# 第六章 不定积分

陈颖

北京电子科技学院基础部

- 1.不定积分
- (1) 微分的反向
- (2)不定积分的相
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的
- (6)课后习题
- 2.换元积分法
- (1)第一换元
- (3) 換元法
- (4)课后习录
  - 3.分部积分法
    - 1)分部积分公式
    - 2) // 和 // 的 洗 I
- (3)多次分部
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - 有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不
- 积分 (2) - 年エロル
- (3)一类无理根式的分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

### 1.不定积分

# (1)微分的反问题

- (2)不足积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (1) 理戶习题

# 3 分部积分法

- (1)分部积分公司
- (2)11和1/的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

### 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

# 5.各节参考答案

### 1 不定积分

# (1)微分的反问题

- (2)不定积分的概
- (2) TOMALSON
- (4) 基本积分表
- (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一排元
- (2)第二换元
- (4)#£95

### 3.分部积分法

- (1)公部和公公市
- (1)分布积分公式(2)日和V 的选取
- (3)多次分部和
- (4)课后习题
- ,其他类型不定积 }的求法
- 1)有理函数的不定积分
- (1)有理函数的不定积(2) 在 2 4 + m 2 4
- (2)三角函数有理式的不足
- (3)一类无理根式的
- 分 分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

# 引例:在下述括号中填入适当的函数使等式成立

$$d( )=xdx.$$

# (1)微分的反问题

# 引例:在下述括号中填入适当的函数使等式成立

$$d($$
  $)=xdx.$ 

解:因为

$$(x^2)'=2x,$$

故

$$\frac{1}{2}(x^2)'=x,$$

即

$$(\frac{1}{2}x^2)' = x,$$

所以有

$$d(\frac{1}{2}x^2) = xdx.$$

### 1 不定和分

- (1)微分的反问题
  (2)不完知公的概
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性 (6)课后习题
- 2 换元积分法
  - (1)第一换元:
- (2)第二換元法 (3)終元法小約
- (4)课后习题
- 3 分部积分法
  - 1)分部积分公式
- (2) u和v 的选取 (3) 多次分部和分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积 分的求法
  - .)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 3)一类无理根式的不
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

引例:在下述括号中填入适当的函数使等式成立

$$d( )=xdx.$$

解:因为

$$(x^2)'=2x,$$

故

$$\frac{1}{2}(x^2)'=x,$$

即

$$(\frac{1}{2}x^2)' = x,$$

所以有

$$d(\frac{1}{2}x^2) = xdx.$$

注:一般地,C为常数时,

$$d(\frac{1}{2}x^2+C)=xdx.$$

(1)微分的反问题

设函数f(x)在区间I上有定义,如果存在F(x), 使得对任何 的 $x \in T$ 均有

$$F'(x) = f(x),$$

或

$$dF(x) = f(x)dx$$
,

则称F(x)是f(x)的一个原函数.显然,求某个导数的原函数 就是求微分的反问题。

- (1)微分的反问题

设函数f(x)在区间I上有定义,如果存在F(x), 使得对任何的 $x \in I$ 均有

$$F'(x) = f(x),$$

或

$$dF(x) = f(x)dx$$

则称F(x)是f(x)的一个**原函数**.显然,求某个导数的原函数就是求微分的反问题.

注:原函数和它的导数之间并不是一一对应的关系.原函数只有一个导数,而导数却可以有很多个原函数.一般地,如果F(x)是f(x)的一个原函数,则f(x)的任一原函数都可以表示成

$$F(x) + C$$

的形式,其中 C 为常数.

- 1.不定积分
- (1)微分的反问题(2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
  (5)不定积分的性。
- (5)不定积分的性点(6)课后习题
- 2.换元积分法
- (1)第一换元法
- (2) 第二揆元法 (3) 换元法小约
- (4)採后习题
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式 (2)山和V<sup>1</sup>的选取 (3)多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不足积分的求法
- (2)三角函数有理式的不
- (3)一类无理根式的分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (3) 秋儿云小鸟

# 3 分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2)11和1/的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

### 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

# 5.各节参考答案

### 1 不定和分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的
- (4)基本积分表
- (5)不足积分的目
  (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一接元
- (2)第二换
- (4):85:05

### 3 分部和分法

- (1)公部和公八百
- (1) カーハカ公主 (2) u和v 的选其
- (3)多次分部
- (4)课后习题
- 1.其他类型不定
- 1)本理系数码工金额之
- 1)有理函数的不定积
- (2)三角函数有理式的不
- (3)一类无理根式的
- 分 (A)運兵 (2.55
- (4)环石刁地
- 5.各节参考答案

函数f(x)的原函数的全体称为f(x)的不定积分,记作

$$\int f(x)dx,$$

其中

- ▶ √称为积分号,
- ▶ x称为积分变量,
- ▶ f(x)称为被积函数,
- ▶ f(x)dx称为被积表达式.

- 1 不定和分
- (2)不定积分的概念
- (2)不足积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
- (0)\*\*\*
- 2.换元积分法
- (1)第一换元法
- (3) 换元法小
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - )分部积分公式
- (2) U和V 的选 (3) 多次分部积
- (4)课后习题
  - 1.其他类型不定积
  - 1) 有理函數的不定和公
- (1) 引至函数的不足机(2) = 角函数有理点的
- (乙)二州函数介理成刊 积分
- (3)一类无理根式的不 分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

# 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3) 换元法小结
- (3) 楔儿法小约

# 3分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2)11和1/的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

### 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

# 5.各节参考答案

### 不定和分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念

### (3)不定积分与微分的关系

- (4) 基本积分表 (5) 不定积分的性
- (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一换元
- (2)第二换元
- (4)课后习题

### 3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) U和V 的选取 (3) 名士公郎和公
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定和
- (1)有理函数的不定权
   (2) 4 4 + m + 4 +
- (2)三角函数有理式的不 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

# 不定积分与微分互为逆运算,它们满足如下关系:

- (3)不定积分与微分的关系

不定积分与微分互为逆运算,它们满足如下关系:

$$(\int f(x)dx)'=f(x)$$

或

$$d(\int f(x)dx)=f(x)dx,$$

这说明先求不定积分再求微分,两者作用抵消.

- 1 不定和分
- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4) 本 本 秋 ガ 水 (E) ナ ウ 知 八 め は
- (6)课后习题
- 2.换元积分法
- (1)第一换元法
- (3) 换元法小
- 3 公部和公注
  - )分部积分公式
- (2) u和v′的过(3) 多次分部和
- (3) 步次分部和 (4) 课后习题
  - 1.其他类型不定积 分的求法
  - 1)有理函数的不定积
  - (2)三角函数有理式的>
  - 秋分 (3)一率无理根式的:
  - **A**
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

不定积分与微分互为逆运算,它们满足如下关系:

$$(\int f(x)dx)'=f(x)$$

或

$$d(\int f(x)dx)=f(x)dx,$$

这说明先求不定积分再求微分,两者作用抵消.

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

或

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

这说明先求微分再求不定积分,两者相差某个常数.

- 1 不定和分
- (1) 微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
- 2 换元和分法
- (1) 第一接元法
- (2)第二接元
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - 1)分部积分公式
- (2) 11和 1 的选
- (4)课后习题
- 4.共化关至不足》 分的求法
- (1)有理函数的不定
- (乙)二用函数有埋式日积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例1.1:设曲线通过点(1,2),且其上任一点处的切线斜率等于 该点横坐标的两倍,求此曲线的方程.

- (3)不定积分与微分的关系

例1.1:设曲线通过点(1,2),且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍,求此曲线的方程.

解:因为

$$y'=2x$$

所以

$$y = \int 2x dx = x^2 + C,$$

所求曲线过点(1,2),即

$$2=1^2+C$$

推出

$$C = 1$$
,

所求曲线为

$$y=x^2+1.$$

不空和公

(1)微分的

(2)不定积分的积

(3)不定积分与微分的关系 (4)基本积分表

(6)课后习题

2.换元积分法

(1)第一换元法

(3)换元法小结

3.分部积分法

1)分部积分公式 2)U和V 的选取

(3)多次分部积分(4)课后习题

4.其他类型不定积 分的求法

(1)有理函数的不定积

(2)三角函数有理式的不 积分

(3)一类无理根式的不分

(4)课后习题

5.各节参考答案

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系

# (4)基本积分表

- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

# 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (3) 秋儿云小鸟

# 3分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2)11和1/的洗取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

### 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

### 1.不定积分

- (1) 很分的反问题
- (2)不足积分的概念

# (4)基本积分表

- (5)不定积分的性
  (6)课后习题
- 2.换元积分法
- (1)第一换元
- (2)第二換元/
- (4)课后习题

### 3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u和v′的选取
- (4)课后习题
- (4)採后习题
- 1.其他类型不定积 分的求法
- 1)有理函数的不定积
- (1)司及函数的不足标。(2)二角系数右球总统:
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

序号	基本积分公式
(01)	$\int 0 dx = C$
(02)	$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + C$
(03)	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$
(04)	$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$
(05)	$\int e^{x} dx = e^{x} + C$
(06)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
(07)	$\int \cos x dx = \sin x + C$

### 1 不定积分

- (1)很分的反问题 (2)不定和分的概念
- (2)不定积分的概念
  (3)不定积分与微分的

### (4)基本积分表 (5)不定积分的性质

- (6)课后习题
- 2. 换兀积分分
- (1) 第一換元法
- (2) 称一揆九
- (4)课后习题

### .分部积分法

- 分部积分公式
- 2) u和v 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题
- .其他类型不定
- **↑的求法** 1\+=========
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

序号	基本积分公式
(80)	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
(09)	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
(10)	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
(11)	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
(12)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$
(13)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C_1 = -\arctan x + C_2$

### 1 不空和公

- (1)微分的反问题(2)不定积分的概念(3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表(5)不定积分的性质(6)课后习题
- 2.换元积分法
- (1)第一換元法
  (2)第二換元法
- (3)換元法小结(4)课后习题
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式 (2)山和火/的沙勒
- (3)多次分部积分 (4)课后习题
- 1.其他类型不定积 分的求法
  - L)有理函数的不定和
- 2)三角函数有理式的
- 3)一类无理根式的不
- 4)课后习题
- 5 久节糸老公安

# (5)不定积分的性质

- (5)不定积分的性质

# ▶ 性质1:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \qquad (k \neq 0).$$

- 1 不定和分
- (1)很分的反问
- (2)不足积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- 2 换元积分法
  - (1) # -42=4
- (3) 换元法。
- (4)课后习题
- 3分部积分法
  - )分部积分公式
- (2) U和V 的选取
- (3)多次分部 (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - )有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分
- 分
- (4)课后习题
- 力 世 全 並 然 必

▶ 性质1:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \qquad (k \neq 0).$$

▶ 性质2:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- 1 不定和分
- (1) 微分的反问炎
  (2) て白いない。
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- - (1)第一换元/
  - (3) 換元法小丝
  - (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - (1)分部积分公式 (2)以近以 / 始述取
- (3)多次分部积
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积分的求法
  - 1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不
- 积分 (2)- \* \* 理報 \* 6
- 分 (4) 30 = 0 = 0
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ 性质1:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \qquad (k \neq 0).$$

▶ 性质2:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

▶ 性质3:

$$\int \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x) dx \qquad (k_i \pi \mathfrak{L} \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}).$$

- 1 不定积分
- (1)似分时及问题 (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关
- (4)基本积分表 (5)不定积分的性质
- (6)课后习题
- 2.换元积分法
- (1)第一换元法
- (3)换元法小结
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - 1)有理函数的不定积分
  - (2)三角函数有理式的不:
  - 次分 (3)一系平理超过的工定台
  - (d) - -
  - (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例1.2:求 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$$

- 1 不空和公
- (1) 微分的反
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关
- (4) 基本积分系
  (5) 不定积分的性质
- (0)18678
- 2.换元积分》
- (1)第一換元法 (2)第一換元法
- (3) 採尤法(
- 3 公部和公法
  - 10 444 10 12
- (1)分部积分公式 (2)U和V 的选取
- (3)多次分部
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - | ) 在理函数的不定和公
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分
- (3)一类无理根式的不 分
- (4)课后习录
- (4) 14 17 17

例1.2:求 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$$

解:原式= 
$$\int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

- 1 7 3 6 1
- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不足积为与银为则; (4)甚太叔众当
- (5)不定积分的性质
- 9 换元积分法
- (1)第一换元法
- (3) 换元法小结
- 3 公部和公注
  - 1)分部积分公式
- (3)多次分部积
- 4.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- ÷
- E 夕 苔 糸 去 ダ 安

例1.2:求 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$$
.

解:原式= 
$$\int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3:求 
$$\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$
.

- (5)不定积分的性盾

例1.2:求 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$$
.

解:原式= 
$$\int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3:求 
$$\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx.$$

解:原式= 
$$\int \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$$
.

- (5)不定积分的性质

例1.2:求 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$$
.

解:原式= 
$$\int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3:求 
$$\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$
.

解:原式= 
$$\int \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$$
.

例1.4:求 
$$\int 2^{x}(e^{x}-5)dx$$
.

### 1 不定和公

- (1)微分的反问题(2)不定积分的概念
  - (3)不定积分与微分的关系

### (5)不定积分的性质 (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一换元法 (2)第二换元法
- (4)课后习题

# 3.分部积分法

- (1)分部积分公式 (2)u和v<sup>1</sup>的选取 (3)多次分部积分
- 4.其他类型不定积

# 分的求法

- .)有理函数的不定积分 ·)三角函数有理式的不定
- " )一类无理根式的不定和
- (4)课后习题
- (4)18478

例1.2:求 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$$
.

解:原式= 
$$\int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3:求 
$$\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$
.

解:原式= 
$$\int \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$$
.

例1.4:求 
$$\int 2^{x}(e^{x}-5)dx.$$

解:原式= 
$$\int ((2e)^x - 5 \cdot 2^x) dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} - 5\frac{2^x}{\ln 2} + C$$
  
=  $2^x (\frac{e^x}{1 + \ln 2} - \frac{5}{\ln 2}) + C$ .

不定积分
 (1)很分的反问题
 (2)不定积分的概念
 (3)不定积分与很分的关系

(5)不定积分的性质 (6)课后习题 2.换元积分法

> )第一接元法 ()第二接元法 ()接元法小结 ()课后习题

分部积分法

3)多次分部积分 4)课后习题 其他类型不定积 的求法

的求法 )有理函数的不定积分 )三角函数有理式的不定 分

)课后习题

例1.5:求  $\int \tan^2 x dx$ .

- (5)不定积分的性质

例1.5:求 
$$\int \tan^2 x dx$$
.

解:原式= 
$$\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$
.

- (5)不定积分的性质

例1.5:求 
$$\int \tan^2 x dx$$
.

解:原式= 
$$\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$
.

例1.6:求 
$$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx.$$

- (5)不定积分的性质

例1.5:求 
$$\int \tan^2 x dx$$
.

解:原式= 
$$\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$
.

例1.6:求 
$$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx.$$

解:原式= 
$$\int \frac{x + (1 + x^2)}{x(1 + x^2)} dx = \int \frac{1}{1 + x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$$
  
=  $\arctan x + \ln|x| + C$ .

### 1 不定和分

- (1)很分的反问题(2)不定和分的概念
  - (3)不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表 (5) 不定积分的性盾
- (0)-...
- 2.换元积分法
- (2)第二换元法
- (3) 換元法小结
- 3.分部积分法
  - 1)分部积分公式
- (3)多次分部积分
- 4.其他类型不定积
- 分的求法
  - )有理函数的不定积分 )三角函数有理式的不定
- (分 3)一类无理根式的不匀
- 分 (A)混片 (2)5
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例1.5:求 
$$\int \tan^2 x dx$$
.

解:原式= 
$$\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$
.

例1.6:求 
$$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx.$$

解:原式= 
$$\int \frac{x + (1 + x^2)}{x(1 + x^2)} dx = \int \frac{1}{1 + x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$$
  
=  $\arctan x + \ln|x| + C$ .

例1.7:求 
$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

### 1 不定和分

- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (A) # \* \* \* A)
- (5)不定积分的性质

### 2 换元和分法

- (1)第一换元法
- (2) 第二揆无法
  (3) 終元注小妹
- (4)课后习题

# 3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积分的支法
- 分的求法
- (1) 有理函数的不足积分(2) 三角函数有理式的不
- (Z)二用函数有埋虱的不) 积分
- 3)一类无理根式的不
- (4)课后习题

例1.5:求 
$$\int \tan^2 x dx$$
.

解:原式= 
$$\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$
.

例1.6:求 
$$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx.$$

解:原 式= 
$$\int \frac{x + (1 + x^2)}{x(1 + x^2)} dx = \int \frac{1}{1 + x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$$
  
=  $\arctan x + \ln|x| + C$ .

例1.7:求 
$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

解:原式= 
$$\int \frac{x^4 - 1 + 1}{1 + x^2} dx = \int (x^2 - 1) dx + \int \frac{1}{1 + x^2} dx$$
  
=  $\frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$ .

(1)很分的反问题(2)不定积分的概念

(3)不定积分与微分的关 (4)基本积分表 (5)不定积分的性质

2.换元积分法

1)第一換元法 2)第二換元法 3)換元法小结

3.分部积分法

(3)多次分部积分 (4)课后习题 4.其他类型不定积

的 求 法 1)有理函数的不定积分 2)三角函数有理式的不定 5分 3)一类无理根式的不定积

(4)课后习题

# (6)课后习题

# (6)课后习题

(2) 
$$\not x \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
.

(4) 如果
$$e^{-x}$$
是 $f(x)$ 的原函数,求  $\int x^2 f(\ln x) dx$ .

(5) 如果
$$f(x)$$
是 $e^{-x}$ 的原函数,求 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx$ .

(6) 
$$2 \neq \sqrt{1-x^2} dx = Ax\sqrt{1-x^2} + B \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \, \not \gtrsim A, B.$$

不定积分

(1)很分的反问题(2)工空和公的每个

(3)不定积分与微分的关

(4)基本积分表

(6)课后习题

2.换元积分法

(1)第一換元法

(3)换元法小结

3.分部积分法

1)分部积分公式

(3)多次分部积分

(4)课后习题

4.其他类型不定积 分的求法

)有理函数的不定积分

2)三角函数有理式的不定 《分

(3)一类无理根式的7 分

(4)课后习题

5.各节参考答案

## 1. 不定积分

- (1)微分的反问题
  - (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

# 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习录

# 3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2)u和v'的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

# 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

# 5.各节参考答案

### 不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性。 (6)误后习题

## 2.换元积分法

- (1)第一换元/
- (2)第二換元法
- (4)课后习题

- (1)分部积分公式
- (2) u和v 的选取 (3) 多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积分的求法
- 1)有理函数的不定积
- (1)有理函数的不定积分
  (2)三角函数有理点的习
- 积分
- (3)一美无理根式的不 分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

## 1. 不定积分

- (1)微分的反问题
  - (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

# 2.换元积分法

# (1)第一换元法

- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

# 3分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2)u和v'的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

## 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

# 5.各节参考答案

### 1 不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性/
  (6)课后习题

### 2.换元积分法

## (1)第一换元法

- (2)第二換元法 (2) 40 三 13 上 41
- (4)课后习题

- (1)分部积分公式
- (2) U和V 的选取
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - 1) 在理函数的不定积分
- (1)有理函数的不定积分(2) 2 2 4 + m 5 4 -
- (2)三角函数有理式的不积分
- (3)一类无理根式的2分
- (4)课后习题
- 5. 各节参考答案

例2.1:求 
$$\int (ax+b)^m dx$$
.

## (1)第一换元法

例2.1:求 
$$\int (ax+b)^m dx$$
.

解:  $m \neq -1$ 时,

原式 = 
$$\frac{1}{a}\int (ax+b)^m d(ax+b) \stackrel{u=ax+b}{=} \frac{1}{a}\int u^m du$$
  
=  $\frac{1}{a(m+1)}u^{m+1} + C = \frac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1} + C.$ 

原式 = 
$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{ax+b}d(ax+b) \stackrel{u=ax+b}{=} \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}du$$
  
=  $\frac{1}{a}\ln|u|+C = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$ .

### 1 不定积分

- (1)很分的反问题(2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关
- (5)不定积分的性质
- 2 换元积分法

# (1)第一换元法

- (2)第二接元法(3)接元法小结
- (4)课后习题

- (1)分部积分公式 (2) u和v 的选取
- (3)多次分部积分(4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - 1)女朋系は仏子や知人
  - (2)三角函数有理式的不定
  - (3)一类无理根式的不多分
- 分 (4)课后习题
- (4)採后习题

例2.2:求 
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

### (1)第一换元法

例2.2:求 
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

解:

原式 = 
$$\frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2}$$
  
 $\stackrel{u=x/a}{=} \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2}$   
=  $\frac{1}{a} \arctan u + C$   
=  $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ .

### 1.不定积分

- (1)微分的反问题(2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关
- (5)不定积分的性
- 2 换元积分法

# (1)第一换元法

- (2)第二換元法 (3)終元法小姓
- (4)课后习题

## 3.分部积分法

- (1)分部积分公式 (2)U和V<sup>1</sup>的选取
- (3)多次分部积 (4)课后习题

### 4.其他类型不定积 分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- (3)一类无理根式的2
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例2.3:求  $\int \tan x dx$ .

### (1)第一换元法

例2.3:求 
$$\int \tan x dx$$
.

解:

原式 = 
$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
= 
$$\int -\frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$u = \cos x - \int \frac{du}{u}$$
= 
$$-\ln|u| + C$$
= 
$$-\ln|\cos x| + C.$$

### 1.不定积分

- (1)很分的反问题(2)不定积分的概念
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不足积分的性。(6)课后习题
- 2.换元积分法

## (1)第一换元法

- (2)第二換元法
  (3)終元法小組
- (4)课后习题

- 1)分部积分公式
- (2) u和v'的选项 (3) 多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - 1)有理函数的不定积
- (2)三角函数有理式的不
- 积分
- 分(4) 四三口田
- 5 冬节糸老祭宏

例2.4:求  $\int \sec^6 x dx$ .

## (1)第一换元法

例2.4:求 
$$\int \sec^6 x dx$$
.

解:

原式 = 
$$\int \sec^4 x d \tan x$$
  
=  $\int (1 + \tan^2 x)^2 d \tan x$   
=  $\int (1 + u^2)^2 du$   
=  $\int (1 + 2u^2 + u^4) du$   
=  $u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$   
=  $\tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$ .

- 1 不定和分
- (1) 微分的反问:
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5) 不定积分的包 (6) 网络贝斯
- 2 换元积分法
- (1)第一换元法
- (2)第二換元
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - 1)分部积分公式
- (3)多次分部积
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积 分的求法
- (1)有理函数的不定积分
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

# 2.换元积分法

- (2)第二换元法

- (2)第二换元法

例2.5:求 
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0)$$
.

- 1 不定和分
- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的
- 2 推示和分泌
  - (1) 第一接元
  - (2)第二换元法
  - (4)课后习机
  - 3.分部积分法
    - 1)分部积分公式
    - (1)分中积分公司(2)日和V 的选项
  - (3)多次分部
  - (4)课后习题

  - 4.共他英型不足积 分的求法
  - (1)有理函数的不定积分
  - (2)三角函数有理式的不定
  - 积分 (3)—※モ四根さ
  - (3)一类无理根式的2 分
- (4)课后习录
  - 5. 各节参考答案

例2.5:求 
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0)$$
.  
解:令 $x = a \sin t,$ 其中 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,则

原式 = 
$$\int \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} d(a \sin t)$$
  
=  $\int a \cos t (a \cos t) dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$   
=  $\frac{a^2}{2} (\int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t)) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C$ ,

注意到

$$t = \arcsin \frac{x}{a}$$
,  $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$ ,

所以

原式 = 
$$\frac{a^2}{2}$$
 arcsin  $\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$ .

1 不定和分

(1) 微分的反问题 (2) 不会和人的概念

(3)不定积分与微分的关

(6)课后习题

(1) 第一接元法

(2)第二換元法 (3)換元法小结 (4)源公司等

3.分部积分法 (1)分部积分公式

(4)课后习题

4.其他类型不定积 分的求法

(1)有理函數的不定积分 (2)三角函數有理式的不定 积分

(3)一类无理根式的不定分

(4)採后习题

5.各节参考答案

## 1.不定积分

- (1)微分的反问题
  - (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

# 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

# 3 分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2)u和v'的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

## 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

### 1 不定积分

- (1) 很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性/ (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一接元/
- (2)第二換元法(3)換元法小结
- (4)课后习题

- (1)分部积分公式
- (2) U和V 的选取
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积 分的求法
- [1]有理函数的不定积:
- (1) 有经函数的不足积为(2) = 备系数有理求的为
- 积分
- (3)一美无理根式的不 分
- (4)课后习题
- 5 久节糸老祭安

▶ 第一换元法通常是令

$$t = f(x),$$

所以又叫凑微分法.

▶ 第二换元法通常是令

$$x = g(t),$$

并且g(t)是个单调可导函数.

- 1 不定积分
- (1) 微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的天
- (4) 本 本 秋 ガ 水
- (5)不定积分的性
  (6)源丘口幣
- 2.换元积分法
  - (1)第一换元:
- (2) 第二接尤法 (3) 接元法小结
  - (4)课后习题
- 3 分部积分法
  - 1)公部和公八百
  - (1)分部积分公式(2)山和V 的洗彩
- (3)多次分部积
- (4)课后习题
  - 1.其他类型不定和
  - 1)有理函数的不定积分
- (1)司至函数的不足标为(2)二角系数右理方的工
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

# 2.换元积分法

# (4)课后习题

- (4)课后习题

(1) 
$$\not \equiv \int \cos^4 x dx$$
.

(2) 
$$\not x \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$$
.

(3) 
$$\ \, \rlap{/}{\cancel{x}} \int \frac{dx}{x(x^{10}+1)}.$$

(5) 
$$\sharp \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \sharp + a > 0.$$

(7) 
$$\cancel{x} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$
.

- 1 不定和分
- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3) 小足积分与银分的 (A) # + 知入本
- (5)不定积分的
- うねこ和八は
- (1) 第一排元法
- (2)第二换元法
- (4)课后习题
- 3分部积分法
  - 1)公部和公公市
  - (1)分部积分公式 (2)<sub>11和V</sub> 的洗取
- (3)多次分部积
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定和
- 分的求法
  - )有理函数的不定积分
  - 分
  - 3)一类无理根式的不定
- (4)课后习题
- ( ) . . . . . .

## 1. 不定积分

- (1)微分的反问题
  - (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

# 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小组
- (4) 澳丘豆斯

# 3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2)u和v'的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

## 4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

# 5. 各节参考答案

### 不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性/ (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一排元
- (2)第二换元法
- (4)课后习题

- (1)分部积分公式
- (2) u和v 的选取
- (3)多次分部
- (4)课后习题
- 1.其他类型不定积 分的求法
- 1)有理函数的不定积
- (1)有理函数的不定积
   (2)= 6 조 4 左 四 5 44
- 积分
- (3)一类无理根式的不 分
- (4)课后习题
- ( ) . . . . .

## 1. 不定积分

- (1)微分的反问题
  - (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

# 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4) 澳丘豆斯

# 3.分部积分法

# (1)分部积分公式

- (2) u和v'的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

## 4.其他类型不定积分的求治

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

### 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性/
  (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一换元
- (2)第二换元
- (4)课后习题

### 3.分部积分法

## (1)分部积分公式

- (1)分部积分公式 (2) u和 v 的选取 (3) 多次分部积分
- (4)课后习题

### 4.其他类型不定积 分的求法

- 1)有理函数的不定积
- (1)有理函数的不定积。
   (2)=每五数右回求約。
- 积分
- (3)一类无理根式的2 分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

# 已知导数的乘法公式为

$$(uv)'=u'v+v'u,$$

等式两边求不定积分得

$$\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx,$$

即

$$uv = \int vdu + \int udv,$$

所以

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

这就是分部积分公式.

- 1.不定积分
- (1)銀分的及門型(2)ナルからかれた
- (2) TAUNTONES
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的
- 9 拖开和公注
  - (1)第一接元治
- (2) 第二揆元
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式
- (1)分平积分公司 (2)U和V 的选
- (3)多次分部和
- (4)课后习题
  - 1.其他类型不定和 2的求法
  - (1)有理函数的不定积分
  - (2)三角函数有理式的2
  - (3)一类无理根式的不
- \$
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.1:求  $\int x \cos x dx$ .

### 1.不定积分

- (1)很分的反问题
  (2)てかわられた
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关
- (4) 本 今 秋 ガ ネ (5) エ ロ か ハ か
- (6)课后习题

### 2.换元积分法

- (1)第一换元
- (2)第二換元法
- (4)课后习题

### 3.分部积分?

## (1)分部积分公式

- (1)分部积分公式 (2)U和V 的选系
- (4)课后习题

# 4.其他类型不定积

- 1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习录

例3.1:求 
$$\int x \cos x dx$$
.

解:

原式 = 
$$\int xd\sin x$$
,

令

$$u=x, v=\sin x,$$

那么

$$\int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx$$
$$= x\sin x + \cos x + C.$$

- 1.不定积分
- (2)不定和公的概念
- (3)不定积分与微分的关
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性 (6)课后习题
- 2.换元积分法
  - (1)第一换元法
- (2) 44 千 生 1
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式
- (2) u和v 的选取 (3) 多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积分的求法
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定 积分
- 3)一类无理根式的不
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

- (2)u和v'的选取

- (2) u和v 的选取

现在问题转化为用分部积分法求

$$\int f(x)g(x)dx,$$

到底是u = f(x), v' = g(x)还是u = g(x), v' = f(x)?有没有一些基本的原则?

- 1 不定积分
- (1) 微分的反问题
- (2)不定积分的概念
  - (4)基本积分表
  - (5)不定积分的性质 (6)理戶日期
- 2.换元积分法
  - 第一換元法
- (3)换元法小
- (4)课后习题
- 3 分部积分法
- (1)分部积分公式(2) u和v 的选取
- (3)多次分部积分 (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
- 1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分 (3)一类无理根式的
- \*
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

现在问题转化为用分部积分法求

$$\int f(x)g(x)dx,$$

到底是u = f(x), v' = g(x)还是u = g(x), v' = f(x)?有没有一些基本的原则?

▶ 原则1:如果

$$\int f(x)dx \ \not\vdash \int g(x)dx$$

容易算,那么f(x) = v'.

- 1 不定积分
- (1) 微分的反应
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的信
- (0)採店习题
  - 1)第一换元法
- (2)第二接元
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式 (2)山和V 的选取
- (3)多次分部积(4)课后习题
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积 分的求法
- (1)有理函数的不定积分(2) 年 2 4 + 四 5 4 +
- (2)三角函数有理式的不
- 积分 (3)一类无理根式的
- 分(4) 20 0 0 0 0
- (4)课后习题

现在问题转化为用分部积分法求

$$\int f(x)g(x)dx,$$

到底是u = f(x), v' = g(x)还是u = g(x), v' = f(x)?有没有一些基本的原则?

▶ 原则1:如果

$$\int f(x)dx \ \not\vdash \int g(x)dx$$

容易算,那么f(x) = v'.

▶ 原则2:在原则1无法判断的情况下,如果

$$d(f(x))$$
 比 $d(g(x))$ 

容易算,那么f(x) = u.

- 1 不定和分
- (1) 很分的反
- (2)不定积分的概念 (2) エロコハト※ハム×
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
- 9 换元积分法
  - (1)第一換元法
- (2) ポー状元 (3) 終元法小
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式 (2) u和v 的选取
- (3)多次分部积(4)课后习题
- (4)课后习题
- 1.其他类型不定积 分的求法
- (1)有理函数的不定和
- (2)三角函数有理式的
- 3)一类无理根式的
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.2:求  $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx.$ 

- - (2) u和v 的选取

例3.2:求 
$$\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx.$$

那么

$$u = \ln \cos x, v' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

原式 = 
$$\int \ln \cos x d(\tan x)$$
  
=  $\tan x \ln \cos x - \int \tan x d(\ln \cos x)$   
=  $\tan x \ln \cos x - \int \tan x \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx$   
=  $\tan x \ln \cos x + \int \tan^2 x dx$   
=  $\tan x \ln \cos x + \int (\sec^2 x - 1) dx$   
=  $\tan x \ln \cos x + \tan x - x + C$ .

- 1 不定和分
  - (1) 很分的反问题 (2) 不会知及任何
  - 3)不定积分与微分的关 4)基本积分表
- (0)
- 2.换元积分法
- (3) 换元法小结
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式 (2) u和v'的选取 (3) 名字公部和公
- (4)课后习题 4.其他类型不定积
- 4.其他类型不定积 分的求法
  - .)有理函数的不定积分 2)三角函数有理式的不定 分
- 分(4)课后习
- 5.各节参考答案

我们接触的初等函数一般可以分成如下几类:

反三角函数,对数函数,幂函数,指数函数,三角函数.

如果被积函数可以看成是如上五类函数的任两类的乘积,该如何去选取u和v'?根据前述原则,显然反三角函数的不定积分最难算,对数函数次之,幂函数再次之,指数函数和三角函数两者差不多都比较容易算,但是指数函数的导数比三角函数的导数来得相对简单些,所以我们可以按照

# "反对幂指三"

的顺序来选择u. 以例4.1来说明,要求

$$\int x \cos x dx,$$

x 为幂函数,cosx 为三角函数,所以选择

$$u = x, v' = \cos x.$$

TASON

- (1) 微分的反问题 (2) 不定积分的概念
- (2)不定积分的概念 (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
  (5)不定积分的性质
- (5)不定积分的性质(6)课后习题
- 2.换元积分
  - (1)第一接元法
  - (3) 接元法小结 (4) 课后习题
  - (4)球后引起 2 八 部 5m 八、
  - 3.分部积分法 (1)公部和公公司
  - (2) u和v'的选取 (3) 多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积 分的求法
- (1)有理函数的不定利 (2)三角函数有理式的
- 积分 (3)一类无理根式
- 分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.3:求  $\int x \ln x dx$ .

### 1 不空和公

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的付 (6)课户习题

### 2 换元和分泌

- (1)第一换
- (2)第二換元法
- (4)课后习录

### 3.分部积分法

## 1)分部积分公式

- (2) u和v 的选取 (3) 多次分部积分
- (4)课后习录

# 4.其他类型不定积

- 1)有理函数的不定积分
- (1) 司廷函数的不足积分
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习法
- 5 各节参考签案

例3.3:求  $\int x \ln x dx$ .

解:x是幂函数,lnx是对数函数,所以令

$$u = \ln x, v' = x,$$

那么

$$\int x \ln x dx = \int \ln x d(\frac{1}{2}x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

### 1アウ和八

- (1)微分的反问题(2)不定积分的概念
- (3)不定积分与很分的关。 (4)基本积分表
- . . . . . . .
- (1)第一换元法
- (3)换元法小结
- 3 分部积分法
- (1)分部积分公式 (2) u和v 的选取 (3) 多次分部和分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积分的求法
  - (1)有理函数的不定积分 (2)三角函数有理式的不定
- 分 (4) 海丘 3 新
- 5.各节参考答案

例3.4:求  $\int x \arctan x dx$ .

### 1 不空和公

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的争
- (5)不定积分的付

### 2 换元和分泌

- (1)第一接法
  - (2)第二換元法
- (4)课后习灵

### 3.分部积分法

1)分部积分公式

## (2) u和v'的选取 (3) 多次分部积分

(4)课后习录

# 4.其他类型不定积

- (1) 本理品料的工会和
- (1)司及函数司尔及积为(2)二角系数右理さめて
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- (1)

例3.4:求  $\int x \arctan x dx$ .

解:x为幂函数,arctan x为反三角函数,所以令

$$u = \arctan x, v' = x,$$

那么

$$\int x \arctan x dx = \int \arctan x d(\frac{1}{2}x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 d(\arctan x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

### 1 不定积分

- (1)很分的反问题 (2)工公和公的概念
- (3)不定积分与微分的关
- (4)基本积分表
- (6)课后习题
- 2.换元积分法
  - (1)第一换元法
- (3) 换元法小结
- 3.分部积分法
  - )分部积分公式
- (2) u和v 的选取 (3) 多次分部积分 (4) 课户 以题
- 4.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
- 积分 (3)一类无理根式的不匀
- 分(4)课后习题
- 5.各节参考答案

例3.5:求  $\int e^x \sin x dx$ .

- (2) u和v 的选取

例3.5:求  $\int e^x \sin x dx$ .

解:
$$e^{x}$$
为指数函数, $\sin x$ 为三角函数,所以令

$$u=e^x, v'=\sin x,$$

$$\int e^{x} \sin x dx = \int e^{x} d(-\cos x) = -e^{x} \cos x + \int \cos x d(e^{x})$$

$$= -e^{x} \cos x + \int e^{x} \cos x dx$$

$$= -e^{x} \cos x + \int e^{x} d(\sin x)$$

$$= -e^{x} \cos x + e^{x} \sin x - \int \sin x d(e^{x})$$

$$= -e^{x} \cos x + e^{x} \sin x - \int e^{x} \sin x dx,$$

所以

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

不定和分

.) 微分的反问题 ?) 不定积分的概念

(3)不足积分与银分的 (4)基本积分表 (5)不定积分的性质

2.换元积分法

3.分部积分法

(2) u和v 的选取 (3) 多次分部积分 (4) 课后习题

4.其他类型不定积 分的求法

(1)有理函数的不定积分 (2)三角函数有理或的不定积分 (3)一类无理根或的不定积

(4)课后习题

5.各节参考答案

# 3.分部积分法

- (3)多次分部积分

- (3)多次分部积分

▶ 多次分部积分的公式

$$\int uv^{(n+1)}dx = \int ud(v^{(n)})$$

$$= uv^{(n)} - \int v^{(n)}du$$

$$= uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}dx$$

$$= uv^{(n)} - \int u'd(v^{(n-1)})$$

$$= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int v^{(n-1)}du'$$

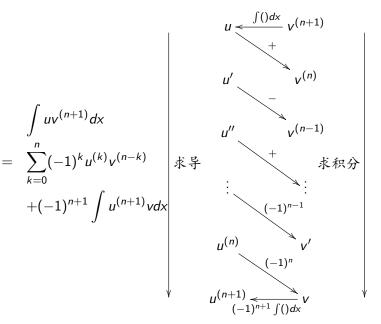
$$= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int u''v^{(n-1)}dx$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}u^{(k)}v^{(n-k)} + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx.$$

(3)多次分部积分

▶ 多次分部积分的快速表格计算



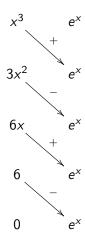
- 1 TAGA
  - (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- 1h r N N
- (1)第一換元法
- (3)换元法小结
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式
- (2) U和V 的选取 (3) 多次分部积分 (4) 课后只题
- (4)课后习题
- 分的求法
  - 1)有理函数的不定积分 2)三角函数有理式的不定 3分
- (3)一类无理根式的:分
- 5 各节参考签案

例3.6:用多次分部积分的快速表格计算  $\int x^3 e^x dx$ .

- 1 不定和公
- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不足积分与很分的分
- (5)不定积分的
- 2 協テ和公司
  - (1)第一换元
- (2)第二換元
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - 1446445
- (2) U和V 的选取 (3) 多次分部积分
- (4)课后习录
  - 4.其他类型不定积
    - )有理函数的不定积分
  - (2)三角函数有理式的不定
- 积分
- (3)一类无理根式的
- (4)课后习题
- (4) IND 01
  - 5.各节参考答案

例3.6:用多次分部积分的快速表格计算  $\int x^3 e^x dx$ .

解:



所以

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C.$$

- 1 不定和分
- (1)微分的反问
- (2)不全和公的制
- (4)基本积分表 (5)不定和公的。
- 9 拖开和公注
- (1)第一换元
- (2) 第二級7
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
- 1)分部积分公式
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题
  - 4.其他类型不定积分的支法
  - (1)有理函数的不定利
  - (2)二州函数有理以印积分
  - (3)一类无理根式的2分
- (4)课后习题
- (4)採后习题

# 3.分部积分法

# (4)课后习题

- (4)课后习题

(1) 
$$\not \equiv \int \sin(\ln x) dx$$
.

(2) 
$$\not x \int x^3 (\ln x)^4 dx$$
.

(3) 
$$\not \stackrel{\text{def}}{=} \int e^{kx} \cos(ax+b) dx$$
.

- (4)课后习题

## 1. 不定积分

- (1)微分的反问题
  - (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

## 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4) 澳丘豆斯

## 3分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u和 v'的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

## 4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

# 5. 各节参考答案

## 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性/ (6)课后习题

## 2.换元积分法

- (1)第一换元
- (2)第二换元法
- (4)课后习题

## 3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

## 4.其他类型不定积 分的求法

- 1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分 (3)一类无理根式的不
- ガ (4)课后习题
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

## 4.其他类型不定积分的求法

## (1)有理函数的不定积分

## (1)有理函数的不定积分

- 1.不定积分
- (1)很分的反问题 (2) T 中 4 A A A A A A
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的:
- (4)基本积分表
- (5)水足积分的位
- 2.换元积分法
  - (1)第一换元/
- (3) 换元法小
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - (1)公部の公公方
  - (1)分部积分公: (2)U和V 的选:
- (3)多次分部
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 叔分 (2) まとかいよれてない
- 分 (A)28 己 0 8
- (4) 採后习炎
- 5.各节参考答案

(1) 
$$\int \frac{1}{x-a} dx;$$

## 1.不定积分

- (1)很分的反问题(2)工空和公的每念
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
- 2 换元和分法
  - (1) 第一級元件
  - (2) 第二揆元
  - (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - (1) 0 4 (1) 1
  - 1)分部积分公式 2)<sub>11和V</sub>/的洗系
- (3)多次分部
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- (3)一类无理根式的不定;
- (4)课后习题
- (4)环石刁鸡

(1) 
$$\int \frac{1}{x-a} dx;$$
(2) 
$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \not \pm \psi \, n \neq 1;$$

- 1.不定积分
- (1)很分的及門項
   (2)丁心知及的規格
- (2) 不足积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
- り接三和八件
  - (1)第一换元法
- (2) 卵一状元 (3) 終元法小
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - 分部积分公式
  - (2) u和v′的选》 (2) & か入が知/
- (3) 步次分部和 (4) 课后习题
- 4.其他类型不定
- (1)有理函数的不定积分
  - **有埋函数的不定积分**
- (2)三角函数有理式的不定 积分
- (3)一类无理根式的
- (4)课后习题
- 5. 各节参考答案

(1) 
$$\int \frac{1}{x-a} dx;$$

(2) 
$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \not \pm \psi \, n \neq 1;$$

(3) 
$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \, \sharp \, \psi \, p^2 - 4q < 0;$$

- 1.不定积分
- (2) 7 0 0 0 0 0 0
- (2)不足积分的积恕
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
- 2 拍开和公注
  - (1)第一換元法
- (2) 第二揆元(
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - )分部积分公式
- (2) U和V 的选
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- (3)一类无理根式的不
- (4)课后习题

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

(2) 
$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \sharp + n \neq 1;$$

(3) 
$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \, \sharp \, \psi \, p^2 - 4q < 0;$$

(4) 
$$\int \frac{x}{x^2 + px + q} dx$$
,  $\sharp \neq p^2 - 4q < 0$ ;

- 1.不定积分
- (2)不定和公的概念
- (3) 工字和公告那公奶至
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性/
- 2 换元积分法
  - 1)第一换元法
- (3) 綠元法小台
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - )分部积分公式
- (2) u和v'的选:
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不足
- (3)一类无理根式的不
- 7 (4)课后习题
- 力士会去你办

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

(2) 
$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \not \pm \psi \, n \neq 1;$$

(3) 
$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \sharp + p^2 - 4q < 0;$$

(4) 
$$\int \frac{x}{x^2 + px + q} dx$$
,  $\sharp + p^2 - 4q < 0$ ;

(5) 
$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx, \ \sharp + p^2 - 4q < 0, n \neq 1;$$

- 1.不定积分
- (1) ボカの及らん
  (2) エウむ公的海
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性。
  (6)理戶日期
- 2 换元积分法
- (1)第一换元法
- (3) 换元法小组
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - 1)分部积分公式
- (2) U和V 的选 (3) 多次分部积
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定
- 分的求法
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定 积分
- 3)一类无理根式的不
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

(1) 
$$\int \frac{1}{x-a} dx;$$

(2) 
$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \not \pm \psi \, n \neq 1;$$

(3) 
$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \sharp + p^2 - 4q < 0;$$

(4) 
$$\int \frac{x}{x^2 + px + q} dx, \sharp + p^2 - 4q < 0;$$

(5) 
$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx, \ \sharp + p^2 - 4q < 0, \ n \neq 1;$$

(6) 
$$\int \frac{x}{(x^2 + px + q)^n} dx, \ \ \sharp + p^2 - 4q < 0, \ n \neq 1.$$

## 1.不定积分

- (1) 銀方可及門題
- (2)不定积分的概念
- (3) 小足积分与银分的大
- (4) 本 本 秋 ガ 永 (5) ナ か か か か か か
- (6)採后习题

## 2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二換元法
- (4)课后习题

## 3.分部积分法

- )分部积分公式
- (2) U和V 的选1 (3) 多次分部和4
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积分的求法

## (1)有理函数的不定积分

## 2)三角函数有理式的不

- 、) 3)一类无理根式的不
- (3)一英元理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C;$$

- 1 エウ和ム
- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性 (6)课后习题
- 2.换元积分2
  - (1)第一换元
  - (3) 换元法小
  - (4)课后习题
  - 3分部和分计
    - 1)分部积分公式
- (2) u和v'的 (3) 多次分部
- (4)课后习题
- (4)课后习题
  - 的求法
- (1)有理函数的不定积分
  - 三角函数有理式的不定
- 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习点
- 5.各节参考答案

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C;$$

(2)

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{1-n} (x-a)^{1-n} + C;$$

- 1 アウ和八
- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的积忍
- (4)基本积分表
- (6)课后习题
- ..换元积分法
- 1)第一換元法 2)第二換元法 3)換元法小结
- 2 八部和八法
  - 分部积分公式
- (3)多次分部积
- 4.其他类型不定积分的求法
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
  - 3)一类无理根式的不知
- (4)课后习题
- . 各节参考答案

(2) 
$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C;$$
(3) 
$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{1-n} (x-a)^{1-n} + C;$$
(4) 
$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} d(x+\frac{p}{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{1}{(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}})^2 + 1} d(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C;$$

(1)

(1)有理函数的不定积分

(4)

$$\int \frac{x}{x^2 + px + q} dx$$

$$= \int \frac{(x + \frac{p}{2})}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} d(x + \frac{p}{2}) - \frac{p}{2} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + px + q) - \frac{p}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + px + q) - \frac{p}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C;$$

( ナウショハ

- (1)很分的反问题 (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质(6)课后习题
- 2.换元积分法
- (1)第一换元法
- (3)换元法小结 (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - 分部积分公式
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积分的求法
- (1)有理函数的不定积分 (2)三角函数有理或的不定
- (2)三角函数有理式的不定 积分
- (3)一类无理根式的2分
- 4)课后习题
- (1)\*\*\*\*\*

(5)

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx$$

$$= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) - (x + \frac{p}{2})^2}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^n} dx$$

$$= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx$$

$$- \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^n}{((x + \frac{p}{2})^2 - (x + \frac{p}{2})^2)} dx$$

$$= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{(x + \frac{p}{2})^2}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^n} dx$$

$$= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx$$

$$+ \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})} \int (x + \frac{p}{2}) d(\frac{1}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^{n-1}})$$

$$= \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})} \int (x + \frac{p}{2}) d(\frac{1}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^{n-1}})$$

$$= \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})} \int (x + \frac{p}{2}) d(\frac{1}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^{n-1}})$$

$$= \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})} \int (x + \frac{p}{2}) d(\frac{1}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^{n-1}})$$

- (1)有理函数的不定积分

$$= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx$$

$$+ \frac{x + \frac{p}{2}}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

$$- \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx$$

$$= \frac{2x + p}{(n-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

$$+ \frac{4n - 6}{(n-1)(4q - p^2)} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx;$$
记所求的
$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx = I_n,$$
我们得到递推表达式

 $I_n = \frac{2x + p}{(n-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{4n - 6}{(n-1)(4q - p^2)}I_{n-1}.$ 

1.不定积分 (1)服分的反问题 (2)不定和分的概念

3)不定积分与微分的关系 4)基本积分表 5)不定积分的性质

2.换元积分法

(3)换元法小结 (4)课后习题

(1)分部积分公式 (2)u和v<sup>1</sup>的选取 (3)多次分部积分 (4)课后习题

4.其他类型不定积 分的求法

(1)有理函数的不定积分 (2)三角函数有理式的不定 积分 (3)一基系理损害的不定知

(4)课后习题

(6)

$$\int \frac{x}{(x^2 + px + q)^n} dx$$

$$= \int \frac{x + \frac{p}{2}}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} dx - \frac{p}{2} I_n$$

$$= \frac{1}{2(1 - n)((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n$$

$$= \frac{1}{2(1 - n)(x^2 + px + q)^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n;$$

这归结为求1<sub>n</sub>.

- 1 不空和公
- (1)微分的反问题
   (2)エロションのは
  - 3)不定积分与微分的
- (4)基本积分表(5)工空和公的終月
- 9 拖开和公注
  - 第一換元法
- (2) 第二揆元 (3) 揆元法小
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - 1)分部积分公式 2)11和V 的进取
- (3)多次分部积
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积 分的求法
- (1)有理函数的不定积分 (2)=负函数有理点的不定
- (2)三角函数有理式的不定 积分
- (3)一类无理根式的不; 分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

(6)

$$\int \frac{x}{(x^2 + px + q)^n} dx$$

$$= \int \frac{x + \frac{p}{2}}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} dx - \frac{p}{2} I_n$$

$$= \frac{1}{2(1 - n)((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n$$

$$= \frac{1}{2(1 - n)(x^2 + px + q)^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n;$$

这归结为求In.

- (1)部分的方向期
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的 ; (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质 (6)课后习题
- 2.换元积分法
  - (1)第一换元法
- (3)換元法小約(4)误后习题
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式
- (3)多次分部积
- (4)课后习题
  - 4.其他类型不定积 分的求法
  - (1)有理函数的不定积分 (2)三角函数有理点的不定
  - (2)二用函数有理式的小 积分 (2) - 4 エ回起よ品丁☆
  - (3)一类无理根式的不分
    - 4)课后习题
- 5.各节参考答案

有理函数的不定积分都可以转化成以上六类积分的形式.

例4.1:求 
$$\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$$
.

- 1 T 1 6 1
- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
  (6)课后习题
- つ 雄元和分計
  - (1)第一换元
  - (3) 換元法小约
  - N 30 50 N 24
  - (1)分部积分公式
  - (1)分甲积分公式 (2)4和V 的选取 (2)44八年和八
- (4)课后习题
- 1.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
  - 「理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定 积分
  - 3)一类无理根式的不
- (4)课后习》
  - . 各节参考答案

例4.1:求  $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$ .

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}, \quad (1)$$

(1)式左右两边分别乘上(1+2x)得到

$$\frac{1}{1+x^2} = A + \frac{Bx}{1+x^2}(1+2x) + \frac{C}{1+x^2}(1+2x), \quad (2)$$

在(2)式两边令
$$x = \frac{1}{2}$$
推出 $A = \frac{4}{5}$ .在(2)式两边令 $x = 0$ 有
$$1 = A + C.$$

$$4+C$$

推出
$$C = \frac{1}{5}$$
.在(2)式两边令 $x = 1$ 有

$$\frac{1}{2} = A + \frac{3}{2}B + \frac{3}{2}C,$$

(1)有理函数的不定积分

推出
$$B = -\frac{2}{5}$$
. 即

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}(\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}),$$

所以

$$\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+2x} dx - \frac{2}{5} \int \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C.$$

## 1 不定积分

- (1) 做分的反问题 (2) 不定积分的概念
  - (3)不定积分与微分的关系
  - (4)基本积分表 (5)二二八八八八
- (5)不定积分的性质 (6)课后习题
- 2 换元积分法
- (1)第一换元法
- (3)换元法小约
- 2 公郊和公注
  - )分部积分公式
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题
- 分的求法
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定 积分
- (3)一类无理根式的不分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

## 4.其他类型不定积分的求法

- (2)三角函数有理式的不定积分

- (2)三角函数有理式的不定

▶ 形如  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  的三角函数有理式的不定积分 可以令 $t = \tan \frac{x}{2}$ .

- 1 70501
- (1) 8 公的 6
- (2)不定积分的概念
- (3)不定和公后继公的
- (4)基本积分表
- (5)不足积分的性 (6) 四二 0 四
- 2 拍开和公注
  - 1)第一换元法
- (3) 換元法小:
- 2 1 30 See 1 24
  - 1 9 1/1/71 /2
  - l)分部积分公式 ))<sub>II和V</sub>的洗取
- (3)多次分部
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - )有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定 积分
  - 分 ()一率无理根式的不定利
- 7 A)28 = 0.85
- (4)课后习录
  - 5.各节参考答案

▶ 形如 
$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$
 的三角函数有理式的不定积分 可以令 $t = \tan \frac{x}{2}$ .

例4.2:求 
$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx.$$

- 1 不空和公
- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
  - (A) 並太和公当個分目 (A) 並太和公当
  - (5)不定积分的性
- 017 = 6 0 1
  - (1) 第一排示:
- (2)第二接元
- (4)课后习题
- 3 分部和分法
  - )分部积分公式
- (2) U和V 的选取 (3) 名示公部和公
- (3)多次分部积(4)课后习题
- 4.其他类型不定积
  - 1)在理函数的不定和公
- (2)三角函数有理式的不定 积分
  - ) 一系子理報主約工字和
  - 4) 100 6. 00 85
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ 形如  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  的三角函数有理式的不定积分 可以令 $t = \tan \frac{x}{2}$ .

例4.2:求 
$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx.$$

解:令 $t = \tan \frac{x}{2}$ ,则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ , $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ ,

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x (1+\cos x)} dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} (1+\frac{1-t^2}{1+t^2})} \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int t dt + \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{4} t^2 + t + \frac{1}{2} \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln|\tan \frac{x}{2}| + C.$$

1 不定积分

(1)微分的反问题 (2)不定积分的概念

(4)基本积分表 (5)不定积分的性质

2 格兰和八件

(1)第一換元法(2)第二換元法

(3)換元法小结 (4)课后习题

(3)多次分部积分 (4)课后习题 4.其他类型不定积

4.其他类型不定积分的求法

(1)有理函數的不定积分 (2)三角函數有理式的不定 积分

分 (4)课后习题

5.各节参考答案

▶ 形如  $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx$  的三角函数有理式的不定积分可以令 $t = \tan x$ .

例4.3:求 
$$\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2} dx (ab \neq 0).$$

解:令
$$t = \tan x, dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$
,所以

$$\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2} dx = \int \frac{1}{(at+b)^2} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(at+b)^2} d(at+b) = -\frac{1}{a(at+b)} + C$$

$$= -\frac{1}{a^2 \tan x + ab} + C.$$

## 1 不空和公

- (1) 微分的反问题(2) 不定积分的概念
- (3)不定积分与很分的关户 (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质(6)提出习题
- 2 换元积分法
- (1)第一换元法
- (3)换元法小
- 2 公郊和公注
  - 分部积分公式
- (2) U和V'的选取 (3) 多次分部积分
- (4)课后习题
  - 4.其他类型不定积分的求法
  - 1)有理函数的不定积
  - (2)三角函数有理式的不定 积分
    - 3)一类无理根式的不
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

## 4.其他类型不定积分的求法

- (3)一类无理根式的不定积分

# (3)一类无理根式的不定积

▶ 形如 
$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$$
的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ .

- (3)一类无理根式的不定积

▶ 形如 
$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$$
的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ .

例4.4:求 
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$$
.

- - (3)一类无理根式的不定积

▶ 形如 
$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$$
的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ .

例4.4:求 
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$$
.

解:令
$$t = \sqrt[3]{x+2}$$
,则 $dx = 3t^2dt$ , 所以

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} = \int \frac{3t^2}{1+t} dt$$

$$= 3 \int (t-1)dt + 3 \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \frac{3}{2}(t-1)^2 + 3\ln|1+t| + C$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+2}-1)^2 + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}| + C.$$

## 1 不空和公

- (1) 微分的反问题(2) 不定积分的概念(3) 不定积分与微分的关
  - (5)不定积分的性儿

## 9 换元和分法

- (1)第一換元法
- (3) 換元法小台

## 3 分部积分法

- (1)分部积分公式 (2) u和v d 的选取 (3) 多次分部积分
- 4.其他类型不定积
- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不知 积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ 形如 
$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$
 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

- (3)一类无理根式的不定积

▶ 形如 
$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$
 的无理式不定积分可以令  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

例4.5:求 
$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$$
.

### TOSON

- (1) 微分的反问题 (2) 不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4) 整本积分表
  (5) 不定积分的性。
- 0 17 = 6 1 1
  - 1. 狭.乙.积分 (1)第一换元法
  - (3) 換元法小结

### 2 1/2015-1/24

- 1)分部积分公式
- (3)多次分部积
- 4.其他类型不定积
  - 分的求法
- (2)三角函数有理式的不定
- (2)三角函数有理式的不定 积分

# (3)一类无理根式的不定积分

(4)课后习题

(1)\*\*\*\*

▶ 形如 
$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$
 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

例4.5:求 
$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$$
.

解:令
$$t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$$
,则 $x = \frac{1}{t^2-1}$ , $dx = \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$ ,所以
$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx = \int (t^2-1)t \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -2 \int dt - \int \frac{1}{t - 1} dt + \int \frac{1}{t + 1} dt$$

$$= -2t - \ln|t - 1| + \ln|t + 1| + C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln|\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1| + \ln|\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1| + C.$$

▶ 形如  $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx$  的无理式不定积分 可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ ,其中p为m,n的最小公倍数.

- 1 不定积分
- (1) 微分的反
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性
- 2 换元和分法
  - 1)第一换元法
- (2) 第二揆人
- (4)课后习题
- 3.分部积分法
  - )分部积分公式
- (2) u和v'的选( (3) 多次分部和4
- (3)多次分部和 (A)理戶口斯
- (4)课后习题
- 1.其他类型不定积
  - )有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题
- (4)4272
- 5.各节参考答案

▶ 形如  $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx$  的无理式不定积分 可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ ,其中p为m,n的最小公倍数.

例4.6:求 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

### 1. 不定积分

- (1)很分的反问
- (2)不定积分的概念
  - (3)不足积分与假分 (4)装太积分表
- (5)不定积分的性
- うねこ和八は
  - (1)第一换元/
- (3) 終元法小:
- (4)课后习题

### 3 分部积分法

- )分部积分公式
- (3)多次分部积
- (4)课后习题
- (4)课后习题
- 1.其他类型不定积 分的求法
  - )有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分 (2) まこっ。

- (4)课后习题
- 5 久节糸老公安

▶ 形如  $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx$  的无理式不定积分 可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ ,其中p为m,n的最小公倍数.

例4.6:求 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

解:令
$$t = \sqrt[6]{x}$$
,则 $x = t^6$ ,  $dx = 6t^5 dt$ ,所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt$$

$$= 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{1}{t+1} dt$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

### 1.不定积分

- (1)微分的反问题(2)不定积分的概念
  - (3)不定积分与微分的关 (4)基本积分表
- (5)不定积分的性)
- 2 换元积分法
- (1)第一换元法
- (3)換元法小结
  (4)课后习题

### 3.分部积分法

- (1)分部积分公式(2) u和v 的选取
- (3)多次分部积分 (4)课后习题
- 4.其他类型不定积 分的求法
- (1)有理函数的不定积分(2)= 角函数有理点的区
- (2)三角函数有理式的不足 积分
- (3)一美无理根式的不定积分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ 形如  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ 的无理式不定积分可以如下换元:

(1) 当
$$a > 0$$
,可以令 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} \pm t$ ;

(2) 当
$$a < 0, c \ge 0$$
,可以令 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ ;

$$ax^2 + bx + c = a((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}),$$
  
此时 $\frac{4ac - b^2}{4a^2} < 0,$ 令 $u = x + \frac{b}{2a}, k^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 则 $ax^2 + bx + c = -a(k^2 - u^2),$ 

 $\phi u = k \sin t$  即可.

### 1 不定积分

- (1) 假分的反问题 (2) 不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关 (4)基本积分表
- (4) 基本积分表
  (5) 不定积分的性质
- 2 换元积分法
- (1)第一换元法
- (3) 换元法小约

### 3.分部积分法

- 1)分部积分公式
- (3)多次分部积分 (4)课后习题
- 4.其他类型不定
  - 分的承法 (1)有理函数的不定积分
  - (2)三角函数有理式的不定积分
  - (3)一类无理根式的不定积分
  - (4)课后习题
- 5.各节参考答案

例4.7:求 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}.$$

例4.7:求 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$
.

解:令
$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = x - t$$
,则解得 $x = \frac{t^2 + 3}{2(t - 1)}$ ,故
$$x - t = \frac{-t^2 + 2t + 3}{2(t - 1)}, dx = \frac{t^2 - 2t - 3}{2(t - 1)^2}dt,$$

则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \int \frac{2(t - 1)}{-t^2 + 2t + 3} \frac{t^2 - 2t - 3}{2(t - 1)^2} dt$$

$$= -\int \frac{1}{t - 1} dt$$

$$= -\ln|t - 1| + C$$

$$= -\ln|x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}| + C.$$

- (3)一类无理根式的不定积

例4.8:求 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}.$$

- 1 不定和分
- (1)很分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的付

### 2 推示和分泌

- (1)第一接
  - (2)第二換元法
- (4)课后习录

### 3 分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u和 v 的选取
- (3)多次分部
- (4)课后习录
  - 4.其他类型不定积
    - 1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定
- 积分

- (4)课后习》
- 5.各节参考答案

例4.8:求 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$$
.

解:令
$$\sqrt{-x^2-2x+3} = xt - \sqrt{3}$$
,则解得 $x = \frac{2(\sqrt{3}t-1)}{t^2+1}$ ,故

$$xt - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3}}{t^2 + 1}, dx = \frac{-2\sqrt{3}t^2 + 4t + 2\sqrt{3}}{(t^2 + 1)^2}dt,$$

则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}$$

$$= \int \frac{t^2 + 1}{\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3}} \frac{-2\sqrt{3}t^2 + 4t + 2\sqrt{3}}{(t^2 + 1)^2} dt$$

$$= -2\int \frac{1}{t^2 + 1} dt = -2 \arctan t + C$$

$$= -2 \arctan \frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 3} + \sqrt{3}}{x} + C.$$

例4.9:求 
$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-4x-3}} dx.$$

例4.9:求 
$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2-4x-3}} dx$$
.

解:

$$\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}} dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1 - (x + 2)^2}} dx$$

$$x + 2 = \sin t \int \frac{(\sin t - 2) \cos t dt}{\cos t}$$

$$= -\cos t - 2t + C$$

$$= -\sqrt{-x^2 - 4x - 3} - 2\arcsin(x + 2) + C.$$

### 1.不定积分

- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关 (A) 其太和公本
- (5)不定积分的性
- 2 换元和分法
- (1) 第一排元件
- (2) 第二級元次
- (4)课后习题

### 3.分部积分法

- 1)分部积分公式
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题
- 4.其他类型不定和
  - )的求法
  - (1)有理函数的不定积分(2)= 6 조 4 カロドムアの
  - (2)三角函数有理或的积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题
- 5.各节参考答案

### 4.其他类型不定积分的求法

# (4)课后习题

### (4)课后习题

$$(1) \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = ?$$

(2) 
$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx = ?$$

$$(3) \int \frac{1+\sin x}{3+\cos x} dx = ?$$

$$(4) \int x\sqrt{2x-3}dx = ?$$

(5) 
$$\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} dx = ?$$

(6) 
$$\int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3} dx = ?$$

- 1.不定积分
- (2)不定和公的概念
- (2) TO WALES
- (4)基本积分表
- (0)14.87%
  - 2. 狭兀积分2 . .
- (1) 第一揆无法 (2) 第二揆无法
- (4)课后月颢
- 3.分部积分法
- (1)分部积分公式
- (2) u和 v 的选项 (3) 名次公部和公
- (3)多次分部积余(4)课后习题
- (4)课后习题
  - 1.其他类型不定积 分的求法
  - 1)有理函数的不定积分
  - (2)三角函数有理式的不定
  - 3)一类无理根式的不定
- (4)课后习题
- 各节参考答案

# 5.各节参考答案

- 5.各节参考答案

不定积分

$$(1) - \frac{1}{x} - \arctan x + C. \qquad (2) \tan x - \cot x + C.$$

$$(3)\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C. \qquad (4) - \ln|x| + C.$$

$$(5)\frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2.$$
  $(6)A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$ 

換元积分法 
$$(1)\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$$
  $(2)x + \ln|x| - \ln|1 + xe^{x}| + C.$ 

(3) 
$$\ln |x| - \frac{1}{10} \ln(1 + x^{10}) + C.$$
 (4)  $\arcsin \frac{x - 2}{2} + C.$ 

$$(5)\ln(\sqrt{a^2+x^2}+x)+C.$$

$$(6)\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$(7)2\ln(\sqrt{1+e^x}-1) - x + C.$$

5.各节参考答案

分部积分法 
$$(1)\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$$
 
$$(2)\frac{1}{4}x^4(\ln^4x-\ln^3x+\frac{3}{4}\ln^2x-\frac{3}{8}\ln x+\frac{3}{32})+C$$
 
$$(3)\begin{cases} x\cos b+C, & a^2+k^2=0\\ \frac{a\sin(ax+b)+k\cos(ax+b)}{a^2+k^2}e^{kx}+C, & a^2+k^2\neq 0 \end{cases}$$
 (1) Before Responding (3) State of Responding (4) Before Responding (4) Before Responding (5) Find Responding (6) Before Responding (6) Before Responding (6) Before Responding (7) Resp