

第八章 定积分的应用

陈 颖

北京电子科技学院基础部

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

用定积分求由直角坐标方程表示的平面图形的面积,通常把它化为 x 型和 y 型区域上的积分来计算.分别是,

► x 型区域:

$$A = \{(x, y) | f_1(x) \leq y \leq f_2(x), x \in [a, b]\},$$

其中 $f_1(x), f_2(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数;

► y 型区域:

$$B = \{(x, y) | g_1(y) \leq x \leq g_2(y), y \in [c, d]\},$$

其中 $g_1(y), g_2(y)$ 是定义在 $[c, d]$ 上的连续函数.

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

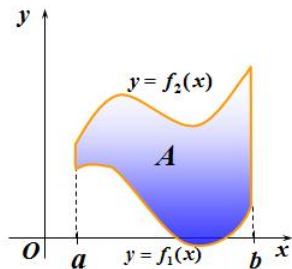
(2) 液体的侧压力

(3) 引力

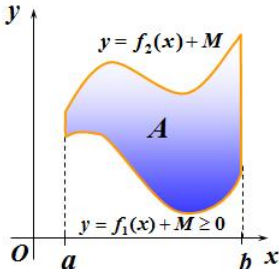
(4) 课后习题

6. 各节参考答案

x型区域A



通过上移



由定积分的几何意义,可知x型区域A的面积为

$$\begin{aligned} S(A) &= \int_a^b (f_2(x) + M) dx - \int_a^b (f_1(x) + M) dx \\ &= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \end{aligned}$$

同理,y型区域B的面积为

$$S(B) = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y)) dy.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例1.1:求由 $y^2 = x$ 和 $x - y = 2$ 围成的图形A的面积.

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

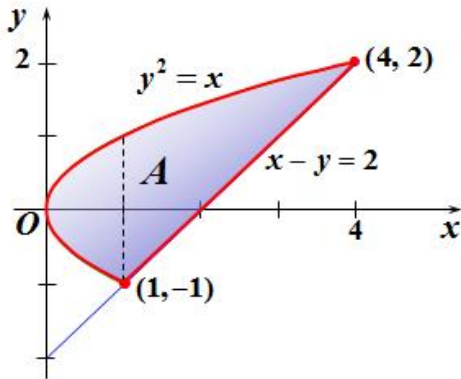
(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

例1.1:求由 $y^2 = x$ 和 $x - y = 2$ 围成的图形A的面积.

解: $y^2 = x$ 和 $x - y = 2$ 的交点为 $(1, -1)$ 和 $(4, 2)$,图形A 如下图,



1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

若把 A 看作 x 型区域,则

$$f_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}, f_2(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4.$$

由于 f_1 分段定义,所以 A 也分为两部分 A_1 和 A_2 , 其中

$$S(A_1) = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3},$$

$$S(A_2) = \int_1^4 (\sqrt{x} - (x-2)) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^4 = \frac{19}{6},$$

故

$$S(A) = S(A_1) + S(A_2) = \frac{9}{2}.$$

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

若把 A 看作 y 型区域,则

$$g_1(y) = y^2 (-1 \leq y \leq 2), g_2(y) = y + 2 (-1 \leq y \leq 2),$$

所以

$$S(A) = \int_{-1}^2 ((y+2) - y^2) dy = \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

设曲线 C 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

表示,其中 $y(t)$ 连续, $x(t)$ 连续可微,且 $x'(t) \neq 0$.

- 若 $x(\alpha) = a, x(\beta) = b, x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上单调增,则由曲线 C 及直线 $x = a, x = b$ 和 x 轴所围图形的面积为

$$S(A) = \int_a^b |y| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt;$$

- 若 $x(\beta) = a, x(\alpha) = b, x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上单调减,则由曲线 C 及直线 $x = a, x = b$ 和 x 轴所围图形的面积为

$$S(A) = \int_a^b |y| dx = - \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| x'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t) x'(t)| dt.$$

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

因此,不论 $x(t)$ 递增或递减,总有

$$S(A) = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)|dt,$$

进一步的,若上述曲线 C 是封闭的,即

$$x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta),$$

则由 C 所围的平面图形 A 的面积是

$$S(A) = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \right|.$$

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

例1.2:求由摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 与 x 轴所围图形的面积.

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

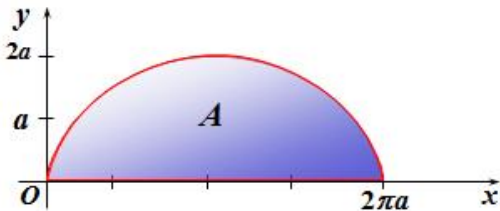
(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

例1.2:求由摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 与 x 轴所围图形的面积.

解:如下图,



$$\begin{aligned} S(A) &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)(a(t - \sin t))' dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

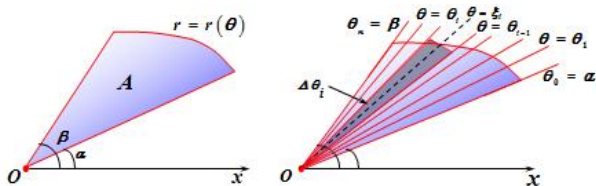
- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

设曲线 C 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, 图形 A 由曲线 C 和两条射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成. 如下图,



作分割 $T: \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$, 射线 $\theta = \theta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 把 A 分割成 n 个“小扇形” A_1, A_2, \cdots, A_n . 令

$$m_i = \inf \{r(\theta) | \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\},$$

$$M_i = \sup \{r(\theta) | \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\},$$

则

$$\frac{1}{2} m_i^2 \Delta \theta_i \leq S(A_i) \leq \frac{1}{2} M_i^2 \Delta \theta_i,$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

从而

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta \theta_i \leq \sum_{i=1}^n S(A_i) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta \theta_i,$$

注意到

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta \theta_i = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta \theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta,$$

因此

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

例1.3:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 所围平面图形的面积.

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

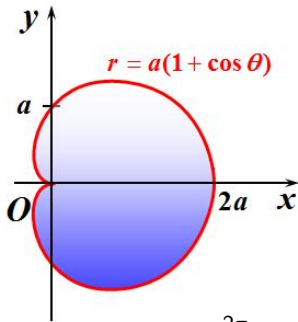
(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

例1.3:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 所围平面图形的面积.

解:如下图.



$$\begin{aligned} S(A) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos \theta))^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

- (1) 求由抛物线 $y^2 = x$ 和 $x^2 = 8y$ 所围图形的面积.
- (2) 计算由曲线 $y = x^3 - 6x$ 和 $y = x^2$ 所围图形的面积.
- (3) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形的面积.
- (4) 求参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 所围封闭图形的面积.
- (5) 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围平面图形的面积.
- (6) 求由 $r = \sin \theta, r = \cos \theta$ 所围平面图形的面积.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

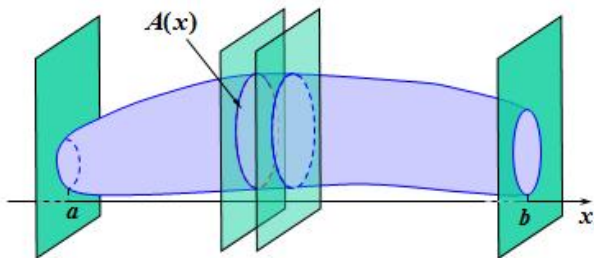
4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案



设 Ω 为三维空间中一立体,它夹在垂直于 x 轴的两平面 $x = a$, $x = b$ 之间($a < b$). $\forall x \in [a, b]$, 作垂直于 x 轴的平面,截得 Ω 的截面面积为 $A(x)$. 若 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,作分割:

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

令 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 $A(x)$ 的最大、最小值分别为 M_i 和 m_i , 则第 i 个小薄片的体积 ΔV_i 满足

$$m_i \Delta x_i \leq \Delta V_i \leq M_i \Delta x_i,$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

于是

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \rightarrow \int_a^b A(x) dx,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \rightarrow \int_a^b A(x) dx,$$

因此

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

解:如下左图,

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

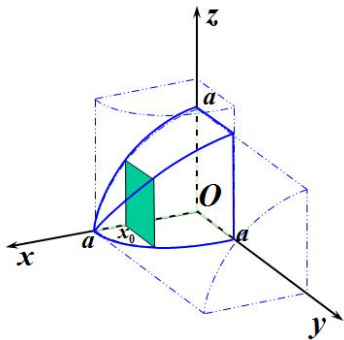
5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

解:如下左图,



1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

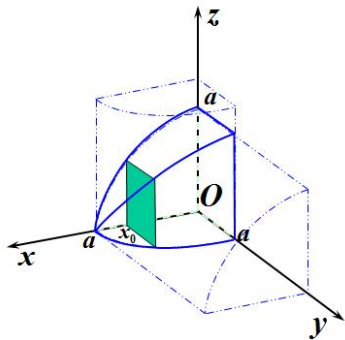
5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.1:求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.

解:如下左图,



先考察立体在第一卦限的体积 V_1 . $\forall x_0 \in [0, a]$, $x = x_0$ 与立体的截面是边长为 $\sqrt{a^2 - x_0^2}$ 的正方形, 所以

$$A(x) = a^2 - x^2,$$

其中 $x \in [0, a]$, 于是求得

$$\begin{aligned} V &= 8V_1 \\ &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{16}{3} a^3. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

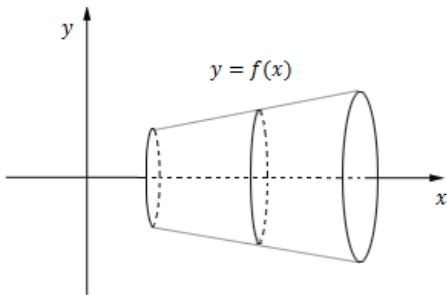
4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案



设 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, Ω 是由平面图形

$$A = \{(x, y) | 0 \leq |y| \leq |f(x)|, a \leq x \leq b\}$$

绕 x 轴旋转一周所得的旋转体,则

$$A(x) = \pi f^2(x),$$

其中 $x \in [a, b]$,故

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \leq r^2$ ($0 < r < R$)绕 x 轴旋转一周所得环状立体的体积.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \leq r^2 (0 < r < R)$ 绕 x 轴旋转一周所得环状立体的体积.

解:如下左图,

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

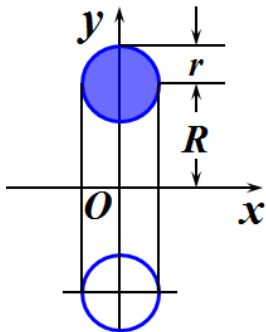
5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \leq r^2$ ($0 < r < R$)绕 x 轴旋转一周所得环状立体的体积.

解:如下左图,



1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

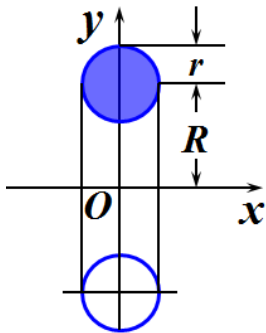
5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例2.2:求由圆 $x^2 + (y - R)^2 \leq r^2$ ($0 < r < R$)绕 x 轴旋转一周所得环状立体的体积.

解:如下左图,



$x^2 + (y - R)^2 = r^2$ 的上下半圆分别为

$$f_2(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$f_1(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2},$$

因此

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi f_2^2(x) - \pi f_1^2(x) \\ &= 4\pi R \sqrt{r^2 - x^2}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} V &= 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= 2\pi^2 r^2 R. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

- (1) 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心,并与底面交成 α 角,计算该平面截圆柱体所得立体的体积.
- (2) 求由区域 $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}$ 绕 y 轴旋转一周所得立体的体积.
- (3) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形绕 x 轴旋转而成的椭球体的体积.
- (4) 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转得到的旋转体的体积.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

设平面曲线 C 由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

表示.对 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割

$$T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

相应地对 C 有一个分割,即 C 上有分点

$$A = P_0, P_1, \cdots, P_n = B,$$

如果

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = s$$

存在,则称曲线是**可求长的**,并定义该极限值 s 为曲线的**弧长**. 如果 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可微,且 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 不同时为零,则称 C 为一**光滑曲线**.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

设 $[\alpha, \beta]$ 的任一分割 $T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$.
在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上由微分中值定理有,

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i) \Delta t_i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i) \Delta t_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |P_i P_{i-1}| &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} \Delta t_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} \Delta t_i + M, \end{aligned}$$

其中

$$M = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} \Delta t_i.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

由于 $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,从而可积,因此

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

注意到

$$|\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} - \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)}| \leq |y'(\xi_i) - y'(\eta_i)|,$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $\|T\| < \delta$ 时,

$$|y'(\xi_i) - y'(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}, i = 1, 2, \dots, n.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

于是

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n (\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} - \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)}) \Delta t_i \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n |y'(\xi_i) - y'(\xi_i)| \Delta t_i < \varepsilon, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} M = 0,$$

从而

$$s = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_i P_{i-1}| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例3.1:求星型线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 的周长.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

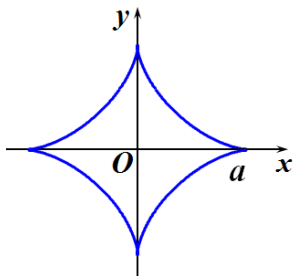
5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例3.1:求星型线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0, t \in [0, 2\pi]$ 的周长.

解:如下图,



$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t,$$

因此

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 12a \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

- 若曲线 C 由直角坐标方程 $y = f(x), x \in [a, b]$ 表示, 则 C 亦可看作参数表示 $x = x, y = f(x), x \in [a, b]$, 因此当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微时,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

- 若曲线 C 由极坐标方程 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ 表示, 则 C 又可看作参数表示 $x = r(\theta) \cos \theta, y = r(\theta) \sin \theta, \theta \in [\alpha, \beta]$, 由于

$$x'(\theta) = r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta,$$

$$y'(\theta) = r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta,$$

$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = r^2(\theta) + r'^2(\theta),$$

若 $r'(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $r(\theta)$ 与 $r'(\theta)$ 不同时为零, 则

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例3.2:求连续曲线段 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ 的弧长.

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题

6.各节参考答案

例3.2:求连续曲线段 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ 的弧长.

解:由题意知 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,所以

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (\sqrt{\cos x})^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} dx \\ &= 2\sqrt{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例3.3:求阿基米德螺线 $r = a\theta (a > 0)$ 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 时的弧长.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

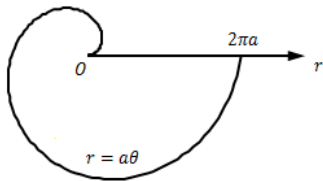
5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例3.3:求阿基米德螺线 $r = a\theta (a > 0)$ 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 时的弧长.

解:如下图



$$\begin{aligned} s &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \\ &= a \left(\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= a\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}). \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

(1) 求悬链线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 在 $[0, a]$ 上的一段弧长.

(2) 计算曲线 $y = \int_0^{\frac{x}{n}} \sqrt{\sin \theta} d\theta$ 的弧长, 其中 $(0 \leq x \leq n\pi)$.

(3) 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$ 一拱 $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长.

(4) 求极坐标系下曲线 $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ 的弧长, 其中 $a > 0, 0 \leq \theta \leq 3\pi$.

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

当 f 为 $[a, b]$ 上的连续函数,若令

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

则 $\Phi'(x) = f(x)$,或 $d\Phi = f(x)dx$,且

$$\Phi(a) = 0, \Phi(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

现在,我们把问题倒过来看:设我们要求的未知函数是 $\Phi(x)$,它定义在区间 $[a, b]$ 上,而且 $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b)$ 是一个需要的最终所求的值.如何求解?

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

在任意小的区间 $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$ 上, 若能把 Φ 的微小增量 $\Delta\Phi$ 近似表示为 Δx 的线性形式

$$\Delta\Phi \approx f(x)\Delta x,$$

其中 f 为某一连续函数, 而且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

$$\Delta\Phi - f(x)\Delta x = o(\Delta x),$$

那么只要把 $\int_a^b f(x)dx$ 计算出来, 就是该问题所求的结果.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

上面的方法称为**微元法**,在用微元法时应注意:

- ▶ 所求量 Φ 关于分布区间必须是可加的;
- ▶ 微元法的关键是正确给出 $\Delta\Phi$ 的近似表达式

$$\Delta\Phi \approx f(x)\Delta x.$$

在一般情况下,要严格检验

$$\Delta\Phi - f(x)\Delta x$$

为 Δx 的高阶无穷小量,而且这通常并不是件容易的事.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

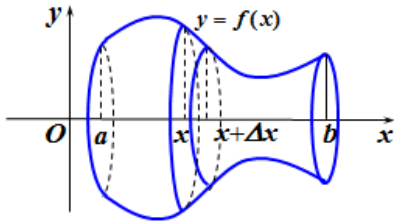
- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

设平面光滑曲线 C 的方程为

$$y = f(x), x \in [a, b] (f(x) \geq 0),$$

这段曲线绕 x 轴旋转一周得的旋转曲面,如下图,



通过 x 轴上点 x 与 $x + \Delta x$ 分别作垂直于 x 轴的平面,它们在旋转曲面上截下一条狭带,当 Δx 很小时,此狭带的面积近似于一圆台的侧面积,即

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

$$\begin{aligned}\Delta S &\approx \pi(f(x) + f(x + \Delta x))\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &= \pi(2f(x) + \Delta y)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x,\end{aligned}$$

其中 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, 由于

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)},$$

因此由 $f'(x)$ 的连续性可以保证

$$\pi(2f(x) + \Delta y)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x - 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\Delta x = o(\Delta x),$$

所以得到

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

如果光滑曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

给出,其中 $t \in [\alpha, \beta]$,且 $y(t) \geq 0$,则曲线 C 绕 x 轴旋转所得曲面的面积为

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

类似的,如果光滑曲线由极坐标 $r = r(\theta)$ 表示,那么

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例4.1:求将椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$ 绕x轴旋转所得椭球面的面积.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例4.1:求将椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$ 绕x轴旋转所得椭球面的面积.

解:将上半椭圆写成参数方程

$$x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \pi,$$

令 $c^2 = a^2 - b^2$, $e = \frac{c}{a}$, 则

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \\ &= -4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t} d(\cos t) \\ &= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - e^2 u^2} du \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

$$\begin{aligned}
&= 4\pi ab\left(\frac{1}{2}u\sqrt{1-e^2u^2} + \frac{1}{2e}\arcsin eu\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\pi ab\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c}\arcsin \frac{c}{a}\right) \\
&= 2\pi b\left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).
\end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例4.2:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$, 其中 $a > 0$, 绕极轴旋转所得曲面的面积.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例4.2:求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$, 其中 $a > 0$, 绕极轴旋转所得曲面的面积.

解:由题意

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi a(1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 4\pi a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 32\pi a^2 \int_0^1 u^4 du \\ &= \frac{32}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

- (1) 求半径为 a 的球面的面积.
- (2) 求由曲线 $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积.
- (3) 求由曲线 $x = 1 - t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积.
- (4) 求由星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的表面积.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.1:在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下,一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处($a < b$),求电场力所作的功.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.1:在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下,一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处($a < b$),求电场力所作的功.

解:当单位正电荷距离原点 r 时,由库伦定律,电场力为

$$F = \frac{kq}{r^2},$$

则功的微元为

$$dW = \frac{kq}{r^2} dr,$$

所求功为

$$W = \int_a^b \frac{kq}{r^2} dr = kq \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.2:一蓄满水的圆柱形水桶高为 $5m$,底圆半径为 $3m$,试问要把桶中的水全部吸出需作多少功?

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.2:一蓄满水的圆柱形水桶高为5m,底圆半径为3m,试问要把桶中的水全部吸出需作多少功?

解:在任一小区间 $[x, x + dx]$ 上的一薄层水的重力为

$$\rho g \pi 3^2 dx (KN),$$

这薄层水吸出桶外所做的功的微元为

$$dW = 9\pi \rho g x dx,$$

故所求的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 9\pi \rho g x dx \\ &= 9\pi \rho g \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 \\ &= \frac{225}{2} \pi \rho g (KJ). \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.3:一水平横放的半径为 R 的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题

6.各节参考答案

例5.3:一水平横放的半径为 R 的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解:如下左图,

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

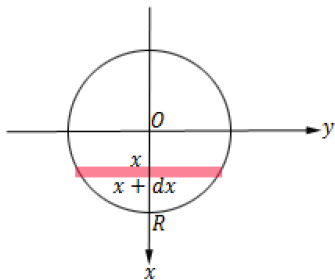
5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力
- (4)课后习题

6.各节参考答案

例5.3:一水平横放的半径为 R 的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解:如下左图,



1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.3:一水平横放的半径为 R 的圆桶,内盛半桶密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解:如下左图,

显然有

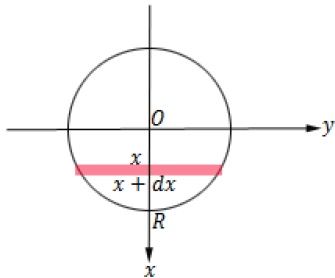
$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2},$$

利用对称性,侧压力的微元是

$$dP = 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

因此所受侧压力为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2\rho g}{3} R^3. \end{aligned}$$



1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.4:一根长为 l 的均匀细杆,质量为 M ,在其中垂线上相距细杆为 a 处有一质量为 m 的质点,试求细杆对质点的万有引力.

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力**
- (4)课后习题

6.各节参考答案

例5.4:一根长为 l 的均匀细杆,质量为 M ,在其中垂线上相距细杆为 a 处有一质量为 m 的质点,试求细杆对质点的万有引力.

解:如下左图,

1.平面图形的面积

- (1)直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2)参数方程表示的平面图形的面积
- (3)极坐标表示的平面图形的面积
- (4)课后习题

2.由平行截面面积求体积

- (1)一般截面求体积
- (2)旋转体的体积
- (3)课后习题

3.平面曲线的弧长

- (1)光滑曲线的弧长公式
- (2)直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3)课后习题

4.旋转曲面的面积

- (1)微元法
- (2)旋转曲面的面积
- (3)课后习题

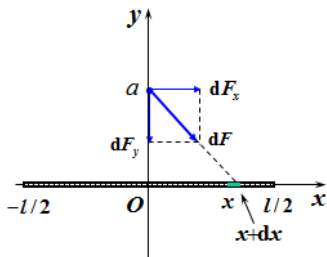
5.定积分在物理上的应用

- (1)功
- (2)液体的侧压力
- (3)引力**
- (4)课后习题

6.各节参考答案

例5.4:一根长为 l 的均匀细杆,质量为 M ,在其中垂线上相距细杆为 a 处有一质量为 m 的质点,试求细杆对质点的万有引力.

解:如下左图,



1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

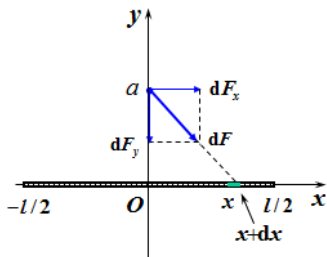
5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

例5.4:一根长为 l 的均匀细杆,质量为 M ,在其中垂线上相距细杆为 a 处有一质量为 m 的质点,试求细杆对质点的万有引力.

解:如下左图,



任取 $[x, x + dx] \subset [-l/2, l/2]$,
则其质量微元为

$$dM = \frac{M}{l} dx,$$

它对质点 m 的引力为

$$\begin{aligned} dF &= \frac{kmdM}{r^2} \\ &= \frac{km}{a^2 + x^2} \cdot \frac{M}{l} dx. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

由于细杆各点对质点 m 的引力方向不同,不能直接对 dF 积分,为此将 dF 分解到 x 轴和 y 轴两个方向上,得

$$dF_x = dF \sin \theta, dF_y = dF \cos \theta,$$

故

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{-l/2}^{l/2} dF_y \\ &= 2 \int_0^{l/2} \frac{kmMa}{l} (a^2 + x^2)^{-3/2} dx \\ &= \frac{2kmM}{a\sqrt{4a^2 + l^2}}, \\ F_x &= \int_{-l/2}^{l/2} dF_x \\ &= 0. \end{aligned}$$

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

- (1) 一圆锥形水池,池口直径30米,深10米,池中盛满了水,试求将全部池水抽出池外需作的功.
- (2) 一水平横放的半径为 R 的圆桶,内盛满密度为 ρ 的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.
- (3) 设星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (a > 0)$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点距离的立方,在原点处有一单位质点,求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

1. 平面图形的面积

- (1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积
- (2) 参数方程表示的平面图形的面积
- (3) 极坐标表示的平面图形的面积
- (4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

- (1) 一般截面求体积
- (2) 旋转体的体积
- (3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

- (1) 光滑曲线的弧长公式
- (2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长
- (3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

- (1) 微元法
- (2) 旋转曲面的面积
- (3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

- (1) 功
- (2) 液体的侧压力
- (3) 引力
- (4) 课后习题

6. 各节参考答案

平面图形的面积

$$(1) \frac{8}{3} \quad (2) \frac{253}{12} \quad (3) ab\pi \quad (4) \pi r^2 \quad (5) a^2 \quad (6) \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

由平行截面面积求体积

$$(1) \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha \quad (2) \frac{5}{6} \pi \quad (3) \frac{4}{3} \pi ab^2 \quad (4) \frac{448}{15} \pi$$

平面曲线的弧长

$$(1) \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad (2) 4n \quad (3) 8a \quad (4) \frac{3}{2} \pi a$$

旋转曲面的面积

$$(1) 4\pi a^2 \quad (2) \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1) \quad (3) \frac{8\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1) \quad (4) \frac{12}{5} \pi a^2$$

定积分在物理上的应用

$$(1) 1875 \rho g \pi \quad (2) \rho g \pi R^3 \quad (3) \frac{3}{5} \sqrt{2} k a^2$$

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标方程表示的平面图形的面积

(2) 参数方程表示的平面图形的面积

(3) 极坐标表示的平面图形的面积

(4) 课后习题

2. 由平行截面面积求体积

(1) 一般截面求体积

(2) 旋转体的体积

(3) 课后习题

3. 平面曲线的弧长

(1) 光滑曲线的弧长公式

(2) 直角坐标和极坐标表示的光滑曲线弧长

(3) 课后习题

4. 旋转曲面的面积

(1) 微元法

(2) 旋转曲面的面积

(3) 课后习题

5. 定积分在物理上的应用

(1) 功

(2) 液体的侧压力

(3) 引力

(4) 课后习题

6. 各节参考答案