第五章 微分中值定理及应用

陈颖

北京电子科技学院基础部

- 1.中值定理
- (1)极值和费
- (2)拉格朗日中值定:
- (E) 28 C 2 E
- 2 洛公达法则
- (4) O --- ---
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
- 3. 泰勒公式
- (1)参勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式(3) 煮粉公式的应用
- (4)课后习
- 4.函数图像的讨论
 - 1)函数的单调性
 - 2)由线的凹凸位
 - (3)极值的求法
 - (5)课后习题
- 5. 久节糸老祭安

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗目中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2) 曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理

- (1)极值和贸与引理(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定:
- (5)採后习题

2.洛必达

- $(1) \frac{0}{0}$ \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z}
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公司
 - (4)课后习题

函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
 (2)曲级的即品件
- (2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (5)课后习题
- (5)採石引起

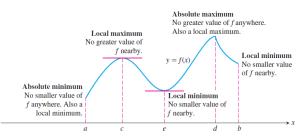
5.各节参考答案

(1)极值和费马引理

- (1) ○型和 ※型未定式

(1)极值和费马引理

▶ 极值



1 + 1 + 12 10

(1)极值和费马引理

- (2) 9 4 c m
- (2) 拉拉加自由估金
- (4) 村西中位
 - (5)课后习题

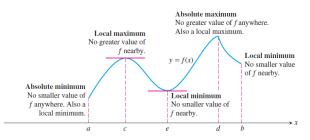
2.洛必达

- (1) 0 形品 形表字
 - / 0 ² ¹ ∞ ²) 生後不全式
- (3)洛必达法则的局 (A)理戶可题

3. 泰勒公主

- (1)泰勒公式的建立
 (2) 조拉奶土土地北
- (3)泰勒公(4)课后引
- - 1)函数的单调性
 -)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (5)课后习题
- 日夕世会本领与

▶ 极值

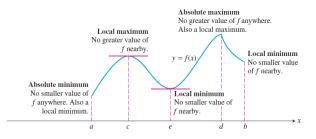


▶ **费马定理**——若函数 f(x)在点x₀ 取得极值,且在x₀ 处可导,则有

$$f'(x_0)=0.$$

- 1 由估学理
- (1)极值和费马引理
 - (2)罗尔定理
- (4) 柯西中值定
- (5)课后习题
- 2.洛必达
 - (1) 0 型和 ∞ 型未定
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的是 (4)课后习题
 - 3 表勤公式
 - (1)泰勒公式的建立
 - (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习
- A 3 34 107 109 44 24 14
- 4.函数图像的讨论
 - L)函数的平调性 D)由级的凹凸性
 - 2)回致的凹凸性
 3)极值的求法
 - 4)图像的绘制
 5)课后习题
 - 5)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ 极值



▶ **费马定理**——若函数 f(x)在点xn 取得极值,且在xn 处 可导.则有

$$f'(x_0)=0.$$

证:不妨设 $f'(x_0) > 0$,故

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

由极限的保号性知,当 $x > x_0$,有 $f(x) > f(x_0)$;当x < x_0 ,有 $f(x) < f(x_0)$. 所以 $f(x_0)$ 不是极值,矛盾,命题得证.

- (1)极值和费马引理

- (2)罗尔定理

- (1) ○型和 ※型未定式

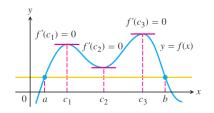
(2)罗尔定理

罗尔定理——若函数f(x)满足条件:

- ▶ 在闭区间[a, b]上连续;
- ▶ 在开区间(a, b)上可导;
- ▶ f(a) = f(b),

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c)=0.$$



1.中值定理

(1)极组和奖

(2)罗尔定理

(4) 标码中信定理

- (5)课后习题
- 2. 洛公立
- (1) 0 型和 ∞ 型本定
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的。
 (4)课后习题

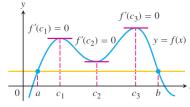
3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建
- (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习
- 1. 函数图像的社论
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的平钢性
 - 2) 四级的四位任
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

- ▶ 在闭区间[a, b]上连续;
- ▶ 在开区间(a, b)上可导;
- f(a) = f(b),

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c)=0.$$



证:如果f(x)在区间[a,b]内为常数函数,则显然有任意的 $c \in (a,b)$ 使得f'(c) = 0;如果f(x)在区间[a,b]内不为,常数函数,在区间存在 $c \in (a,b)$,其为最大值或最小值,故也有f'(c) = 0.

1.中值定理

(2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定到

(4)柯西中值定 (5)课后习题

- 2.洛必达
 - $(1) \frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定 (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限(4)课后习题
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习题
- (1)函数的单调性 (2)曲级的凹凸性
- (2) 曲线的凹凸性(3) 极值的求法
- (4)图像的绘制 (5)课后习题
- 5.各节参考答案

1 中信定理

(1) 极值和费.

(2)罗尔定理

(2) 拉格朗日中值定理

- (4)柯西中值定
- (5)课后习题

2. 洛必迈

- (1) 型和 ∞ 型表定点
 - 2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

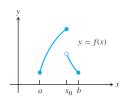
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公
- (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题

4.函数图像的讨论

- 1)函数的单调性
- 2)由线的凹凸性
- (3) 机值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)据点口题
- (5)课后习题

5.各节参考答案

在点x₀处不连续



1 中值定理

(1)极值和型

(2)罗尔定理

(2) 拉格朗日中值定:

(4)利四十年

2.洛必达法

(1) 0 00 00 00 1

- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习题

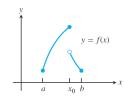
4.函数图像的讨论

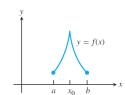
- 1)函数的单调性
- 2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)因採的短期
 (5)课后习题
- (5)18478

5.各节参考答案

在点x0处不连续

在点Xn处不可导

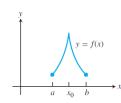




(2)罗尔定理

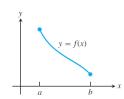
在点x0处不连续

 x_0 b



在点Xn处不可导

在点a,b处值不等



- (2)罗尔定理

例1.1:证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1的正实 根.

(2)罗尔定理

例1.1:证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1的正实 根.

解:先证存在性.令 $f(x) = x^5 - 5x + 1, f(0) = 1, f(1) = -3,$ 由 介值定理知存在 $x_0 \in (0,1)$,使得 $f(x_0) = 0$.

- (2)罗尔定理

例1.1:证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

解:先证存在性.令 $f(x) = x^5 - 5x + 1$,f(0) = 1,f(1) = -3,由介值定理知存在 $x_0 \in (0,1)$,使得 $f(x_0) = 0$.

再证唯一性.假设存在另外一个 $x_1 \in (0,1)$ 使得 $f(x_1) = 0$.由 罗尔定理知,存在 $\xi \in (\min\{x_0,x_1\},\max\{x_0,x_1\})$,使得

$$f'(\xi)=0,$$

而另一方面

$$f'(\xi) = 5\xi^4 - 5 = 5(\xi^4 - 1) < 0,$$

矛盾,故命题得证.

1.中值定理

(1)极值和费均引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中信定理

(4)柯西中值定(5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) 0 至和 ∞ 至本是式 (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性
- (4)球石引起

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4.函数图像的讨论
- (1)函数的单调性
- 2)由线的凹凸性
 3)极值的求法
- (4)图像的绘制(5)课后习题
- = h ++ 4 + k k

例1.2:设f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明至少存在一 点 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

(2)罗尔定理

例1.2:设f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

证:令

$$F(x) = f(x) - x^{2}(f(1) - f(0)),$$

那么有

$$F(0) = f(0), F(1) = f(0),$$

由罗尔定理知存在 ξ ∈ (0,1) 使得

$$F'(\xi)=0$$
,

即

$$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0)).$$

1.中值定理

(1)极值和费马引理 (2)罗尔定理

(4) 柯西中值定

2.洛必达法则

(1) 0 型和 ∞ 型未定式

(3)洛必达法则的局限性

3. 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性(2)由线的凹凸性

(4)图像的绘制

(5)课后习题

5.各节参考答案

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2. 洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3) 泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4 承数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1 中信定理

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)村西中佰 (5)採后习题

2.洛必达

- (1) 6型和 金
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性 (4)選兵口斯

3 表勤从式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公立 (3)泰勒公立的应用
 - (4)课后习题

.函数图像的讨论

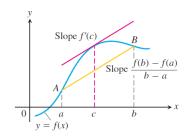
- (1)函数的单调性
 (2)曲级的即品件
- (2) 由线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

拉格朗日中值定理——若函数f(x)满足条件:

- ▶ 在闭区间[a, b]上连续;
- ▶ 在开区间(a,b)上可导,

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



1 中值定理

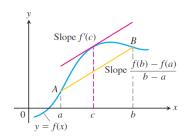
- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (5)课后习题
- 2. 洛 必 立
- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
 - 3.泰勒公司
- 3. 汆舠公五
- (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习
- 4.函数图像的讨论
 - 1)函数的单调性
 2)出版任何目標
- (2) 田玖的凹凸性
- (4)图像的绘制 (E)图点 2 图
- (5)课后习题

拉格朗日中值定理——若函数f(x)满足条件:

- ▶ 在闭区间[a, b]上连续;
- ▶ 在开区间(a,b)上可导,

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



证:构造函数F(x) = f'(x)(b-a) - (f(b) - f(a))x,应用罗尔定理.

1.中值定理

- (1)极值和费均引理(2)宏与定理
- (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理
- (4) 柯西中值定
 - つ 次 丛 法 注 旧
- (1) 0 00 00 00 00 00
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
 - 3.泰勒公式
 - (1) 表點公言的
 - (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
 - (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的平调性
 (2)由级的凹凸性
- (2) 田玖町四凸性
 (3) 极值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)误后习题
- (3)*****

在拉格朗日中值定理中令b = x,我们有 $c \in (a, b)$,使得

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

整理得

$$f(x) = f'(c)(x-a) + f(a).$$

这其实给出了f(x)的一个"线性"表示.

1 中值定理

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (5)课后习题

2.洛必迈法则

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
- (2)其他不定式
 (3)洛必达法则的局限
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (3) 泰勒公式的应用(4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
- 1)函数的单调性
-) 由级的凹凸性
- (3)极值的求法
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

在拉格朗日中值定理中令b = x,我们有 $c \in (a, b)$,使得

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

整理得

$$f(x) = f'(c)(x - a) + f(a).$$

这其实给出了f(x)的一个"线性"表示.

推论1:若f(x)在(a,b)内可导,且 $f'(x) \equiv 0$,则在(a,b)内f(x)为一常数.

1 中值定理

- (1)极值和贸均引理(2)冒允定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)村西中值定(5)课后习题
- 2. 冷处还法则
 - (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限。 (4)课后习题
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性(2)由线的凹凸性
 - 2)回改的凹凸性
 3)极值的求法
 - (4)图像的绘制(5)课后习题
- 5.各节参考答案

在拉格朗日中值定理中令b = x,我们有 $c \in (a, b)$,使得

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

整理得

$$f(x) = f'(c)(x-a) + f(a).$$

这其实给出了f(x)的一个"线性"表示.

推论1:若f(x)在(a,b)内可导,且 $f'(x) \equiv 0$,则在(a,b)内f(x)为一常数.

推论2:若f(x)和g(x)在(a,b) 内可导,且 $f'(x) \equiv g'(x)$,则有

$$f(x) = g(x) + c,$$

其中c 为常数.

中值定理

(1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理

(4)村西中值定 (5)课后习题

2.洛必达法则 (1) ^Q型和 [∞] 型未定式

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性

3 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性 (2)曲线的凹凸性 (3)极值的求法

(4)出版的短期 (5)课后习题

5.各节参考答案

例1.3:证明不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x > 0)$.

1 由荷宝理

- (1)极值和费马引耳
- (2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(5)课后习录

2. 洛公及法则

- 1) 🖯 型和 签 型末
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公主

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

- [1]函数的单调性
- 2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)源点日票
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

例1.3:证明不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$.

证:令 $f(x) = \ln(1+x)$,当x > 0时,由拉格朗日中值定理知,存 $在\xi$ ∈ (0, x),使得

$$f'(\xi) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0},$$

整理有

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

显然 $1 < 1 + \varepsilon < 1 + x$,故

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x,$$

即

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

- (2)拉格朗日中值定理

- (1)极值和费马引玛
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗目中值定理

(4)柯西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3) 泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1 中信定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)柯西中值定理 (5)课后习题

2.洛必达

- $(1)\frac{0}{0}$ \mathbb{Z} $\frac{\infty}{\infty}$
- (2)其他不定式
 (3)洛必达法则的局限性
 (4)源公司等

っきせんよ

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

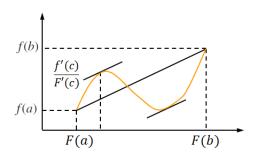
- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
 (4)图像的绘制
- (4)出版的短初 (5)课后习题
- 日夕 益矣 基效

柯西中值定理——若函数f(x)和F(x)满足条件:

- ▶ 在闭区间[a, b]上连续;
- ▶ 在开区间(a, b)上可导;
- 在开区间(a,b)上F'(x) ≠ 0,

那么在(a,b)内至少存在一点c,使得

$$\frac{f'(c)}{F'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}.$$



1.中值定理

- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)社校即日由结合用
- (2) 拉格朗日中值定(4) 柯西中值定理

2. 洛公主

- (1) 0 型和 ∞ 型未定:
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性 (4)源公司斯

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
- (1)函数的平例
 (2)由线的凹凸
- (3)极值的求法
- (4) 图像的短刺 (5)课后习题
- 5.各节参考答案

例1.4:设f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 罗尔定理
 (2) 拉拉朗日由结
- (4)柯西中值定理

2. 洛公立

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2) サルエロギ
- (2)共化不足式 (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 1. 承数图像码针染
- 1. 函数图像的可论
 -) 曲线的凹凸性
- 2) 四纹的口口性 3) 极值的求法
- (4)图像的绘制 (E)图点 2 图
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

例1.4:设f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0))$.

解:取 $F(x) = x^2$,由柯西中值定理得存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(1) - f(0)}{F(1) - F(0)},$$

即

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0},$$

所以

$$f'(\xi) = 2\xi(f(1) - f(0)).$$

1.中值定理

(1)极值和费均引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日申信定理

(4)柯西中值定理 (5)课后习题

2.洛必达

(1) 0 型和 ∞ 型未定式

(2)其他不足式 (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性(2)由线的凹凸性

(3)极值的求法

(4) 图像的绘制 (5)课后习题

5.各节参考答案

(5)课后习题

- - (1) □型和 ∞型未定式

(5)课后习题

- (1) 试证至少存在一点 $\xi \in (1, e)$,使得 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.
- (2) 设 $f(x) \in C[0,\pi]$,且在 $(0,\pi)$ 内可导,证明至少存在一点 $\xi \in (0,\pi)$,使得 $f'(\xi) = -f(\xi)$ cot ξ .
- (3) 若f(x)可导,试证在其两个零点间一定有f(x) + f'(x)的 零点
- (4) 设f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)上可导,且f(1)=0,求证存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.
- (5) 设f'(x)单调递减,f(0) = 0,证明对任意的 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

- (1) 极值和费马引理 (2) 罗尔定理
- (2) 拉格朗日中值定理(4) 村西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达

- (1) 0 型和 ∞ 型本定式
- (2)其他不定式 (3)洛公达法则的局限性
- * * * *

勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (2)
- (4)课后习题

4.函数图像的讨论

- 1)函数的单调性
-)曲线的凹凸性)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗目中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1 中值定理

- (1)极值和费马引型(2)罗尔定理
- (2) 罗尔定理
- (4) 柯西中值
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) 0 型和 ∞ 型未定立
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公立 (3)泰勒公式的应用
 - .函数图像的讨论
- (1)函数的单调性
- (2)由级的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)课后习题
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

2. 洛必达法则

(1) ₽型和 №型未定式

(1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2)其他不定式

设所求极限为 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,如果满足

- (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2) 其他不定式

设所求极限为 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,如果满足

(1)
$$\lim_{\substack{x \to a \\ \text{或者}}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \to a}} g(x) = 0, \ (\frac{0}{0} \mathbb{Z})$$
或者
$$\lim_{\substack{x \to a \\ \text{x} \to a}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \to a \\ \text{x} \to a}} g(x) = \infty, \ (\frac{\infty}{\infty} \mathbb{Z}),$$

- - (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2)其他不定式

设所求极限为 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,如果满足

(1)
$$\lim_{\substack{x \to a \\ \vec{0}}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \to a \\ x \to a}} g(x) = 0, \quad \left(\frac{0}{0} \mathbb{Z}\right)$$
或者
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \to a}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \to a \\ x \to a}} g(x) = \infty, \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \mathbb{Z}\right),$$

(2) f(x)和g(x)可导,且 $g'(x) \neq 0$,

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2)其他不定式

设所求极限为 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,如果满足

(1)
$$\lim_{\substack{x \to a \ \ \text{x} \to a}} f(x) = 0$$
, $\lim_{\substack{x \to a \ \ \text{x} \to a}} g(x) = 0$, $\left(\frac{0}{0} \mathbb{Z}\right)$
或者 $\lim_{\substack{x \to a \ \ \text{x} \to a}} f(x) = \infty$, $\lim_{\substack{x \to a \ \ \text{x} \to a}} g(x) = \infty$, $\left(\frac{\infty}{\infty} \mathbb{Z}\right)$,

- (2) f(x)和g(x)可导,且 $g'(x) \neq 0$,
- (3) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ ,

- - (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2)其他不定式

设所求极限为 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,如果满足

(2)
$$f(x)$$
和 $g(x)$ 可导,且 $g'(x) \neq 0$,

(3)
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
存在或为 ∞ ,

那么,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.中值定理

- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性

3.泰勒公式

- (1) 泰勒公式的建立 (2) 不能从土土为社人
- (2)函数的麦克劳林公式 (3)参勒公式的应用 (4)课后习题
- 4 函数图像的讨论
- 4. 函数图像的可论
 - 2)由线的凹凸性
 - (3) 极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

设所求极限为 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,如果满足

(2)
$$f(x)$$
和 $g(x)$ 可导,且 $g'(x) \neq 0$,

(3)
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
存在或为 ∞ ,

那么,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这就是洛必达法则,它是用来把函数的商的极限转化为其 导数的商的极限.

- - (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2)其他不定式

推论 $1:x \to a$ 换为 $x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$,洛必达法则依然成立.

1.中值定理

- (1) 級值和貿易引建 (2) 罗尔定理 (2) 拉格朗日中值定理
- (4)利四甲征及(5)课后习题
- 2.洛必达法则

$(1) \frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 (2)其他不定式

- っきせハン
 - 3.泰勒公式
 - 2)函数的麦克劳林公式 3)泰勒公式的应用
 - 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
 - 2) 由线的凹凸性
 - (4)图像的绘制
 - (5)课后习题
 - 5.各节参考答案

推论 $1:x \to a$ 换为 $x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$,洛必达法则依然成立.

推论2:若 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属于0型或 ∞ 型,且f'(x),g'(x)满足洛必达法则的条件,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

1.中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2) 其他不定式

(3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

1)函数的单调性 2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法 (4)图像的绘制

(5)课后习题

例2.1:求
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$
.

1.中值定理

- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公主

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
 - 2)由线的凹凸性
- (4)图像的绘
- (5)课后习题

5 久节糸老父宏

例2.1:求
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$
.

解:

原式
$$(\frac{0}{0}\mathbb{Z})$$
 洛必送法则 $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} (\frac{0}{0}\mathbb{Z})$ 洛必达法则 $\lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} (\mathbb{T}\mathbb{Z})$ 直接代入 $\frac{3}{2}$

1.中值定理

- (1) 校址和页与有处 (2) 罗尔定理 (2) 括数即日由结合日
- (2)拉格朗日中值定理(4)柯西中值定理
- (5)採后习题
- 2.洛必达法则
- (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
 - 2) 由级的凹凸性
 - (4)图像的绘制 (5)理点 (3)题
- 5 冬节糸老忿宏

例2.2:求
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$$

- (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2)其他不定式

例2.2:求
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$$

原式
$$(\frac{0}{0}\mathbb{Z})$$
 洛必送法则 $\lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ $=\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} (\frac{\infty}{\infty}\mathbb{Z})$ 洛必送法则 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x}$ $=1$

- 1.中值定理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定
- (5)课后习题
 - 2.洛必达法则
 - (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式 (2) 其他不定式
 - (3)洛必达法则的局限性
 - 3. 泰勒公式
 - (1)泰勒公式的建立 (2)函数的老克劳林公式
 - (2)函数的发光分析公式 (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题
 - 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性 (2)由蛋粉即用品
 - (2)由级的凹凸性
 (2)相级的出凸性
 - (4)图像的绘制 (E)增长以票
 - (5)课后习题

1.中值定理

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) ○型和 ※型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3) 泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5. 各节参考答案

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)村西中值 (E)28日日日
- 2.洛必达法则

(1) 0 型和 ∞ 型未定点

- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局所
- (3)洛公达法则的局限性(4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
 - (4)课后习题
 - .函数图像的讨论
 - (1)函数的平调性
 (2)由级的凹凸性
- (2)由线的凹凸性 (3)标估码步生
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ $\infty - \infty$ 型:通分后转化为0型,即

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}$$

1 由估空理

- (1)极值和费马引型(2)署允定理
- (2) 拉格朗日中值定页
- (4) 村西中位:

2.洛必达法则

(1) 0 型和 ○○ 型末: (2)其他不定式

- (3)洛必达法则的局限性 (4)谬丘贝斯
- 3 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 -)函数的平铜性
 - 2)由线的凹凸性
- (3) 极值的示法
 (4) 图像的绘制
- (5)课后习题
- = b + 6 + 6 16 16

▶ ∞ - ∞型:通分后转化为 🖯 型,即

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}.$$

例2.3: 求 $\lim_{x \to \pi/2} (\sec x - \tan x)$.

1.中值定理

- (1) 极值和费均引理 (2) 罗尔定理 (2) 运动和自由体点
- (2)拉格朗日中值定理 (4)如系由信定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

(2)其他不定式

- (3)洛必达法则的局限性
- 3. 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的未支带核公
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
 (2)由级的即品件
 - 2)由线的凹凸性
- (4)图像的绘制 (E)图点 2 图
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ $\infty - \infty$ 型:通分后转化为0型,即

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}.$$

例2.3:求 $\lim_{x \to \pi/2} (\sec x - \tan x)$.

解:

原式
$$= \lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$
洛必达法则
$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

1.中值定理

- (1)极值和費均引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定則
- (4)村西中值定理 (5)课后习题
- 2.洛必达法则
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法則的局限包(4)课后习题
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的平钢性(2)由线的凹凸性
 - (2) 由致的自己性
 (3) 极值的求法
 - (4)图像的绘制
 (5)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ $0.\infty$ 型:取倒数后转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,即

$$f \cdot g = \left\{ egin{array}{c} rac{g}{1} \\ rac{f}{f} \\ rac{f}{2} \end{array}
ight. .$$

例2.4:求 $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x \ (n>0)$.

- (2)其他不定式

▶ $0 \cdot \infty$ 型:取倒数后转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,即

$$f \cdot g = \begin{cases} \frac{g}{1} \\ \frac{f}{f} \\ \frac{f}{g} \end{cases}.$$

例2.4: 求 $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x \ (n>0)$.

解:

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 拉格朗日中值定
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) 0 型和 ∞ (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4 3 \$4 161 165 46 24 1A

4. 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性(2)曲级的凹凸性
- (2) 田玖町四凸恒
 (3) 极值的求法
- (4)图像的绘
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

▶ 0^0 型和 ∞^0 型:取对数后转化为 $0.\infty$ 型,即 $f^g = e^{g \ln f}$.

(2)其他不定式

▶ 0^0 型和 ∞^0 型:取对数后转化为 $0\cdot\infty$ 型,即 $f^g = e^{g \ln f}.$

例2.5:求 $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

1 中值定理

- (1)极值和费马引耳
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定:
- (4)利均甲位

2.洛必达法则

(1) ○ 型和 ∞ 型表定点

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性

- 0 10 10 10 10
- 3.泰勒公式
 - (2)函数的麦克劳林公式(3)泰勒公式的应用
- 4. 函数图像的讨论
 -) 曲线的凹凸性
 - 2) 田玖的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5 久节糸老父宏

▶ 0^0 型和 ∞^0 型:取对数后转化为 $0.\infty$ 型.即

$$f^g = e^{g \ln f}$$
.

例2.5:求
$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$
.

解:

原式 =
$$\lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1.$$

▶ 0^0 型和 ∞^0 型:取对数后转化为 $0.\infty$ 型,即

$$f^g = e^{g \ln f}$$
.

例2.5:求
$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$
.

例2.6:求
$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$
.

▶ 0^0 型和 ∞^0 型:取对数后转化为 $0.\infty$ 型.即

$$f^g = e^{g \ln f}$$
.

例2.5:求
$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$
.

解:

例2.6:求 $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

原式 =
$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln \cot x}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{-\csc^2 x/\cot x}{1/x}}$$

= $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{x}{\sin x \cos x}} = e^{-1}$.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗目中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 №型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5. 各节参考答案

1 中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 夕小及理
 (2) 括款即日由估合。
- (4) 村西中位

2.洛必达

2. 冷火込法

- (1) 6 型和 ○ 型和 (2) # / 2 T ○ E
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性
- (3)洛必达法则的局限包
 (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公司 (3)泰勒公式的应用
 - (4)课后习题

.函数图像的讨论

- (1)函数的早调性
 (2)由级的凹凸性
- (2)由线的凹凸性
 (3)标估码步生
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

(1) 使用洛必达法则陷入"死循环",例如:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \overset{絡必迭法则}{=} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
洛必迭法则
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

事实上,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$

1.中值定理

- (2)罗尔定理
 - (2)拉格朗日中值定用
- (5)课后习题
- 2.洛必达法则
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)谬丘贝斯

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公司
- (2)函数的发兄分杯公式 (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
 - ()由级的凹凸性
 - (4)图像的绘制
 - (5)课后习题
- 5.各节参考答案

(2) 若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不等于 ∞ 时,不能使用洛必达法则,即这个时候

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例如:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \overset{\text{A.G.}}{\neq} \overset{\text{J.I.}}{\neq} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1},$$

事实上,右端极限不存在且不为∞,左端极限为1.

1 中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4) 村西中值定
- 2.洛必达法则
- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
- (3)洛必达法则的局限性
- o to the o
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3) <u>&勒公式的应用</u>
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - 1)函数的单调性
 2)由级的凹凸性
 - 2)由线的凹凸性 3)极值的求法
 - (4)图像的绘制
 (5)误后习题
 - (5)课后习题
- 5.各节参考答案

1.中值定理

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗目中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 №型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性

(4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5 冬节参考答案

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 拉格朗日中值定
- (4)利西甲仙(5)福丘贝斯

2.洛必达

- (1) 0 型和 ∞ 型未定点
- (2)其他不定式
- (3)洛公达法则的局限性(4)课后习题

3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- (4)^{球石刀及} A 添新图像的计论

.函数图像的讨论

- (1)函数的早调性 (2)曲级的凹凸性
- (2)回致的凹凸性
 (3)据结码求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

(1)
$$\lim_{x \to \infty} (x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x) = ?$$

(2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = ?$$

(3)
$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = ?$$

(4)
$$\lim_{x \to 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$$

(5)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = ?$$

(6) 已知
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - mx + 8}{x^2 - (2+n)x + 2n} = \frac{1}{5}$$
, 求常数 m , n 的值.

- (4)课后习题

- (1) ○型和 ※型未定式

3. 泰勒公式

3. 泰勒公式

- (1) ○型和 ※型未定式

3. 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立

(1)泰勒公式的建立

▶ 在微分中,我们可以使用如下的近似公式:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

但需要解决的问题依然存在—- 如何提高近似的精度?

- (1)泰勒公式的建立

▶ 在微分中,我们可以使用如下的近似公式:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

但需要解决的问题依然存在—- 如何提高近似的精度?

▶ 求n次多项式p_n(x),要求:

$$p_n(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0), \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

中值定理

(1) 极值和费马引理 (2) 罗尔定理

(4)柯西中值定理

2.洛必达2

(1) 0 型和 ∞ 型未定式
 (2)其他不定式

(4)18.6.78

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用 (4)课后习题

1.函数图像的讨论 ··

>)曲线的凹凸性)极值的求法

(4)图像的绘制
(5)课后习题

5.各节参考答案

▶ 在微分中,我们可以使用如下的近似公式:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

但需要解决的问题依然存在—- 如何提高近似的精度?

▶ 求n次多项式pn(x),要求:

$$p_n(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0), \dots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

▶ 为求满足条件的多项式,我们有:

$$\begin{array}{lll} p_n(x) & = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \\ p'_n(x) & = & a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ p''_n(x) & = & 2!a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \end{array} \tag{3) the left}$$

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

所以

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0), a_1 = p'_n(x_0) = f'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}p''_n(x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0), \dots, a_n = \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

- (1)泰勒公式的建立

▶ $\diamondsuit r_n(x) = f(x) - p_n(x)$,则有

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0,$$

那么对余项r_n(x)有如下的估计:

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{r'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n}$$

$$= \frac{r'_n(\xi_1) - r'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{r''_n(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}}$$

$$= \cdots = \frac{r_n^{(n)}(\xi_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

注意到

$$p_n^{(n+1)}(x)=0,$$

所以

$$r_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

即

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

由法心理

)极值和费马引理

(4)村西中值定理
(5)课后习题

2.洛必达法则 (1) ^Q型和 ∞ 型未定式

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3. 泰勒公式 (1) 泰勒公式的建立 (2) 函数的麦克劳林公式 (3) 泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论 (1)函数的单调性

(3)极值的求法 (4)图像的绘制 (5)课后习题

5.各节参考答案

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

1 由估空理

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (4)柯西中值定理

2.洛必达法

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
- (2)共化不足式 (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公主

- (1)泰勒公式的建立
 - 3) 泰勒公式的应用
- (4)课后习题

1.函数图像的讨论

- 1)函数的单调性
- 由线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- E 夕 苔 糸 老 ダ キ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

▶ 如果r_n(x)用o(x - x₀)ⁿ来表示,则称为带有佩亚诺余项的泰勒公式;

1 中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (4)村西中值定理

2.洛必达法则

- (1) 0 至 ∞ ∞ 至 へ ∧ (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习题
- 1) 承數的並调發
 - 由线的凹凸性
- (4)图像的绘制(5)课后习题
- (5)课后习题

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

- ▶ 如果r_n(x)用o(x x₀)ⁿ来表示,则称为带有佩亚诺余项的泰勒公式;
- ▶ 如果 $r_n(x)$ 用 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 来表示,其中 ξ 在 x_0 与x之间,则称为带有拉格朗日余项的泰勒公式.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理
- (4)村西中值定理(5)课后习题
- 2.洛必达法则
- (2)其他不定式 (3)次办法注册的品额被
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4.函数图像的讨论
- (1)函数的单调性
 - 2)曲线的凹凸性 3)极值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)课后习题
- 5 久节糸老父宏

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

- ▶ 如果 $r_n(x)$ 用 $o(x x_0)^n$ 来表示,则称为**带有佩亚诺余项的泰勒公式**;
- ▶ 如果 $r_n(x)$ 用 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 来表示,其中 ξ 在 x_0 与x之间,则称为带有拉格朗日余项的泰勒公式.
- ▶ 在泰勒定理中令x₀ = 0,就得到如下特殊的形式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x),$$

这称为麦克劳林公式.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理
- 2.洛必达法则
- (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2)其他不定式
- (3)洛必达法則的局限性(4)课后习题
 - 泰勒公式
- (1) 泰勒公式的建立 (2) 函数的麦克劳林公式 (3) 泰勒公式的应用 (4) 课后习题
- 4.函数图像的讨论
- (1)函数的单调付
 (2)曲线的凹凸付
- 2)由线的凹凸性 3)极值的求法
- 4)图像的绘制 5)课后习题
- 5.各节参考答案

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习题

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5. 各节参考答案

1 中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2)分示及理 (2)括技術自由信令目
- (4) 村西中值
- (5)课后习题

2.洛必达

- (1) 0 型和 ∞ 型未定点
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法則的局限性(4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
 - (3)泰勒公式的应
 - (4)课后习题

. 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

(i)
$$f(x) = e^x$$
.

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} + o(x^{n});$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \dots + \frac{x^{n}}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

- 1 中值定理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定
 - (5)课后习题
- 2. 洛必达
- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
 - 2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
- 3. 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - 1)函数的单调性
 - 2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- 4) 图像的短刺 5) 提后习题
- (5)球后引起
- 5.各节参考答案

(ii)
$$f(x) = \sin x$$
.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m});$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\cos(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

1.中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理

(4)柯西中值定理

2.洛必达

(1) ⁰/₀型和 [∞]/_∞型未定式

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性

3. 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公立的应用

(3) 泰勒公式的应用(4)课后习题

F. 四级图像时刊化 (1)函数的单调性

2)由线的凹凸性

(4)图像的绘制
(5)课后习题

一九十七七杯

(iii)
$$f(x) = \cos x$$
.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1});$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{\cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

1.中值定理

- (1) 极值和费马引理 (2) 罗尔定理
- (2) 拉格朗日中值定理(4) 柯西中值定理
- 2.洛必达2
- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
- (2)其他不定式 (3)洛公达法则的局限性
- 3. 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
 - (4)课后习题
 - (1)函数的单调性
 - 2)由线的凹凸性
 - (3)极值的求法
 (4)图像的绘制
 - (5)课后习题
- 5.各节参考答案

(iv)
$$f(x) = \ln(1+x)$$
.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

1.中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(4)村西中值定
(5)课后习题

2.洛必达

(1) 0 型和 <u>∞</u> 型未定式

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性 (4)理戶口頭

3. 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (2)泰勒公立公公司

(3)泰勒公式的应用 (4)课后习题

4.函数图像的讨论

1)函数的单调性 2)由线的凹凸性

(3)极值的求法

(5)课后习题

(v)
$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$
.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2} + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

1.中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值》

つ 決 必 法 3

2. 冷火 込 法则 (1) ⁰/₂ 型和 [∞]/₂ 型未定式

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性

3 泰勤公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

2) 曲线的凹凸性 3) 极值的求法 4) 阳像始绘制

(5)课后习题

(vi)
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n);$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式是

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

- 1.中值定理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)村西中恒定 (E)坦己口匹
- 2.洛必达法则
- (1) 型和 ∞ 型表定式
 - 2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
- 3.泰勒公式
- (1)参勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - 1)函数的单调性
 - 2)由级的凹凸性
 - (3)极值的本法
 (4)图像的绘制
 - (5)课后习题
- 5.各节参考答案

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习题

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1 中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 夕小及理
 (2) 括款前日由估合日
- (4) 柯西中值

0.效以法

2. 冷火还法则

- (1) 🖯 型和 🍣 型
- (2)其他不定式
 (3)洛必达法则的局限
- (3)洛必达法則的局限性(4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立(2)函数的表立劳效
 - (3)泰勒公式的应用

4)课后习题

. 函致图像的刊刊

- (1)函数的单调性
 (2)由诉从四日及
- 2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (5)课后习题
- (3) 珠石刁地

(i) 近似计算

- (3)泰勒公式的应用

(i) 近似计算

例3.1:用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值,使其精确到0.005,试确定x 的适用范围.

1 由估定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 拉格朗日中值定理
- (4) 村西中位定

2 这必认法则

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
- 2)其他不定式 3)汶丛法注册的品报社
- (1)******
 - 3.泰勒公式
 - (1)泰勒公式的建立
 (2)函数的麦克劳林公式
 - (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题

.函数图像的讨论

-)函数的单调性
- 2)由线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

(i) 近似计算

例3.1:用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值,使其精确到0.005,试确定x的适用范围.

解:对于余项r3(x),我们有

$$|r_3(x)| = |\frac{x^4}{4!}\cos(\theta x)| \le \frac{|x|^4}{24},$$

令

$$\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$$
,

解得

$$|x| \le 0.588$$
,

即当 $|x| \leq 0.588$ 时,由给定的近似公式计算的结果能准确到0.005.

.中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)核故即日由估企理

(4)柯西中值定(5)课后习题

2.洛必达法则 (1) ⁰ # # 1 × 2 # 1 × 2 #

(2)其他不定或 (3)洛必达法则的局限性

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性(2)曲线的凹凸性

3)极值的求法

5)课后习题

(ii) 求极限

- (3)泰勒公式的应用

例3.2:求
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$$
.

- (3)泰勒公式的应用

(ii) 求极限

例3.2:求
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$$
.

解:用泰勒公式将分子展到x²项,由于

$$\sqrt{3x+4} = 2(1 + \frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2(1 + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}x) + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(\frac{3}{4}x)^2 + o(x^2))$$

$$= 2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{64}x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{4-3x} = 2(1 - \frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2(1 + \frac{1}{2}(-\frac{3}{4}x) + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}x)^2 + o(x^2))$$

$$= 2 - \frac{3}{4}x - \frac{9}{64}x^2 + o(x^2),$$

1.中值定理

1)极值和费马引理 2)罗尔定理 2)拉格朗日中值定理

2.洛必达法则

(1) 0 型和 ∞ 型本定式
 (2) 其他不定式
 (3) 洛必达法則的局限性

3.泰勒公式 (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式

(3)泰勒公式的应用 (4)课后习题 4.函数图像的讨论

4.函数图像的讨论 (1)函数的单调性

> 3)极值的求法 4)图像的绘制 5)理点习题

(5)课后习题

5.各节参考答

所以原式 = $-\frac{9}{32}$.

(iii) 证明不等式

- (3)泰勒公式的应用

(iii) 证明不等式

例3.3:证明
$$\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$
,其中 $x > 0$.

- 1 由估少理
- (2)罗尔定理
- (4) 柯西中值定
- (5)课后习题
- 2.洛必迈法则
 - (1) రీ లేశా 🍣 లేశ
- (3)洛必达法则的局限性
- 2 煮 勘 八 式
- (1)泰勒公式的建立
- (3)泰勒公式的应用
- .函数图像的讨论
- 1)函数的单调性
- 2)由线的凹凸性
- (3) 极值的求法
- (4)图像的绘制 (E)测点口题
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

(iii) 证明不等式

例3.3:证明
$$\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$
,其中 $x > 0$.

证:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3,$$

其中 $0 < \theta < 1$,注意到当x > 0时,

$$\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3>0,$$

故命题得证.

1 中信定理

- (1)极值和贸马引程 (2)罗尔定理
 - (2)拉格朗日中值定
- (4)利均甲值》
 (5)谬白习题

2.洛必达

- (1) 0 型和 ∞ 型未定立
 - (1) 0 至和 ○ 至木足式 (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式(3)参勒公式的应用

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
 (2)曲级的即品件
- 2) 由线的凹凸性
 3) 标估的求法
- (3) 极值的示法(4) 图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求治
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1 中信定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定3
- (4) 村西中值

2.洛必达

2.俗处还压

- (1) 6 型和 ∞ (2) 其他不定点
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3. 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式

(4)课后习题

1.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制 (E)测点口题
- (5)课后习题

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4} = ?$$

(2)
$$\lim_{x \to \infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})) = ?$$

(3)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2} =?$$

- (4) 函数f(x)在[0,1]上具有三阶连续函数,且f(0)=1,f(1)=2,f'(0.5)=0,证明(0,1)内至少存在一点 ξ ,使得 $|f'''(\xi)| \ge 24.$
- (5) 函数f(x)在[a,b]上连续,在(a,b)内二阶可导,若f'(a) = f'(b) = 0,则在(a,b)内至少有一点 ξ ,使得 $|f(b) f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$.
- (6) 已知函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x), \bar{x} f^{(n)}(0).$

(1)极值和费马引理 (2)罗尔定理

(4)村西中值定司
(5)理戶司题

2.洛必达法

(1) ○型和 ○ 型未定式
 (2) 其他不定式
 (3) 洛必达法則的局限性

3 表勤公式

(1)泰勒公式的建立(2)函数的麦克劳林公式(3)泰勒公式的应用(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性 (2)曲线的凹凸性

3)极值的求法

日夕古台书祭马

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗目中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习题

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4) 村西中值

2.洛必达

(1) 0 --- 00 ---

- (1) 0 2 m ∞ 3 (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公司 (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2) 由线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛公达法则

- (1) ○型和 ◎型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5.各节参考答案

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 並格朗日中值定則
- (4) 柯西中值
- (5)课后习题

2.洛必达

- (1) 0 型和 ∞ 型未定
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法則的局限性(4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 1.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

- (2)曲线的凹凸性
- (3) 机值的表法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

函数单调性的判定:设函数 f(x) 在开区间 I 内可导, 若 $f'(x) \geq 0$,则 f(x) 在 I 内单调递增; 反之, 若 $f'(x) \leq 0$,则 f(x) 在 I 内单调递减.

1.中值定理

- (1) 极值和费马引理 (2) 罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理(4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- $(1) \frac{0}{0}$ \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z} \mathbb{Z}
- (3)洛必达法则的局限性

3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
 -) 由线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

函数单调性的判定:设函数f(x)在开区间I内可导,若 $f'(x) \ge 0$,则f(x)在I内单调递增;反之,若 $f'(x) \le 0$,则f(x) 在I 内单调递减.

证:不妨设f'(x) > 0,令 $x_1 > x_2$,由拉格朗日中值定理有

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \ge 0,$$

其中 $x_2 < \xi < x_1$,所以此时f(x)单调递增.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理
- (4)村西中值定 (5)理戶 U E

2.洛必达法则

- (1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式
 (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的湖
- (2)函数的麦克劳林公式 (3) 泰勒公式的应用
- (4)4242

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
 (2)必须约如果
 -) 曲线的凹凸性
- (4)图像的绘制 (5)增长口票
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

函数单调性的判定:设函数f(x)在开区间I内可导,若 $f'(x) \ge 0$,则f(x)在I内单调递增;反之,若 $f'(x) \le 0$,则f(x) 在I 内单调递减.

证:不妨设f'(x) > 0,令 $x_1 > x_2$,由拉格朗日中值定理有

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \ge 0,$$

其中 $x_2 < \xi < x_1$,所以此时f(x)单调递增.

注1:满足f'(x) = 0的点 x_0 称为函数f(x)的驻点或稳定点.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)お热朗日中值定理
- (4) 柯西中值定

2. 洛必立

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2) 其份 T c š
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公
- (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

-)由线的凹凸性
- (3) 极值的求法
- (4)图像的绘制(5)课后习题
- 5 久节糸老父亲

1 由信空理

- (1)极值和费马。
- (2)罗尔定:
 - (2)拉格朗日中值定
- (4)村四十年

2.洛必达

- (1) 0 el c 00 el hos
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法則的局限性(4)课后习题

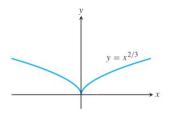
3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
 - (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- (4)课后习

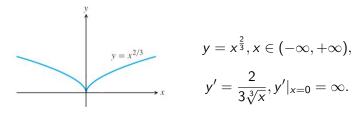
4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

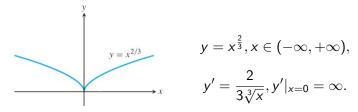
- 2)曲线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- (3)珠石刁鸡



- (1)函数的单调性



- (1)函数的单调性



注3:如果函数在某驻点两边导数同号,则不改变函数的单调性.

中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理(4)柯西中值定理

2. 洛必过

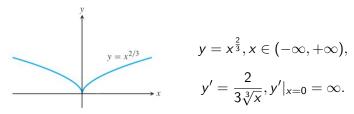
- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
 (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性

3.泰勒公式

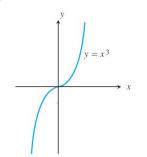
- 5. 徐初公士
- (1) 泰勒公式的建立(2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题

4.函数图像的讨论

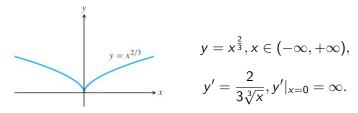
- (1)函数的单调性
 (2)曲级的即品件
 - 由线的凹凸性
- 4)图像的绘制 5)课后习题
- (5)课后习题



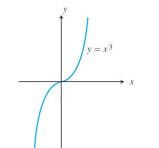
注3:如果函数在某驻点两边导数同号,则不改变函数的单调 性.



- (1)函数的单调性



注3:如果函数在某驻点两边导数同号,则不改变函数的单调性.



$$y = x^3, x \in (-\infty, +\infty),$$

 $y' = 3x^2, y'|_{x=0} = 0,$
 $y'|_{x<0} > 0, y'|_{x>0} > 0.$

中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定則
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (3)洛公达法則的局限付(4)课后习题

3.泰勒公式

- (1) 長點八百
- (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4 3 34 10 16 46 24 16

4. 函数图像的讨论

- (1)函数的单调性(2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制(5)课后习题
- 5 各节参考签

例4.1:确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

(1)函数的单调性

例4.1:确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

$$\text{ME:} f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2),$$

$$f'(x)=0,$$

得到x = 1, x = 2,故列表如下,

Χ	$(-\infty,1)$	1	(1, 2)	2	$(2,+\infty)$
f'(x)	+	0	_	0	+
f(x)	7	2	>	1	7

故f(x)的单调递增区间为 $(-\infty,1),(2,+\infty),f(x)$ 的单调递减区间为(1,2).

1.中值定理

- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)总值和显由估合。
- (4) 村西中值定理
- 2.洛必达法
 - (1) 0 型和 ∞ 型未定式
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性
 - .泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)不数从表本的社会本
- (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用 (4)调二日照
- (4)课后习题
- 1.函数图像的讨论
- (1)函数的单调性 (2)由级的凹凸性
- 2) 田致的凹凸性
 3) 极值的求法
- (5)课后习题
- トカせをおが

例4.1:确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

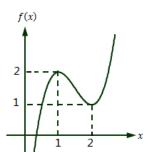
解:
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$$
,令

$$f'(x)=0,$$

得到x = 1, x = 2,故列表如下,

X	$(-\infty,1)$	1	(1, 2)	2	$(2,+\infty)$
f'(x)	+	0	_	0	+
f(x)	7	2	>	1	7

故f(x)的单调递增区间为 $(-\infty,1),(2,+\infty),f(x)$ 的单调递减区间为(1,2).



| 中值定理

- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理
- (4) 柯西中值定理

2.洛必达法则

- (1) 資型和 → 型末定式 (2) 其他不定式
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- 4)课后习题
- 1. 四级图像的刊1
- (1)函数的单调性
- (2)由线的凹凸性
 (3)极值的求法
- (4)图像的绘制(5)课后习题
- 口夕 节 名 本

- (1)极值和费马引理
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定理
- (5)课后习题

2. 洛必达法则

- (1) □型和 ∞型未定式
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式
- (3) 泰勒公式的应用
- (4)课后习是

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5. 各节参考答案

1.中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定

(5)课后习题

2.洛必达

- (1) 0 型和 ∞ (2) 其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3. 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

函数图像的讨论

(2)曲线的凹凸性

() 曲线的凹凸性

(3) 极值的示法(4) 图像的绘制

(5)课后习题

设f为定义在区间I上的函数,若对I上的任意点 x_i 和任意实数 $\lambda_i>0$ ($i=1,2,\cdots,n$), $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, 总有

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq (\geq) \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),$$

则称f为1上的凸(凹)函数.如果上述不等式改为严格不等式,则相应的函数称为严格凸(凹)函数.上述不等式也称之为詹森不等式.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理
- (4)村西中值定用 (E)用戶口幣
- 2.洛必达法则
- $(1) \frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 (2)其他不定式
- (4)课后习题
 - 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立(2)函数的麦克劳林公式(3)泰勒公式的应用(4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
 - (2)曲线的凹凸性 (3)极值的求法
 - (4)图像的绘制(5)课后习题
 - 5.各节参考答案

f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:对于I上的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq (\geq)\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

1.中值定理

- (2)罗尔定理
- (2) 拉格朗日中值定理(4) 柯西中值定理
- (5)课后习题
- 2.洛必达法则
 - (1) 0 型和 00 型未定式 (2) サルエロぎ
- (3)洛必达法则的局限付
- 3. 泰勒公式
- 3. 杂勃公式
 - 2)函数的麦克劳林公式 3)泰勒公式的应用
- (4)课后习题
- 4. 函数图像的讨论
- (2)曲线的凹凸性
- 3)极值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)谬丘习题
- 日夕古会私父安

f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:对于I上的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq (\geq)\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

可导函数f为1上的凸(凹)函数的充要条件是:f'在1上是递增(减)的.这意味着可导凸(凹)函数的几何意义是该函数所对应的曲线总在它的切线上(下)方.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理(4)拉耳中值定理
- (4)利西甲值定理(5)课后习题
- 2.洛必达法则
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性
- 3. 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4.函数图像的讨论
- (1)函数的单调性 (2)曲线的凹凸性
 - 3)极值的求法
- 4)图像的绘制
 5)课后习题
- 5.各节参考答案

f为I上的凸(凹)函数的充要条件是:对于I上的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq (\geq)\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

可导函数f为1上的凸(凹)函数的充要条件是:f'在1上是递增(减)的.这意味着可导凸(凹)函数的几何意义是该函数所对应的曲线总在它的切线上(下)方.

二阶可导函数f为1上的凸(凹)函数的充要条件是:

$$f''(x) \geq (\leq)0.$$

1 中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理
- (4)村西中值定用(5)课后习题
- 2.洛必达
- (1) 6型和 ∞ 型本定式
 (2)其他不定式
 (3)洛必达法则的局限性
 - 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用 (4)调片 以照
- 4.函数图像的讨论
- (2) 曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)出版的短期 (5)课后习题
- 5.各节参考答案

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
 - 2)拉格朗目中值定员
- (5)课后习题

2.洛必达法则

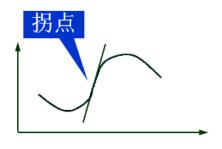
- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
- (3)洛必达法则的局限性

3. 泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题

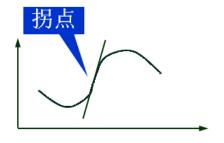
4 函数图像的讨论

- 1)函数的单调性
- (2)由线的凹凸性
- 3)极值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)谬丘习题
- (5)课后习题



1 中值定理

- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理 (4)柯西中值定理
- 2 汶丛法注册
 - $(1)\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性
- 2 表 勘 八 式
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性 (2)曲线的凹凸性
 - 2)曲线的凹凸性
 - (4)图像的绘制 (5)25 C D E
 - (5)课后习题



注1:若f(x)在点 x_0 可导,在 x_0 的空心邻域二阶可导,且f''(x)在 x_0 两侧异号,则点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线y=f(x)的一个拐点.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定(5)课后习题

2.洛必达法

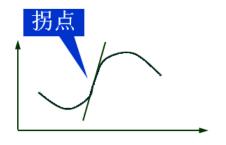
- (1) 0型和 <u>∞</u>型未定式 (2) 其他不定式
- (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (4)课后习题

4.函数图像的讨论

- (2)曲线的凹凸性
- (3)极值的求法
- (4)图像的绘制(5)课后习题
- 5.各节参考答案



注1:若f(x)在点 x_0 可导,在 x_0 的空心邻域二阶可导,且f''(x)在 x_0 两侧异号,则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线y = f(x)的一个拐点.

注**2:**若f(x)在点 x_0 二阶可导,则 $f''(x_0) = 0$ 是($x_0, f(x_0)$)为曲线y = f(x)的一个拐点的必要条件.

1.中值定理

(1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理 (4)如果也信息理

2. 洛公

(1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2) 其份工定言

(3)洛必达法则的局限 (4)课后习题

3.泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

4 函数图像的讨论

. 函数图像的讨论 1)函数的单调性

(2)曲线的凹凸性 (3)极值的求法 (4)图像的价值

(4)图像的绘制(5)课后习题

5.各节参考答案

1 中信定理

- (1)极值和费马引用
- (2)罗尔定理
- (2)拉格则日中值定》
- (5)课后习题

2.洛必达法

- (1) 0 奶奶 ◎ 奶末宝
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公司

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4 函数图像的讨论
- (1) z 4. 4. 4 10 14

(2)曲线的凹凸性

- (3) 机值的表法
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

- 1 中信定理
- (1) in this all to
- (2)罗尔定岛
- (2)拉格朗日中值定
- (5)课后习题
- 2.洛必达法
 - (1) 0 型和 ∞ 型未定式
 - (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
- 3. 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4. 承料图像的社会
- 4.四级图影的月记
- (2)曲线的凹凸性
- (2) 每线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题
- 5 冬节糸老忿宏

解:

▶ 求y",

$$y' = 12x^3 - 12x^2, y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

1.中值定理

- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理
- (2) 拉格朗日中值定理 (4) 柯西中值定理
- (4)利西甲值定理(5)课后习题

2.洛必过

- $(1)\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 (2)其他不定式
- to all a second
 - 3. 泰勒公式
 (1) 泰勒公式的建立
 - (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
- (2) 曲线的凹凸性
- (4)图像的绘制 (5)课后习题
- E 夕 苔 糸 老 笠 安

解:

▶ 求y",

$$y' = 12x^3 - 12x^2, y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

▶ 求拐点可疑点,令y" = 0,得

$$x_1=0, x_2=\frac{2}{3}.$$

1.中值定理

(1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)比较加口由估企品

(4)村西中值定理

(5)课后习题

2.洛必达法则

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性

3. 泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性 (2)曲线的凹凸性

(4)图像的绘制 (5)课后习题

5.各节参考答案

解:

▶ 求y",

$$y' = 12x^3 - 12x^2, y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

▶ 求拐点可疑点,令y" = 0,得

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}.$$

▶ 列表判别

11/10	/ 4/44				
X	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$
y''	+	0	_	0	+
у	凸	1	凹	$\frac{11}{27}$	凸

所以拐点是(0,1)和 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$.

1.中值定理

(1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理 (4)胡馬中值定理

2.洛必达

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式
 (2)其他不定式
 (3)洛必达法则的局限性
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4 不此 同 海 丛 上 入
- 4.函数图像的讨论

(2)曲线的凹凸性

(3)极值的求法

(5)课后习题

5.各节参考答案

- (1) ○型和 ※型未定式

4.函数图像的讨论

- (3)极值的求法

- (3)极值的求法

极值第一判别法:设函数f(x)在 x_0 的某邻域内连续,且在空心邻域内有导数,当x由小到大通过 x_0 时,

- ▶ f'(x)"左正右负",则f(x)在x0取极大值;
- ▶ f'(x)"左负右正",则f(x)在x0取极小值.

1.中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2) 夕小尺柱
 (2) 拉格朗日中值定
- (4)村西中位
 - 0 % 4 11 11 2

(1) ○ 例如 ○ 例本 ☆ 首

- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公式

- (1)泰勒公式的建立
- (2)函数的发见分补公式 (3)泰勒公式的应用 (4)课后习题
- 1 派粉图像的计论
- 4. 函数图像的可论
- 2)由线的凹凸性
- (3) 极值的求法
- (4)图像的绘制
 (5)课后习题
- アカせを基本

极值第一判别法:设函数f(x)在 x_0 的某邻域内连续,且在空心邻域内有导数,当x由小到大通过 x_0 时,

- ▶ f'(x)"左正右负",则f(x)在x0取极大值;
- ▶ f'(x)"左负右正",则f(x)在x0取极小值.

极值第二判别法:设函数f(x)在 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0,$

- f"(x₀) < 0,则f(x)在x₀取极大值;
- ► f"(x₀) > 0,则f(x)在x₀取极小值.

中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理

(2)拉格朗日中值定理

(5)课后习题

2.洛必达:

(1) ⁰/₀ 型和 [∞]/_∞ 型未定式

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性

表勤公式

汆 初公 八

(2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

(4)课后习题

4.函数图像的讨论

(1)函数的单调性

(2)回致的凹凸性

4)图像的绘制
 5)课后习题

5 各节参考签案

极值第一判别法:设函数f(x)在 x_0 的某邻域内连续,且在空心邻域内有导数,当x由小到大通过 x_0 时,

- ▶ f'(x)"左正右负",则f(x)在x0取极大值;
- ▶ f'(x)"左负右正",则f(x)在x0取极小值.

极值第二判别法:设函数f(x)在 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$,

- ► f"(x₀) < 0,则f(x)在x₀取极大值;
- ▶ f"(x₀) > 0,则f(x)在x₀取极小值.

极值第三判别法:设函数f(x)在 x_0 处有直到n阶导数,且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$,则

- ▶ 当n为偶数时,x0为极值点,
 - f⁽ⁿ⁾(x₀) < 0,则f(x)在x₀取极大值;
 - ▶ $f^{(n)}(x_0) > 0$,则f(x)在 x_0 取极小值;
- ▶ 当n为奇数时,x0不是极值点.

中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (4)村西中值为
- 2.洛必达
- (1) $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 (2) 其他不定式
- (2)共化不足式 (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
 - 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式的应用(4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
- (1)函数的单调性
- (2)曲线的凹凸性
 (3)极值的求法
 - ·)图像的绘制)课后习题
- 5.各节参考答案

例4.3:求函数 $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

(3)极值的求法

例4.3:求函数 $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解:

► 求导数,
$$f'(x) = \frac{5}{3}(x - \frac{2}{5})x^{-\frac{1}{3}}$$
,

▶ 求驻点,
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{5}$$
,

- ▶ 求不可导点,*x*₂ = 0,
- ▶ 列表判别,

X	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
f'(x)	+	∞	_	0	+
f(x)	7	0	7	$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	7

所以x = 0是极大值点,极大值为 $0; x = \frac{2}{5}$ 是极小值点,极小值为 $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

1.中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理

2 汶丛法注册

(1) ☑ 型和 ∞ 型未定式
 (2)其他不定式
 (3)洛必达法则的局限性

泰勒公式

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

4.函数图像的讨论

- (2)曲线的凹凸性
- (4)图像的绘制 (5)课后习题
- 5.各节参考答案

例4.4:求函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

(3)极值的求法

例4.4:求函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

解:

- ▶ 求导数, $f'(x) = 6x(x^2 1)^2$,
- ▶ 求驻点, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1,$
- ▶ 求二阶导数, $f''(x) = 6(x^2 1)(5x^2 1)$,
- ▶ 判别,因为f''(0) = 6 > 0,故x = 0是极小值点,极小值为f(0) = 0,
- ▶ 求三阶导数, $f'''(x) = 24x(5x^2 3)$,
- ▶ 再次判别,因为 $f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = 0$, $f'''(1) = 48 \neq 0$, $f'''(-1) = -48 \neq 0$, 所以f(x) 在 $x = \pm 1$ 处没有极值.

中值定理

- (1)极值和費均引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理(4)柯西中值定理
- 2.洛必达法!
- $(1)\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式(2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立(2)函数的麦克劳林公式(3)泰勒公式的应用(4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性(2)由级的凹凸性
 - (3)极值的求法 (4)图像的绘制
 - 4)图像的绘制
 5)课后习题
- 5.各节参考答案

- (1) ○型和 ※型未定式

4.函数图像的讨论

- (4)图像的绘制

- (4)图像的绘制

函数图像绘制的一般步骤:

- 确定函数的定义域,并考察函数的奇偶性和周期性;
- ▶ 针对原函数求出渐近线、与坐标轴的交点和不连续点;
- ▶ 针对一阶导数求出驻点和不可导点;
- ▶ 针对二阶导数求出拐点,并进一步求出极值点、判断单调区间和凸凹区间;
- ▶ 综合讨论结果画出函数的图像.

- 由估定理
- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2) 运动中中办公司
- (2) 拉格朗日中值定理(4) 柯西中值定理
- (5)课后习题
- 2.洛必达法则
- (1) □型和 <u>∞</u>型未定式 (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题
- .泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3) <u>&勒公式的应用</u>
- (3)泰勒公式的应用(4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
 (2)曲线的四品性
 - 2)由线的凹凸性 3)标估的求法
- (4)图像的绘制 (5)误后习题
- (5)课后习题
- 5.各节参考答案

例4.5:绘制函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的图像.

1 中信定理

- (1)极值和费马引用
- (2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达法则

- (1) 0 型和 ∞ 型未定立
- (2)其他不定式
- (3)洛必达法则的局限性 (4)课后习题

3.泰勒公司

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用

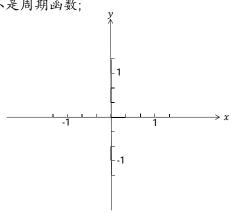
4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
- 2)由线的凹凸性
- (3)极值的求法(4)图像的绘制
- (5)课后习题
- (5)*****

例4.5:绘制函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的图像.

解:

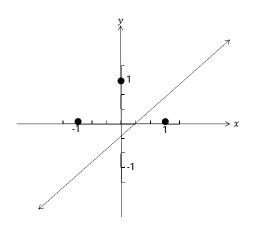
▶ f(x)的定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$,不是奇函数、不是偶函数、不是周期函数;



1 中信定理

- (1)极值和费马引(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (4) 村西中值定:
- 2.洛必达
 - (1) 0 型和 ∞ 型未定式
 - (2)其他不定式
- 0 4 40 0 10
- 3.泰勒公式
- (1)参勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3) 查勒公式的应用
- (4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调位
 - (2) 曲线的凹凸性
 - (4)图像的绘制
 - (5)课后习题
- 5 各节参考签案

▶ 可以求出f(x)有斜渐近线 $y = x - \frac{1}{3}$,且与坐标轴交于(1,0),(-1,0),(0,1)三个点,f(x)在其定义域内连续;



1 中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定理
- (5)课后习题

2.洛必达

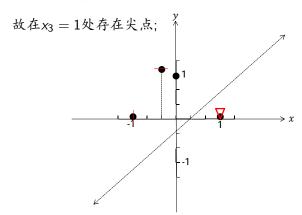
- (1) [□] 型和 ∞ 型未定式 (2) 其他不定式
- (3)洛公达法则的局限性

3 表勤公式

- (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用 (4)四二口匹
- 4 函数图像的讨论
 - 4. 函数图像的订订
 - 2)由线的凹凸性
 - (3)极值的求法
 - (4)图像的绘制 (5)课后习题
- (5)採后习题

▶
$$f'(x) = \frac{x + \frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x - 1} \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2}}$$
, 故得驻点 $x_1 = -\frac{1}{3}$,不可导点 $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.注意到 $\lim_{x \to -1} f'(x) = +\infty$,故在 $x_2 = -1$ 处存在垂直的切线.而

$$\lim_{x \to 1^{-}} f'(x) = -\infty, \lim_{x \to 1^{+}} f'(x) = +\infty,$$



1.中值定理

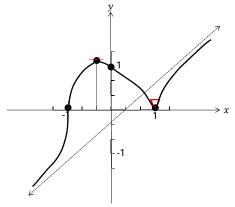
- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理
- (4) 柯西中值定理 (5) 课后习题

2. 洛必达法则

- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性
- 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性
 (2)曲线的网品档
 - (2)由线的凹凸位 (3)极值的求法
- (4)图像的绘制 (5)课后习题
- 5.各节参考答案

►
$$f''(x) = -\frac{8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^5}}$$
,列表判断得

X	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
f'(x)	+	$+\infty$	+	0	_	∞	+
f"(x)	+	∞	_	_	_	$-\infty$	_
f(x)	凸四增减	拐夫小	凸 凹增 减	拐大小	丹凹增减	拐夫小	凸 凹增 减



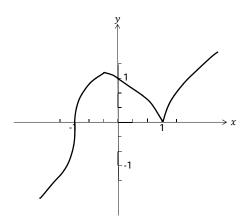
1 由估空理

- (1)极值和费马引理 (2)罗尔定理 (2)拉格朗日中值定理 (4)柯西中值定理
- 2.洛必达法则
- (1) 0 型和 □ 型本定式 (2) 其他不定式 (3) 洛必法法则的局限性

泰勒公式

- (1)参勒公式的建立(2)函数的麦克劳林公式(3)参勒公式的应用
- 4 丞教同场始計入
 - (1)函数的单调性
 - (2)由级的凹凸性
 - (4)图像的绘制 (5)運用 (5)

▶ 综上所述,最后的图像如下



1 由法少四

- (1)极值和貿易引建(2)罗尔定理
- (2)拉格朗日中值定司

2. 洛必:

- (1) 0 型和 ∞ 型未定式 (2) 世份 エマギ
- (2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性 (4)選戶口斯

3 表勤公式

- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式
- (3)泰勒公式台(4)课后习题

4.函数图像的讨论

- (1)函数的单调性
 (2)由现份如果。
- 自线的凹凸性
- (4)图像的绘制
- (5)课后习题

5 久节糸老父宏

- (1) ○型和 ※型未定式

4.函数图像的讨论

(5)课后习题

- (5)课后习题

- (1) 设在 $(-\infty, +\infty)$ 上f''(x) > 0,请确定f'(0), f'(1), f(1) f(0)的大小关系.
- (2) 证明曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 的三个拐点共线.
- (3) 证明 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$,其中 $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- (4) f(x)在x = 0的某邻域内连续,且f(0) = 0, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1 \cos x} = 2$,请判断x = 0是否是极值点,如果是请判断是极大值还是极小值.
- (5) 设y = f(x)是方程y'' 2y' + 4y = 0的一个解,若 $f(x_0) > 0$,且 $f'(x_0) = 0$,请判断 $x = x_0$ 是否是极值点,如果是请判断是极大值还是极小值.
- (6) 描绘函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理
- (4)柯西中值定用(5)课后习题
- 2.洛必达法
- (1) □型和 ○○□型未定式 (2)其他不定式 (3)洛必达法則的局限性
 - 3.泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立(2)函数的麦克劳林公式(3)泰勒公式的应用(4)课后习题
- 4.函数图像的讨论
 - (1)函数的单调性 (2)曲线的凹凸性
 - 3)极值的求法 1)图像的终期
- (5)课后习题

5.各节参考答案

- (1) □型和 ◎型未定式

5.各节参考答案

5.各节参考答案

中值定理

(1)提示:对函数 $f(x) = \cos \ln x - \sin 1$ 在区间(1, e) 应用零点定理;或是对函数 $g(x) = \sin x$ 在区间(0, 1)应用拉格朗日中值定理.

- (2)提示:对函数 $F(x) = f(x)\sin x$ 在区间 $(0,\pi)$ 应用罗尔定理.
- (3)提示:对函数 $F(x) = f(x)e^x \Delta f(x)$ 的两个零点间应用罗尔定理.
- (4)提示:对函数 $F(x) = f(x)x^n$ 在在区间(0,1)应用罗尔定理.
- (5)提示:不妨设 $x_2 > x_1$,则

$$\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}=f'(\xi_2)< f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}.$$

洛必达法则

$$(1) - \frac{1}{2}$$
. $(2)0$. $(3) - \frac{1}{4}$. $(4)\frac{1}{6}$. $(5)2$. $(6)m = 6, n = 12$

中值定理

- (1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理(4)柯西中值定理
- 2.洛必达法則
 (1) № 和 ∞ № 利
- (1) ☑型和 SO 型木定式
 (2)其他不定式
 (3)洛必达法则的局限性
 (4)课后习题
 - 泰勒公式
- (1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式 (3)泰勒公式的应用 (4)课日习题
- 4.函数图像的讨论
- (1)函数的单调性 (2)曲线的凹凸性 (3)标值的点法
- (4)图像的绘制
 (5)课后习题
- 5.各节参考答案

$$f(a) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(a)$$

$$(6)0(n \le 2); \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}(n \ge 3).$$

(5)提示:
$$f(b) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(b-a)^2$$
,

$$f(a) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(a-b)^2.$$
(6) $0(n < 2)$: $\frac{(-1)^{n-1}n!}{2}(n > 3)$.

函数图像的讨论
$$(1)f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$$
.

$$T(0) \geq T(0)$$
.

 $(2)\frac{1}{2}$. $(3)-\frac{1}{12}$.

(4)提示: $f(0) = f(0.5) + \frac{f''(0.5)}{2}(\frac{1}{2})^2 - \frac{f'''(\xi_1)}{3!}(\frac{1}{2})^3$

 $f(1) = f(0.5) + \frac{f''(0.5)}{2} (\frac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!} (\frac{1}{2})^3.$

(2)提示:三个拐点是(1,1),
$$(-2+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}})$$
, $(-2-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}-1}{8+4\sqrt{3}})$.

- - 5.各节参考答案

(3)提示:证明
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减.

(4)极小值. (5)极大值.

(6)提示:偶函数,关于y轴对称;x轴是一条水平渐近线; $(-\infty,0)$ 内单调递增, $(0,+\infty)$ 内单调递减; $\epsilon x = 0$ 取最大值; $x = \pm 1$ 是

拐点, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 为凸区间,(-1, 1)为凹区间.

中值定理

(1)极值和费马引理(2)罗尔定理(2)拉格朗日中值定理

(4)村西中值定:(5)课后习题

2.洛必达法则

(2)其他不定式 (3)洛必达法则的局限性

つき勘八さ

(1)泰勒公式的建立 (2)函数的麦克劳林公式

(2)函数的爱克劳林公式(3)泰勒公式的应用(4)课后习题

4.函数图像的讨论

1)函数的单调性

曲线的凹凸性 极值的求法

4)图像的绘制 5)课后习题

5.各节参考答案