第四章 导数和微分

陈 颖

北京电子科技学院基础部

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

变速直线运动的瞬时速度:

变速直线运动的瞬时速度:

变速直线运动中设质点运动位置的函数为

$$s = f(t),$$

变速直线运动的瞬时速度:

变速直线运动中设质点运动位置的函数为

$$s = f(t),$$

则t_0到t的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

变速直线运动的瞬时速度:

变速直线运动中设质点运动位置的函数为

$$s = f(t),$$

则t_0到t的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

因此在t_0时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

变速直线运动的瞬时速度:

变速直线运动中设质点运动位置的函数为

$$s = f(t),$$

则t_0到t的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

因此在t_0时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

$\boxed{\text{所求量为函数增量与自变量增量之比的极限.}}$

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

存在,则称函数$f(x)$在点x_0处**可导**,并称此极限为$y=f(x)$在点x_0处的**导数**,记作$f'(x_0)$.

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

存在,则称函数$f(x)$在点x_0处**可导**,并称此极限为$y=f(x)$在点x_0处的**导数**,记作$f'(x_0)$.

若这个极限不存在,则称函数在点x_0处**不可导**.

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

存在,则称函数$f(x)$在点x_0处**可导**,并称此极限为$y=f(x)$在点x_0处的**导数**,记作$f'(x_0)$.

若这个极限不存在,则称函数在点x_0处**不可导**.

若函数在开区间I内每点都可导,就称函数在I内可导,此时导数值构成的新函数称为**导函数**,记作$f'(x)$.

常用函数的导数

函数名称	原函数解析式	导函数解析式
常数函数	$y = c$	$y' = 0$
幂函数	$y = x^n$(n为正整数)	$y' = nx^{n-1}$
正弦函数	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
余弦函数	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
对数函数	$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$

例1.1:设$f'(x_0)$存在,求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.

例1.1:设$f'(x_0)$存在,求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.

解:原式$=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{(-h)}=-f'(x_0)$.

例1.1:设$f'(x_0)$存在,求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.

解:原式$=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{(-h)}=-f'(x_0)$.

例1.2:设$f(0)=0, f'(0)=k_0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

例1.1:设$f'(x_0)$存在,求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.

解:原式$=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{(-h)}=-f'(x_0)$.

例1.2:设$f(0)=0, f'(0)=k_0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=k_0$.

例1.3:若$x \in (-\delta, \delta)$时,恒有$|f(x)| \leq x^2$,那么$f(x)$在$x = 0$处是否可导,如果可导请求出其导数.

例1.3:若$x \in (-\delta, \delta)$时,恒有$|f(x)| \leq x^2$,那么$f(x)$在$x = 0$处是否可导,如果可导请求出其导数.

解:由题意$f(0) = 0$,而

$$0 \leq \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leq |x|,$$

由两边夹定理知

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

故$f(x)$在$x = 0$处可导,且$f'(0) = 0$.

例1.4:设$f(x)$在$x=0$处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,证明$f(x)$在$x=0$处可导.

例1.4:设$f(x)$在$x=0$处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,证明$f(x)$在$x=0$处可导.

证:因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

又$f(x)$在$x=0$处连续,故$f(0)=0$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

即$f(x)$ 在$x=0$处可导.

例1.5:已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 求$f'(1)$.

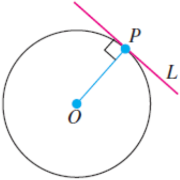
例1.5:已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 求$f'(1)$.

解:因为

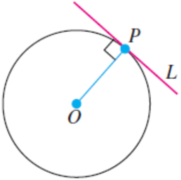
$$\begin{aligned}
-1 &= \lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-2x} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)} \\
&= \frac{1}{2}f'(1)
\end{aligned}$$

所以$f'(1)=-2$.

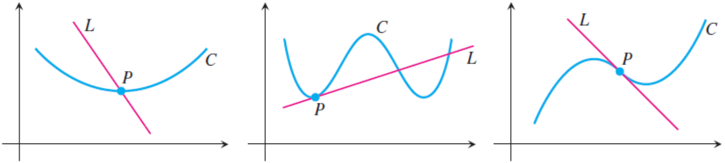
圆的切线



圆的切线

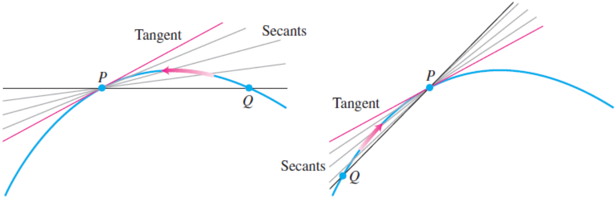


下面三个图中,直线L是否为一般曲线C 的切线?

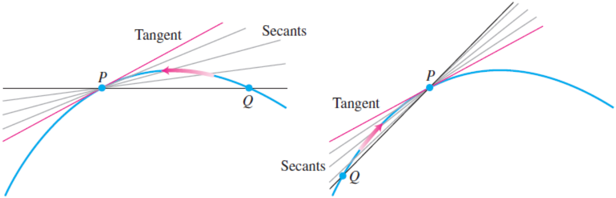


切线是如何定义的?

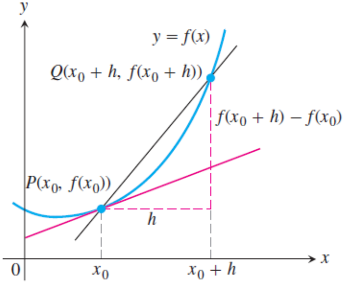
切线是如何定义的?



切线是如何定义的?

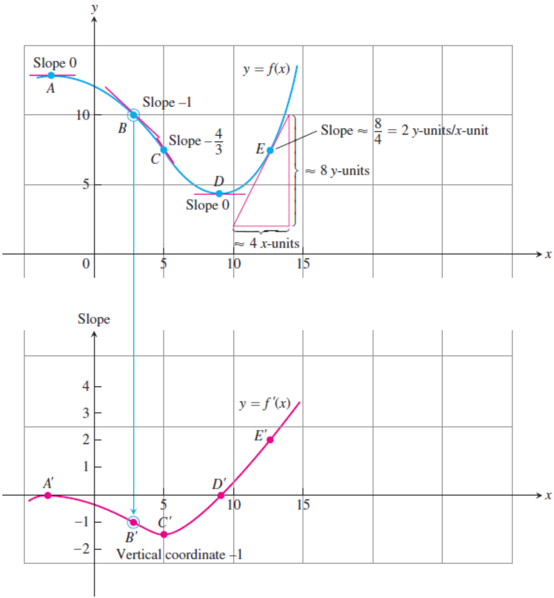


切线的斜率

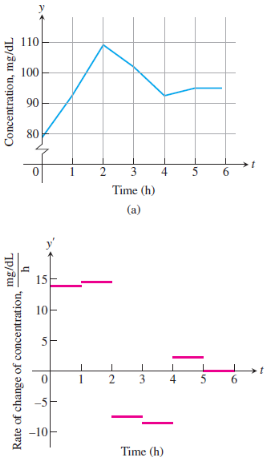


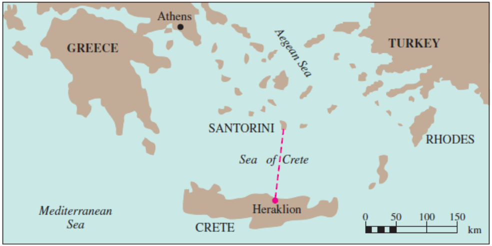
$$\text{斜率} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

原函数与导函数的图形比较(I)



原函数与导函数的图形比较(II)





Daedalus's flight path on April 23, 1988

例1.6:曲线$y=x^2$哪一点处的切线与直线$y=3x-1$平行?写出其切线方程.

例1.6:曲线$y=x^2$哪一点处的切线与直线$y=3x-1$平行?写出其切线方程.

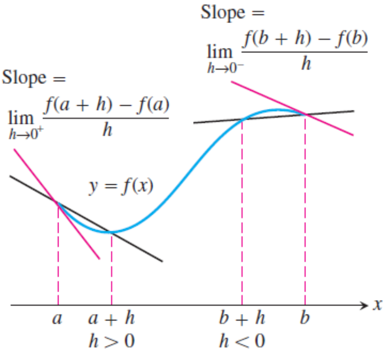
解:$y'=2x$,令$2x=3$,解得$x=\frac{3}{2}$.则在点$(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$处与直线$y=3x-1$平行的切线方程为

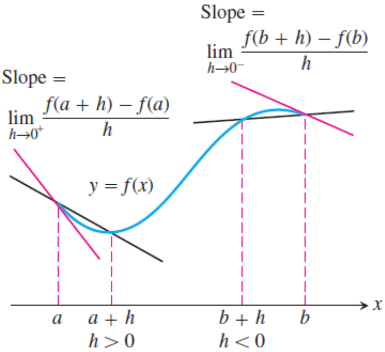
$$y-\frac{9}{4}=3(x-\frac{3}{2}),$$

整理即为

$$12x-4y-9=0.$$

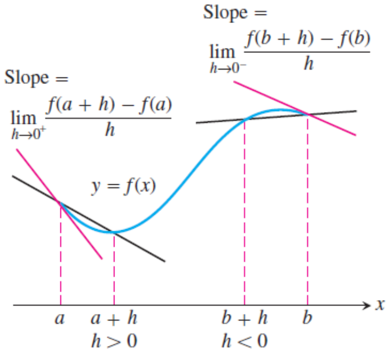
1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案


Slope = $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$
Slope = $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$y=f(x)$
x
a
$a+h$
$h>0$
$b+h$
b
$h<0$



$$f'_+(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

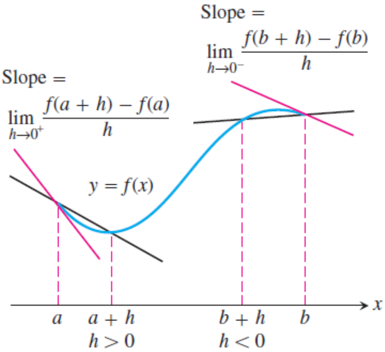
$$f'_-(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$



$$f'_+(x_0) = \lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

单点可导的充要条件是单侧导数存在且左导数等于右导数



$$f'_+(x_0) = \lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

单点可导的充要条件是单侧导数存在且左导数等于右导数

开区间可导指的是区间内每点可导,左端点存在右导数,右端点存在左导数.

例1.7:设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ ax, & x\ge 0\end{cases}$,问$a$取何值时,$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 都存在,并求出$f'(x)$.

例1.7:设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ ax, & x\geq 0\end{cases}$,问$a$取何值时,$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 都存在,并求出$f'(x)$.

解:在$x=0$,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

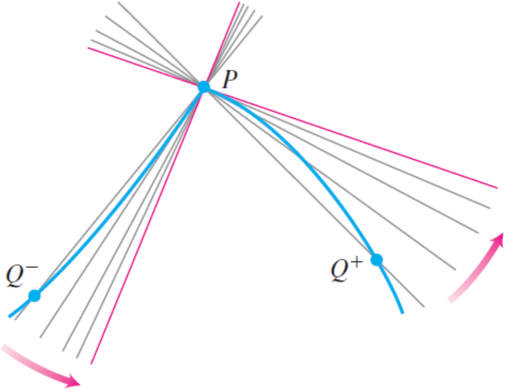
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}a=a,$$

故$a=1$,此时求得

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}.$$

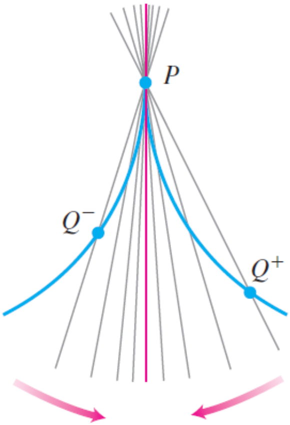
1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

- 角点



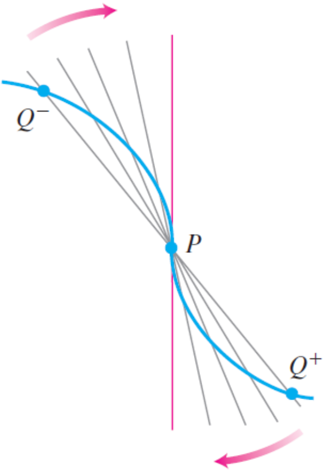
$\boxed{\text{左右导数存在但不等}}$

- 尖点



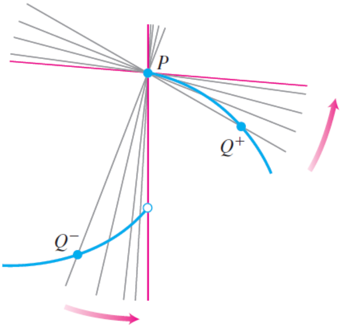
左右导数一个是负无穷一个是正无穷

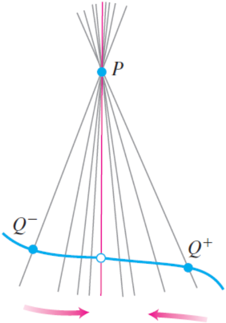
- 垂直的切线



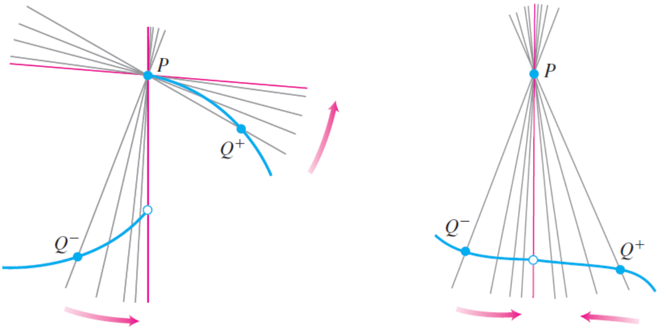
$\boxed{\text{左右导数均是负无穷或均是正无穷}}$

▶ 间断点



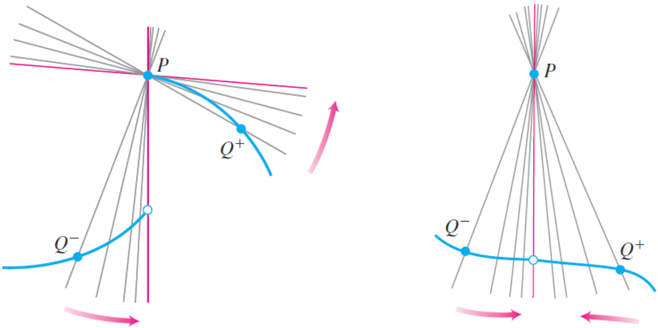


- 间断点



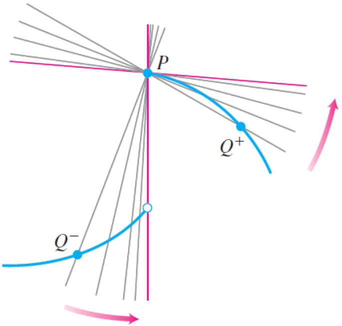
$\boxed{\text{可导必连续}}$

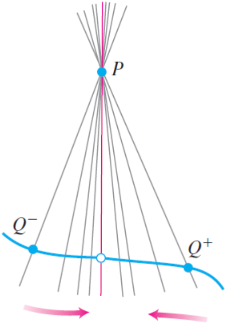
- 间断点



可导必连续 不连续必不可导

▶ 间断点





可导必连续 | 不连续必不可导 | 连续未必可导

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

(1) 曲线$y=x^3$在点A处的切线的斜率为3, 求该曲线在点A处的切线方程.

(2) 在抛物线$y=x^2$上依次取$M(1,1),N(3,9)$ 两点,作过这两点的割线,那么抛物线上哪一点处的切线平行于这条割线,并求这条切线的方程.

(3) 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1) & x\leq 1\\ \frac{1}{2}(x+1) & x>1\end{cases}$,判断$f(x)$在$x=1$处是否可导.

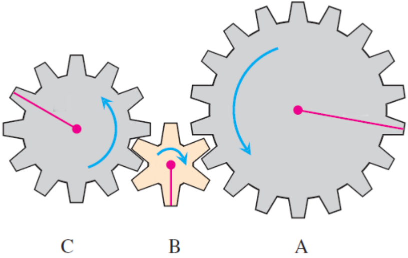
(4) 设函数$f(x)$在$x=1$处连续,且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$,求$f'(1)$.

(5) 设函数$f(x)$是定义在R上的函数,且对任何$x_1,x_2\in R$,都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$,若$f(0)\neq 0,f'(0)=1$,证明:对任何$x\in R$都有$f(x)=f'(x)$.

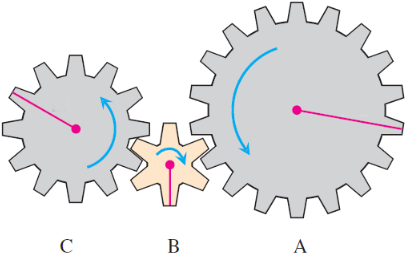
1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

齿轮问题:如下图,齿轮B转三圈,齿轮A才转一圈,而齿轮C转一圈,齿轮B 转两圈.那么为了使得齿轮A转一圈,齿轮C得转几圈?



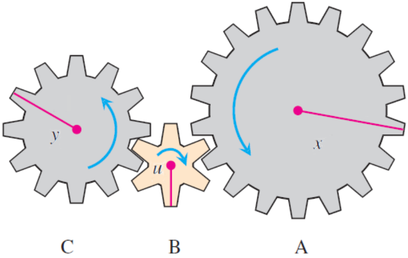
齿轮问题:如下图,齿轮B转三圈,齿轮A才转一圈,而齿轮C转一圈,齿轮B 转两圈.那么为了使得齿轮A转一圈,齿轮C得转几圈?



解:$\dfrac{3}{2}$圈.

例2.1:求$y=\cos x^2$的导数y'.

例2.1:求$y = \cos x^2$的导数y'.



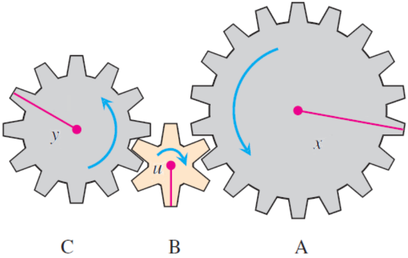
分析:分别将A, B, C看成是x, u, y三个变量.有如下关系

B和A	$u = x^2$
C和B	$y = \cos u$
C和A	$y = \cos x^2$

那么y对x的导数等于y对u的导数乘上u对y的导数,即

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (-\sin u) \cdot (2x) = -2x \sin x^2.$$

例2.1:求$y=\cos x^2$的导数y'.



分析:分别将A, B, C看成是x, u, y三个变量.有如下关系

B和A	$u=x^2$
C和B	$y=\cos u$
C和A	$y=\cos x^2$

那么y对x的导数等于y对u的导数乘上u对y的导数,即

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(-\sin u)\cdot(2x)=-2x\sin x^2.$$

这就是复合函数求导的**链条法则**.

例2.2:求$y=\sin(\cos x^3)$的导数y'.

例2.2:求$y=\sin(\cos x^3)$的导数y'.

解:令$v=x^3$,$u=\cos v$,那么$y=\sin u$,由链条法则知

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=\cos u\cdot(-\sin v)\cdot(3x^2)=-3x^2\sin x^3\cos(\cos x^3).$$

例2.2:求$y=\sin(\cos x^3)$的导数y'.

解:令$v=x^3$,$u=\cos v$,那么$y=\sin u$,由链条法则知

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=\cos u\cdot(-\sin v)\cdot(3x^2)=-3x^2\sin x^3\cos(\cos x^3).$$

另解:

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos x^3)\cdot(\cos x^3)' \\ &= \cos(\cos x^3)\cdot(-\sin x^3)\cdot(x^3)' \\ &= \cos(\cos x^3)\cdot(-\sin x^3)\cdot(3x^2) \\ &= -3x^2\sin x^3\cos(\cos x^3). \end{aligned}$$

例2.3:证明$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, (x \neq 0)$.

例2.3:证明$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, (x \neq 0)$.

证:当$x > 0$时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

当$x < 0$时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

例2.3:证明$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, (x \neq 0)$.

证:当$x > 0$时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

当$x < 0$时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

注:与$(\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0)$的区别.

请求下列函数的导数:

(1) $y = \log_a \sin x^2$

(2) $y = \log_a \sin^2 x$

(3) $y = \sin(\log_a x^2)$

(4) $y = \sin(\log_a^2 x)$

请求下列函数的导数:

(1) $y = \log_a \sin x^2$

(2) $y = \log_a \sin^2 x$

(3) $y = \sin(\log_a x^2)$

(4) $y = \sin(\log_a^2 x)$

答案:

(1) $y' = \dfrac{2x\cos x^2}{\ln a \sin x^2}$

(2) $y' = \dfrac{2\sin x \cos x}{\ln a \sin^2 x}$

(3) $y' = \dfrac{2x\cos(\log_a x^2)}{x^2 \ln a}$

(4) $y' = \dfrac{2\log_a x \cos(\log_a^2 x)}{x \ln a}$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

$(1)(u \pm v)' = u' \pm v'.$

$(1)(u \pm v)' = u' \pm v'.$

注:此法则可推广到任意有限项的情形,例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

(1)$(u \pm v)' = u' \pm v'$.

注:此法则可推广到任意有限项的情形,例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

(2)$(uv)' = u'v + uv'$.

$(1)(u \pm v)' = u' \pm v'.$

注:此法则可推广到任意有限项的情形,例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

$(2)(uv)' = u'v + uv'.$

推论:$(cu(x))' = cu'(x)$(c为常数).

$(1)(u \pm v)' = u' \pm v'.$

注:此法则可推广到任意有限项的情形,例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

$(2)(uv)' = u'v + uv'.$

推论:$(cu(x))' = cu'(x)$(c为常数).

$(3)(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

例2.4:求$y = \tan x$的导数y'.

例2.4:求$y = \tan x$的导数y'.

解:

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

例2.4:求$y=\tan x$的导数y'.

解:

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

请仿此求出下列导数:

(1) $y=\sec x$

(2) $y=\cot x$

(3) $y=\csc x$

例2.4:求$y=\tan x$的导数y'.

解:

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

请仿此求出下列导数:

(1) $y=\sec x$ $\quad y'=\sec x\tan x$

(2) $y=\cot x$ $\quad y'=-\csc^2 x$

(3) $y=\csc x$ $\quad y'=-\csc x\cot x$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

求解步骤:

(1) 对由自变量x和因变量y确定的隐式方程两边求导.

(2) 将y'作为未知数用自变量x表示出来.

求解步骤:

(1) 对由自变量x和因变量y确定的隐式方程两边求导.

(2) 将y'作为未知数用自变量x表示出来.

例2.5:求$y = x^{\alpha}$(α为实数, $x > 0$) 的导数y'.

求解步骤:

(1) 对由自变量x和因变量y确定的隐式方程两边求导.

(2) 将y'作为未知数用自变量x表示出来.

例2.5:求$y=x^{\alpha}$(α为实数, $x>0$) 的导数y'.

解:当$x>0$时,等式两边取对数有

$$\ln y=\alpha\ln x,$$

两边分别再对x求导得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{\alpha}{x}\Longrightarrow y'=\frac{\alpha}{x}y=\frac{\alpha}{x}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

例2.6:求$y = a^x (a > 0)$的导数y'.

例2.6:求$y=a^x(a>0)$的导数y'.

解:由题意有

$$\ln y = x\ln a,$$

方程两边对x取对数有

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln a,$$

所以

$$y' = y\ln a = a^x\ln a.$$

例2.7:求$y = \arcsin x$的导数y'.

例2.7:求$y=\arcsin x$的导数y'.

解:由题意有$\sin y=x$, 两边对x求导有$\cos y\cdot y'=1$,此时因为$y\in[-\pi/2,\pi/2],\cos y\geq 0$,故

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2},$$

所以

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例2.7:求$y=\arcsin x$的导数y'.

解:由题意有$\sin y=x$, 两边对x求导有$\cos y\cdot y'=1$,此时因为$y\in[-\pi/2,\pi/2]$, $\cos y\geq 0$,故

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2},$$

所以

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

请仿此求出下列导数:

(1) $y=\arccos x$

(2) $y=\arctan x$

(3) $y=\operatorname{arccot} x$

例2.7:求$y=\arcsin x$的导数y'.

解:由题意有$\sin y=x$, 两边对x求导有$\cos y\cdot y'=1$,此时因为$y\in[-\pi/2,\pi/2]$, $\cos y\geq 0$,故

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2},$$

所以

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

请仿此求出下列导数:

(1) $y=\arccos x$ $\qquad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $y=\arctan x$ $\qquad y'=\frac{1}{1+x^2}$

(3) $y=\operatorname{arccot} x$ $\qquad y'=-\frac{1}{1+x^2}$

例2.8:求$y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}(0<x<1)$ 的导数y'.

例2.8:求$y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(0<x<1)$ 的导数y'.

解:等式两边取对数有

$$\ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(1+x),$$

然后两边再对x求导有

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)},$$

所以

$$\begin{aligned} y' &= x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\frac{x}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \end{aligned}$$

给定参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

如果$\varphi(t),\psi(t)$具有连续的导函数,且

$$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0,$$

则

给定参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

如果$\varphi(t), \psi(t)$具有连续的导函数,且

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0,$$

则

- $\varphi'(t_0) \neq 0$时,有

$$y'_x(t_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y / \triangle t}{\triangle x / \triangle t} = \frac{\lim\limits_{\triangle t \to 0} (\triangle y / \triangle t)}{\lim\limits_{\triangle t \to 0} (\triangle x / \triangle t)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

给定参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

如果$\varphi(t),\psi(t)$具有连续的导函数,且

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0,$$

则

- $\varphi'(t_0) \neq 0$时,有

$$y_x'(t_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y/\triangle t}{\triangle x/\triangle t} = \frac{\lim\limits_{\triangle t \to 0}(\triangle y/\triangle t)}{\lim\limits_{\triangle t \to 0}(\triangle x/\triangle t)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

- $\psi'(t_0) \neq 0$时,有

$$x_y'(t_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle y} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x/\triangle t}{\triangle y/\triangle t} = \frac{\lim\limits_{\triangle t \to 0}(\triangle x/\triangle t)}{\lim\limits_{\triangle t \to 0}(\triangle y/\triangle t)} = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

例2.9:设由参数方程

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 < t < \pi)$$

确定函数$y = y(x)$,求y'_x.

例2.9:设由参数方程

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 < t < \pi)$$

确定函数$y = y(x)$,求y'_x.

解:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t.$$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

函数名称	原函数解析式	导函数解析式
常数函数	$y = c$	$y' = 0$
幂函数	$y = x^\alpha(\alpha为实数)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
指数函数	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
对数函数	$y = \log_a x$	$y' = 1/(x \ln a)$
	$y = \ln x$	$y' = 1/x$
	$y = \ln \lvert x \rvert$	$y' = 1/x$
正弦函数	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
余弦函数	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
正切函数	$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$
余切函数	$y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$
正割函数	$y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$
余割函数	$y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$
反正弦函数	$y = \arcsin x$	$y' = 1/\sqrt{1-x^2}$
反余弦函数	$y = \arccos x$	$y' = -1/\sqrt{1-x^2}$
反正切函数	$y = \arctan x$	$y' = 1/(1+x^2)$
反余切函数	$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -1/(1+x^2)$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

(1) 已知$y=x^{\sin x},x>0$,求y'.

(2) 已知$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$,当$x>4$时求$y'$.

(3) 已知$x^2+y^2-xy=1$,求y'.

(4) 求隐函数$y^5+2y-x-3x^7=0$在$x=0$处的导数.

(5) 设由参数方程$\begin{cases} x=t^2+2t \\ t^2-y+\sin y=1 \end{cases}$ $(0<t<1)$ 确定函数$y=y(x)$,求y'_x.

(6) 设$y=x+e^x$,求其反函数的导数.

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

若函数$y = f(x)$的导数$y' = f'(x)$可导,则称$f'(x)$的导数为$f(x)$的**二阶导数**,记作y'', 即

$$y'' = (y')'.$$

同理,二阶导数的导数称为**三阶导数**,依此类推,$n-1$ 阶导数的导数称为**n 阶导数**,分别记作

$$y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}.$$

例3.1:设$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,求$y^{(n)}$.

例3.1:设$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,求$y^{(n)}$.

解:

$$
\begin{aligned}
y' &= a_1 + 2!a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}, \\
y'' &= 2!a_2 + 3!a_3 x \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2}, \\
&\cdots \\
y^{(n)} &= n! a_n.
\end{aligned}
$$

例3.1:设$y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,求$y^{(n)}$.

解:

$$\begin{aligned} y' &= a_1+2!a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}, \\ y'' &= 2!a_2+3!a_3x\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}, \\ &\cdots \\ y^{(n)} &= n!a_n. \end{aligned}$$

例3.2:设$y=e^{ax}$,求$y^{(n)}$.

例3.1:设$y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,求$y^{(n)}$.

解:

$$\begin{aligned} y' &= a_1+2!a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}, \\ y'' &= 2!a_2+3!a_3x\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}, \\ &\cdots \\ y^{(n)} &= n!a_n. \end{aligned}$$

例3.2:设$y=e^{ax}$,求$y^{(n)}$.

解:

$$\begin{aligned} y' &= ae^{ax}, \\ y'' &= a^2e^{ax}, \\ &\cdots \\ y^{(n)} &= a^ne^{ax}. \end{aligned}$$

例3.3:设$y=\ln(1+x)$,求$y^{(n)}$.

例3.3:设$y=\ln(1+x)$,求$y^{(n)}$.

解:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+x}, \\
y'' &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\
y''' &= (-1)^2\frac{2!}{(1+x)^3}, \\
&\cdots \\
y^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.
\end{aligned}
$$

例3.4:设$f(x)=3x^3+x^2|x|$,求$f''(x)$.

例3.4:设$f(x)=3x^3+x^2|x|$,求$f''(x)$.

解: 因为

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x>0\\ 0, & x=0\\ 2x^3, & x<0\end{cases},$$

又

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x-0}=0,\\ f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x-0}=0, \end{aligned}$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ 6x^2, & x<0\end{cases},$$

此时

$$\begin{aligned} f''_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{6x^2-0}{x-0} = 0, \\ f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{12x^2-0}{x-0} = 0, \end{aligned}$$

故

$$f''(x) = \begin{cases} 24x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 12x, & x<0 \end{cases}.$$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$都有n阶导数,则

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都有n阶导数,则

- $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都有n阶导数,则

- $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$.
- $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$ (C为常数).

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都有n阶导数,则

- $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.
- $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C为常数).
- $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都有n阶导数,则

- $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$.
- $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$ (C为常数).
- $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$.

注:第三个公式称为**莱布尼茨公式**,注意和二项展开式

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

的联系与区别.

例3.5:设$y = x^2 e^{2x}$,求$y^{(20)}$.

例3.5:设$y=x^2e^{2x}$,求$y^{(20)}$.

解:令
$$u(x)=x^2, v(x)=e^{2x},$$
则
$$u'=2x, u''=2, u^{(k)}=0\ \ (k=3,4,\cdots,20),$$
$$v^{(k)}=2^ke^{2x}\ \ (k=1,2,\cdots,20),$$
代入莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= C_{20}^{18}u^{(2)}v^{(18)}+C_{20}^{19}u^{(1)}v^{(19)}+C_{20}^{20}u^{(0)}v^{(20)} \\ &= 190\cdot 2\cdot(2^{18}e^{2x})+20\cdot(2x)\cdot(2^{19}e^{2x})+x^2\cdot(2^{20}e^{2x}) \\ &= 2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95). \end{aligned}$$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

对于一般参变量函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

其一阶导数为

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

所以二阶导数为

$$y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

依此可求其他高阶函数.

例3.6:求参变量函数

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$$

的二阶导数y''_x,其中$0 < t < \dfrac{\pi}{4}$.

例3.6:求参变量函数

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$$

的二阶导数y''_x,其中$0 < t < \dfrac{\pi}{4}$.

解:

$$y'_x = \frac{(e^t \sin t)'}{(e^t \cos t)'} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t},$$

所以

$$y''_x = \frac{(\dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t})'}{(e^t \cos t)'} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}.$$

1.导数的概念

(1)导数的定义

(3)导数的几何意义

(4)单侧导数

(5)不可导的分类

(6)课后习题

2.求导法则

(1)复合函数的导数

(2)四则运算的导数

(3)隐函数的导数

(4)参变量函数的导数

(5)常用函数的导数

(6)课后习题

3.高阶导数

(1)高阶导数的概念

(2)高阶导数的运算法则

(3)参变量函数的高阶导数

(4)课后习题

4.微分

(1)微分的概念

(2)微分的运算

(3)微分形式的不变性

(4)高阶微分

(5)参变量函数的微分形式

(6)微分的应用

(7)课后习题

5.各节参考答案

(1) 设$y=\sin x$,求$y^{(n)}$.

(2) 设$y=\cos x$,求$y^{(n)}$.

(3) 设$y=\dfrac{1-x}{1+x}$,求$y^{(n)}$.

(4) 设$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 求$y^{(n)}$.

(5) $f(x)$任意阶可导,且$f'(x)=f^2(x)$,则当$n\geq 2$时,求$f^{(n)}(x)$.

(6) 已知$x'_y=\dfrac{1}{y'}$, 证明$x''_y=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

(7) 设$\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$,且$f(t)$任意阶可导,$f''(t)\neq 0$,求$y''_x$.

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

引例:一块正方形金属片受温度变化的影响,其边长由x_0变到$x_0+\triangle x$,问此金属片面积改变了多少?

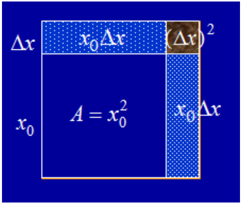
引例:一块正方形金属片受温度变化的影响,其边长由x_0变到$x_0+\triangle x$,问此金属片面积改变了多少?

解:设金属片边长为x,面积为A,则

$$A=x^2,$$

当边长由x_0变到$x_0+\triangle x$时,面积的增量为

$$\begin{aligned}\triangle A &= (x_0+\triangle x)^2-x_0^2\\ &= \underbrace{2x_0\triangle x}_{\text{关于}\triangle x\text{的线性主部}} + \underbrace{(\triangle x)^2}_{\triangle x\to 0\text{时为高阶无穷小}},\end{aligned}$$



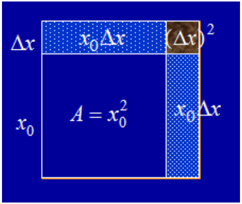
引例:一块正方形金属片受温度变化的影响,其边长由x_0变到$x_0+\triangle x$,问此金属片面积改变了多少?

解:设金属片边长为x,面积为A,则

$$A = x^2,$$

当边长由x_0变到$x_0+\triangle x$时,面积的增量为

$$\begin{aligned}\triangle A &= (x_0+\triangle x)^2 - x_0^2\\ &= \underbrace{2x_0\triangle x}_{\text{关于}\triangle x\text{的线性主部}} + \underbrace{(\triangle x)^2}_{\triangle x\to 0\text{时为高阶无穷小}},\end{aligned}$$



故有

$$\triangle A \approx \underbrace{2x_0\triangle x}_{\text{称为函数}A=x^2\text{ 在}x_0\text{的微分}}.$$

若函数$y = f(x)$在点x_0的增量可以表示为

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A\triangle x + o(\triangle x), \qquad (1)$$

其中A 为不依赖于$\triangle x$的常数,则称函数$y = f(x)$在点x_0**可微**,而$A\triangle x$称为$f(x)$在点x_0的**微分**,记作dy或df,即

$$dy = df = A\triangle x.$$

若函数$y=f(x)$在点x_0的增量可以表示为

$$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=A\triangle x+o(\triangle x), \qquad (1)$$

其中A 为不依赖于$\triangle x$的常数,则称函数$y=f(x)$在点x_0**可微**,而$A\triangle x$称为$f(x)$在点x_0的**微分**,记作dy或df,即

$$dy=df=A\triangle x.$$

$A=?$

若函数$y = f(x)$在点x_0的增量可以表示为

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A\triangle x + o(\triangle x), \qquad (1)$$

其中A 为不依赖于$\triangle x$的常数,则称函数$y = f(x)$在点x_0**可微**,而$A\triangle x$称为$f(x)$在点x_0的**微分**,记作dy或df,即

$$dy = df = A\triangle x.$$

将(1)式两端同时除以$\triangle x$并取极限有

$A =?$

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} A + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{o(\triangle x)}{\triangle x}$$

若函数$y=f(x)$在点x_0的增量可以表示为

$$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=A\triangle x+o(\triangle x),$$

其中A 为不依赖于$\triangle x$的常数,则称函数$y = f(x)$在点x_0**可微**,而$A\triangle x$称为$f(x)$在点x_0的**微分**,记作dy或df,即

$$dy=df=A\triangle x.$$

将(1)式两端同时除以$\triangle x$并取极限有

$$A=\underline{f'(x_0)} \qquad \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}A+\lim_{\triangle x\to 0}\frac{o(\triangle x)}{\triangle x}$$

若函数$y=f(x)$在点x_0的增量可以表示为

$$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=A\triangle x+o(\triangle x),$$

其中A 为不依赖于$\triangle x$的常数,则称函数$y=f(x)$在点x_0**可微**,而$A\triangle x$称为$f(x)$在点x_0的**微分**,记作dy或df,即

$$dy=df=A\triangle x.$$

$\boxed{\textbf{可微即可导.}}$

将(1)式两端同时除以$\triangle x$并取极限有

$A=\underline{f'(x_0)}$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}A+\lim_{\triangle x\to 0}\frac{o(\triangle x)}{\triangle x}$$

注1:可微即可导,但是微分并不等于导数,微分等于导数乘上**函数自变量的改变量**.

注1:可微即可导,但是微分并不等于导数,微分等于导数乘上**函数自变量的改变量**.

注2:函数自变量的改变量可以用$\triangle x$来表示,那$\triangle x$又是什么呢?考察函数$y=x$,显然由微分的定义我们有

$$dy=d(x)=dx=1\cdot\triangle x=\triangle x,$$

所以$\triangle x$可以看成是函数$y=x$的微分.

注1:可微即可导,但是微分并不等于导数,微分等于导数乘上**函数自变量的改变量**.

注2:函数自变量的改变量可以用$\triangle x$来表示,那$\triangle x$又是什么呢?考察函数$y=x$,显然由微分的定义我们有

$$dy=d(x)=dx=1\cdot\triangle x=\triangle x,$$

所以$\triangle x$可以看成是函数$y=x$的微分.

注3:由

$$dy=A\triangle x=y'\triangle x=y'dx$$

知道

$$y'=\frac{dy}{dx},$$

即导数可以看成是因变量和自变量微分的商,也称为**微商**.

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

微分运算符" d" 是一个对函数的操作,设$u(x), v(x)$均为可微函数,其四则运算法则如下:

微分运算符"d"是一个对函数的操作,设$u(x), v(x)$均为可微函数,其四则运算法则如下:

- $d(u \pm v) = du \pm dv$

微分运算符"d"是一个对函数的操作,设$u(x), v(x)$均为可微函数,其四则运算法则如下:

- $d(u \pm v) = du \pm dv$

  证:由微分的定义,

$$\begin{aligned} d(u \pm v) &= (u \pm v)' dx = (u' \pm v') dx \\ &= u' dx \pm v' dx = du \pm dv. \end{aligned}$$

微分运算符"d"是一个对函数的操作,设$u(x),v(x)$均为可微函数,其四则运算法则如下:

- $d(u \pm v) = du \pm dv$

  证:由微分的定义,

$$
\begin{aligned}
d(u \pm v) &= (u \pm v)' dx = (u' \pm v') dx \\
&= u' dx \pm v' dx = du \pm dv.
\end{aligned}
$$

- $d(uv) = vdu + udv$

微分运算符"d"是一个对函数的操作,设$u(x), v(x)$均为可微函数,其四则运算法则如下:

- $d(u \pm v) = du \pm dv$

  证:由微分的定义,

$$
\begin{aligned}
d(u \pm v) &= (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx \\
&= u'dx \pm v'dx = du \pm dv.
\end{aligned}
$$

- $d(uv) = vdu + udv$

  证:由微分的定义,

$$
\begin{aligned}
d(uv) &= (uv)'dx = (u'v + v'u)dx \\
&= vu'dx + uv'dx = vdu + udv.
\end{aligned}
$$

微分运算符"d"是一个对函数的操作,设$u(x),v(x)$均为可微函数,其四则运算法则如下:

- $d(u \pm v) = du \pm dv$

  证:由微分的定义,

$$\begin{aligned} d(u \pm v) &= (u \pm v)' dx = (u' \pm v') dx \\ &= u' dx \pm v' dx = du \pm dv. \end{aligned}$$

- $d(uv) = vdu + udv$

  证:由微分的定义,

$$\begin{aligned} d(uv) &= (uv)' dx = (u'v + v'u) dx \\ &= vu' dx + uv' dx = vdu + udv. \end{aligned}$$

- $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v(x) \neq 0$

微分运算符"d"是一个对函数的操作,设$u(x),v(x)$均为可微函数,其四则运算法则如下:

- $d(u\pm v)=du\pm dv$

  证:由微分的定义,

$$\begin{aligned} d(u\pm v) &= (u\pm v)'dx=(u'\pm v')dx \\ &= u'dx\pm v'dx=du\pm dv. \end{aligned}$$

- $d(uv)=vdu+udv$

  证:由微分的定义,

$$\begin{aligned} d(uv) &= (uv)'dx=(u'v+v'u)dx \\ &= vu'dx+uv'dx=vdu+udv. \end{aligned}$$

- $d(\frac{u}{v})=\dfrac{vdu-udv}{v^2},\quad v(x)\neq 0$

  请大家自证.

例4.1:求$y=x^2+\ln x+3^x$的微分.

例4.1:求$y=x^2+\ln x+3^x$的微分.

解:

$$\begin{aligned} dy &= d(x^2+\ln x+3^x) \\ &= d(x^2)+d(\ln x)+d(3^x) \\ &= 2xdx+\frac{1}{x}dx+3^x\ln 3dx \\ &= (2x+\frac{1}{x}+3^x\ln 3)dx. \end{aligned}$$

例4.1:求$y=x^2+\ln x+3^x$的微分.

解:

$$\begin{aligned} dy &= d(x^2+\ln x+3^x) \\ &= d(x^2)+d(\ln x)+d(3^x) \\ &= 2xdx+\frac{1}{x}dx+3^x\ln 3dx \\ &= (2x+\frac{1}{x}+3^x\ln 3)dx. \end{aligned}$$

另解:

$$\begin{aligned} dy &= (x^2+\ln x+3^x)'dx \\ &= (2x+\frac{1}{x}+3^x\ln 3)dx. \end{aligned}$$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

给定函数

$$y = f(u),$$

给定函数

$$y = f(u),$$

- 如果u是自变量,那么

$$dy = df(u) = f'(u)du;$$

给定函数

$$y = f(u),$$

- 如果u是自变量,那么

$$dy = df(u) = f'(u)du;$$

- 如果u是中间变量,即有$u = g(x)$,其中x 是自变量,那么

$$\begin{aligned} dy &= df(u) = df(g(x)) = (f(g(x)))'dx \\ &= f'(u)g'(x)dx = f'(u)d(g(x)) \\ &= f'(u)du \end{aligned}$$

给定函数

$$y = f(u),$$

- 如果u是自变量,那么

$$dy = df(u) = f'(u)du;$$

- 如果u是中间变量,即有$u = g(x)$,其中x 是自变量,那么

$$\begin{aligned} dy &= df(u) = df(g(x)) = (f(g(x)))'dx \\ &= f'(u)g'(x)dx = f'(u)d(g(x)) \\ &= f'(u)du \end{aligned}$$

- 不论u是自变量还是中间变量,函数$y = f(u)$的微分都有相同的形式,这叫做**一阶微分形式的不变性**.

例4.2:求$y=e^{\sin(x^2+1)}$的微分.

例4.2:求$y = e^{\sin(x^2+1)}$的微分.

解:

$$\begin{aligned} dy &= y'dx \\ &= 2x\cos(x^2+1)e^{\sin(x^2+1)}dx \end{aligned}$$

例4.2:求$y = e^{\sin(x^2+1)}$的微分.

解:

$$\begin{aligned} dy &= y'dx \\ &= 2x\cos(x^2+1)e^{\sin(x^2+1)}dx \end{aligned}$$

另解:

$$\begin{aligned} dy &= d(e^{\sin(x^2+1)}) \\ &= e^{\sin(x^2+1)}d(\sin(x^2+1)) \\ &= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)d(x^2+1) \\ &= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)(d(x^2)+d(1)) \\ &= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)d(x^2) \\ &= e^{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1)2xdx \end{aligned}$$

例4.3:设$y\sin x-\cos(x-y)=0$,求dy.

例4.3:设$y\sin x-\cos(x-y)=0$,求dy.

解:等式两边取微分后有

$$d(y\sin x-\cos(x-y))=d0=0$$

而利用一阶微分形式不变性

$$\begin{aligned}
\text{上式左边} &= d(y\sin x)-d(\cos(x-y))\\
&= yd(\sin x)+\sin x dy+\sin(x-y)d(x-y)\\
&= y\cos x dx+\sin x dy+\sin(x-y)(dx-dy)\\
&= (y\cos x+\sin(x-y))dx+(\sin x-\sin(x-y))dy,
\end{aligned}$$

故

$$(y\cos x+\sin(x-y))dx+(\sin x-\sin(x-y))dy=0,$$

即

$$dy=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx.$$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

二阶微分就是一阶微分的微分.令$y = f(x)$,当x为自变量时,其一阶微分是

$$dy = f'(x)dx,$$

故二阶微分是

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = f'(x)d(dx) + dxd(f'(x))$$

$$= f'(x)\underbrace{d(dx)}_{0} + dxf''(x)dx = f''(x)(dx)^2,$$

通常记作

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

二阶微分就是一阶微分的微分.令$y = f(x)$,当x为自变量时,其一阶微分是

$$dy = f'(x)dx,$$

故二阶微分是

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = f'(x)d(dx) + dxd(f'(x))$$

$$= f'(x)\underbrace{d(dx)}_{0} + dxf''(x)dx = f''(x)(dx)^2,$$

通常记作

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

注:

$$\begin{aligned} dx^2 &= (dx)^2 \\ d(x^2) &= 2xdx \\ d^2x &= d(dx) = 0 \end{aligned}$$

给定函数

$$y = f(u),$$

给定函数

$$y = f(u),$$

- 如果u是自变量,那么

$$d^2y = f''(u)du^2;$$

给定函数

$$y = f(u),$$

- 如果u是自变量,那么

$$d^2y = f''(u)du^2;$$

- 如果u是中间变量,即有$u = g(x)$,其中x 是自变量,那么

$$\begin{aligned} d^2y &= (f(g(x)))''dx^2 = (f'(g(x))g'(x))'dx^2 \\ &= (f''(g(x))(g'(x)dx)^2 + f'(g(x))g''(x))dx^2 \\ &= f''(\underbrace{g(x)}_{u})(\underbrace{g'(x)dx}_{du})^2 + f'(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g''(x)dx^2}_{d^2u} \\ &= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u; \end{aligned}$$

给定函数

$$y = f(u),$$

- 如果u是自变量,那么

$$d^2y = f''(u)du^2;$$

- 如果u是中间变量,即有$u = g(x)$,其中x 是自变量,那么

$$\begin{aligned} d^2y &= (f(g(x)))''dx^2 = (f'(g(x))g'(x))'dx^2 \\ &= (f''(g(x))(g'(x)dx)^2 + f'(g(x))g''(x))dx^2 \\ &= f''(\underbrace{g(x)}_{u})(\underbrace{g'(x)dx}_{du})^2 + f'(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g''(x)dx^2}_{d^2u} \\ &= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u; \end{aligned}$$

- 所以二阶微分不再具有微分形式的不变性.

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

对于一般参变量函数

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

其一阶导数为

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

二阶导数为

$$\begin{aligned} y''_x &= \frac{d^2y - f'(x)d^2x}{dx^2} = \frac{\psi''(t)dt^2 - \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\varphi''(t)dt^2}{(\varphi'(t))^2dt^2} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \end{aligned}$$

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

- 近似计算

- 近似计算

根据导数的定义

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = y',$$

所以当$\triangle x \to 0$ 时,即$|\triangle x|$很小时

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \approx y',$$

即

$$\triangle y \approx y' \triangle x = dy,$$

换言之,当$|\triangle x|$很小时,我们可以用微分dy作为函数改变量$\triangle y$ 的近似值,

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\triangle x,$$

或

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\triangle x.$$

注1:适用范围——1)要估算的函数值的自变量$x_0+\triangle x$在已知函数值自变量x_0的附近;2)$f(x_0)$和$f'(x_0)$ 的值容易计算.

注1:适用范围——1)要估算的函数值的自变量$x_0+\triangle x$在已知函数值自变量x_0的附近;2)$f(x_0)$和$f'(x_0)$ 的值容易计算.

例4.4:求$\sin 29^\circ$的近似值.

注1:适用范围——1)要估算的函数值的自变量$x_0+\triangle x$在已知函数值自变量x_0的附近;2)$f(x_0)$和$f'(x_0)$ 的值容易计算.

例4.4:求$\sin 29^\circ$的近似值.

解:令
$$f(x)=\sin x,$$
取
$$x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}, x=29^\circ=\frac{29}{180}\pi,$$
则
$$\triangle x=x-x_0=-\frac{\pi}{180},$$
所以
$$\begin{aligned}\sin 29^\circ &= \sin\frac{29}{180}\pi\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)\approx 0.485.\end{aligned}$$

注**2**:令$x_0=0$,那么

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\triangle x$$

可以写成

$$f(\triangle x)-f(0)\approx f'(0)\triangle x,$$

即

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x,$$

其中$|x|$ 很小.

注2:令$x_0=0$,那么

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\triangle x$$

可以写成

$$f(\triangle x)-f(0)\approx f'(0)\triangle x,$$

即

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x,$$

其中$|x|$ 很小.

例4.5:重新估计$\sin 29^\circ$的近似值.

注2:令$x_0=0$,那么

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\triangle x$$

可以写成

$$f(\triangle x)-f(0)\approx f'(0)\triangle x,$$

即

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x,$$

其中$|x|$ 很小.

例4.5:重新估计$\sin 29^\circ$的近似值.

解:令$f(x)=\sin(\frac{\pi}{6}-x)$, 取$x=\frac{\pi}{180}=0.0175$, 故

$$\begin{aligned}\sin 29^\circ &= f(\frac{\pi}{180})\approx f(0)+f'(0)\cdot\frac{\pi}{180}\\ &= \sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.0175\approx 0.485.\end{aligned}$$

回忆一下,当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x \qquad \tan x \sim x \qquad \arcsin x \sim x \qquad \arctan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

回忆一下,当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x \qquad \tan x \sim x \qquad \arcsin x \sim x \qquad \arctan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

由微分的定义,

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x) \\
\tan x &= x + o(x) \\
\arcsin x &= x + o(x) \\
\arctan x &= x + o(x) \\
\ln(1+x) &= x + o(x) \\
e^x &= 1 + x + o(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x)
\end{aligned}$$

回忆一下,当$x \to 0$时,

$\sin x \sim x \qquad \tan x \sim x \qquad \arcsin x \sim x \qquad \arctan x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

由微分的定义,

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x)\\
\tan x &= x + o(x)\\
\arcsin x &= x + o(x)\\
\arctan x &= x + o(x)\\
\ln(1+x) &= x + o(x)\\
e^x &= 1 + x + o(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x)
\end{aligned}$$

换言之,当$x \to 0$,即$|x|$很小时,

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx x\\
\tan x &\approx x\\
\arcsin x &\approx x\\
\arctan x &\approx x\\
\ln(1+x) &\approx x\\
e^x &\approx 1 + x\\
(1+x)^\alpha &\approx 1 + \alpha x
\end{aligned}$$

注3:微分也有不那么好用的时候,回忆一下当$x \to 0$时,

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

利用微分的定义,令

$$f(x)=1-\cos x,$$

则

$$f'(x)=\sin x, f(0)=0, f'(0)=0,$$

所以仅有

$$1-\cos x = o(x).$$

事实上,

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2(\frac{x}{2}+o(x))^2 = \frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

- 误差估计

- 误差估计

误差估计指的是当自变量存在已知误差时,如何去估计因变量的误差.即设自变量的理论误差限为δ_x,真实值是x,测量值是x_0, 则自变量的实际误差$\triangle x$ 满足

$$|\triangle x| = |x - x_0| \leq \delta_x,$$

当δ_x很小时,因变量的误差$\triangle y$满足

$$|\triangle y| = |f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)\triangle x| \leq |f'(x_0)|\delta_x,$$

我们把

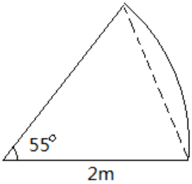
$$|f'(x_0)|\delta_x$$

叫做**绝对误差限**,把

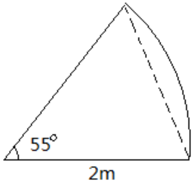
$$|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}|\delta_x$$

叫做**相对误差限**.

例4.6:检验一个半径为2米,中心角为55°的工件面积(如图),现可直接测量其中心角或此角所对的弦长,设量角最大误差为0.5°,量弦长最大误差为3毫米,试问用哪一种方法检验的结果较为精确.



例4.6:检验一个半径为2米,中心角为55°的工件面积(如图),现可直接测量其中心角或此角所对的弦长,设量角最大误差为0.5°,量弦长最大误差为3毫米,试问用哪一种方法检验的结果较为精确.



解:设弦长为y米,中心角为$x°$,则有关系式

$$y = 4\sin\frac{\pi}{360}x,$$

故

$$x = \frac{360}{\pi}\arcsin\frac{y}{4},$$

所以

$$S = \frac{\pi}{90}x = 4\arcsin\frac{y}{4},$$

如果测量中心角,面积的误差$\triangle S$满足

$$|\triangle S| \leq \frac{\pi}{90}|\triangle x| = \frac{\pi}{90}\cdot\frac{1}{2} \approx 0.0174(\text{平方米}),$$

如果测量弦长,面积的误差$\triangle S$满足

$$|\triangle S| \leq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}}|\triangle y| \leq 2|\triangle y| = 0.006(\text{平方米}),$$

因为

$$0.0174 > 0.006,$$

所以选用量弦长的方法检验结果较为精确.

1.导数的概念
(1)导数的定义
(3)导数的几何意义
(4)单侧导数
(5)不可导的分类
(6)课后习题
2.求导法则
(1)复合函数的导数
(2)四则运算的导数
(3)隐函数的导数
(4)参变量函数的导数
(5)常用函数的导数
(6)课后习题
3.高阶导数
(1)高阶导数的概念
(2)高阶导数的运算法则
(3)参变量函数的高阶导数
(4)课后习题
4.微分
(1)微分的概念
(2)微分的运算
(3)微分形式的不变性
(4)高阶微分
(5)参变量函数的微分形式
(6)微分的应用
(7)课后习题
5.各节参考答案

(1) 设$y=y(x)$由方程$x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$确定,求$dy|_{x=0}$.

(2) 已知$x>0, y>0$时,$x^y=y^x$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

(3) 已知$y=1+xe^{xy}$,求$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

(4) 计算$\sqrt[3]{9.02}$的近似值(保留三位小数).

(5) 已知$x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(6) 已知$y=\arcsin(\sin^2\dfrac{1}{x})$,求$dy$.

1.导数的概念

(1)导数的定义

(3)导数的几何意义

(4)单侧导数

(5)不可导的分类

(6)课后习题

2.求导法则

(1)复合函数的导数

(2)四则运算的导数

(3)隐函数的导数

(4)参变量函数的导数

(5)常用函数的导数

(6)课后习题

3.高阶导数

(1)高阶导数的概念

(2)高阶导数的运算法则

(3)参变量函数的高阶导数

(4)课后习题

4.微分

(1)微分的概念

(2)微分的运算

(3)微分形式的不变性

(4)高阶微分

(5)参变量函数的微分形式

(6)微分的应用

(7)课后习题

5.各节参考答案

导数的概念

(1)$y\pm1=3(x\pm1)$.　　(2)$y-4=4(x-2)$.

(3)不可导.　　(4)2.

(5)提示:先证$f(0)=1$,再利用导数定义，即

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x)f(\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \\ &= f(x)\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x)-1}{\triangle x} \\ &= f(x)f'(0). \end{aligned}$$

求导法则

(1)$\cos x\cdot\ln x\cdot x^{\sin x}+\sin x\cdot x^{\sin x-1}$.

(2)$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$.

(3)$\frac{y-2x}{2y-x}$.　　(4)$\frac{1}{2}$.　　(5)$\frac{t}{(t+1)(1-\cos y)}$.　　(6)$\frac{1}{1+e^x}$.

高阶导数

(1)$\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$.　　(2)$\cos(x+\frac{n}{2}\pi)$.

(3)$y^{(0)}=\frac{2}{1+x}-1, y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!\cdot 2}{(1+x)^{n+1}}$.

(4)$(-1)^n n!(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}})$.　　(5)$n!f^{n+1}(x)$.

(6)提示:$x''_y=-\frac{(y')'_y}{(y')^2}$, 而$(y')'_y\cdot y'_x=(y')'_x=y''$.　　(7)$\frac{1}{f''(t)}$.

微分

(1)$\frac{1}{2}dx$.　　(2)$\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.　　(3)1, 2.　　(4)2.085.

(5)$-\frac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}$.　　(6)$-\frac{\sin\frac{2}{x}}{x^2(1+\sin^4\frac{1}{x})}dx$.