随机过程

教材和参考书

- 《随机过程》（第5版），刘次华编著, 华中科技大学出版社， 2017年.
- 《随机过程及其应用》（第3版），刘次华编著， 高等教育出版社, 2004年版，2018年重印.
- 《概率论与数理统计》（第4版）,盛骤 等编, 高等教育出版社, 2008年.
- 《应用随机过程概率模型导论》（第11版），Sheldon M.Ross著，龚光鲁译，人民邮电出版社，2016年.
- 《应用随机过程》（第四版），张波、尚豪编著，中国人民大学出版社，2016年。

本学期教学内容

- **Ch1.** 预备知识
- **Ch2.** 随机过程的概念与基本类型.
- **Ch3.** 泊松过程
- **Ch4.** 马尔可夫链
- **Ch5.** 连续时间的马尔科夫链
- **Ch6\7.** 平稳随机过程及其谱分析

引言

本科阶段我们学习了《概率论与数理统计》课程，其中的“概率论”主要通过一个或多个随机变量研究随机现象的统计规律性，那时的“统计规律性”很少涉及到“时间”因素。但很多现实中往往还需要研究随机现象随时间发展变化的规律，即要研究随时间不断变化的随机变量，而且所涉及的随机变量通常是无穷多个，这就是“随机过程”这门课程的研究对象。

所以，随机过程一般被视为数学分支概率论的动态部分。与此相对，本科阶段学的是“静态概率论”，静态概率论是随机过程的基础。

我们先对本学期随机过程学习所需要的概率论的基本知识作一回顾。

引言

广义的“概率论”与“随机过程”，前者包括后者.

狭义的“概率论”与“随机过程”，两者并列.

同：都以研究揭示随机现象的统计规律性为己任。

异：概率论的研究对象是一个或有限多个随机变量（顶多提及可列个），随机过程则是研究随机现象的发展和变化的过程，即随时间不断变化的随机变量，而且，所涉及的随机变量通常是无穷多个。

随机过程的研究以概率论为主要基础知识，所以我们先以本科阶段的概率论内容为基本线索，对本课程所需的概率论基本内容进行梳理。

第一章　　预备知识

1.1 概率空间

1.2 随机变量及其分布

1.3 数字特征

1.4 特征函数与矩母函数

1.5 条件概率、条件期望、独立性

回忆：本科阶段的概率的公理化定义（较直观的公理化）

定义 设有随机试验E, Ω是E的样本空间,对于E的每一事件A，都对应唯一确定的一个实数$P(A)$，如果对应关系$P(\cdot)$满足以下三个条件，则称$P(A)$为事件A的**概率**。

(1) **非负性**：$P(A) \geq 0$

(2) **规范性**：$P(\Omega) = 1$

(3) **可列可加性**：

若 $A_1, A_2 \cdots$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$A \xrightarrow[\text{集函数}]{P(\cdot)} \text{实数}P(A)$$

$$\boxed{E\text{下的事件的集合}} \xrightarrow[\text{集函数}]{P(\cdot)} \boxed{\text{实数域}}$$

问：定义域是Ω吗？

它是Ω中的子集组成的集合族！

问：概率定义能否不依赖于“随机试验”？

• 1.1 概率空间

1.1.1 σ域（σ-代数）、事件

定义 设Ω是非空集合，F是由Ω的某些子集组成的集合族，若：

(1) $\Omega \in F$；

(2) 若 $A \in$ F，则 $\overline{A} \in F$；

(3) 若 $A_n \in F$，$n=1,2,?$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

则称 F 为 σ域（σ-代数）。

(Ω, F)称为可测空间，F中的元素称为 事件.

σ域对“逆”和“可列并”封闭。

性质 设 F 是 Ω 的任意 σ − 代数，则

(1) $\Phi \in F$;

(2) F 对 "$\cap$" 封闭。即若 $A, B \in F$，则 $AB \in F$;

(3) F 对 "-" 封闭。即若 $A, B \in F$，则 $A - B \in F$;

(4) F 对 "$\cap$" "$\cup$" 的封闭性可以扩展到任意有限多个。

即若 $A_i \in F, i = 1, 2, \cdots$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

性质推导如下

(1) $\Phi \in F$.

证：$\Phi = \overline{\Omega} \in F$.

(2) F 对"$\cap$"封闭。即若 $A,B \in F$，则 $AB \in F$.

证：$AB = \Omega - \overline{AB} = \Omega - (\overline{A} \cup \overline{B}) \in F$

(3) F 对"-"封闭。即若 $A,B \in F$，则 $A - B \in F$.

证：$A - B = A\overline{B} \in F$

(4) F 对"$\cap$""$\cup$"的封闭性可以扩展到任意有限多个。

即若 $A_i \in F, i = 1, 2, \cdots$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

用数学归纳法证明（略）。

例1.1 由 Ω 的一切事件构成的事件集是 σ - 代数.

(常常它为称为最广泛的 σ - 代数 .)

例1.2 由 $F = \{\Omega, \Phi\}$, 则 F 是 σ - 代数。

称作平凡 σ - 代数.

例1.3 对任意事件 $A \in \Omega, F = \{\Omega, A, \bar{A}, \Phi\}$

是 σ - 代数。

思考题

已知 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, 问下面哪些集合是 σ域。

$F_1=\{\Omega,\phi,\{1,2,3\},\{3,4,5,6\}\}$; 不是

$F_2=\{\Omega,\phi,\{1,2,\}\{3,4\},\{5,6\}\}$; 不是

$F_3=\{\Omega,\phi,\{1,3,5\}\{2,4,6\}\}$; 是

事 件 的 关 系 和 运 算 练 习 题

例1. 设A,B,C表示三个事件，试表示下列事件

(1) A 发生，B 与 C 不发生 $(A\overline{B}\,\overline{C})$

(2) A 与 B 发生，C 不发生 $(AB\overline{C})$

(3) A, B 与 C 都发生 (ABC)

(4) A, B 与 C 至少有一个发生 $(A\cup B\cup C)$

(5) A, B 与 C 全不发生 $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$

(6) A, B 与 C 至少有两个发生 $(AB\cup BC\cup AC)$

1.1.2 概率

定义1.1.2 设 F 是集合 Ω 上的 σ-代数，$P(A)$是定义在 F 上的非负集函数 $(A\in F)$，且满足

（1）非负性：对任意 $A\in F$，有 $0\le P(A)\le 1$;

（2）规范性：$P(\Omega)=1$;

（3）可列可加性：对 F中的任意两两互斥的可列个事件 $A_i\ (i=1,2,\dots)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

则称 P 是 (Ω,F) 上的概率，(Ω,F,P)称作概率空间，$P(A)$称为事件 A的概率。

概率的基本性质

(1) $P(\phi) = 0,$

(2) 有限可加性. 特殊的，若 A, B 互斥，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(4) $A, B \in F,$ 若 $A \subset B \implies P(A) \le P(B)$ ——单调性

若 $A \subset B \implies P(B - A) = P(B) - P(A)$

(5) 若 $A_n \in F, n \ge 1$ 则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

(6)概率公式

i.条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

ii. 乘法公式 $P(AB)=P(B|A)\,P(A)$

$P(AB)=P(A|B)\,P(B)$

注：作为条件的事件概率要大于零。

iii. 全概公式 $$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

其中，$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$是一个完备事件组。

iv.贝 叶 斯 公 式 $$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

其中，$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$是一个完备事件组。

(7) 概率的连续性

定理： 若 $\{A_n, n \geq 1\}$ 是单调递增（或递减）的事件序列

则 $$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

具体情况：

(1) 若 $A_n \in F$，且 $A_n \uparrow A$，即 $A_n \subset A_{n+1}$，且 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$，则

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

(2) 若 $A_n \in F$，且 $A_n \downarrow A$，即 $A_n \supset A_{n+1}$，且 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$，则

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

1.1.3 事件的独立性

定义1.1.3 (Ω, F, P)是概率空间，$Y \subset F$，若对Y中的任意n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，总有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

则称**事件族Y是独立的。**

比如，三个事件相互独立？

对三个事件A、B、C

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}\right\}$$

则称A, B, C相互独立，

1.2 随机变量及其分布

1.2.1 随机变量

定义1.2.1 设 (Ω, F, P) 是概率空间， X 是定义在 Ω 上，取值于实数集 R 上的函数 $(\omega \to X(\omega))$，且对 $\forall x \in R$，$\{\omega : X(\omega) \le x\} \in F$，则称 $X(\omega)$ 是 F 上的随机变量。

关于随机变量的几点说明如下:

(1) $\{\omega : X(\omega) \le a\} \in F$ 是指所有满足“$X(\omega) \le a$”的样本点 ω 的集合，定义要求 $\{\omega : X(\omega) \le a\}$ 是 (Ω, F, P) 中的一个事件，因而可以定义它的概率。

(2) 定义中 ω 为自变量，为了书写方便，简记

$\{\omega : X(\omega) \le a\} \triangleq \{X \le a\} = \{X \in (-\infty, a]\}$，把 $X(\omega)$ 记为 X。

一般随机变量符号常用大写字母 X, Y, Z 等表示。

(3) $X(\omega)$ 满足 $\{\omega : X(\omega) \le a\} \in F$，则易证:

$$\forall\ a, b \in R, \{X > a\}, \{X < a\}, \{X = a\}, \{a \le X < b\},$$

$$\{a < X < b\}, \{a \le X \le b\} \in F.$$

1.2.2 分布函数

定……F 上的随机变量，函数

$$F(x) = P(\omega : X(\omega) \le x), \quad -\infty < x < +\infty$$

称为随机变量 X 的分布函数。

分布函数的含义： 分布函数 $F(x)$ 表示随机变量 X 取值不超过 x 的概率（x 为任意实数）.

分布函数 $F(x)$ 的性质：

（1）$0 \le F(x) \le 1$;

(2) $F(x)$ 是非降函数，即 $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(4) $F(x)$ 是右连续的，即 $F(x_0 + 0) = \lim\limits_{t \to x_0^+} F(t) = F(x)$.

1.2.3 随机变量的类型

离散型：分布律：$P(X = x_k) = p_k \quad k = 1, 2, \cdots \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

连续型： **概率密度**

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

（其中 $f(x)$为概率密度函数， $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$）

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

多维随机变量： $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$

— *d*维随机向量

1.2.4 多维随机变量联合分布函数：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_d) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_d \le x_d), \quad x_k \in R$$

性质： 若 $F(x_1, x_2, \cdots, x_d)$是联合分布函数，则

(1) $0 \le F(x_1, x_2, \cdots, x_d) \le 1$;

(2) $F(x_1, x_2, \cdots, x_d)$对每个变量都是单调的 ；

(3) $F(x_1, x_2, \cdots, x_d)$对每个变量都是右连续 的；

(4) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_d) = 0,$

$\lim\limits_{x_i \to +\infty} F(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_d) = 1,$ $(i = 1, 2, \cdots, d)$

(5) $F(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f(t_1, t_2, \cdots, t_d) dt_d \cdots dt_1$

$$f(x_1, \cdots, x_d) = \frac{\partial^d F(x_1, x_2, \cdots, x_d)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_d}$$

1.2.5 一些常见的分布

1.离散均匀分布

分布列： $$p_k = \frac{1}{n}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

2.二项分布（含两点分布）

分布列： $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (0 \le k \le n)$ n为非负整数

称随机变量服从以n和p为参数的二项分布．记为： $X \sim B(n, p)$

3.几何分布

分布列： $$p_k = pq^{k-1}, \quad (k \ge 1), \quad p + q = 1$$

4.Poisson分布

分布列： $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0,1,\cdots), \quad \lambda > 0$

参数为 的 Poisson分布 λ

5.均匀分布

密度函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & 其它 \end{cases} \quad (a < b)$

记作 $X \sim U[a,b]$

6.正态分布

密度函数 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}], x \in R$

称之为参数为 μ和 σ^2的正态分布，也称为 Gauss 分布，

记作 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X \sim N(0,1)$称为标准正态分布 .

7.指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

8. χ^2 分布

若 $X_i \sim N(0,1), n=1,2,\cdots,n,$

则 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

$$f(x)=\begin{cases}[2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})]^{-1}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

9. T分布、F分布 用 χ^2 分布定义。

若 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n),$

则 $\mathrm{T}=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2),$

则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2)$

10. Γ 分布：

密度函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad (\alpha>0)$$

称之为以 α，λ 为参数的 Γ 分布， Γ 函数定义为

其中，$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha>0)$

Γ 函数的性质：

当前无法显示此图像。

(2) $\Gamma(1)=1$;

(3) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$;

(4) $\Gamma(n+1)=n!$

注意：

指数分布和 χ^2 分布都是特殊的 Γ 分布！

$\alpha=1$ 的 Γ 分布是指数分布，

Γ 分布的 $\alpha=\frac{n}{2}$（n 为正整数），$\lambda=\frac{1}{2}$,

则此时 Γ 分布是 χ^2 分布。

§1.3 随机变量的数字特征

§1.4 特征函数、母函数

一、数学期望和方差、矩

1. 数学期望的计算（复习）

离散型的：$EX = \sum_k x_k p_k = \sum_k x_k P(X = x_k)$

连续型的：$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

问 两种类型随机变量的数学特征，定义式能否统一？

需要引入一种新的积分，这就是黎曼-斯蒂尔杰斯（*Rieman-Stieltjes*）积分。

回忆黎曼积分: $\int_a^b f(x) dx \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots x_n = b$$

2. 黎曼-斯蒂尔杰斯（*Rieman-Stieltjes* ）积分

定义 设 $g(x), F(x)$为有限区间 $[a,b]$上的实值函数，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots x_n = b$$

$$\Delta F(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \lambda = \max\{\ \Delta x_i\}$$

若当 $\lambda \to 0$时，$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta F(x_i)$存在，且与分法及 ξ_i的

取值无关， 称该极限值为$g(x)$关于$F(x)$在$[a,b]$上的

黎曼-斯蒂尔杰斯积分。简称R-S积分。

记为 $$\int_a^b g(x)dF(x) \overset{\Delta}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta F(x_i)$$

注： (1) 当 $\lambda \to 0$时，意味着 $n \to \infty$，但反之不成立。

（2）当 $F(x) = x$时， $R-S$ 积分化为了黎曼积分。

(3) $\int_a^{+\infty} g(x)dF(x) = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)dF(x)$（广义 $R-S$积分.）

(4) $R-S$积分的一个充分条件：若 $g(x)$连续，$F(x)$单调，则 $R-S$积分存在.

特别地，当 $g(x)$连续，$F(x)$为分布函数时，

$R-S$积分必存在.

R-S 积分性质：

(1) $\int_a^b [k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x)]\, dF(x)$

$= k_1 \int_a^b g_1(x)\, dF(x) + k_2 \int_a^b g_2(x)\, dF(x)$

(2) $\int_a^b g(x)\, dF(x) = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i}^{c_{i+1}} g(x)\, dF(x)$

$(a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n+1} = b)$ —— 可加性

(3) $\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$

注：$R-S$ 积 分 与 黎 曼 积 分 的 最 大 的 不 同 ：

黎 曼 积 分 ：$\int_{a^-}^{a} f(x)dx = 0$

$R-S$ 积分 ：$\int_{a^-}^{a} dF(x) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \int_{a-\delta}^{a} dF(x) = F(a) - F(a^-)$

(即等于 a 点处的跳跃度 .)

当 $F(x)$ 是一个阶梯函数时， 设 $F(x)$ 在 $x = x_i$ 处有跳跃度

$p_i \ (i = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$$ （包含了离散型 ）

— 转化为判别级数是否收敛 .

3. 用R–积分表示的数学期望和方差、矩

(1) 一阶原点矩（数学期望）： $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}F(x)$

(2) k阶原点矩： $EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$

(3) k阶中心距： $E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^k dF(x)$

二阶中心矩即方差

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 dF(x)$$

二、 协方差

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E(XY)-EXEY$$

三、 相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_X D_Y}}$$

也都可以用R-S积分表示

1.4 特征函数、母函数

1.4.1 特征函数

设 X , Y 为两个实随机变量，则　　　　称

$Z = X + iY$ ——复随机变量

$EZ = EX + iEY$ ——复随机变量的数学期望

定义1.4.1　设随机变量X的分布函数为$F(x)$，称

$$g(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathrm{d}F(x), \quad -\infty < t < \infty$$

为X的特征函数。

$\because \quad e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$

$\therefore \quad g(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tX) + iE(\sin tX)$

特征函数是一个实变量　　　的复值函数　　.

- 分布律为$P(X=x_k)=p_k$，$k=1,2,\ldots$的离散型随机变量X，特征函数为

$$g(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$$

- 概率密度为$f(x)$的连续型随机变量X，特征函数为

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

例 设X服从二项分布$B(n, p)$，求X的特征函数$g(t)$。

解 X的分布律为$P(X=k)= C_n^k p^k q^{n-k}$，

$q=1-p$，$k=0,1,2,\ldots,n$

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{it}\right)^k q^{n-k}=\left(pe^{it}+q\right)^n$$

例 设$X\sim N(0,1)$，求X的特征函数。

解:

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$g'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ixe^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{itx-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-t\,g(t),$$

$$g'(t)+tg(t)=0,\qquad \frac{dg}{g}=-tdt,\qquad \ln|g(t)|=-\frac{1}{2}t^2+C$$

$$g(t)=C_1e^{-\frac{1}{2}t^2}\qquad 由\ g(0)=1,得\ C_1=1$$

从而 $$g(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

常见分布的数字特征和特征函数

	期望	方差	特征函数
0-1 分布	p	pq	$q+pe^{it}$
二项分布 B(n,p)	np	npq	$\left(q+pe^{it}\right)^n$
泊松分布 P(λ)	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$

	期望	方差	特征函数
均匀分布 U(a,b)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$

1.4.2 特征函数的性质

前三个性质

(1) $g(0)=1,\ |g(t)|\le 1,\ g(-t)=\overline{g(t)}$

(2)若随机变量X的n阶矩EX^n存在，则

$g(t)$ k阶可导，且

$$g^{(k)}(0)=i^k EX^k,\quad k\le n$$

(3)若$X_1, X_2, \ldots, X_n$是相互独立的随机变量，

则 $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$的特征函数

$$g(t)=g_1(t)\,g_2(t)\ \ldots\ g_n(t)$$

由特征函数科技计算随机变量的各种数字特征

如　当k=1时，$EX = g^{(1)}(0)/\mathrm{i}$;

当k=2时，$DX = -g^{(2)}(0) - (g^{(1)}(0)/\mathrm{i})^2$。

性质4　随机变量的分布函数由特征函数唯一确定.

1.4.3 n维随机变量的特征函数

定义1.1.1 设$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是$n$维随机变量，$t=(t_1, t_2, \ldots, t_n)\in R^n$，则称

$$g(t)=g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=Ee^{itX^T}=E\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k\right)\right]$$

为X的**特征函数**。

注意：X^T表示$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的转置.

1.4.4 母函数

(1) 定义1.2.2 设X是非负整数值随机变量，分布律

$P\{X=k\}=p_k$，$k=0,1,\ldots$

则称

$$P(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k=\sum_{k=0}^{\infty}s^k p(X=k)$$

为X的**母函数**.

- 母函数的**性质**

(1)非负整数值随机变量的分布律p_k由其母函数$P(s)$唯一确定

$$p_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

(2)设$P(s)$是X的母函数，

若EX存在，则$EX=P'(1)$

若DX存在，则$DX= P''(1) +P'(1)- [P'(1)]^2$

(3)独立随机变量之和的母函数等于母函数之积

(4)若$X_1,X_2,\ldots$是相互独立同分布的非负整数值随机变量，N是与$X_1,X_2,\ldots$独立的非负整数值随机变量，则

$$Y=\sum_{k=1}^{N}X_k$$

的母函数为$H(s)=G(P(s))$，且 $EY=ENEX_1$

其中$G(s),P(s)$分别是N,X_1的母函数.

1. 特征函数

总结

对任意随机变量，都可以定义**特征函数**。

定义 设随机变量X的分布函数为$F(x)$，称

$$g(t)=E\left(e^{itX}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\mathrm{d}F(x),\quad -\infty<t<\infty$$

为X的**特征函数**。

性质及应用：可以用特征函数随机变量的各种数字特征。

例如　若随机变量X的n阶矩EX^n存在，

则　$g(t)$ k阶可导，且

$$g^{(k)}(0)=i^kEX^k，\ k\le n$$

2. 母函数

此概念只适用于离散型随机变量。

定义
$$P(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k=\sum_{k=0}^{\infty}s^k p(X=k)$$

被称为非负整数值随机变量X的母函数。

其中 $p(X=k)=p_k \quad (k=1,2,3,\cdots)$ 是 X 的分布律。

性质及应用。如：

分别用其在0和1点的各阶导数求分布律、数字特征.

§ 1.5 *n* 维正态分布

1. 一维正态分布 $X \sim N\left(u,\sigma^2\right)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad -\infty<x<+\infty.$$

2. 二维正态分布 $X=(X_1,X_2) \sim N\left(u_1,u_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-u_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-u_1)(x_2-u_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-u_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$-\infty<x_1,x_2<+\infty.$$

$X_i \sim N\left(u_i,\sigma_i^2\right), i=1,2.$ ρ为X_1,X_2的相关系数.

X_1,X_2相互独立时的联合密度函数呢？

3. n 维正态分布

(1) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立时， $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - u_i)^2}{\sigma_i^2} \right\}$$

(2) 一般情况下， $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |B|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (X - \mathrm{u}) B^{-1} (X - \mathrm{u})^{\mathrm{T}} \right\}$$

式中 $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 为常向量, B 为 n 阶正定矩阵, $|B|$ 为 B 的行列式。

则称 X 服从 n 维正态分布。记作： $X \sim N_n(\mathrm{u}, B)$.

(3) n 维正态分布的性质

1）n 维正态随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量都是正态变量；反之，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态变量，且相互独立，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态变量.

2） $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 $l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$ 都服从一维正态分布。 (其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零).

§1.6 条件期望

设*X*, *Y*是离散型随机变量，对一切使$P\{Y=y\}>0$的y，定义

(1) $Y=y$时X的条件概率

$$P\{X=x_k|Y=y\}=\frac{P\{X=x_k,Y=y\}}{P\{Y=y\}}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

(2) $Y=y$时X的条件分布函数

$$F(x|y)=P\{X\le x|Y=y\},\qquad -\infty<x<+\infty$$

(3) $Y=y$时X的条件期望

$$E\left(X|Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF\left(x|y\right)=\sum_{x}xP\{X=x|Y=y\}$$

注意：$E(X|Y=y)$ 是y的函数。

设X, Y是连续型随机变量，联合密度为$f(x, y)$，对一切使 $f_Y(y)>0$ 的y，定义

(1) $Y=y$时X的条件密度

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

(2) $Y=y$时X的条件分布函数

$$F(x|y) = P\{X \le x|Y=y\} = \int_{-\infty}^{x} f(u|y)\,du, \quad -\infty < x < +\infty$$

(3) $Y=y$时X的条件期望

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)\,dx$$

例 袋中有2个红球，3个白球，从中不放回的接连取出两个球。设X表示第一次取到的红球数，Y表示第二次取到的红球数。求 $E(Y|X=1)$和$E(Y|X=0)$

解： $X=1$和0时的条件分布分别是

Y=k	1	0
$P(Y=k\|X=1)$	1/4	3/4

Y=k	1	0
$P(Y=k\|X=0)$	1/2	1/2

故 $E(Y=k|X=1)=1/4$ $E(Y=k|X=0)=1/2$

条件期望的性质：

- 若随机变量X,Y的期望存在，则

$$EX = E[E(X \mid Y)] = \int E(X \mid Y = y)dF_Y(y)$$

- 如果Y是离散型随机变量，则

$$EX = \sum_y E(X \mid Y = y)P\{Y = y\}$$

- 如果Y是连续型随机变量，则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y)f(y)dy$$

证明：设*X*,*Y*都是离散型随机变量

$$EX = \sum_x xP\{X = x\}$$

$$= \sum_x x \sum_y P\{X = x \mid Y = y\}P\{Y = y\}$$

$$= \sum_x \sum_y xP\{X = x \mid Y = y\}P\{Y = y\}$$

$$= \sum_y \sum_x xP\{X = x \mid Y = y\}P\{Y = y\}$$

$$= \sum_y E(X \mid Y = y)P\{Y = y\}$$

- 即，若一随机变量数学期望计算比较复杂，
- 则可以先引进一个随机变量，并探讨其在新变量
- 取值固定时的条件期望，进一步再对引进的随机
- 变量计算期望。

条件期望性质例题

设在某候车站停靠的火车只有1列、该火车站早晨开门的时间作为零时刻，而从零时刻到火车启程时刻t的进站乘客数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布，计算在（0, t] 内来该站所有乘客的等车时间总和的数学期望。

解: 设W_i为第i个乘客到达车站的时刻，本题即求$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right)$.

先求在$N(t)$给定的条件下等车总和的条件期望：

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right)\middle|N(t)=n\right)=nt-E\left(\sum_{i=1}^{n}W_i\middle|N(t)=n\right)$$

$\because W_1,W_2,\cdots,W_n$显然均服从（0, t]上的均匀分布，

$$\therefore E\left(\sum_{i=1}^{N(t)}W_i\middle|N(t)=n\right)=\frac{nt}{2}\qquad 所以，E\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\middle|N(t)=n\right)=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

故，

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right)=E\left(E\left(\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right)\middle|N(t)=n\right)\right)=E\left(\frac{N(t)\bullet t}{2}\right)=\frac{t}{2}E(N(t))=\frac{\lambda t^2}{2}$$