第二章 数列极限

陈 颖

北京电子科技学院基础部

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

若函数f的定义域为全体正整数集合N^+,则称

$$f: N^+ \to R \qquad 或 \qquad f(n), n \in N^+$$

为**数列**.因为N^+的元素可以按由小到大的顺序排列,故数列$f(n)$也可写成

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

或简单的记为$\{a_n\}$,其中$\{a_n\}$称为该数列的**通项**.

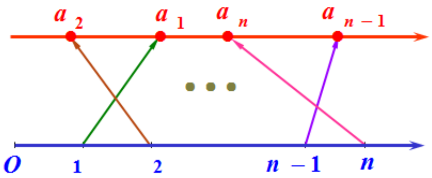
若函数f的定义域为全体正整数集合N^+,则称

$$f: N^+ \to R \quad 或 \quad f(n), n \in N^+$$

为**数列**.因为N^+的元素可以按由小到大的顺序排列,故数列$f(n)$也可写成

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

或简单的记为$\{a_n\}$,其中$\{a_n\}$称为该数列的**通项**.



- "$\varepsilon - N$"语言

- "$\varepsilon - N$" 语言

设$\{a_n\}$是一个数列,a是一个有限数,若对任意给定的正数ε,总存在一个正整数N,使得当$n > N$时,总有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立,则称数列$\{a_n\}$**收敛**于a,或$\{a_n\}$ 以a为**极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ 或 } a_n \to a(n \to \infty).$$

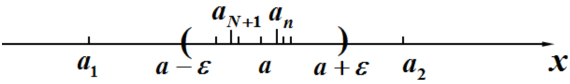
- "$\varepsilon - N$" 语言

设$\{a_n\}$是一个数列,a是一个有限数,若对任意给定的正数ε,总存在一个正整数N,使得当$n > N$时,总有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立,则称数列$\{a_n\}$**收敛**于a,或$\{a_n\}$ 以a为**极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ 或 } a_n \to a(n \to \infty).$$



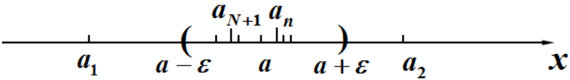
- "$\varepsilon - N$"语言

设$\{a_n\}$是一个数列,a是一个有限数,若对任意给定的正数ε,总存在一个正整数N,使得当$n > N$时,总有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立,则称数列$\{a_n\}$**收敛**于a,或$\{a_n\}$ 以a为**极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ 或 } a_n \to a(n \to \infty).$$



若数列$\{a_n\}$没有极限,则称它是**发散**的.

例1.1:证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0.$

例1.1:证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

证: 对任意给定的$\varepsilon>0$,要使得$|\frac{1}{2^n}-0|<\varepsilon$成立,只需

$$2^n>\frac{1}{\varepsilon},$$

也就是

$$n\lg 2>-\lg\varepsilon,$$

即

$$n>-\frac{\lg\varepsilon}{\lg 2}.$$

取$N=[-\frac{\lg\varepsilon}{\lg 2}]$,则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

例1.2:证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ \ (0 < |q| < 1)$.

例1.2:证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ \ (0 < |q| < 1)$.

证: 对任意给定的$\varepsilon > 0$,要使得$|q^n - 0| < \varepsilon$成立,只需

$$|q|^n < \varepsilon,$$

也就是

$$n \lg |q| < \lg \varepsilon,$$

即

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

取$N = [\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}]$, 则知

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

例1.3:证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ \ (0<a)$.

例1.3:证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (0 < a)$.

证:

(1) $a = 1$,命题显然成立.

例1.3:证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ \ (0<a)$.

证:

(1) $a=1$,命题显然成立.

(2) $a>1$,对任意给定的$\varepsilon>0$, 要使得$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$成立,只需

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\frac{a-1}{a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}<\frac{a-1}{n}<\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{a-1}{\varepsilon}.$$

取$N=[\frac{a-1}{\varepsilon}]$, 则知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

(3) $0<a<1$,令$a=t^{-1}$,则$t>1$.对任意给定的$\varepsilon>0$,要使得$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$成立,只需

$$\begin{aligned}
|\sqrt[n]{a}-1| &= \frac{1-a}{a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1} \\
&= \frac{1-t^{-1}}{t^{-\frac{n-1}{n}}+t^{-\frac{n-2}{n}}+\cdots+1} \\
&= \frac{t-1}{t^{\frac{1}{n}}+t^{\frac{2}{n}}+\cdots+t} \\
&< \frac{t-1}{n}=\frac{1-a}{na}<\varepsilon,
\end{aligned}$$

即

$$n>\frac{1-a}{\varepsilon a}.$$

取$N=[\frac{1-a}{\varepsilon a}]$, 则知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

例1.4:证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}$.

例1.4:证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}$.

证:对任意给定的$\varepsilon>0$,要使得$|\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}-\dfrac{1}{3}|<\varepsilon$成立,只需

$$\begin{aligned}|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}| &= |\frac{n+7}{3(3n^2-n-7)}| \\ &\leq |\frac{n+7}{3n^2-n-7}| = |\frac{n+7}{2n^2+n^2-n-7}| \\ &\overset{n>7}{\leq} \frac{n+n}{2n^2}=\frac{1}{n}<\varepsilon,\end{aligned}$$

即$n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取$N=\max\{7,[\frac{1}{\varepsilon}]\}$, 则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-n-7}=\frac{1}{3}.$$

例1.5:证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

例1.5:证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

证:

(1) $|a|<1$,对任意给定的$\varepsilon>0$,要使$|\dfrac{a^n}{n!}-0|<\varepsilon$ 成立,只需

$$|\frac{a^n}{n!}-0|=\frac{|a|^n}{n!}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则知命题成立.

例1.5:证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

证:

(1) $|a|<1$,对任意给定的$\varepsilon>0$,要使$|\dfrac{a^n}{n!}-0|<\varepsilon$ 成立,只需

$$|\frac{a^n}{n!}-0|=\frac{|a|^n}{n!}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则知命题成立.

(2) $|a|\geq 1$,对任意给定的$\varepsilon>0$,要使$|\dfrac{a^n}{n!}-0|<\varepsilon$ 成立,只需

$$\begin{aligned}|\frac{a^n}{n!}-0| &= \frac{|a|\times|a|\times\cdots\times|a|}{n\times\cdots\times([|a|]+1)\times[|a|]\times\cdots\times 1}\\ &\leq \frac{|a|^{[|a|]+1}}{n}<\varepsilon,\end{aligned}$$

即$n>\dfrac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon}$, 取$N=[\dfrac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon}]$, 则知命题成立.

- 数列极限的几何意义

- 数列极限的几何意义

任给$\varepsilon > 0$,若在$U(a;\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限个,则称数列$\{a_n\}$收敛于a.

- 数列极限的几何意义

任给$\varepsilon > 0$,若在$U(a;\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限个,则称数列$\{a_n\}$收敛于a.

推论:设$\{a_n\}$为给定的数列,$\{b_n\}$为对$\{a_n\}$增加、减少或改变有限项之后得到的数列,那么$\{b_n\}$和$\{a_n\}$同时收敛或发散,且在收敛时两者的极限相等.

- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,则称$\{a_n\}$ 为无穷小数列.

- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,则称$\{a_n\}$ **为无穷小数列**.数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是$\{a_n - a\}$为无穷小数列.

- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则称$\{a_n\}$ **为无穷小数列**.数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是$\{a_n - a\}$为无穷小数列.

- 若数列$\{a_n\}$满足:对任意正数$M > 0$,总存在正整数N,使得当$n > N$时有

$$|a_n| > M,$$

则称数列$\{a_n\}$发散于**无穷大**,并记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{或} \quad a_n \to \infty.$$

- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则称$\{a_n\}$ **为无穷小数列**.数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是$\{a_n - a\}$为无穷小数列.

- 若数列$\{a_n\}$满足:对任意正数$M > 0$,总存在正整数N,使得当$n > N$时有
$$|a_n| > M,$$
则称数列$\{a_n\}$发散于**无穷大**,并记作
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad 或 \quad a_n \to \infty.$$

- 若数列$\{a_n\}$满足:对任意正数$M > 0$,总存在正整数N,使得当$n > N$时有
$$a_n > M \ \ (或 a_n < -M),$$
则称数列$\{a_n\}$发散于**正(或负)无穷大**,并记作
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \ (或 -\infty), \quad 或 \quad a_n \to +\infty \ \ (或 -\infty).$$

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

(1) 按$\varepsilon-N$定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

(2) 按$\varepsilon-N$定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

(3) 按$\varepsilon-N$定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$

(4) 按$\varepsilon-N$定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-2}{n+\sqrt{n}+1}=0.$

(5) 按$\varepsilon-N$定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-n})=3.$

(6) 按$\varepsilon-N$定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=0.$

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

唯一性:若$\{a_n\}$收敛,则它只有一个极限.

唯一性:若$\{a_n\}$收敛,则它只有一个极限.

证:设a, b为$\{a_n\}$的极限,则对于$\forall\varepsilon > 0$,$\exists N_1$,当$n > N_1$时有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

$\exists N_2$,当$n > N_2$时有

$$|a_n - b| < \varepsilon,$$

所以当$n > \max\{N_1, N_2\}$时,

$$|a - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon,$$

因为ε是任意的,所以$a = b$.

有界性:若$\{a_n\}$收敛,则$\{a_n\}$为有界数列,即存在$M > 0$,使得$|a_n| \leq M, n = 1, 2, \cdots$.

有界性:若$\{a_n\}$收敛,则$\{a_n\}$为有界数列,即存在$M > 0$,使得$|a_n| \le M, n = 1, 2, \cdots$.

证:设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,对于正数$\varepsilon = 1, \exists N$, 当$n > N$ 时有

$$|a_n - a| < 1, \text{即} a - 1 < a_n < a + 1,$$

令$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|, |a - 1|, |a + 1|\}$, 则对一切正整数$n$,都有

$$|a_n| \le M.$$

有界性:若$\{a_n\}$收敛,则$\{a_n\}$为有界数列,即存在$M > 0$,使得$|a_n| \leq M, n = 1, 2, \cdots$.

证:设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,对于正数$\varepsilon = 1, \exists N$, 当$n > N$ 时有

$$|a_n - a| < 1, \text{即} a - 1 < a_n < a + 1,$$

令$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|, |a-1|, |a+1|\}$, 则对一切正整数$n$,都有

$$|a_n| \leq M.$$

注:数列$\{(-1)^n\}$是有界的,但却不收敛.这就说明有界只是数列收敛的必要条件,而不是充分条件.

保号性:设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$,对于任意两个实数$b, c, b < a < c$,则存在$N$,当$n > N$时,$b < a_n < c$.

保号性:设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,对于任意两个实数$b, c, b < a < c$,则存在$N$,当$n > N$时,$b < a_n < c$.

证:取$\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0, \exists N$,当$n > N$ 时,

$$b \le a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \le c,$$

故

$$b < a_n < c.$$

保不等式性:设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为收敛数列,如果存在正整数N_0,当$n > N_0$时,有$a_n \le b_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

保不等式性:设$\{a_n\},\{b_n\}$均为收敛数列,如果存在正整数N_0,当$n>N_0$时,有$a_n\le b_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证:令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.反设$b<a$,取$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}>0$,由保号性知,存在$N>N_0$,当$n>N$时,

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$$b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故$a_n>b_n$,矛盾,命题得证.

保不等式性:设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为收敛数列,如果存在正整数N_0,当$n > N_0$时,有$a_n \le b_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证:令$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.反设$b < a$,取$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$,由保号性知,存在$N > N_0$,当$n > N$时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故$a_n > b_n$,矛盾,命题得证.

注:若条件$a_n \le b_n$改为$a_n < b_n$,也只能得到$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

保不等式性:设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为收敛数列,如果存在正整数N_0,当$n > N_0$时,有$a_n \leq b_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证:令$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.反设$b < a$,取$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$,由保号性知,存在$N > N_0$,当$n > N$时,

$$a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

故$a_n > b_n$,矛盾,命题得证.

注:若条件$a_n \leq b_n$改为$a_n < b_n$,也只能得到$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
例如,虽然$\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$,但$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$.

迫敛性:设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均以a为极限,数列$\{c_n\}$满足存在正整数N_0,当$n > N_0$时,有$a_n \le c_n \le b_n$,则$\{c_n\}$收敛,且

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

迫敛性:设$\{a_n\}$, $\{b_n\}$均以a为极限,数列$\{c_n\}$满足存在正整数N_0,当$n > N_0$时,有$a_n \le c_n \le b_n$,则$\{c_n\}$收敛,且

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

证:由题意,对任意正数ε,分别存在正整数N_1, N_2,使得当$n > N_1$时,

$$a - \varepsilon < a_n,$$

而当$n > N_2$时,

$$b_n < a + \varepsilon.$$

取$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,当$n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon,$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

例2.1:求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

例2.1:求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解:设$b_n=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$,则有

$$n=(1+b_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}b_n^2\ \ (n\geq 2),$$

故

$$1\leq\sqrt[n]{n}=1+b_n\leq 1+\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}})=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例2.2:设$a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

例2.2:设$a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知$a \geq 0$.对于任意的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,当$n > N$时,$|a_n - a| < \varepsilon$,于是

例2.2:设$a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知$a \geq 0$.对于任意的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,当$n > N$时,$|a_n - a| < \varepsilon$,于是

(i) $a = 0$时,有

$$|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}.$$

例2.2:设$a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知$a \geq 0$.对于任意的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,当$n > N$时,$|a_n - a| < \varepsilon$,于是

(i) $a = 0$时,有

$$|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}.$$

(ii) $a > 0$时,有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

例2.2:设$a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证:由极限的保不等式性知$a \geq 0$.对于任意的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,当$n > N$时,$|a_n - a| < \varepsilon$,于是

(i) $a = 0$时,有

$$|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}.$$

(ii) $a > 0$时,有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

例2.3:设$a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例2.3:设$a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证:因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$,根据数列极限的保号性,存在$N$,当$n > N$时,有$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$, 因此有

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1,$$

由迫敛性知命题成立.

例2.4:设$a_1, a_2, \cdots, a_m$为m个正数,证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

例2.4:设$a_1, a_2, \cdots, a_m$为m个正数,证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证:设$a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$,那么

$$a \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m}a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m}a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

根据迫敛性知命题成立.

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n \to \infty$,$a_n \to a$,$b_n \to b$,则有

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n \to \infty$,$a_n \to a$,$b_n \to b$,则有

- $a_n \pm b_n \to a \pm b$;

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n \to \infty$,$a_n \to a$,$b_n \to b$,则有

- $a_n \pm b_n \to a \pm b$;
- $a_n b_n \to ab$;

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n \to \infty$,$a_n \to a$,$b_n \to b$,则有

- $a_n \pm b_n \to a \pm b$;
- $a_n b_n \to ab$;
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$(当$b \neq 0$).

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n \to \infty$,$a_n \to a$,$b_n \to b$,则有

- $a_n \pm b_n \to a \pm b$;
- $a_n b_n \to ab$;
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$(当$b \neq 0$).

例2.5:计算$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n \to \infty$,$a_n \to a$,$b_n \to b$,则有

- $a_n \pm b_n \to a \pm b$;
- $a_n b_n \to ab$;
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$(当$b \neq 0$).

例2.5:计算$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0.$$

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n\to\infty$,$a_n\to a$,$b_n\to b$,则有

- $a_n\pm b_n\to a\pm b$;
- $a_nb_n\to ab$;
- $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$(当$b\neq 0$).

例2.5:计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解: 这是错误的做法!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0.$$

收敛数列可以进行四则运算,并有以下性质:

若当$n \to \infty$,$a_n \to a$,$b_n \to b$,则有

- $a_n \pm b_n \to a \pm b$;
- $a_n b_n \to ab$;
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$(当$b \neq 0$).

例2.5:计算$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解: 正确的做法应该是这样,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

例2.6:求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0},$$

其中$a_m b_k \neq 0$.

例2.6:求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0},$$

其中$a_m b_k\neq 0$.

解:

(i) $m>k$,

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^{m-k}+\cdots+a_k+a_{k-1}/n+\cdots+a_0/n^k}{b_k+b_{k-1}/n+\cdots+b_0/n^k}\\ &= \infty.\end{aligned}$$

(ii) $m = k$,

$$\text{原极限} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_m + a_{m-1}/n + \cdots + a_0/n^k}{b_k + b_{k-1}/n + \cdots + b_0/n^k} = \frac{a_m}{b_k}.$$

(iii) $m < k$,此时由(1)知,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0} = \infty,$$

故原极限为0.

例2.7:求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\neq-1)$.

例2.7:求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\neq -1)$.

解:

例2.7:求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\neq -1)$.

解:

(i) $|a|<1, \lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$,所以原极限为0.

例2.7:求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\neq-1)$.

解:

(i) $|a|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$,所以原极限为0.

(ii) $a=1$,原极限为$\dfrac{1}{2}$.

例2.7:求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}(a\neq-1)$.

解:

(i) $|a|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$,所以原极限为0.

(ii) $a=1$,原极限为$\frac{1}{2}$.

(iii) $|a|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$,所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/a^n+1}=1.$$

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为N^+的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为$\{a_n\}$的**子列**,简记为$\{a_{n_k}\}$

设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为N^+的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为$\{a_n\}$的**子列**,简记为$\{a_{n_k}\}$

注:总有$n_k \geq k$.

设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为N^+的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为$\{a_n\}$的**子列**,简记为$\{a_{n_k}\}$

注:总有$n_k \geq k$.

原数列收敛,则其子列也收敛,且收敛到同一个极限.

设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为N^+的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为$\{a_n\}$的**子列**,简记为$\{a_{n_k}\}$

注:总有$n_k \geq k$.

原数列收敛,则其子列也收敛,且收敛到同一个极限.

注:若某数列的两个子列收敛于不同的值,则该数列必发散.

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

(1) 证明数列$\{a_n=\cos\frac{n\pi}{2}\}$没有极限.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=?$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)})=?$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}((\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}))=?$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}})=?$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=?.$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=?.$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=?$

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题

2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题

3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题

4.各节参考答案

$\boxed{\text{单调有界数列必有极限.}}$

$\boxed{\text{单调有界数列必有极限.}}$

证:不妨设$\{a_n\}$单调递增,则有上界.由确界定理,存在

$$\sup\{a_n\} = \xi.$$

由上确界的定义,对于任意的$\varepsilon > 0$,存在a_{n_0},使得$a_{n_0} > \xi - \varepsilon$.故当$n > n_0$ 时,

$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le \xi < \xi + \varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$.

单调有界数列必有极限.

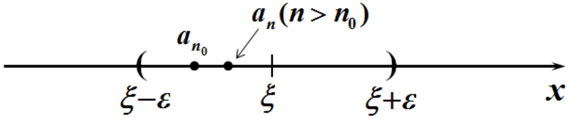
证:不妨设$\{a_n\}$单调递增,则有上界.由确界定理,存在

$$\sup\{a_n\} = \xi.$$

由上确界的定义,对于任意的$\varepsilon > 0$,存在a_{n_0},使得$a_{n_0} > \xi - \varepsilon$.故当$n > n_0$ 时,

$$\xi - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi < \xi + \varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$.



例3.1:设$a_1 = \sqrt{2}, \cdots, a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}, \cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

例3.1:设$a_1=\sqrt{2},\cdots,a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n},\cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解:因为

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \sqrt{2+a_n}-\sqrt{2+a_{n-1}} \\
&= \frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n}+\sqrt{2+a_{n-1}}} \\
&= \frac{a_2-a_1}{\prod\limits_{k=2}^{n}(\sqrt{2+a_k}+\sqrt{2+a_{k-1}})} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

所以,数列$\{a_n\}$是单调递增的.

又由上式知

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + \frac{a_2 - a_1}{\prod_{k=2}^{n}(\sqrt{2+a_k} + \sqrt{2+a_{k-1}})} \\
&\le a_n + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^{n-1}} \\
&\le a_n + \frac{1}{(2\sqrt{2})^{n-1}} \\
&\le a_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2\sqrt{2})^{k}} \\
&< a_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\sqrt{2})^{k}} = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}},
\end{aligned}
$$

所以,数列$\{a_n\}$是有界的.

综上所述,极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在,于是由

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

知

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n},$$

即

$$A = \sqrt{2+A},$$

解得$A=-1$或$A=2$,舍去负根有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

例3.2:请找出下面叙述中的错误之处.

"设$a_n = 2^n, n = 1, 2, \cdots$,则

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n.$$

显然有$a_n > 0$, 所以$\{a_n\}$递增.设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,从而有

$$A = 2A,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = 0$."

例3.2:请找出下面叙述中的错误之处.
"设$a_n = 2^n, n = 1, 2, \cdots$,则

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n.$$

显然有$a_n > 0$, 所以$\{a_n\}$递增.设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,从而有

$$A = 2A,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = 0$."

解:$\{a_n\}$不是有界数列,**单调**和**有界**两个条件缺一不可.

例3.3:证明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在.

例3.3:证明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在.

证:设$b>a>0, n\in N^+$,则由

$$\begin{aligned} b^{n+1}-a^{n+1} &= (b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+ba^{n-1}+a^n) \\ &< (n+1)b^n(b-a) \end{aligned}$$

得到不等式

$$a^{n+1}>b^n((n+1)a-nb). \qquad (1)$$

以$b=1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{n+1}=a$代入(1)式,于是

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^n,$$

由此可知数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$是递增的.

再以$b=1+\frac{1}{2n}>1=a$ 代入(1)式,于是

$$1>(1+\frac{1}{2n})^n\cdot\frac{1}{2}$$

即

$$(1+\frac{1}{2n})^{2n}<4,$$

所以可知数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$是有界的.综上所述,知命题成立.

再以$b=1+\frac{1}{2n}>1=a$ 代入(1)式,于是

$$1>(1+\frac{1}{2n})^n\cdot\frac{1}{2}$$

即

$$(1+\frac{1}{2n})^{2n}<4,$$

所以可知数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$是有界的.综上所述,知命题成立.

注:数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$的极限是无理数e.即$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

记忆要点:

记忆要点:

- 求$\spadesuit^{\heartsuit}$类型的极限,当$\spadesuit \to 1, \heartsuit \to \infty$ 时该极限均为e的? 次方;

记忆要点:

- 求$\spadesuit^{\heartsuit}$类型的极限,当$\spadesuit \to 1, \heartsuit \to \infty$ 时该极限均为e的? 次方;
- ?等于$(\spadesuit - 1)\heartsuit$的极限.

记忆要点:

- 求$\spadesuit^{\heartsuit}$类型的极限,当$\spadesuit \to 1, \heartsuit \to \infty$ 时该极限均为e的? 次方;
- ?等于$(\spadesuit - 1)\heartsuit$的极限.

请口算如下极限:

记忆要点:

- 求$\spadesuit^{\heartsuit}$类型的极限,当$\spadesuit \to 1, \heartsuit \to \infty$ 时该极限均为e的? 次方;
- ?等于$(\spadesuit - 1)\heartsuit$的极限.

请口算如下极限:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{2n} = e^4$

记忆要点:

- 求$\spadesuit^{\heartsuit}$类型的极限,当$\spadesuit \to 1, \heartsuit \to \infty$ 时该极限均为e的? 次方;
- ?等于$(\spadesuit - 1)\heartsuit$的极限.

请口算如下极限:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{2n} = e^4$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n} = e^{-1}$

记忆要点:

- 求$\spadesuit^{\heartsuit}$类型的极限,当$\spadesuit \to 1, \heartsuit \to \infty$ 时该极限均为e的? 次方;
- ?等于$(\spadesuit - 1)\heartsuit$的极限.

请口算如下极限:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{2n} = e^4$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n} = e^{-1}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{\frac{n}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

$\boxed{\text{有界数列必有收敛的子列.}}$

$\boxed{\text{有界数列必有收敛的子列.}}$

证:先证数列必有单调子列.设数列为$\{a_n\}$,

$\boxed{\text{有界数列必有收敛的子列.}}$

证:先证数列必有单调子列.设数列为$\{a_n\}$,

(i) 如果$\{a_n\}$有某个子列$\{a_{n_k}\}$,该子列没有最大值.则该子列必有某个单调递增的子列.

$\boxed{\text{有界数列必有收敛的子列.}}$

证:先证数列必有单调子列.设数列为$\{a_n\}$,

(i) 如果$\{a_n\}$有某个子列$\{a_{n_k}\}$,该子列没有最大值.则该子列必有某个单调递增的子列.

(ii) 如果不存在这样的子列$\{a_{n_k}\}$,即$\{a_n\}$ 的任意子列都有最大值,则此时一定可以找到一个单调递减的子列.

有界数列必有收敛的子列.

证:先证数列必有单调子列.设数列为$\{a_n\}$,

(i) 如果$\{a_n\}$有某个子列$\{a_{n_k}\}$,该子列没有最大值.则该子列必有某个单调递增的子列.

(ii) 如果不存在这样的子列$\{a_{n_k}\}$,即$\{a_n\}$ 的任意子列都有最大值,则此时一定可以找到一个单调递减的子列.

其次,又因为数列本身有界,所以有界数列必有收敛的子列.

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,使得当$n, m > N$时有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon;$$

或对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N, 使得当$n > N$,及任一$p \in N^+$,有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,使得当$n, m > N$时有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon;$$

或对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N, 使得当$n > N$,及任一$p \in N^+$,有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

注1:柯西收敛准则的条件称为**柯西条件**,它反映这样的事实—-收敛数列各项的值愈到后面,彼此愈接近,以至于充分后面的任何两项之差的绝对值可以小于预先给定的任意小正数.或者形象地说,收敛数列的各项越到后面越是"挤"在一起.

数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,使得当$n, m > N$时有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon;$$

或对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N, 使得当$n > N$,及任一$p \in N^+$,有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

注2:柯西收敛准则从理论上完全解决了数列极限的存在性问题.它把数列极限"$\varepsilon - N$"定义中a_n与a的差换成了a_n与a_m之差.其好处在于无需借助数列以外的数a,只要根据数列本身的特征就可以鉴别其敛散性.

数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,使得当$n, m > N$时有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon;$$

或对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N, 使得当$n > N$,及任一$p \in N^+$,有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

注3:数列$\{a_n\}$发散的充分必要条件是:存在$\varepsilon_0 > 0$,对任意的正整数N,都可以找到$n, m > N$,使得

$$|a_n - a_m| \geq \varepsilon_0;$$

或都可以找到$n > N$,及$p \in N^+$, 有

$$|a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon_0.$$

例3.4:设$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

例3.4:设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

证:不妨设$n>m$,则

$$\begin{aligned}
& |a_n-a_m| \\
= & \frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \\
< & \frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} \\
= & (\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1})+(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) \\
= & \frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m},
\end{aligned}$$

对任给的$\varepsilon>0$,存在$N=\frac{1}{\varepsilon}$,对一切$n>m>N$有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon,$$

由柯西收敛准则知数列$\{a_n\}$收敛.

例3.5:设$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$,证明数列$\{a_n\}$发散.

例3.5:设$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$,证明数列$\{a_n\}$发散.

证:存在$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$,对任意的正整数$N$,任取$n > N$,及$p = n$,则有

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&> n \cdot \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= \varepsilon_0,
\end{aligned}
$$

由柯西收敛准则知该数列发散.

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3\sqrt{n}})^{\sqrt{n+1}}=?$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+2)-\ln(n+3))=?$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\ln(n^2+2)-\ln(n^2+5))=?$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3-2n^2+4n}{4n-2n^2+1})^{n^2+1}=?$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=?$

(6) 设数列$\{a_n\}$满足$a_0>0, a_1=\frac{a_0}{2+a_0}, a_n=\frac{a_{n-1}}{2+a_{n-1}}$，证明该数列有极限.

(7) 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}, a_n=\frac{1}{2}+\frac{a_{n-1}^2}{2}$，证明该数列有极限.

(8) 已知$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=5$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-3b_n)=-1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$的值.

1.数列极限的概念
(1)数列
(2)数列极限
(3)无穷小和无穷大数列
(4)课后习题
2.收敛数列的性质
(1)基本性质
(2)四则运算
(3)子列的敛散性
(4)课后习题
3.数列极限存在的条件
(1)单调有界定理
(2)致密性定理
(3)柯西收敛准则
(4)课后习题
4.各节参考答案

数列极限的概念

(1)提示:$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|\le\frac{1}{n}$.　　(2)提示:$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$.

(3)提示:$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{2n^2}<\frac{a^2}{n}$.

(4)提示:$\left|\frac{\sqrt{n}-2}{n+\sqrt{n}+1}-0\right|<\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}+1}<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(5)提示:

$$
\begin{aligned}
& \left|\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-n}-3\right| \\
= & \left|\frac{6n+1}{\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-n}}-3\right| \\
= & 3\frac{\left|\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-1}-2n-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{n^2+5n+1}+\sqrt{n^2-1}} \\
\le & 3\frac{\left|\sqrt{n^2+5n+1}-n\right|+\left|\sqrt{n^2-1}-n\right|+\frac{1}{3}}{2n-1}
\end{aligned}
$$

$$= \quad 3\frac{\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{3}}{2n-1} < \frac{13}{2n-1} < \frac{13}{n}.$$

(6)提示:$|\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}-0| = \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} <$ $\dfrac{1}{3n^{\frac{2}{3}}} < \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$

收敛数列的性质

(1)提示:$a_{2k+1} = \cos(k\pi + \dfrac{\pi}{2}) = 0$, 而$a_{2k} = \cos k\pi \neq 0$.

(2)1. (3)$\dfrac{1}{4}$. (4)$\dfrac{3}{2}$. (5)0. (6)0. (7)0. (8)1.

数列极限存在的条件

(1)$e^{-\frac{1}{3}}$. (2)-1. (3)-3. (4)e^{-1}. (5)1.

(6)提示:证明a_n单调递减有下界.

(7)提示:证明a_n单调递增有上界.

(8)2.