第六章 平稳随机过程

6.1 平稳随机过程的概念

6.2 联合平稳过程及相关函数的性质

6.3 随机分析

6.4 平稳过程的各态历经性

一、随机过程的（统计）数字特征

复习

1. 一个随机过程的（统计）数字特征

定义 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，

1.均值函数 $m_X(t)=EX(t), t\in T$

2.若对$\forall t\in T, EX^2(t)$存在，则称该过程为二阶矩过程。

3.方差函数 $D_X(t)=E[(X(t)-EX(t))^2]$， $t\in T$

4.协方差函数

$$B_X(s,t)=E[(X(s)-EX(s))(X(t)-EX(t))] \quad s,t\in T$$

5.相关函数 $R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$， $s,t\in T$

随机过程数字特征之间的关系

$$\boldsymbol{B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)},\quad \boldsymbol{s,t\in T}$$

当$s=t$时，$\mathrm{EX}^2(t)=R_X[t,t]$

$$D_X(t)=\sigma_X^2(t)=B_X(t,t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)$$

最主要的数字特征

$$m_X(t)=E[X(t)]$$ **均值函数**

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$ **自相关函数**

2. 两个随机过程的（统计）数字特征

设$\{X(t), \ t\in T\}$，$\{Y(t), \ t\in T\}$是两个随机过程，二阶矩函数存在，定义

- 二阶矩过程　一、二阶矩函数存在

- 互协方差函数

$$B_{XY}(s,t)=E[(X(s)-EX(s))(Y(t)-EY(t))]$$

$$s,t\in T$$

- 互相关函数

$$R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)], \quad s,t\in T$$

☆ 显然有关系式

$$B_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t), \quad s,t\in T$$

6.1 平稳随机过程的概念

定义: 设$\{X(t),\ t\in T\}$是随机过程，对任意常数τ和正整数n,

$$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T,\ t_1+\tau,\ t_2+\tau,\ldots,t_n+\tau\in T,$$

若$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$与

$$(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau),\ldots, X(t_n+\tau))$$

有相同的联合分布，

则称$\{X(t),\ t\in T\}$为严平稳过程，也称狭义平稳过程。

严平稳过程的均值、均方差和方差均为常数

定义： 设$\{X(t),\ t\in T\}$是随机过程，并满足：

(1)$\{X(t),\ t\in T\}$是二阶矩过程；

(2)对任意$t\in T$，$m_X(t)=EX(t)=$常数；（均值平稳）

(3)对任意$s, t\in T$，$R_X(s, t)=E[X(s)X(t)]=R_X(t-s)$，

（相关函数平稳）

则称$\{X(t),\ t\in T\}$为宽平稳过程，

也称广义平稳过程，简称平稳过程。

若T为离散集，称平稳过程$\{X_n,\ n\in T\}$为平稳序列。

- 广义平稳过程 $\not\Longrightarrow$ 严平稳过程
- 严平稳过程 $\xRightarrow{\text{二阶矩存在}}$ 广义平稳过程
- 严平稳过程 $\xLeftrightarrow{\text{正态过程}}$ 广义平稳过程

例6.1

- 设$\{X_n, n=0, \pm1, \pm2,\ldots\}$是实的互不相关随机变量序列，且 $E[X_n]=0$，$D[X_n]=\sigma^2$，
- 试讨论该随机序列的平稳性。

解 (1)二阶矩过程。(2) $E[Xn]$为常数。

(3)相关函数

因为$E[Xn]=0$，对$\forall k,m\in Z$，

$k\neq m$时，X_kX_m不相关，即

$E[X_kX_m]=EX_k\bullet EX_m=0$

$k=m$时，$E[X_kX_m]=\sigma^2$

$$\therefore R_X(k,m)=E[X_kX_m]$$

$$=\begin{cases}\sigma^2, & m=k\\ 0, & m\neq k\end{cases}$$ 与k无关。

所以，$\{X_n, n=0, \pm1, \pm2,\ldots\}$是宽平稳随机序列。

例6.2 设$X(t)=Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)$, $t>0$, θ是常数.且Y, Z相互独立, $EY=EZ=0$, $DY=DZ=\sigma^2$，证$\{X(t), t>0\}$的平稳性.

解:

$$m_X(t)=EX(t)=E[Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)]$$

二阶矩存在。

$$=\cos(\theta t)EY+\sin(\theta t)EZ=0$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[(Y\cos(\theta s)+Z\sin(\theta s))(Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t))]$$

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)E(Y^2)+\sin\theta(s+t)E(YZ)+\sin(\theta s)\sin(\theta t)E(Z^2)$$

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)DY+\sin\theta(s+t)EYEZ+\sin(\theta s)\sin(\theta t)DZ$$

$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)\sigma^2+\sin(\theta s)\sin(\theta t)\sigma^2$$

$$=\sigma^2\cos[(t-s)\theta]=\sigma^2\cos[\tau\theta]$$

所以$\{X(t), t\in T\}$为宽平稳过程。

• 6.2 联合平稳过程及相关函数的性质

一、联合平稳过程

定义6.4 设$\{X(t),\ t\in T\}$和$\{Y(t),\ t\in T\}$是两个平稳过程，若它们的互相关函数$E[X(t)Y(t-\tau)]$及$E[Y(t)X(t-\tau)]$仅与τ有关，而与t无关，即

$$R_{XY}(t,t-\tau)=E[X(t)Y(t-\tau)]=R_{XY}(\tau)$$
$$R_{YX}(t,t-\tau)=E[Y(t)X(t-\tau)]=R_{YX}(\tau)$$

则称$X(t)$和$Y(t)$是联合平稳随机过程。

可以直接用以下结论:

若$X(t)$和$Y(t)$是联合平稳随机过程时，则

$W(t)=X(t)+Y(t)$是平稳随机过程。

二、平稳过程的相关函数的性质 1. 自相关函数的性质

实际计算相关函数时，只计算时间增量非负时的值即可！

性质1 $R_X(0)=R_X(t,t)=E\left(\left(X(t)\right)^2\right)\geq 0$

性质2（对称性） $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$

性质3 关于自相关函数有不等式：$\left|R_X(\tau)\right|\leq R_X(0)$

性质4 周期平稳过程的自相关函数必是同周期的周期函数。

定义 若平稳过程$\{X(t),t\in T\}$满足条件$P\{X(t+T_0)=X(t)\}=1$

则称$\{X(t),t\in T\}$为周期是T_0的平稳过程。

二、相关函数的性质

2. 联合平稳过程的互自相关函数的性质

若$X(t), Y(t)$是实联合平稳过程，则

性质1　$\left|R_{XY}(\tau)\right|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$

性质2　$R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$

- **例6.3**　设$X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$，$Y(t)=B\sin(\omega t+\Theta-\varphi)$为两个平稳过程，其中$A,B,\omega$是常数，
  Θ是$(0,2\pi)$上的均匀分布随机变量，
  求：$R_{XY}(\tau)$和$R_{XY}(\tau)$

$$R_{XY}(t,t-\tau)=E[X(t)Y(t-\tau)]$$

$$=E[A\sin(\omega t+\Theta)B\sin(\omega t-\omega\tau+\Theta-\varphi)]$$

$$=\int_0^{2\pi}AB\sin(\omega t+\theta)\sin(\omega t-\omega\tau+\theta-\varphi)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(\omega\tau+\varphi)$$

$$-\cos(2\omega t-\omega\tau+2\theta-\varphi)]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}AB\cos(\omega\tau+\varphi)=R_{XY}(\tau)$$

$$R_{YX}(t,t-\tau)=E[Y(t)X(t-\tau)]$$

$$=E[B\sin(\omega t+\Theta-\varphi)A\sin(\omega t-\omega\tau+\Theta)]$$

$$=\int_0^{2\pi}AB\sin(\omega t+\theta-\varphi)\sin(\omega t-\omega\tau+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(\omega\tau-\varphi)$$

$$-\cos(2\omega t-\omega\tau+2\theta-\varphi)]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}AB\cos(\omega\tau-\varphi)=R_{YX}(\tau)$$

所以$X(t)$和$Y(t)$是联合平稳随机过程。

6.3 随机分析简介

- 微积分中普通函数的连续、导数和积分等概念推广到随机过程的连续、导数和积分上，即随机分析。

二、均方连续

1. 连续性概念

定义6.6 设有二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$，　若对每一个$t\in T$，有

$$\lim_{h\to 0} E\left[| X(t+h)-X(t) |^2\right]=0$$

则称$X(t)$在t点均方连续，记作:

$$\operatorname*{l.i.m}_{h\to 0} X(t+h)=X(t)$$

若对T中的一切点都均方连续，则称$X(t)$在T上均方连续。

2. 连续性的性质与判断

- $$E\left[|X(t+h)-X(t)|^2\right]=R_X(t+h,t+h)-R_X(t,t+h)-R_X(t+h,t)+R_X(t,t)$$

定理6.4（均方连续准则）

二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$，在t点均方连续的充要条件为相关函数$R_X(t_1,t_2)$在点(t,t)处连续。

推论 若相关函数$R_X(t_1,t_2)$在$\{(t,t)，t\in T\}$上连续，则它在$T\times T$上连续。

6.4 平稳过程的各态历经性

一、概念

定义6.9　设平稳过程{*X*(*t*), −∞<*t*<∞}，若有

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$

则分别称其为平稳过程的时间均值和时间相关函数。分别用以下符号表示:

$$\langle X(t)\rangle \qquad \langle X(t)X(t+\tau)\rangle$$

定义6.10 设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 是均方连续的平稳过程，

若 $$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt \overset{\mathrm{Pr}.1}{=} E[X(t)] = m_X$$

则称平稳过程的均值具有各态历经性；

若 $$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt \overset{\mathrm{Pr}.1}{=} R_X(\tau)$$

则称平稳过程的相关函数具有各态历经性。

以上定义中的“ $\overset{\mathrm{Pr}.1}{=}$ ”表示“以概率1成立”。

定义6.11 若{$X(t)$, $-\infty<t<\infty$}的均值和相关函数都具有各态历经性，则称该平稳过程具有各态历经性或遍历性。

应用：具有遍历性的平稳过程，可以用一个样本的"时间平均"和"时间相关"作为过程的"统计平均"和"统计相关"近似。

可推广到两个随机过程的联合各态历经性:

定义 设$X(t)$、$Y(t)$各自都具有各态历经性，且

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)Y(t+\tau)dt\overset{\mathrm{Pr.1}}{=}E\left(X(t)Y(t+\tau)\right)=R_{XY}(\tau)$$

则称X(t)、Y(t)为联合各态历经过程。

说明

- 当随机过程各态历经时，我们可以用一个样本函数的时间均值及时间相关函数分别作为该随机过程的均值、相关函数的近似。

小结、说明

1. 平稳过程、联合平稳过程概念

2. 平稳过程的相关函数的性质

3. 平稳过程的各态历经性