随机过程总复习

第一章 预备知识

1. 基本概念及性质

样本空间 、σ 域(σ 代数)、概率空间、概率公理化定义及性质.

分布函数、分布律、密度函数等随机变量及其分布相关概念

数学期望、方差、协方差及相关系数等随机变量的数字特征及性质

R-S积分，R-S积分表示的随机变量的数学期望和方差

特征函数及其性质、母函数及其性质

条件概率、条件分布及其性质 条件期望及性质

2. （*R-S* ）积分

有了R-S积分，*E*(*X*)等 可以统一定义

定义 设$g(x),F(x)$为有限区间$[a,b]$上的实值函数，

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots x_n=b$$

$$\Delta F(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1}),\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i],\quad \lambda=\max\{\Delta x_i\}$$

若当$\lambda\to 0$时，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta F(x_i)$存在，且与分法及$\xi_i$的取值无关，称该极限值为$g(x)$关于$F(x)$在$[a,b]$上的**黎曼-斯蒂尔杰斯积分**。简称**R-S积分**。

记为 $$\int_a^b g(x)dF(x)\overset{\Delta}{=}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta F(x_i)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x)$$

$F(x)$是X的分布函数

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$$

$$EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$$

$$E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^k dF(x)$$

注意：R-S积分表示的数字特征与本科阶段学的公式的关系，如：

若X为离散型随机变量, 分布律为 $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots$ 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

3. 特征函数及母函数

3.1 特征函数定义及性质

(1)定义 设X为随机变量，复随机变量 e^{itX} 的数学期望称为X的特征函数.

$$g_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$ 其中t是实数

还可写成 $g_X(t) = E[\cos tX] + iE[\sin tX]$

特征函数与分布函数相互唯一确定。

一些基本分布的特征函数要记住！

(2) 特征函数的性质

1） $g(0)=1, \left|g(t)\right| \leq 1, g(-t)=\overline{g(t)}$

2) $g(t)$在（-∞，∞）上一致连续

3）若随机变量X的n阶矩EX^n存在，则 $g(t)$ k阶可导，且

$$g^{(k)}(0)=i^k EX^k，\quad k\leq n$$

4）两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积.

一些基本分布的特征函数要记住!

母函数定义及性质

(1) 定义 设X是非负整数值随机变量，分布律

$$P\{X=k\}=p_k,\quad k=0,1,\ldots$$

则称

$$P(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k=\sum_{k=0}^{\infty}s^k p(X=k)$$

为X的**母函数**.

性质 非负整数值随机变量的分布律p_k、由$E(X)$由其母函数$P(s)$唯一确定

$$\boxed{p_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!},\ n=0,1,2,\cdots}\qquad \boxed{E(X)=P'(1)}$$

4. 条件期望

条件期望的定义

离散型

$$E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i|Y=y_j)$$

其中 $$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$$

连续型

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x|y)dx$$

其中 $f(x|y)$ 条件概率密度

性质

$$E(X)=E\left(E(X|Y)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)dF_Y(y)$$

第二章 随机过程的概念与基本类型

1.概念及性质　　　　　2. 相关的基本计算

随机过程

会计算
- 随机过程的有限维分布函数族和有限维特征函数族
- **随机过程的数字特征**
- 均值函数、方差函数、协方差函数、自相关函数
- 互协方差函数、互相关函数

随机过程的基本类型及有关概念

正交增量过程、独立增量过程、维纳过程、正态过程

第三章 泊松过程

会计算概率和数字特征

1. 定义

计数过程、泊松过程、强度、非齐次泊松过程、复合泊松过程等定义

2. 泊松过程的性质

(1) 数字特征:

均值函数、方差函数、相关函数、协方差函数等

(2)时间间隔 T_n 及其服从的分布、应用

(3)等待时间 W_n 的分布、应用

3. 非齐次泊松过程的强度函数 $\lambda(t)$ 及应用

4. 复合泊松过程

第四、五章 马尔科夫链

第一节

1. 概念

马尔可夫条件、离散时间马氏链、齐次马氏链、转移概率、初始概率、绝对概率、初始分布和绝对分布， 性质、状态转移图

2. 性质：**C-K方程等**

3. 应用

离散时间齐次马氏链的n步转移概率及n步预测

第四、五章 马尔科夫链

第2、3、4节

1.离散时间齐次马氏链的状态的分类

转移回概率与首返概率、**转移概率与首达概率**；**状态的相通、周期性、常返性、遍历性及判断；平均返回时间及计算**

2.**状态空间分解、不可约马氏链**

3. 马氏链的n步转移概率的极限和**平稳分布**

第五章： 连续时间马氏链的**转移概率及C-k方程**

-
- **计算平稳分布和平均返回时间**

第六、七章 平稳过程及其谱密度

1. 宽平稳过程和严平稳过程的定义及其关系、联合平稳过程的定义、宽平稳过程的判断。

2. 平稳过程的数字特征：计算均值函数、相关函数及二阶矩，性质。

3. 平稳过程的谱函数、谱密度概念

4. 谱密度与相关函数关系及计算、互谱密度与互相关函数的关系。

维纳-辛钦公式：

$$\boxed{\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R_X(\tau)\,d\tau, \quad -\infty < \omega < +\infty \\ R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S_X(\omega)\,d\omega, \quad -\infty < \tau < +\infty \end{aligned}}$$

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{XY}(\tau)\,d\tau, -\infty < \omega < +\infty$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} S_{XY}(\omega)\,d\omega, -\infty < \tau < +\infty$$