第三章 函数的极限与连续

陈 颖

北京电子科技学院基础部

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

设A为一常数,若对任意给定的正数ε,总存在一个正数M,使得对于满足不等式$|x|>M$的一切x,均有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称A为$f(x)$当$x\to\infty$ 时的极限,记作

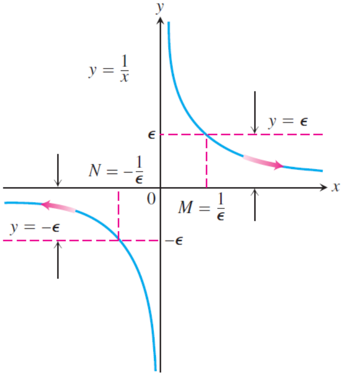
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A, \text{或} f(x)\to A(x\to\infty).$$

设A为一常数,若对任意给定的正数ε,总存在一个正数M,使得对于满足不等式$|x| > M$的一切x,均有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立,则称A为$f(x)$当$x \to \infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,\text{或} f(x) \to A(x \to \infty).$$



例1.1:证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

例1.1:证明$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

证:任给$\varepsilon>0$,取$M=\frac{1}{\varepsilon}$,当$|x|>M$时,

$$|f(x)-0|=|\frac{1}{x}|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例1.2:证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

例1.2:证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

证:任给$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, 取$M=\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$,因为$\arctan x$在其定义域内为严格单调递增函数,当$x>M$时,

$$|f(x)-\frac{\pi}{2}|=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

例1.3:证明 $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

例1.3:证明$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0.$

证:任给$0<\varepsilon<1$,取$M=-\ln\varepsilon$,因为e^x在其定义域内是严格单调递增函数,当$x<-M$时,

$$|e^x-0|=e^x<e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0.$$

1.函数极限

(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题

2.函数的连续性

(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题

3.无穷小量与无穷大量

(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题

4.各节参考答案

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域内有定义,A为一常数,若对任意给定的正数ε, 总存在一个正数δ,使得对于满足条件$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,均有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称A为$f(x)$当$x\to x_0$ 时的极限,记作

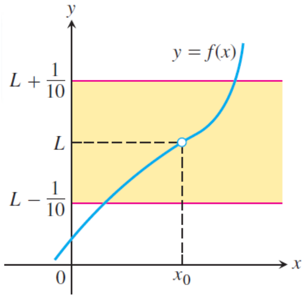
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \text{或} f(x)\to A(x\to x_0).$$

设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域内有定义,A为一常数,若对任意给定的正数ε, 总存在一个正数δ,使得对于满足条件$0 < |x - x_0| < \delta$的一切x,均有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立,则称A为$f(x)$当$x \to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{或} f(x) \to A(x \to x_0).$$

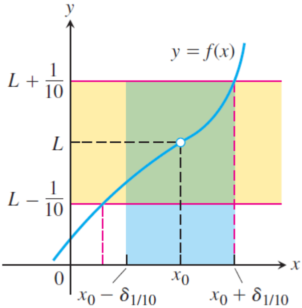


设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域内有定义,A为一常数,若对任意给定的正数ε, 总存在一个正数δ,使得对于满足条件$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,均有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称A为$f(x)$当$x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \text{或} f(x)\to A(x\to x_0).$$

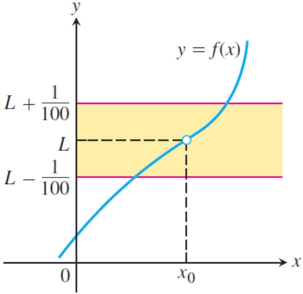


设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域内有定义,A为一常数,若对任意给定的正数ε, 总存在一个正数δ,使得对于满足条件$0 < |x - x_0| < \delta$的一切x,均有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立,则称A为$f(x)$当$x \to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{或} f(x) \to A(x \to x_0).$$

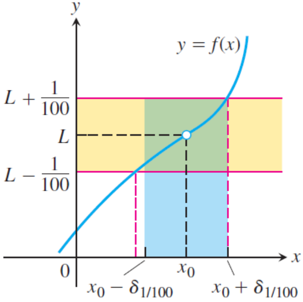


设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域内有定义,A为一常数,若对任意给定的正数ε, 总存在一个正数δ,使得对于满足条件$0 < |x - x_0| < \delta$的一切x,均有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立,则称A为$f(x)$当$x \to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{或} f(x) \to A(x \to x_0).$$



例1.4:证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

例1.4:证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

证:对任给的$\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon$,那么

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}\right| \\
&= \frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2} \\
&< |x-1|<\delta=\varepsilon
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

例1.5:证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$.

例1.5:证明$\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$.

证:对任给的$\varepsilon > 0$,取$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\}$,那么

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x+x_0||x-x_0| \\ &< (|x|+|x_0|)|x-x_0| \\ &< (1+2|x_0|)|x-x_0| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2.$$

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

- 左极限

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^{-0}) = A$$

- 左极限

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^{-0}) = A$$

- 右极限

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^{+0}) = A$$

- 左极限

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^{-0}) = A$$

- 右极限

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^{+0}) = A$$

- **双侧极限存在的充要条件是两个单侧极限存在且相等,即**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x_0^{-0}) = A = f(x_0^{+0})$$

- 左极限

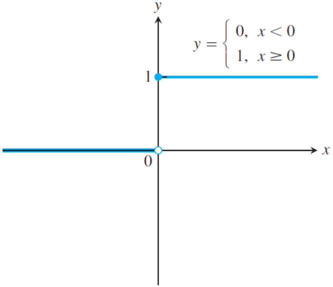
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^{-0}) = A$$

- 右极限

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^{+0}) = A$$

- **双侧极限存在的充要条件是两个单侧极限存在且相等,即**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x_0^{-0}) = A = f(x_0^{+0})$$



- 左极限

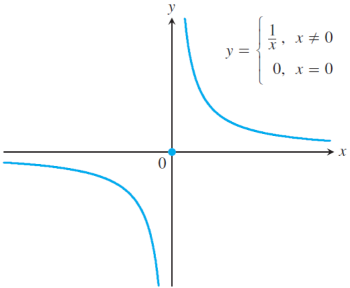
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^{-0}) = A$$

- 右极限

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^{+0}) = A$$

- **双侧极限存在的充要条件是两个单侧极限存在且相等,即**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x_0^{-0}) = A = f(x_0^{+0})$$



- 左极限

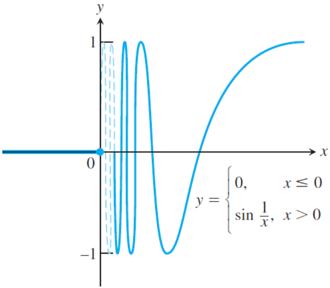
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A$$

- 右极限

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A$$

- **双侧极限存在的充要条件是两个单侧极限存在且相等,即**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x_0 - 0) = A = f(x_0 + 0)$$



例1.6:证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

例1.6:证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

证:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

左右极限不相等,所以 $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

例1.6:证明$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

证:

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

左右极限不相等,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例1.7:证明$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$不存在.

例1.6:证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

证:

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

左右极限不相等,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例1.7:证明 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

解:

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

1.函数极限

(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题

2.函数的连续性

(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题

3.无穷小量与无穷大量

(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题

4.各节参考答案

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,那么

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,那么

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,那么

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,那么

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,那么

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

例1.8:求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,那么

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B;$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0).$

例1.8:求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)}=\dfrac{5}{3}.$

例1.9:求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

例1.9:求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

解:
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

例1.9:求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

解:$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

例1.10:求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

例1.9:求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

解:$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

例1.10:求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

解:$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0.$$

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

- **唯一性**:若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

- **唯一性**:若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

- **局部有界性**:若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则f在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$内有界.

- **唯一性**:若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

- **局部有界性**:若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则f在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$内有界.

- **局部保号性**:若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$(或 < 0),则f在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$ 内都有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

- **唯一性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.
- **局部有界性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则f在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$内有界.
- **局部保号性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$(或 < 0),则f在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$ 内都有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).
- **保不等式性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在,且在某邻域$U^\circ(x_0;\delta)$内有$f(x) \le g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

- **唯一性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

- **局部有界性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则f在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$内有界.

- **局部保号性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$(或 < 0),则f在x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$ 内都有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

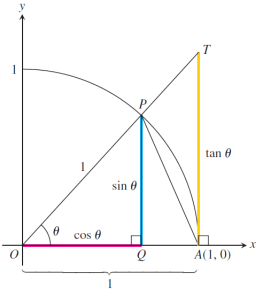
- **保不等式性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在,且在某邻域$U^\circ(x_0;\delta)$内有$f(x) \le g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

- **迫敛性**:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$,且在某邻域$U^\circ(x_0;\delta)$内有$f(x) \le h(x) \le g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

例1.11:证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例1.11:证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

证:如下图,



当$x>0$时有

$$S_{\triangle OPA}<S_{扇形OPA}<S_{\triangle OTA},$$

即

$$\sin x < x < \tan x,$$

所以

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

又

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$

由迫敛性知

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

当$x < 0$时,那么$-x > 0$,故

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{-x\to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = 1.$$

综上所述,命题成立.

例1.12:证明$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

例1.12:证明$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

证:当$x\to+\infty$时,

$$[x]\le x<[x]+1,$$

故

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}=e,$$

由迫敛性知

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

当$x \to -\infty$时,有

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty}(1+\frac{1}{x})^x &\overset{x=-t}{=} \lim_{-t \to -\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t} \\
&= \lim_{t \to +\infty}(\frac{t}{t-1})^t \\
&= \lim_{t \to +\infty}((1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})) \\
&= e.
\end{aligned}$$

综上所述,命题得证.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

- **单调有界定理**:设f为定义在$U^\circ(x_0;\delta)$上的单调有界函数,则极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

- **单调有界定理**:设f为定义在$U^\circ(x_0;\delta)$上的单调有界函数,则极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

- **归结原则**:设函数f在$U^\circ(x_0;\delta)$内有定义,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是对任何含于$U^\circ(x_0;\delta)$且以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 (n \to \infty) 有 \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

- **单调有界定理**:设f为定义在$U^\circ(x_0;\delta)$上的单调有界函数,则极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

- **归结原则**:设函数f在$U^\circ(x_0;\delta)$内有定义,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是对任何含于$U^\circ(x_0;\delta)$且以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 (n\to\infty) \text{有} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

- **柯西准则**:设函数f在$U^\circ(x_0;\delta)$内有定义,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是任给$\varepsilon > 0$,都有正数$\delta' < \delta$, 使得对任何的$x', x'' \in U^\circ(x_0;\delta')$ 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}=?$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=?$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=?$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+4}-2}{x}=?$

(5) 如果$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=1$,那么$\lim\limits_{x\to 4}f(x)=?$

(6) 如果$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=1$,那么$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=?$

(7) 如果$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=10$,那么$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=?$

(8) 如果$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,那么$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=?\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x}=?$

(9) 如果$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,那么$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=?\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=?$

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

$f(x)$在点x_0处连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处左连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0^-$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处左连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0^-$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处右连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0^+$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处左连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0^-$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处右连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0^+$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

点x_0处连续的增量定义:

$$x \to x_0\text{时}, f(x) \to f(x_0)$$

等价于

$$\triangle x \to 0\text{时}, \triangle y \to 0,$$

其中

$$\triangle x = x - x_0,$$

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

$f(x)$在点x_0处连续:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处**左连续**:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0^-$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

$f(x)$在点x_0处**右连续**:

(1) $f(x)$在x_0处有定义;

(2) $x \to x_0^+$时$f(x)$有极限;

(3) 极限值等于$f(x_0)$.

点x_0处连续的增量定义:

$$x \to x_0\text{时}, f(x) \to f(x_0)$$

等价于

$$\triangle x \to 0\text{时}, \triangle y \to 0,$$

其中

$$\triangle x = x - x_0,$$

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

在点x_0处连续意味着极限运算$\lim\limits_{x\to x_0}$与对应法则f的**可交换性**.

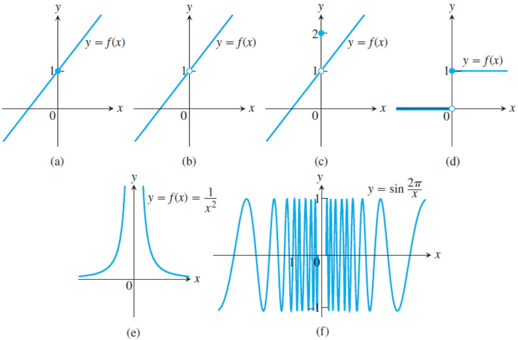
若$f(x)$在x_0处不连续,则称$f(x)$在点x_0处**间断**,而x_0则称为$f(x)$的**间断点**.

(1) 第一类间断点:左右极限存在

- 可去间断点
- 跳跃间断点

(2) 第二类间断点:左右极限至少有一个不存在

- 无穷间断点
- 振荡间断点



例2.1:将函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$延拓成$(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

例2.1:将函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$延拓成$(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

解:$x_0\neq 0$时,当$x\to x_0$, 取$\varepsilon=\dfrac{|x_0|}{2}>0$,我们有$|x-x_0|<\dfrac{|x_0|}{2}$,推出$|x|>\dfrac{|x_0|}{2}$,注意到

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x_0}{x_0}\right| &= \frac{|x_0\sin x - x\sin x_0|}{|xx_0|}\\
&= \frac{|x_0\sin x - x_0\sin x_0 + x_0\sin x_0 - x\sin x_0|}{|xx_0|}\\
&\leq \frac{|\sin x-\sin x_0|}{|x|}+\frac{|\sin x_0||x-x_0|}{|xx_0|}\\
&= \frac{2|\sin\frac{x-x_0}{2}||\cos\frac{x+x_0}{2}|}{|x|}+\frac{|\sin x_0||x-x_0|}{|xx_0|}\\
&\leq \frac{|x-x_0|}{|x|}+\frac{|\sin x_0||x-x_0|}{|xx_0|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|x-x_0|}{|x|}(1+\frac{|\sin x_0|}{|x_0|}) \\
&< \frac{2|x-x_0|}{|x_0|}(1+\frac{|\sin x_0|}{|x_0|}) \to 0
\end{aligned}
$$

所以$f(x)$在点$x_0 \neq 0$处连续. 又$f(x)$在点$x=0$处没有定义而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

故$x=0$为可去间断点,我们可以如下定义,令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$$

显然,$F(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

- 连续函数是局部有界的.

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin(x-\sin x)$

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)=0$

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan x))$

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan x))=1$

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan x))=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sec(x\sec^2 x-\tan^2 x-1)$

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan x))=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sec(x\sec^2 x-\tan^2 x-1)=1$

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan x))=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sec(x\sec^2 x-\tan^2 x-1)=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\tan(\frac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3}))$

- 连续函数是局部有界的.
- 连续函数是局部保号的.
- 有限多个连续函数的四则运算(除数不为零)仍然是连续函数.
- 连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 原函数严格单调连续则反函数也连续.
- 任何初等函数都是连续的.

请计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan x))=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sec(x\sec^2 x-\tan^2 x-1)=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\tan(\frac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3}))=1$

例2.2:设$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{array}\right.$,$\varphi(x)=\left\{\begin{array}{ll} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{array}\right.$,讨论复合函数$f(\varphi(x))$的连续性.

例2.2:设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$,$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$,讨论复合函数$f(\varphi(x))$的连续性.

解: $f(\varphi(x))=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases}$

例2.2:设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$,$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$,讨论复合函数$f(\varphi(x))$的连续性.

解: $f(\varphi(x))=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases}$

$$=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

例2.2:设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$,$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$,讨论复合函数$f(\varphi(x))$的连续性.

解: $f(\varphi(x))=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases}$

$$=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

$x\neq 1$时,$f(\varphi(x))$为初等函数,故此时连续.而

$$\lim_{x\to 1^-} f(\varphi(x))=\lim_{x\to 1^-} x^2=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(\varphi(x))=\lim_{x\to 1^+}(-2-x)=-3,$$

$f(\varphi(x))$在点$x=1$处左右极限不相等,所以不连续.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

- **最值定理**

- **最值定理**

闭区间上连续的函数一定存在最大值和最小值.

- **最值定理**

闭区间上连续的函数一定存在最大值和最小值.

注意:若函数在**开区间**上连续,或在闭区间上存在**间断点**,结论不一定成立.

- **最值定理**

闭区间上连续的函数一定存在最大值和最小值.

注意:若函数在**开区间**上连续,或在闭区间上存在**间断点**,结论不一定成立.

请分别作出如下函数的图像:

(1) $y = x, x \in (0, 1)$.

(2) $y = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$.

- **最值定理**

闭区间上连续的函数一定存在最大值和最小值.

注意:若函数在**开区间**上连续,或在闭区间上存在**间断点**,结论不一定成立.

请分别作出如下函数的图像:

(1) $y = x, x \in (0, 1)$.

(2) $y = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$.

推论:闭区间上的连续函数必有界.

- 介值定理

- **介值定理**

设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$, 则对任意的$A<C<B$,至少有一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=C$.

- **介值定理**

设$f(x)\in C[a,b]$,且$f(a)=A,f(b)=B,A\neq B$, 则对任意的$A<C<B$,至少有一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=C$.

推论1:闭区间上的连续函数必可取介于最小值与最大值之间的任何值.

- **介值定理**

设$f(x) \in C[a,b]$,且$f(a)=A, f(b)=B, A \neq B$, 则对任意的$A<C<B$,至少有一点$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi)=C$.

推论1:闭区间上的连续函数必可取介于最小值与最大值之间的任何值.

推论2:$f(x) \in C[a,b]$,且$f(a)f(b)<0$,那么至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi)=0$.

例2.3:设$f(x) \in C[0,2a], f(0) = f(2a)$, 证明至少存在一点$\xi \in [0,a]$,使得$f(\xi) = f(\xi + a)$.

例2.3:设$f(x) \in C[0,2a], f(0) = f(2a)$, 证明至少存在一点$\xi \in [0,a]$,使得$f(\xi) = f(\xi + a)$.

证:令

$$\varphi(x) = f(x+a) - f(x),$$

例2.3:设$f(x) \in C[0,2a], f(0)=f(2a)$, 证明至少存在一点$\xi \in [0,a]$,使得$f(\xi)=f(\xi+a)$.

证:令

$$\varphi(x)=f(x+a)-f(x),$$

那么$\varphi(x) \in [0,a]$,其中

$$\varphi(0)=f(a)-f(0),$$

$$\varphi(a)=f(2a)-f(a),$$

例2.3:设$f(x) \in C[0,2a], f(0) = f(2a)$, 证明至少存在一点$\xi \in [0,a]$,使得$f(\xi) = f(\xi + a)$.

证:令

$$\varphi(x) = f(x+a) - f(x),$$

那么$\varphi(x) \in [0,a]$,其中

$$\varphi(0) = f(a) - f(0),$$

$$\varphi(a) = f(2a) - f(a),$$

所以$\varphi(0)\varphi(a) = -(f(a) - f(0))^2$,

例2.3:设$f(x) \in C[0,2a], f(0) = f(2a)$, 证明至少存在一点$\xi \in [0,a]$,使得$f(\xi) = f(\xi + a)$.

证:令

$$\varphi(x) = f(x+a) - f(x),$$

那么$\varphi(x) \in [0,a]$,其中

$$\varphi(0) = f(a) - f(0),$$

$$\varphi(a) = f(2a) - f(a),$$

所以$\varphi(0)\varphi(a) = -(f(a) - f(0))^2$,

(i) 如果$f(a) = f(0)$,则$f(a) = f(2a)$,那么$\xi = 0$或a满足要求;

例2.3:设$f(x) \in C[0,2a], f(0) = f(2a)$,证明至少存在一点$\xi \in [0,a]$,使得$f(\xi) = f(\xi + a)$.

证:令

$$\varphi(x) = f(x+a) - f(x),$$

那么$\varphi(x) \in [0,a]$,其中

$$\varphi(0) = f(a) - f(0),$$

$$\varphi(a) = f(2a) - f(a),$$

所以$\varphi(0)\varphi(a) = -(f(a) - f(0))^2$,

(i) 如果$f(a) = f(0)$,则$f(a) = f(2a)$,那么$\xi = 0$或a满足要求;

(ii) 如果$f(a) \neq f(0)$,则$\varphi(0)\varphi(a) < 0$,由介值定理知至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得$\varphi(0)\varphi(a) = 0$,即$f(\xi) = f(\xi + a)$.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

设$f(x)$为定义在区间I上的函数,如果对于任意的正数$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使得对任意$x_1, x_2 \in I$,只要

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称$f(x)$ 在区间I上是**一致连续**.

设$f(x)$为定义在区间I上的函数,如果对于任意的正数$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使得对任意$x_1, x_2 \in I$,只要

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称$f(x)$ 在区间I上是**一致连续**.

注:闭区间的连续函数必然是一致连续的.

例2.4:证明$f(x) = \sqrt{x}$在$[1, +\infty)$上一致连续.

例2.4:证明$f(x)=\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

证:$\forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$,有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| = \frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \le |x_1-x_2|,$$

所以对$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon$,当

$$|x_1-x_2| < \delta,$$

必有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| < \varepsilon,$$

故命题得证.

例2.5:证明$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$ 内不一致连续.

例2.5:证明$f(x)=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$ 内不一致连续.

证:取$\varepsilon=\frac{1}{2}$,对任意正数δ,总存在自然数n满足

$$\frac{1}{n(n+1)}<\delta,$$

令

$$x_1=\frac{1}{n},x_2=\frac{1}{n+1},$$

此时$|x_1-x_2|=\frac{1}{n(n+1)}<\delta$, 但

$$|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|=1>\varepsilon,$$

故命题得证.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

(1) 设函数$f(x)=\begin{cases} 8-x, & x<3 \\ 3, & x=3 \\ \dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x>3 \end{cases}$,则$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=?$

(2) 求出函数$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的所有间断点并判断类型.

(3) 函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\ne 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,那么$a=?$

(4) 函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0 \\ 3x^2-2x+a, & x\ge 0 \end{cases}$ 在$x=0$处连续,那么$a=?$

(5) 证明方程$x^5-3x-1=0$在区间$(1,2)$内至少有一个实根.

(6) 判断函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$ 是否一致连续.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

设f在某$U^\circ(x_0)$上有定义,如果其有界,则称为$x\to x_0$时的**有界量**.进一步的,如果有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0,$$

则称f 为$x\to x_0$时的**无穷小量**.例如:

$x-1$为$x\to 1$时的无穷小量;

$\sqrt{1-x^2}$为$x\to 1^-$时的无穷小量;

$\dfrac{\sin x}{x}$为$x\to\infty$时的无穷小量;

$\sin x$为$x\to\infty$时的有界量.

设f在某$U^\circ(x_0)$上有定义,如果其有界,则称为$x\to x_0$时的**有界量**.进一步的,如果有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0,$$

则称f 为$x\to x_0$时的**无穷小量**.例如:

$x-1$为$x\to 1$时的无穷小量;

$\sqrt{1-x^2}$为$x\to 1^-$时的无穷小量;

$\frac{\sin x}{x}$为$x\to\infty$时的无穷小量;

$\sin x$为$x\to\infty$时的有界量.

无穷小量的性质:

两个(类型相同的)无穷小量的和,差,积仍是无穷小量;

无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

以∞, $+\infty$,或$-\infty$为非正常极限的函数或是数列,称为**无穷大量**.

以∞, $+\infty$,或$-\infty$为非正常极限的函数或是数列,称为**无穷大量**.

注1:无穷大量不是很大的数,而是具有非常极限的函数.

以∞, $+\infty$,或$-\infty$为非正常极限的函数或是数列,称为**无穷大量**.

注1:无穷大量不是很大的数,而是具有非常极限的函数.

注2:无穷大量一定是无界函数,而无界函数却不一定是无穷大量.

以∞, $+\infty$,或$-\infty$为非正常极限的函数或是数列,称为**无穷大量**.

注1:无穷大量不是很大的数,而是具有非常极限的函数.

注2:无穷大量一定是无界函数,而无界函数却不一定是无穷大量.

注3:无穷大量的倒数是无穷小量.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

- 高阶无穷小

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

记作

$$f(x) = o(g(x)) \ (x \to x_0)$$

- **高阶无穷小**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

记作

$$f(x)=o(g(x))\ \ (x\to x_0)$$

- **同阶无穷小**

$$0<K\leq|\frac{f(x)}{g(x)}|\leq L$$

特别地

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$$

- 高阶无穷小

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

记作

$$f(x) = o(g(x)) \ \ (x \to x_0)$$

- 同阶无穷小

$$0 < K \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le L$$

特别地

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

- 等价无穷小

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

记作

$$f(x) \sim g(x) \ \ (x \to x_0)$$

注1:当两个无穷小量$f(x)$和$g(x)$ 满足$|\frac{f(x)}{g(x)}| \leq L$时,则可记作

$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to x_0).$$

注1:当两个无穷小量$f(x)$和$g(x)$ 满足$|\frac{f(x)}{g(x)}| \leq L$时,则可记作
$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to x_0).$$

注2:这里的
$$f(x) = o(g(x)) \ (x \to x_0)$$
和
$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to x_0)$$
与通常的等式是不同的,这两个式子的右边本质上只是表示一类函数.也就是说,这里的"$=$"类似于"$\in$".

注**1**:当两个无穷小量$f(x)$和$g(x)$ 满足$|\dfrac{f(x)}{g(x)}| \leq L$时,则可记作

$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to x_0).$$

注**2**:这里的

$$f(x) = o(g(x)) \ (x \to x_0)$$

和

$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to x_0)$$

与通常的等式是不同的,这两个式子的右边本质上只是表示一类函数.也就是说,这里的"$=$"类似于"$\in$".

注**3**:$o(1)$表示无穷小量,$O(1)$表示有界函数.

例3.1:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

例3.1:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例3.1:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例3.2:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

例3.1:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例3.2:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1.$

例3.1:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例3.2:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1.$

例3.3: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

例3.1:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

例3.2:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1.$

例3.3:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\tan(\arctan x)}=1.$

例3.4:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}$.

例3.4:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\dfrac{x}{2})^2}{(\dfrac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2=1.$

例3.4:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\dfrac{x}{2})^2}{(\dfrac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2=1.$

例3.5:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

例3.4:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\frac{x}{2})^2}{(\frac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=1.$

例3.5:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$

例3.4:求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin\frac{x}{2})^2}{(\frac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=1.$

例3.5:求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$

例3.6:求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

例3.4:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\frac{x}{2})^2}{(\frac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=1.$

例3.5:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$

例3.6:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解:原式$\overset{e^x-1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1.$

例3.7:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}$.

例3.7:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha\ln(1+x)}\overset{(1+x)^\alpha-1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\alpha\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+t)}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

例3.7:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha\ln(1+x)}\overset{(1+x)^\alpha-1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\alpha\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+t)}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

当$x\to 0$时,

例3.7:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha\ln(1+x)}\overset{(1+x)^{\alpha}-1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\alpha\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1.$

当$x\to 0$时,

$\sin x\sim x$	$\tan x\sim x$	$\arcsin x\sim x$	$\arctan x\sim x$
$\ln(1+x)\sim x$	$e^x-1\sim x$	$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$	$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

例3.7:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}$.

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha\ln(1+x)}\overset{(1+x)^\alpha-1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\alpha\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+t)}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

当$x\to 0$时,

$$\sin x\sim x\qquad \tan x\sim x\qquad \arcsin x\sim x\qquad \arctan x\sim x$$
$$\ln(1+x)\sim x\quad e^x-1\sim x\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

当$f(x)\sim g(x)\ \ (x\to x_0)$ 时,

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$;

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=B$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=B$.

例3.8:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

例3.8:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.8:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.9:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

例3.8:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.9:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.8:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.9:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.10:求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$.

例3.8:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.9:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

例3.10:求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例3.11:求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

例3.11:求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-cosx}}-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}=\sqrt{2}.$

例3.11:求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-cosx}}-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}=\sqrt{2}.$

例3.12:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

例3.11:求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-cosx}}-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}=\sqrt{2}.$

例3.12:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^3}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^3}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3}=0.$

例3.11:求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-cosx}}-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}=\sqrt{2}.$

例3.12:求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^3}=0.$

解:原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}.$

$\boxed{\text{Why?}}$

$\boxed{\text{Why?}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-cosx}}}_{\text{存在}}-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}}_{\text{存在}}$$

$\boxed{\text{Why?}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-cosx}}}_{\text{存在}}-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}}_{\text{存在}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3}}_{\text{不存在}}-\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}}_{\text{不存在}}$$

$\boxed{\text{Why?}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan 2x-\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-cosx}}}_{\text{存在}}-\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}}_{\text{存在}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x^3}}_{\text{不存在}}-\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}}_{\text{不存在}}$$

$\boxed{\text{两个等价无穷小量不能随便替换相减!}}$

例3.13:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x+x^2)+\ln(1+x+x^2)}{x^2}$.

例3.13:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x+x^2)+\ln(1+x+x^2)}{x^2}$.

解:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x}+1)+\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}+1)=2
\end{aligned}$$

例3.13:求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x+x^2)+\ln(1+x+x^2)}{x^2}$.

解:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x}+1)+\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}+1)=2\end{aligned}$$

再做一遍例3.13吧!

例3.13:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x+x^2)+\ln(1+x+x^2)}{x^2}$.

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x}+1)+\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}+1)=2
\end{aligned}
$$

再做一遍例3.13吧!

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln((1+x^2)^2-x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1.$

$\boxed{\text{与例3.12同样的道理}}$

$\boxed{\text{与例3.12同样的道理}}$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2}\\
&= \underbrace{\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x}+1)}_{\text{不存在}}+\underbrace{\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}+1)}_{\text{不存在}}
\end{aligned}
$$

与例3.12同样的道理

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x}+1)}_{\text{不存在}}+\underbrace{\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}+1)}_{\text{不存在}}
\end{aligned}$$

两个等价无穷小量不能随便替换相加!

1.函数极限

(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题

2.函数的连续性

(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题

3.无穷小量与无穷大量

(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题

4.各节参考答案

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

- **水平渐近线**:水平直线$y=y_0$是曲线$y=f(x)$的水平渐近线当且仅当

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0 \text{ 或 } \lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0$$

成立.

- **水平渐近线**:水平直线$y=y_0$是曲线$y=f(x)$的水平渐近线当且仅当

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0 \ \text{或} \ \lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0$$

成立.

例3.14:考察曲线$y=2+\dfrac{\sin x}{x}$的水平渐近线.

- **水平渐近线**:水平直线$y=y_0$是曲线$y=f(x)$的水平渐近线当且仅当

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0 \text{ 或 } \lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0$$

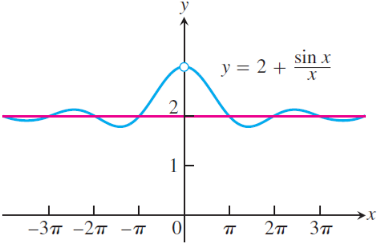
成立.

例3.14:考察曲线$y=2+\dfrac{\sin x}{x}$的水平渐近线.

解:

$$\lim_{x\to\infty}(2+\frac{\sin x}{x})=2+0=2,$$

故水平渐近线为$y=2$.



- **斜渐近线**:斜率不为零的某条直线$y = k_0x + b_0$是曲线$y = f(x)$的斜渐近线当且仅当

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (k_0x + b_0)) = 0$$

或

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (k_0x + b_0)) = 0$$

成立.其中

$$k_0 = \lim \frac{f(x)}{x},$$

$$b_0 = \lim(f(x) - k_0x).$$

例3.15:考察曲线$y=\dfrac{2x^2-3}{7x+4}$的斜渐近线.

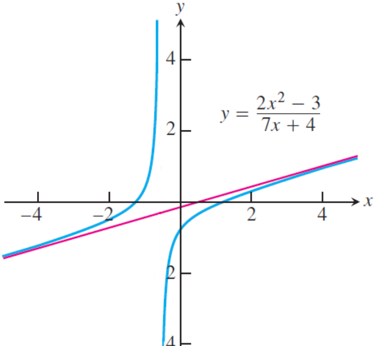
例3.15:考察曲线$y=\dfrac{2x^2-3}{7x+4}$的斜渐近线.

解:设斜渐近线的方程为$y=k_0x+b_0$,那么

$$k_0=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{7x^2+4x}=\frac{2}{7},$$

$$b_0=\lim_{x\to\infty}(f(x)-\frac{2}{7}x)=\lim_{x\to\infty}-\frac{8x+21}{49x+28}=-\frac{8}{49},$$

所以所求的直线为$y=\frac{2}{7}x-\frac{8}{49}$.



- **垂直渐近线**:垂直直线$x = x_0$是曲线$y = f(x)$的垂直渐近线当且仅当

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$$

成立.

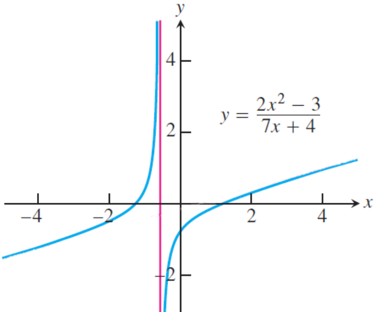
- **垂直渐近线**:垂直直线$x = x_0$是曲线$y = f(x)$的垂直渐近线当且仅当
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$$
成立.

例3.16:考察曲线$y = \dfrac{2x^2 - 3}{7x + 4}$的垂直渐近线.

- **垂直渐近线**:垂直直线$x=x_0$是曲线$y=f(x)$的垂直渐近线当且仅当
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$$
成立.

例3.16:考察曲线$y=\dfrac{2x^2-3}{7x+4}$的垂直渐近线.

解:
$$\lim_{x\to -4/7}\frac{2x^2-3}{7x+4}=\infty,$$
故垂直渐近线为$x=-\frac{4}{7}$.



1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

(1) 当$x \to 0$时,$\sqrt{1-x}-1$与x是等价无穷小、同阶无穷小、还是高阶无穷小?

(2) 当$x \to 0$时,$\sin^p x (p>0)$与x是等价无穷小、同阶无穷小、还是高阶无穷小?

(3) 当$x \to 0^+$时,$\sqrt{x+\sqrt{x}}$与$\sqrt[8]{x}$ 是等价无穷小、同阶无穷小、还是高阶无穷小?

(4) 当$x \to \infty$时,$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$与$\dfrac{1}{x^2}$ 是等价无穷小、同阶无穷小、还是高阶无穷小?

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-2\sin^2 x}{6x^3+4\sin^2 x} = ?$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{x\sin x} = ?$

(7) 求函数$y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$的渐近线.

1.函数极限
(1)自变量趋近于无穷
(2)自变量趋近于定点
(3)左极限和右极限
(4)函数极限的四则运算
(5)函数极限的性质
(6)函数极限存在的条件
(7)课后习题
2.函数的连续性
(1)连续与间断
(2)连续函数的性质
(3)闭区间的连续函数
(4)一致连续
(5)课后习题
3.无穷小量与无穷大量
(1)定义
(2)无穷小量阶的比较
(3)渐近线
(4)课后习题
4.各节参考答案

函数极限

(1)$\frac{5}{4}$.　(2)4.　(3)$\frac{4}{3}$.　(4)$\frac{5}{4}$.　(5)7.　(6)5.　(7)5.
(8)$4,-2$.　(9)$0,0$.

函数的连续性

(1)5.　(2)$x=0$是跳跃间断点,$x=1$是可去间断点.
(3)-2.　(4)2.　(5)提示:零点定理.
(6)提示:定义$f(0)=0$,分成若干个区间来讨论.

无穷小量与无穷大量

(1)$\sqrt{1-x}-1$和x是同阶无穷小.
(2)$0<p<1, x=o(\sin^p x)$;$p=1, x\sim\sin^p x$;$p>1, \sin^p x=o(x)$.
(3)$\sqrt{x+\sqrt{x}}=o(x)$.　(4)$\frac{1}{x^2}=o(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1})$.
(5)$\frac{3}{4}$.　(6)$\frac{1}{2}$.
(7)水平渐近线$y=-3$;垂直渐近线$x=0, x=-3$.