 77 117 12 17
- (4) of the or A
- (4)高阶微分
- (5) & # # A A
- (O) 銀分的經 (7) 四三〇四
- (7)课后习题
- 1 + 4 + 10

设函数u = u(x) + v(x)都有n阶导数,则

• 
$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$
.

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义
  (2)坚新的几何音
- (3) 导数的几何
- (5)不可导的
- つま早日
  - (1)复合函数的导
  - (2)四則运算的导数
  - (4)参变量函数的
  - (5)常用函数的导
- 2 立卧足数
- 3. 尚阶于数
- (1)尚阶导数的概念
  (2)高阶导数的运算法则
  - 2)尚阶子数的运界法则
  - 5)麥艾重函数的尚阶
    4)课后习题
- 4.微分
- 4.4%77
- (2) 形分的话能
- (3)微分形式的不变
- (4)高阶微分
- (5) 泰市量函数
- 6) 微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

设函数u = u(x)和v = v(x)都有n阶导数,则

- $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$ .
- ► (Cu)<sup>(n)</sup> = Cu<sup>(n)</sup> (C为常数).

## 1.导数的概念

- (1)导数的定义
  (3)坚新的几何音
- (3) 导数的几何:
- (5) 不可导的

## つお呈生

- (1) 5 A Z # /
- (2)四则运算的导
- (3)隐函数的导数
  (A)表示甚而此的是
- (5)常用函数的导数
- 0 古水区如

## 3. 高阶导数

# (2)高阶导数的运算法则

# 3)参变量函数的高阶导数

# 1)课后习题

## 4.微分

- 4.4%(刀)
- (2) 微分的运算
- (3)微分形式的不变
- (4)高阶微分
- (5) 泰市最高計
- (b) 微分的应用 (7) 18 4 1 1 1 1 1
- (7)课后习题

## 5.各节参考答案

设函数u = u(x) + v(x)都有n阶导数,则

• 
$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$
.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

## 1. 导数的概念

- (1) 子数的定义
  (3) 子数的几何意
- (3) 导数的几何:
- (5) 不可导的:

## 2. 求导法

- (1)复合函数的(2)四則运算的
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导
- (6)课后习题

## 3. 高阶导数

- (1)高阶等数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的高阶导数

## 1 继公

- 4. 微分
- (2)微分的运算
- (3) 微分形式的不
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数
- (7)课后习题

设函数u = u(x) + v(x)都有n阶导数,则

• 
$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$
.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

注:第三个公式称为莱布尼茨公式,注意和二项展开式

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

的联系与区别.

- 1. 导数的概念
- (1) 子数的定义
  (3) 导数的几何意
- (4) 单侧导数
- (5)不可等的分 (6)课后习题
- 2.求导法
- (1)复合函数的导
   (2)四則运算的导
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导
- 2 京队已机
- 3. 尚阶于数
- (2)高阶导数的远算法则
- (3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题
- 4. 微分
- (1) 四八
- (2) 微分的运算(3) 微分形さめて
- (4)高阶微分
- (寸)问所服力 (5)参变量函数台
- 5)很分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.5:设 $y = x^2 e^{2x}$ ,求 $y^{(20)}$ .

# (2)高阶导数的运算法则

例3.5:设
$$y = x^2 e^{2x}$$
,求 $y^{(20)}$ .

解:今

$$u(x) = x^2, v(x) = e^{2x},$$

则

$$u' = 2x, u'' = 2, u^{(k)} = 0 \ (k = 3, 4, \dots, 20),$$
  
$$v^{(k)} = 2^k e^{2x} \ (k = 1, 2, \dots, 20),$$

代入莱布尼茨公式得

$$y^{(20)} = C_{20}^{18} u^{(2)} v^{(18)} + C_{20}^{19} u^{(1)} v^{(19)} + C_{20}^{20} u^{(0)} v^{(20)}$$

$$= 190 \cdot 2 \cdot (2^{18} e^{2x}) + 20 \cdot (2x) \cdot (2^{19} e^{2x}) + x^2 \cdot (2^{20} e^{2x})$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).$$

(2)高阶导数的运算法则

# 3.高阶异数

- (3)参变量函数的高阶导数

- (3)参变量函数的高阶导数

# 对于一般参变量函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

其一阶导数为

$$y_{\mathsf{x}}' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

所以二阶导数为

$$y_x'' = (y_x')_x' = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

依此可求其他高阶函数.

- 1. 导数的概念
- (1) 子数的定义
  (2) 显新的几何音
- (4)单侧异新
- (5) 不可导的
- (6)课后习题
- 2. 求导法
  - (1)复合函数的引
  - (2)四則运算的导数
    (2)如及私从已私
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导射
  (6)理戶口頭
- 3.高阶导数
  - 1)女队已经从他人
  - 1)两阶并数的概念 2)亦弧步业从泛台江田
- (3)参变量函数的高阶导数
- (**3)** 麥克里姆級的國历 (4) 课后习题
- 4.微分
- 4.4% 7J
- (2) 微分的运
- (3) 微分形式的不
- (4)高阶微分 (E) 台市及区址社
- 5)参变量函数的
- 7)课后习题
- /)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.6:求参变量函数

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$$

的二阶导数 $y_x''$ ,其中 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ .

## 1. 导数的概念

- (1)导数的定义(3)导数的几何意
- (3)导数的几何意
  (4)单侧导数
- (5)不可导的

## 2. 求导》

- (1)复合函数的导表
   (2)四副泛贯的基本
- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的
- (5)常用函数的

## 3高阶早粉

- (1) 主阶是新的概念
- (2)高阶导数的运算法则

## (3)参变量函数的高阶导数

(4)课后习题

## 4.微分

- 4.4以77
- (2)微分的运算
- (3) 微分形式的:
- (4) 高阶微分
- (4)尚阶级分
- (6) 微分的应用
- (7)课后习题

例3.6: 求参变量函数

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$$

的二阶导数
$$y_x''$$
,其中 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ .

解:

$$y_x' = \frac{(e^t \sin t)'}{(e^t \cos t)'} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t},$$

所以

$$y_x'' = \frac{(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t})'}{(e^t \cos t)'} = \frac{2}{e^t (\cos t - \sin t)^3}.$$

- (3)参变量函数的高阶导数

# 3.高阶导数

- (4)课后习题

- (4)课后习题

(1) 设
$$y = \sin x$$
, 求 $y^{(n)}$ .

(2) 设
$$y = \cos x$$
,求 $y^{(n)}$ .

(4) 
$$i \xi y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \ \sharp y^{(n)}.$$

(5) 
$$f(x)$$
任意阶可导,且 $f'(x) = f^2(x)$ ,则当 $n \ge 2$ 时,求 $f^{(n)}(x)$ .

(6) 己知
$$x'_y = \frac{1}{y'}$$
, 证明 $x''_y = -\frac{y''}{(y')^3}$ .

(4)课后习题

# 4.微分

# 4. 微分

# 4.微分

# (1)微分的概念

# (1)微分的概念

引例:一块正方形金属片受温度变化的影响,其边长由xn变 到 $x_0$  + △x,问此金属片面积改变了多少?

- (1)微分的概念

引例:一块正方形金属片受温度变化的影响,其边长由xn变 到 $x_0$  + △x,问此金属片面积改变了多少?

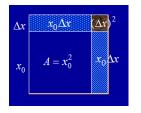
解:设金属片边长为x.面积为A.则

$$A = x^2$$

当边长由 $x_0$ 变到 $x_0 + \triangle x$ 时,面积的增量为

$$\triangle A = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \triangle x}_{\text{关于}\triangle x} + \underbrace{(\triangle x)^2}_{\text{ } \triangle x \to 0} \text{ 时为高阶无穷小}$$



- (1)微分的概念

引例:一块正方形金属片受温度变化的影响,其边长由xn变 到 $x_0$  + △x,问此金属片面积改变了多少?

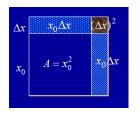
解:设金属片边长为x.面积为A.则

$$A = x^2$$

当边长由 $x_0$ 变到 $x_0$  +  $\triangle x$ 时,面积的增量为

$$\triangle A = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \triangle x}_{\text{关于}\triangle x} + \underbrace{(\triangle x)^2}_{\text{ $\triangle x \to 0$}},$$



故有

$$\triangle A \approx \underbrace{2x_0 \triangle x}_{4x + 1} \underbrace{x_0 * x_0}_{x_0} \underbrace{x_0}_{x_0}$$

称为函数 $A = x^2$  在xn的微分

- (1)微分的概念

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A \triangle x + o(\triangle x), \qquad (1)$$

其中A 为不依赖于 $\triangle x$ 的常数,则称函数y = f(x)在点 $x_0$ 可微,而 $A\triangle x$ 称为f(x)在点 $x_0$ 的微分,记作dy或df,即

$$dy = df = A \triangle x$$
.

- 1. 异数的概念
- (1)寸致的尺久
  (3)异数的几何。
- (3)导数的几何意义
- (5)不可导的分
- (6)课后习题
- 2. 汞于法
  - (1)复合函数的
- (2)四则运算的引
- (4)参变量函数的导
- (5)常用函数的。
- 3.高阶导数
- (2)高阶导数的运算法则
  - 4)课后习题
- 4.微分
- (1)很分的概念
- (2) # 45 65 6 9
- (3) 微分形式的不变性
- 4)高阶微分
- 5)参变量函数的征
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A \triangle x + o(\triangle x), \qquad (1)$$

其中A 为不依赖于 $\triangle x$ 的常数,则称函数y = f(x)在点 $x_0$ 可微,而 $A \triangle x$ 称为f(x)在点 $x_0$ 的微分,记作dy或df,即

$$dy = df = A \triangle x$$
.

A = ?

- 1. 导数的概念
- (1) 于级时足义
  (3) 导数的几何意义
- (4)单侧导数 (E) 不可以从入来
- (6)课后习题
- 2.求导法
  - (1)复合函数的
- (2)四則近算的导數 (3)隐函数的导數
- (4)参变重函数章
  (5)常用函数的3
- (6)课后习题
- 3.高阶导数
- (1) 50 0 0 0
- (2)高阶导数的运算法则
  - [4]课后习题
- 4.微分
- (1)很分的概念
- (2)微分的运算
- 3)很分形式的不变性
- 4)高阶微分
- (5)参变量函数的
- (7)课后习题
- 5 久节糸老父宏

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A \triangle x + o(\triangle x), \qquad (1)$$

其中A 为不依赖于 $\triangle x$ 的常数,则称函数y = f(x)在点 $x_0$ 可 微,而 $A\triangle x$ 称为f(x)在点 $x_0$ 的微分,记作dy或df,即

$$dy = df = A \triangle x$$
.

将(1)式两端同时除以△x并取极限有

$$A = ? \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} A + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{o(\triangle x)}{\triangle x}$$

- (1)微分的概念

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A \triangle x + o(\triangle x),$$

其中A 为不依赖于 $\triangle x$ 的常数,则称函数y = f(x)在点 $x_0$ 可微,而 $A \triangle x$ 称为f(x)在点 $x_0$ 的微分,记作dy或df,即

$$dy = df = A \triangle x$$
.

将(1)式两端同时除以△x并取极限有

$$A = \underline{f'(x_0)} \qquad \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} A + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{o(\triangle x)}{\triangle x}$$

- 1 异粉的概念
- (1)导数的定义
  (2)坚新的几句
- (3) 导数的几何:
- (5)不可导的分
- 2. 求异法则
- 2. 水寸法则
- (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数(4)参专量函数的
- (5)常用函数的导
- 3.高阶导数
- (4) 50 0 1 3 30
- (2)高阶导数的运算法则
  - (4)课后习题
- 4. 微分
- (1)很分的概念
- (2)微分的运算
- (4) 高阶份公
- 4)两阶假分 5)表示苦函数的2
- 6) 很分的应用 7) 源 5 日 5 日
- (7)课后习题
- 5.各节参考答:

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A \triangle x + o(\triangle x),$$

其中A 为不依赖于 $\triangle x$ 的常数,则称函数y = f(x)在点 $x_0$ 可微,而 $A \triangle x$ 称为f(x)在点 $x_0$ 的微分,记作dy或df,即

$$dy = df = A \triangle x$$
.

# 可微即可导.

将(1)式两端同时除以△x并取极限有

$$A = \underline{f'(x_0)} \qquad \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} A + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{o(\triangle x)}{\triangle x}$$

- 1. 异数的概念
- (1) 子数的定义
  (3) 子数的几何
- (3)导数的几何意
  (4)单侧总型
- (5) 不可导的分
- 2. 求导法则
- 2.不可以则
- (2)四則运算的导数 (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的
- (5)常用函数的导
  (6)课戶日期
- 3.高阶导数
- J. 10 17 7 90
- (2)高阶导数的运算法则
  - (4)课后习题
- 4. 微分
- (1)微分的概念
- (2) 微分的运算
  - 3)銀刀形式的小
     4)高阶份公
- 5) 微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答:

注1:可微即可导,但是微分并不等于导数,微分等于导数乘上 函数自变量的改变量.

## 1. 导数的概念

- (1)导数的定义 (3)导数的几何意义
- (4)单侧导数(5)不可导的分类
- つお見法

## 2.求导法

- (1)及分詞致的子並(2)四則近算的等差
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导
- 2 立队足数

## 尚阶于数

- (1)高阶导数的概念 (2)点阶导数的概念
- (3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习题

## 4. 俶分

## (1)微分的概念

- (2)微分的运算
- (3)很分形式的不变
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数的
- (O) 銀方の应用 (7) 銀后月颢
- (1)18448
- 5.各节参考答案

注1:可微即可导,但是微分并不等于导数,微分等于导数乘上 函数自变量的改变量.

注2:函数自变量的改变量可以用 $\triangle x$ 来表示,那 $\triangle x$ 又是什么 呢?考察函数V = X,显然由微分的定义我们有

$$dy = d(x) = dx = 1 \cdot \triangle x = \triangle x,$$

所以 $\triangle x$ 可以看成是函数y = x的微分.

## (1)微分的概念

注1:可微即可导,但是微分并不等于导数,微分等于导数乘上 函数自变量的改变量.

 $\mathbf{i}\mathbf{2}$ :函数自变量的改变量可以用 $\triangle x$ 来表示,那 $\triangle x$ 又是什么 呢?考察函数V = X,显然由微分的定义我们有

$$dy = d(x) = dx = 1 \cdot \triangle x = \triangle x$$
,

所以 $\triangle x$ 可以看成是函数y = x的微分.

注3:由

$$dy = A \triangle x = y' \triangle x = y' dx$$

知道

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

即导数可以看成是因变量和自变量微分的商.也称为微商.

- (1)微分的概念

# 数的概念

- (1) 导数的定义
- (3)导数的几何意义
  - (4) 平侧 子数
  - (5)不可导的分类
- (6)课后

## 2. 求导法则

- (1)复合函数的导数
- (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数
- (6)课后习题

# 3.高阶导数

- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶异数的运算法则
- (3)参弯量函数的高阶异数
- (4)课后习题

# 4.微分

- (1)微分的概念
- (2)微分的运算
- (3)微分形式的不变点
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数的微分形式
- (6)微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

- 导数的概念
- (1)导数的定义
  (3)导数的几何意义
- (4)单侧导数
- (6)课后习题
  - 求导法则
- (2)四則运算的导数 (3)助品粒的总数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导数
- 高阶导数
  - 51 所于 数
  - 高阶导数的概念
- 2)高阶导数的运算法则
- |分文主四数 \*\*/ \*\* |课后习题
- .微分
- 1)很分的概念
- 1)很分的概念
- (2)微分的运算
  - )很分形式的不? | 立队#4八
  - )高阶微分
  - )一小瓜» )参变量函数的往
  - 5)微分的应用
  - 7)课后习题
- (1)冰石刁鸡
- 各节参考答

- (2)微分的运算

 $d(u \pm v) = du \pm dv$ 

- (2)微分的运算

d(u ± v) = du ± dv证:由微分的定义,

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx$$
$$= u'dx \pm v'dx = du \pm dv.$$

## 早粉的概念

- (1)导数的定义
  (3)毕业的日何
- (3)导数的几何意
  (4)如何已如
- (5) 不可导的分
- 2. 求导法!
- (1)复合函数的与
- (2)四则运算的引
- (4)参变量函数的导
- (5)常用函数的
- 3 高阶异粉
  - 3. 尚阶导数
- (1)尚阶导数的概念(2)高阶导数的运算法則
- (3)参变量函数的;
  (4)课后习题
- 4.微分
- (1)都分的概念
- (2) 微分的运算 (3) 無公形言的工事科
  - 4)高阶微分
  - 5)参变量函数的微
- (7)课后习题
- E 久 苔 糸 老 祭 安

▶ d(u ± v) = du ± dv证:由微分的定义,

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx$$
$$= u'dx \pm v'dx = du \pm dv.$$

ightharpoonup d(uv) = vdu + udv

## 1 早粉的概念

- (1)导数的定义 (2)坚新的几句
  - (3) 导数的几何
- (5)不可导的分
- 2. 求导法!
- (1)自合品数的3
- (1) 20 M 20 M 20 M
- (3)隐函数的导数
  (A)表示甚而此的是非
- (5)常用函数的导
- 2 立 卧 足 料
  - 3. 尚阶导数
- (1)高阶导数的概念 (2)高阶异数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导
- (1)
- (1) = 0 = 0
- (1)很分的概念(2)很分的运算
  - 3) 微分形式的不变
  - 4)高阶微分
  - 5)参变量函数的微
- (7)课后习题
- 5 各节参考签案

 $\blacktriangleright$   $d(u \pm v) = du \pm dv$ 证:由微分的定义。

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx$$
$$= u'dx \pm v'dx = du \pm dv.$$

ightharpoonup d(uv) = vdu + udv证:由微分的定义.

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx$$
$$= vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

- (2) 微分的运算

▶ d(u ± v) = du ± dv证:由微分的定义。

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx$$
$$= u'dx \pm v'dx = du \pm dv.$$

▶ d(uv) = vdu + udv证:由微分的定义.

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx$$
$$= vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \ v(x) \neq 0$$

## 1 异粉的概念

- (1)导数的定义 (2) B & M D 反
- (3) 导数的几何分
- (5)不可导的分

## 2. 求导法则

- (1)自会函数的异
- (1)及否则致助于束
  (2)回則运算的异志
- (3)隐函数的导数
  (4)点亦甚不知的是如
- (5)常用函数的导

## 2 主阶呈粉

- 3. 高阶导数
- (1)高阶导数的概念(2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶等
  (4)课后习题
- 4.微分
- (1)很分的概念
- (1)很分的机念
  (2)很分的运算
  - (3)很分形式的
  - [4]高阶微分
  - (寸)问所服力 (5)参变量函数台
  - (O) 銀分的应用 (7) 课后习题
- (1)环后刁地
- 5.各节参考答案

▶ d(u ± v) = du ± dv证:由微分的定义,

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx$$
$$= u'dx \pm v'dx = du \pm dv.$$

▶ d(uv) = vdu + udv证:由微分的定义.

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx$$
$$= vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

► 
$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \ v(x) \neq 0$$
 请大家自证.

## 1 早龄的概念

- (1)导数的定义
  (3)导数的几何点
- (3) 于致的几何页(4) 单侧导数
- (5)不可导的分类 (6)课后习题
- 2. 求导法则
- (1)复合函数的导
- (2)四則运算的导数(3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的导
- (5)常用函数的导
  (6)课后习题
- 3.高阶导数
- 可用于效
   /1) ÷ 以 B 和 从 b
- (2)高阶导数的运算法则
- (4)课后习题
- 4.微分
- (1)很分的概念
- (2)微分的运算
  - (3)很分形式的7
    (4) 立弘《八
- (4)高阶微分
- 6)微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例4.1:  $\bar{x}y = x^2 + \ln x + 3^x$ 的微分.

## 1. 导数的概念

- (1)导数的定义(3)导数的几何意》
- (4) 单侧导数
- (6)课后习题

## 2. 求导:

- (1)复合函数的导
   (2)四别还算的具
- (3)隐函数的导数
- (4)参变量函数的 (5)常用函数的品
- (5)常用函数章
  (6)课后习题

## 3.高阶导数

- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (5)参发重函数的:
  (4)谬丘贝斯

## 4.微

(1)微分的概念

# (2) 很分的运算

- (A) \* D. W.A.
- (4)高阶微分
- (5) 永幸景高書
- (O) 微分的应用 (7) 四三〇四
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例4.1:
$$\dot{x} y = x^2 + \ln x + 3^x$$
的微分.

解:

$$dy = d(x^{2} + \ln x + 3^{x})$$

$$= d(x^{2}) + d(\ln x) + d(3^{x})$$

$$= 2xdx + \frac{1}{x}dx + 3^{x}\ln 3dx$$

$$= (2x + \frac{1}{x} + 3^{x}\ln 3)dx.$$

### 1 早粉的概念

- (1)导数的定义
  (3)导数的几何意
- (3)导数的几何点
- (5) 不可导的分

### 2 求异法

- (1)复合函数的导数(2)四則运算的导数
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的引
- 2 立阶呈粉
- 3. 尚阶 于 数
- (1)高阶导数的概念
  (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导
- 4.微分
  - (1) as A. M. Int. A
- (2)很分的运算
- 3)很分形式的不
   4) 立以以八
- 4)高阶微分 E)点由显示机4
- 5)微分的应用
- (7)课后习题
- 5 各节参考答案

例4.1: $\dot{x} y = x^2 + \ln x + 3^x$ 的微分.

解:

$$dy = d(x^{2} + \ln x + 3^{x})$$

$$= d(x^{2}) + d(\ln x) + d(3^{x})$$

$$= 2xdx + \frac{1}{x}dx + 3^{x}\ln 3dx$$

$$= (2x + \frac{1}{x} + 3^{x}\ln 3)dx.$$

另解:

$$dy = (x^2 + \ln x + 3^x)' dx$$
  
=  $(2x + \frac{1}{x} + 3^x \ln 3) dx$ .

- 1 呈粉的概念
- (1) 导数的定义
- (3) 导数的几何意义
- (5)不可导的分
- つま早法
- (1)复合函数的导数 (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参查量函数的异数
- (5)常用函数的导
- 2 京阶呈粉
- J. 图 // 寸效
- (2)高阶导数的运算法则
  - (3)参变量函数的高阶导
    (4)课后习题
- 4. 微分
- (4) ... . ...
- (1)很分的概念(2)很分的运算
  - 3)很分形式的不
  - 4)高阶微分
  - 5)参变量函数的
- (7)课后习题
- (1)18478
- 5.各节参考答案

## 4.微分

- - (3)微分形式的不变性

- (3)微分形式的不变性

$$y = f(u),$$

- (3)微分形式的不变性

$$y = f(u),$$

▶ 如果u是自变量,那么

$$dy = df(u) = f'(u)du;$$

- 1. 导数的概念
- (1)寺致旳足义
  (3)导数的几何意义
- (3) 守致的几門形(4) 单侧导数
- (5) 不可导的分
- 2.求导法
- (1)日本品料的是料
- 2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数
  (4)表示甚而料的基本
- (5)常用函数的导数
- 2 立卧足数
- 3. 尚阶于数
- (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的高阶导
- (1)\*\*\*\*\*
- 4.微分
  - 1)很分的概念
- (3)微分形式的不变性
  - 1)高阶微分
  - 4)向所假分 5)表示普函数的游·
- (6) 微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

$$y=f(u),$$

▶ 如果u是自变量.那么

$$dy = df(u) = f'(u)du;$$

▶ 如果u是中间变量,即有u = g(x),其中x 是自变量,那么

$$dy = df(u) = df(g(x)) = (f(g(x)))'dx$$
$$= f'(u)g'(x)dx = f'(u)d(g(x))$$
$$= f'(u)du$$

- (3)微分形式的不变性

$$y = f(u),$$

▶ 如果u是自变量.那么

$$dy = df(u) = f'(u)du;$$

▶ 如果u是中间变量,即有u = g(x),其中x 是自变量,那么

$$dy = df(u) = df(g(x)) = (f(g(x)))'dx$$
$$= f'(u)g'(x)dx = f'(u)d(g(x))$$
$$= f'(u)du$$

▶ 不论u是自变量还是中间变量,函数y = f(u)的微分都 有相同的形式,这叫做一阶微分形式的不变性.

- (3)微分形式的不变性

例4.2:  $\bar{x}y = e^{\sin(x^2+1)}$ 的微分.

- (3)微分形式的不变性

例4.2: 
$$xy = e^{\sin(x^2+1)}$$
的微分.

$$dy = y'dx$$
  
=  $2x\cos(x^2 + 1)e^{\sin(x^2+1)}dx$ 

- 1 早粉的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何意义
- (4) 单侧导数
- (5)不可导的分 (6)课后习题
- 2.求导法则
- (1)及分函数则于级 (2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的。
- 3.高阶导数
- (1)高阶异数的
- (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的高阶导
- 1 微八
- . 做分
- 2) 經分的活能
- (3)微分形式的不变性
  - 4)高阶微分
- (4)高阶微分
- (6)微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

例4.2: 
$$\bar{x}y = e^{\sin(x^2+1)}$$
的微分.

$$dy = y'dx$$

$$= 2x\cos(x^2 + 1)e^{\sin(x^2+1)}dx$$

# 另解:

$$dy = d(e^{\sin(x^2+1)})$$

$$= e^{\sin(x^2+1)}d(\sin(x^2+1))$$

$$= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)d(x^2+1)$$

$$= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)(d(x^2)+d(1))$$

$$= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)d(x^2)$$

$$= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)2xdx$$

- (3)微分形式的不变性

例4.3:设 $y \sin x - \cos(x - y) = 0$ ,求dy.

- (3)微分形式的不变性

例4.3:设
$$y \sin x - \cos(x - y) = 0$$
,求 $dy$ .

解等式两边取微分后有

$$d(y\sin x - \cos(x - y)) = d0 = 0$$

 $(y\cos x + \sin(x - y))dx + (\sin x - \sin(x - y))dy = 0,$ 

而利用一阶微分形式不变性

上式左边 = 
$$d(y \sin x) - d(\cos(x - y))$$
  
=  $yd(\sin x) + \sin xdy + \sin(x - y)d(x - y)$ 

 $y \cos x dx + \sin x dy + \sin(x - y)(dx - dy)$ 

 $= (y\cos x + \sin(x - y))dx + (\sin x - \sin(x - y))dy,$ 

故

即  $dy = \frac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}dx.$ 

(3)微分形式的不变性

## 4.微分

## (4)高阶微分

- (4)高阶微分

二阶微分就是一阶微分的微分.令y = f(x),当x为自变量时.其一阶微分是

$$dy = f'(x)dx,$$

故二阶微分是

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = f'(x)d(dx) + dxd(f'(x))$$

$$= f'(x) \underbrace{d(dx)}_{0} + dxf''(x)dx = f''(x)(dx)^{2},$$

通常记作

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

- 1.导数的概念
- (1) 导数的定义(3) 导数的几何意义
- (4) 单侧导数 (5) 工订单的公米
- (6)课后习题
  - 2. 永于法则
  - (1)复合函数的导数
     (2)四則运算的异数
  - (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的异数
- (5)常用函数的导 (6)课户以前
- 3.高阶导数
- (1) 主阶是新的部分
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参受重函数章(4)课后习题
- 4.微分
  - 1.4双刀 (1) 86 八从
- (2) 微分的运算
- (4)高阶微分
- 5)微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

二阶微分就是一阶微分的微分.令y = f(x),当x为自变量时,其一阶微分是

$$dy = f'(x)dx,$$

故二阶微分是

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = f'(x)d(dx) + dxd(f'(x))$$

$$=f'(x)\underbrace{d(dx)}_{0}+dxf''(x)dx=f''(x)(dx)^{2},$$

通常记作

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

注:

$$dx^{2} = (dx)^{2}$$

$$d(x^{2}) = 2xdx$$

$$d^{2}x = d(dx) = 0$$

1. 导数的概念

(1)导数的定义(3)导数的几何意义

4)单倒导数 5)工订总的公米

(5) 不可寻的分。

2.求导法则

(1) 复合函数的导数(2) 四則近算的导数(3) 隐函数的导数(4) 並亦甚為料的基料

(5)常用函数的导

3.高阶导数

(1)高阶等数的概念 (2)高阶等数的运算法则

(3)参变量函数的高阶导系

A 400 A

.微分

(2) 很分的运算 (3) 都分形式的

(4)高阶微分

6) 微分的应用

(7)课后习题

$$y = f(u),$$

## (4)高阶微分

$$y = f(u),$$

▶ 如果u是自变量,那么

$$d^2y = f''(u)du^2;$$

### 1. 导数的概念

- (1)导数的定义
  (3)异数的几何意义
  - (3)导数的几何意
- (5) 不可导的

### 2. 求异法

- (1)复合品数的
  - 2)四则运算的导数
- (3)隐函数的导数
  (4)参查量函数的异。
- (5)常用函数的导
- ---

## 3. 高阶导数

- (1)高阶导数的概念
- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的

## 4.微分

- 1)很分的概念
- 2) 很分的运算
- (4)高阶微分

## (4)高阶微分

- 5)参变量函数的微分形 6)微分的应用
- (7)课后习题

$$y = f(u),$$

▶ 如果u是自变量.那么

$$d^2y = f''(u)du^2;$$

▶ 如果u是中间变量,即有u = g(x),其中x 是自变量,那么

$$d^{2}y = (f(g(x)))''dx^{2} = (f'(g(x))g'(x))'dx^{2}$$

$$= (f''(g(x))(g'(x)dx)^{2} + f'(g(x))g''(x))dx^{2}$$

$$= f''(\underbrace{g(x)}_{u})(\underbrace{g'(x)dx}_{du})^{2} + f'(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g''(x)dx^{2}}_{d^{2}u}$$

$$= f''(u)du^{2} + f'(u)d^{2}u;$$

- (4)高阶微分

$$y = f(u),$$

▶ 如果u是自变量.那么

$$d^2y = f''(u)du^2;$$

▶ 如果u是中间变量,即有u = g(x),其中x 是自变量,那么

$$d^{2}y = (f(g(x)))''dx^{2} = (f'(g(x))g'(x))'dx^{2}$$

$$= (f''(g(x))(g'(x)dx)^{2} + f'(g(x))g''(x))dx^{2}$$

$$= f''(\underbrace{g(x)}_{u})(\underbrace{g'(x)dx}_{du})^{2} + f'(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g''(x)dx^{2}}_{d^{2}u}$$

$$= f''(u)du^{2} + f'(u)d^{2}u;$$

▶ 所以二阶微分不再具有微分形式的不变性.

- 1 异数的概念
- (1)导数的定义
  (3)异数的几何;
- (3) 手致的儿門(4) 单侧导数
- (5) 不可导的分
- 2. 求异法则
- 2.45 ( 12.8)
- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的导
- (5)常用函数的导(6)课后习题
- .高阶导数
- (1)高阶导数的概念 (2)京队总数码运算计》
- (3)参变量函数的高阶导数 (4)课后习题
- 4.微分
- (1)很分的标
- (3)很分形式的
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数的
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

## 4.微分

# (5)参变量函数的微分形式

- (5)参变量函数的微分形式

# 对于一般参变量函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

其一阶导数为

$$y'_{\mathsf{x}} = \frac{dy}{d\mathsf{x}} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

二阶导数为

$$y_{x}'' = \frac{d^{2}y - f'(x)d^{2}x}{dx^{2}} = \frac{\psi''(t)dt^{2} - \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\varphi''(t)dt^{2}}{(\varphi'(t))^{2}dt^{2}}$$
$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^{3}}.$$

- 1 早粉的概念
- (1)导数的定义
  (3)异数的月何音》
- (4) 单侧导数
- (5)不可导的
  - 2. 求导法则
  - 复合函数的导数
     如則泛質的基料
  - (3)隐函数的导数
  - (5)常用函数的导数
  - 0 主队已初
  - 3.高阶导数
    - (1)高阶异数的相
  - (2)高阶导数的运算法则
  - (3)分交里四级则向
    (4)课后习题
  - 4.微分
    - (1) 微分的概念
    - 3)很分形式的不变
  - (4)高阶微分 (5)参变量函数的微分形式
  - 6)很分的应用
  - (7)课后习题
- 5.各节参考答案

## 4.微分

- - (6)微分的应用

- (6) 微分的应用

# ▶ 近似计算

# (6) 微分的应用

# ▶ 近似计算

根据导数的定义

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = y',$$

所以当 $\triangle x \rightarrow 0$  时,即 $|\triangle x|$ 很小时

 $\frac{\triangle y}{\triangle x} \approx y',$ 

即

$$\triangle y \approx y' \triangle x = dy,$$

换言之,当 $|\Delta x|$ 很小时,我们可以用微分dy作为函数改变量 $\Delta y$  的近似值,

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \triangle x$$
,

或

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \triangle x.$$

- 1 早粉的概念
- (1)导数的定义
  (2) 以此 从 以 如 卒
- (4)单侧导数
- (5)不可导的分
- つま早法
- (1) \* 1 7 1 1 1 2
- (2)四则运算的导
- (3)隐函数的导数
  (4)熬布普函數的异數
- (5)常用函数的导
- 2 京队已数
- 3.高阶导数
- (1)高阶导数的概念
  (2)高阶异数的运算法则
  - 3)参变量函数的高阶导数
  - 器公
- 4.微分
- (2) 微分的运算
- (3)很分形式的不?
  (4)主於個公
- 4)尚阶微分 5)参变量函数的很
- (6) 微分的应用 (7) 课后习题
- - - -
- 5.各节参考答案

注1:适用范围——1)要估算的函数值的自变量 $x_0$  + △x在已知函数值自变量 $x_0$ 的附近;2) $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 的值容易计算.

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义
  (3)导数的几何
- (3) 子数的几何页(4) 单侧导数
- (6)课后习题
- 2.求导法
  - 复合函数的导数
     四則运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的引
  (6)增长以票
- 3.高阶导数
- 5.向川寸奴
- (2)高阶导数的远算法则
- (3)参变量函数的高
  (4)四二口匹
- A 100 A
- 4. 微分
  - PIC /3
  - ) 微分的运算
  - 3)很分形式的不
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数:
- (6) 微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

注1:适用范围——1)要估算的函数值的自变量 $x_0 + \triangle x$ 在已知函数值自变量 $x_0$ 的附近;2) $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 的值容易计算. 例4.4:求 $\sin 29^\circ$ 的近似值.

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何意
- (4) 单侧导数
- (6)课后习题
- 2.求导法
  - (1)复合函数的导数 (2)四則运算的导数
- (3)隐函数的导数 (4)参专量函数的异数
- (5)常用函数的引
- 3高阶早粉
- 3.向所寸级
- (1)高阶导数的概念 (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的。
  (4)课后习题
- 4.微分
- . 很分
- (2)微分的运算
- (3)報分別公司
  (4)高阶份公司
- (4)向所依分
  (5)表示甚么料。
- (6)微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

**注1**:适用范围——1)要估算的函数值的自变量 $x_0$  + △x在已知函数值自变量 $x_0$ 的附近;2) $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 的值容易计算.

例4.4:求sin 29°的近似值.

解:令

$$f(x)=\sin x,$$

取

$$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, x = 29^\circ = \frac{29}{180}\pi,$$

则

$$\triangle x = x - x_0 = -\frac{\pi}{180},$$

所以

$$\sin 29^{\circ} = \sin \frac{29}{180} \pi \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot (-\frac{\pi}{180})$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-0.0175) \approx 0.485.$$

.导数的概念

学数的定义 学数的几何意义 単侧导数 不可导的分类

2.求导法则 (1)复合函数的导数 (2)四则运览的异数

(2)四則运算的导數(3)隐函數的导數(4)参变量函數的导數(5)常用函數的导數(6)课后习题

(1)高阶等数的概念 (2)高阶等数的运算法则 (3)参变量函数的高阶等数 (4)课后习题

3)參交重函数初尚所寻数
4)课后习题
(微分
1)很分的概念
2)那分的证算

(2) 微分的运算 (3) 微分形式的不变性 (4) 高阶微分 (5) 参变量函数的微分形式 (6) 微分的应用

注**2**:令 $x_0 = 0$ ,那么

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \triangle x$$

可以写成

$$f(\triangle x) - f(0) \approx f'(0) \triangle x$$

即

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x,$$

其中|x| 很小.

- 1. 导数的概念
- (1)导数的定义
  (3)异数的几何余:
- (3) 子数的几何?(4) 並個异數
- (5)不可导的分
- 2. 求导法
- (1)复合函数的导
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的 (6)课后以题
- 2 玄阶呈粉
- 3. 尚 所 于 效
- (1)高阶导数的概念 (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导
- 4 微分
- . 做分
- (4)高阶微分
- (4)两阶假分 (5)表示苦品粉的;
- (6) 微分的应用 (7) 選系 (3) 5
- - - -
- 5.各节参考答案

注**2**:令 $x_0 = 0$ ,那么

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \triangle x$$

可以写成

$$f(\triangle x) - f(0) \approx f'(0) \triangle x$$

即

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x,$$

其中|x| 很小.

例4.5:重新估计sin 29°的近似值.

- 1.导数的概念
- (1) 子数的定义
  (3) 异数的几何。
- (4)单侧异数
- (5)不可导的分
- つま早ま
  - (1)复合函数的导数
- (2)四則运算的导数 (3)隐函数的导数
- (4)麥交重函数的手数(5)常用函数的导数
- 3. 尚阶导数
- (1)高阶导数的概念 (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的高阶导
- 1 24 /
- . 做分
- (1)很分的概
  (2)每分的话
- 3)很分形式的不
- 4)高阶微分
- [5]参变量函数的
- (6)微分的应用 (7)课后习题
- 5 冬节参考答案

注**2**:令 $x_0 = 0$ ,那么

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \triangle x$$

可以写成

$$f(\triangle x) - f(0) \approx f'(0) \triangle x$$

即

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x,$$

其中|x| 很小.

例4.5:重新估计sin 29°的近似值.

解:令
$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{6} - x)$$
, 取 $x = \frac{\pi}{180} = 0.0175$ , 故

$$\sin 29^{\circ} = f(\frac{\pi}{180}) \approx f(0) + f'(0) \cdot \frac{\pi}{180}$$
$$= \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.0175 \approx 0.485.$$

1 异数的概念

- (1)导数的定义
- (3) 导数的几何
- (5)不可导的分
- 2 求异法则
- (4) 6 1 6 1 1 1 1 1
- (1)复合函数的导
- (3)隐函数的导数
- (5)常用函数的导
- 2 立卧足粉
- 5.尚所于效
- (1)两阶寻数的概念 (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶导射
  (4)课后习题
- 4.微分
- 4.4% 7J
- (2) 微分的运算
- (3)很分形式的不(A) 主於你公
- (4)两阶假分 (5)表示苦品粉的;
- (6)微分的应用
- (7)课后习题
- 5.各节参考答案

回忆一下.当 $x \to 0$ 时.

$$\sin x \sim x$$
  $\tan x \sim x$ 

$$\arcsin x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad (1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$$

- (6) 微分的应用

回忆一下, 当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x$$
  $\tan x \sim x$   $\arcsin x \sim x$  arctan  $x \sim x$ 

 $\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ 

由微分的定义.

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

$$e^{x} = 1 + x + o(x)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$$

1. 导数的概念

(1)导数的定义 (3)导数的几何意义 (4)单侧导数

(5)不可导的分类
(6)课后习题

2. 求导法

(1)复合函数的导数(2)四則运算的导数(3)隐函数的导数(4)参变量函数的导数

2 立队足数

1.高阶导数 (1)高阶导数的概念

(2)高阶导数的运算法则 (3) & 亦普函數的高阶异數

(4)课后习题

4.微分

(1) 微分的概: (2) 微分的运

(1)微分形式的不变
(1)高阶微分

·)两价假分 ()参变量函数的微

(6)微分的应用 (7)课后习题

(7)採石习题

回忆一下, 当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x$$
  $\tan x \sim x$   $\arcsin x \sim x$   $\arctan x \sim x$ 

$$\ln(1+x) \sim x$$
  $e^x - 1 \sim x$   $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$ 

 $\sin x = x + o(x)$ 

换言之,当 $x \to 0$ ,即|x|很小时,  $\sin x \approx x$ 

$$\tan x = x + o(x) \qquad \tan x \approx x$$

$$\arcsin x = x + o(x) \qquad \arcsin x \approx x$$

$$\arctan x = x + o(x) \qquad \arctan x \approx x$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \qquad \ln(1+x) \approx x$$

$$e^{x} = 1 + x + o(x) \qquad e^{x} \approx 1 + x$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \qquad (1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$$

- 1 异粉的概念
- (1)导数的定义(3)导数的几何意义(4)单侧异龄
- (5)不可导的分类(6)课后习题
- 2.求导法则
  - (2)四則近算的导数(3)隐函数的导数(4)参变量函数的导数
  - (5)常用函数的导数(6)课后习题
  - 3. 高阶导数
- (1)高阶导数的概念 (2)高阶导数的运算法则
  - 参变量函数的高阶导数
     课后习题
- 4.微分
- (1) 微分的概:
- (3) 微分形式的不变
  - 1)高阶微分 5)泰变量函数的微
- (6)微分的应用
  (7)课后习题
- (1) x x x x x

 $\mathbf{i}$ **注3**:微分也有不那么好用的时候,回忆一下当 $x \to 0$ 时.

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

利用微分的定义.令

$$f(x) = 1 - \cos x,$$

则

$$f'(x) = \sin x, f(0) = 0, f'(0) = 0,$$

所以仅有

$$1-\cos x=o(x).$$

事实上.

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2(\frac{x}{2} + o(x))^2 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

- (6)微分的应用

# ▶ 误差估计

- - (6) 微分的应用

# ▶ 误差估计

误差估计指的是当自变量存在已知误差时,如何去估计因变 量的误差.即设自变量的理论误差限为 $\delta_x$ ,真实值是x,测量值  $\mathcal{L}_{Xn}$ . 则自变量的实际误差 $\triangle x$  满足

$$|\triangle x| = |x - x_0| \le \delta_x,$$

当 $\delta_{\mathbf{x}}$ 很小时.因变量的误差△ $\mathbf{v}$ 满足

$$|\triangle y| = |f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)\triangle x| \le |f'(x_0)|\delta_x,$$

我们把

$$|f'(x_0)|\delta_x$$

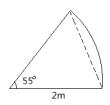
叫做绝对误差限,把

$$|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}|\delta_x$$

叫做相对误差限

(6)微分的应用

例4.6:检验一个半径为2米,中心角为55°的工件面积(如图),现可直接测量其中心角或此角所对的弦长,设量角最大误差为0.5°,量弦长最大误差为3毫米,试问用哪一种方法检验的结果较为精确



### 1 异数的概念

- (1)导数的定义
  (2)坚新的工作
- (3)导数的几何意
- (5) 不可导的分

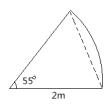
## 2. 求导法则

- (1)复合函数的引
- (2)四則运算的导数(3)隐函数的导数
- (4)分叉里回数。
  (5)常用函数的导
- 3.高阶导数
- 3.向所寸级
- (2)高阶导数的运算法则
  - 5)参变重函数的? 4)课后习题

## 4.微分

- 4. 做分
- 2)微分的运算
- (4)高阶微分
- (4)向所依分
  (5)熬亦告函約
- (6)微分的应用
- 5 冬节参考答案

例4.6:检验一个半径为2米,中心角为55°的工件面积(如图),现可直接测量其中心角或此角所对的弦长,设量角最大误差为0.5°,量弦长最大误差为3毫米,试问用哪一种方法检验的结果较为精确



解:设弦长为y米,中心角为x°,则有关系式

$$y = 4\sin\frac{\pi}{360}x,$$

故

$$x = \frac{360}{\pi} \arcsin \frac{y}{4},$$

所以

$$S = \frac{\pi}{90}x = 4\arcsin\frac{y}{4},$$

### 1. 导数的概念

- (1) 导数的定义
- (3) 导数的几何:
- (5)不可导的分

### 2. 求导法则

- (1) (1 ) 7 ) (1)
- (2)四則运算的导数
- (4)参变量函数的
- (5)常用函数的导
  (6)增长口票

## 3.高阶导数

- (2)高阶导数的运算法则
- (3)参变量函数的高阶等
  (A)理戶口题

## 4. 微分

- (1)微分
- (2) 微分的:
- (3) 微分形式的 7
- (4)高阶微分
- (6)微分的应用
- (7)课后习题
- b + 6 张放放

如果测量中心角,面积的误差△S满足

如果测量弦长,面积的误差△S满足

$$|\triangle S| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{16}}} |\triangle y| \leq 2|\triangle y| = 0.006(平方米),$$

因为

所以选用量弦长的方法检验结果较为精确.

- 1. 导数的概念
- (1) 于效的定义
  (3) 导数的几何意义
- (4)单侧导数
- (6)课后习题
- 2.求导法则
- (1) 6 A Z & A B
- (2)四则运算的导
- (3)隐函数的导数(4)参查量函数的导数
- (5)常用函数的导
- 3.高阶导数
- (2)高阶导数的运算法则
  - (3)参变量函数的高阶。
- 4 微分
- 4.4%Z77
- (1)微分的標 (2)微分的运
- (3)微分形式的不
- (4)高阶微分
- (5)参变量函数的 (6)微分的应用
- 7)课后习题
- 5 各节参考签案

## 4.微分

- (7)课后习题

- (7)课后习题

(1) 设
$$y = y(x)$$
由方程 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 确定,求 $dy|_{x=0}$ .

(2) 已知
$$x > 0, y > 0$$
时, $x^y = y^x$ ,求 $\frac{dy}{dx}$ .

(3) 已知
$$y = 1 + xe^{xy}$$
,  $\dot{x} \frac{dy}{dx}|_{x=0}$  for  $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$ .

(5) 
$$\angle 2\pi x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0, \cancel{x}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

(6) 已知
$$y = \arcsin(\sin^2 \frac{1}{x}), 求 dy$$
.

## 1. 导数的概念

- (1)导数的定义
  (2)坚新的目标者
- (3)导数的几何意义
- (5)不可导的分
- (6)课后习题

### 2.求导法则

- (1) 及合函数的子。
  (2) 四副运览的异。
- (2)回则运升的于叙
- (4)参变量函数的导数
- (5)常用函数的导
- ` /

### 高阶导数

- 11 000 0 00 00 00
- (2)高阶导数的运算法则
  - 3)参变量函数的高阶导数
- (4)课后习

## 4.微分

- (1) as A. M. lez
- (2)微分的运算
- 1) \* 15 % A
- T) 4 元 元 Z 0 . LL
- 分支里函数的做?
   微分的应用

## (7)课后习题

5 各节参考签案

- 5.各节参考答案

导数的概念

 $(1)y \pm 1 = 3(x \pm 1).$  (2)y - 4 = 4(x - 2).(3)不可导. (4)2.

(5)提示:先证f(0) = 1,再利用导数定义,即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x}$$

$$= f(x)f'(0).$$

求异法则

 $(1)\cos x \cdot \ln x \cdot x^{\sin x} + \sin x \cdot x^{\sin x - 1}.$ 

 $(2)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}).$ 

 $(3)\frac{y-2x}{2y-x}$ .  $(4)\frac{1}{2}$ .  $(5)\frac{t}{(t+1)(1-\cos y)}$ .  $(6)\frac{1}{1+e^x}$ .

高阶导数

$$(1)\sin(x+\frac{n}{2}\pi). \qquad (2)\cos(x+\frac{n}{2}\pi).$$

$$(3)y^{(0)} = \frac{2}{1+x} - 1, y^{(n)} = (-1)^n \frac{n! \cdot 2}{(1+x)^{n+1}}$$

$$(4)(-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \qquad (5)n! f^{n+1}(x).$$

高阶导数
$$(1)\sin(x + \frac{n}{2}\pi). \qquad (2)\cos(x + \frac{n}{2}\pi).$$

$$(3)y^{(0)} = \frac{2}{1+x} - 1, y^{(n)} = (-1)^n \frac{n! \cdot 2}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(4)(-1)^n n! (\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}). \qquad (5)n! f^{n+1}(x).$$

$$(6)提示: x_y'' = -\frac{(y')_y'}{(y')^2}, \, \pi(y')_y' \cdot y_x' = (y')_x' = y''. \qquad (7)\frac{1}{f''(t)}.$$

$$(1)\frac{1}{2}dx. \qquad (2)\frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}. \qquad (3)1, 2. \qquad (4)2.085.$$

$$(5) - \frac{4\sin y}{(2 - \cos y)^3}. \qquad (6) - \frac{\sin\frac{2}{x}}{x^2(1 + \sin^4\frac{1}{x})}dx.$$