

第六章 不定积分

陈 颖

北京电子科技学院基础部

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

(1) 微分的反问题

(2) 不定积分的概念

(3) 不定积分与微分的关系

(4) 基本积分表

(5) 不定积分的性质

(6) 课后习题

2. 换元积分法

(1) 第一换元法

(2) 第二换元法

(3) 换元法小结

(4) 课后习题

3. 分部积分法

(1) 分部积分公式

(2) u 和 v' 的选取

(3) 多次分部积分

(4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

(1) 有理函数的不定积分

(2) 三角函数有理式的不定积分

(3) 一类无理根式的不定积分

(4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

(1) 微分的反问题

(2) 不定积分的概念

(3) 不定积分与微分的关系

(4) 基本积分表

(5) 不定积分的性质

(6) 课后习题

2. 换元积分法

(1) 第一换元法

(2) 第二换元法

(3) 换元法小结

(4) 课后习题

3. 分部积分法

(1) 分部积分公式

(2) u 和 v' 的选取

(3) 多次分部积分

(4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

(1) 有理函数的不定积分

(2) 三角函数有理式的不定积分

(3) 一类无理根式的不定积分

(4) 课后习题

5. 各节参考答案

引例:在下述括号中填入适当的函数使等式成立

$$d(\quad) = xdx.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

引例:在下述括号中填入适当的函数使等式成立

$$d(\quad) = xdx.$$

解:因为

$$(x^2)' = 2x,$$

故

$$\frac{1}{2}(x^2)' = x,$$

即

$$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x,$$

所以有

$$d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = xdx.$$

1.不定积分

(1)微分的反问题

(2)不定积分的概念

(3)不定积分与微分的关系

(4)基本积分表

(5)不定积分的性质

(6)课后习题

2.换元积分法

(1)第一换元法

(2)第二换元法

(3)换元法小结

(4)课后习题

3.分部积分法

(1)分部积分公式

(2) u 和 v' 的选取

(3)多次分部积分

(4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

(1)有理函数的不定积分

(2)三角函数有理式的不定积分

(3)一类无理根式的不定积分

(4)课后习题

5.各节参考答案

引例:在下述括号中填入适当的函数使等式成立

$$d(\quad) = xdx.$$

解:因为

$$(x^2)' = 2x,$$

故

$$\frac{1}{2}(x^2)' = x,$$

即

$$(\frac{1}{2}x^2)' = x,$$

所以有

$$d(\frac{1}{2}x^2) = xdx.$$

注:一般地, C 为常数时,

$$d(\frac{1}{2}x^2 + C) = xdx.$$

1.不定积分

(1)微分的反问题

(2)不定积分的概念

(3)不定积分与微分的关系

(4)基本积分表

(5)不定积分的性质

(6)课后习题

2.换元积分法

(1)第一换元法

(2)第二换元法

(3)换元法小结

(4)课后习题

3.分部积分法

(1)分部积分公式

(2) u 和 v' 的选取

(3)多次分部积分

(4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

(1)有理函数的不定积分

(2)三角函数有理式的不定积分

(3)一类无理根式的不定积分

(4)课后习题

5.各节参考答案

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在 $F(x)$,使得对任何的 $x \in I$ 均有

$$F'(x) = f(x),$$

或

$$dF(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**原函数**.显然,求某个导数的原函数就是求微分的反问题.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在 $F(x)$,使得对任何的 $x \in I$ 均有

$$F'(x) = f(x),$$

或

$$dF(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**原函数**.显然,求某个导数的原函数就是求微分的反问题.

注:原函数和它的导数之间并不是一一对应的关系.原函数只有一个导数,而导数却可以有很多个原函数.一般地,如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $f(x)$ 的任一原函数都可以表示成

$$F(x) + C$$

的形式,其中 C 为常数.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

函数 $f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的不定积分,记作

$$\int f(x)dx,$$

其中

- ▶ \int 称为积分号,
- ▶ x 称为积分变量,
- ▶ $f(x)$ 称为被积函数,
- ▶ $f(x)dx$ 称为被积表达式.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系**
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系**
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

不定积分与微分互为逆运算,它们满足如下关系:

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系**
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

不定积分与微分互为逆运算,它们满足如下关系:



$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

或

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

这说明先求不定积分再求微分,两者作用抵消.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

不定积分与微分互为逆运算,它们满足如下关系:



$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

或

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

这说明先求不定积分再求微分,两者作用抵消.



$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

或

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

这说明先求微分再求不定积分,两者相差某个常数.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.1:设曲线通过点 $(1, 2)$,且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍,求此曲线的方程.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系**
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例1.1:设曲线通过点(1, 2), 且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解: 因为

$$y' = 2x,$$

所以

$$y = \int 2x dx = x^2 + C,$$

所求曲线过点(1, 2), 即

$$2 = 1^2 + C,$$

推出

$$C = 1,$$

所求曲线为

$$y = x^2 + 1.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表**
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表**
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

序号	基本积分公式
(01)	$\int 0dx = C$
(02)	$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
(03)	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
(04)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
(05)	$\int e^x dx = e^x + C$
(06)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
(07)	$\int \cos x dx = \sin x + C$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

序号	基本积分公式
(08)	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
(09)	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
(10)	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
(11)	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
(12)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$
(13)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质**
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质**
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

► 性质1:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0).$$

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

► 性质1:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0).$$

► 性质2:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 性质1:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0).$$

► 性质2:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

► 性质3:

$$\int \sum_{i=1}^n k_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^n k_i \int f_i(x)dx \quad (k_i \text{不全为零}).$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.2:求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质**
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例1.2:求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$

$$\text{解:原式} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3} + 1} x^{-\frac{4}{3} + 1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例1.2:求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

$$\text{解:原式} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3} + 1} x^{-\frac{4}{3} + 1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3:求 $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例1.2:求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

$$\text{解:原式} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3} + 1} x^{-\frac{4}{3} + 1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3:求 $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$.

$$\text{解:原式} = \int \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C.$$

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例1.2:求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

$$\text{解:原式} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3} + 1} x^{-\frac{4}{3} + 1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3:求 $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$.

$$\text{解:原式} = \int \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C.$$

例1.4:求 $\int 2^x(e^x - 5)dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.2: 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

$$\text{解: 原式} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{3} + 1} x^{-\frac{4}{3} + 1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例1.3: 求 $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$.

$$\text{解: 原式} = \int \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C.$$

例1.4: 求 $\int 2^x(e^x - 5)dx$.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \int ((2e)^x - 5 \cdot 2^x) dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} - 5 \frac{2^x}{\ln 2} + C \\ &= 2^x \left(\frac{e^x}{1 + \ln 2} - \frac{5}{\ln 2} \right) + C.\end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.5:求 $\int \tan^2 x dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质**
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.5:求 $\int \tan^2 x dx$.

解:原式 = $\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.5:求 $\int \tan^2 x dx$.

解:原式 = $\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$.

例1.6:求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.5:求 $\int \tan^2 x dx$.

解:原式 = $\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$.

例1.6:求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

解:原式 = $\int \frac{x + (1+x^2)}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$
= $\arctan x + \ln|x| + C$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.5:求 $\int \tan^2 x dx$.

解:原式 = $\int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$.

例1.6:求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

解:原式 = $\int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$
= $\arctan x + \ln|x| + C$.

例1.7:求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例1.5: 求 $\int \tan^2 x dx$.

解: 原式 $= \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$.

例1.6: 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

解: 原式 $= \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$
 $= \arctan x + \ln|x| + C$.

例1.7: 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解: 原式 $= \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int (x^2 - 1) dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

(1) 求 $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$

(2) 求 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

(3) 求 $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

(4) 如果 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数, 求 $\int x^2 f(\ln x) dx.$

(5) 如果 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数, 求 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx.$

(6) 已知 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = Ax\sqrt{1-x^2} + B \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$ 求 $A, B.$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.1:求 $\int (ax + b)^m dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.1:求 $\int (ax + b)^m dx$.

解:当 $m \neq -1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{a} \int (ax + b)^m d(ax + b) \stackrel{u=ax+b}{=} \frac{1}{a} \int u^m du \\ &= \frac{1}{a(m+1)} u^{m+1} + C = \frac{1}{a(m+1)} (ax + b)^{m+1} + C.\end{aligned}$$

当 $m = -1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{ax + b} d(ax + b) \stackrel{u=ax+b}{=} \frac{1}{a} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{a} \ln |u| + C = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C.\end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.2: 求 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.2: 求 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} \\ &\stackrel{u=x/a}{=} \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{a} \arctan u + C \\ &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.3:求 $\int \tan x dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.3: 求 $\int \tan x dx$.

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int -\frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &\stackrel{u=\cos x}{=} -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln |u| + C \\ &= -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.4: 求 $\int \sec^6 x dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.4: 求 $\int \sec^6 x dx$.

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \sec^4 x d \tan x \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^2 d \tan x \\ &\stackrel{u=\tan x}{=} \int (1 + u^2)^2 du \\ &= \int (1 + 2u^2 + u^4) du \\ &= u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.5:求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法**
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例2.5:求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

解:令 $x = a \sin t$, 其中 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} d(a \sin t) \\&= \int a \cos t (a \cos t) dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\&= \frac{a^2}{2} \left(\int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) \right) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C,\end{aligned}$$

注意到

$$t = \arcsin \frac{x}{a}, \quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

所以

$$\text{原式} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 第一换元法通常是令

$$t = f(x),$$

所以又叫凑微分法.

► 第二换元法通常是令

$$x = g(t),$$

并且 $g(t)$ 是个单调可导函数.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(1) 求 $\int \cos^4 x dx$.

(2) 求 $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$.

(3) 求 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)}$.

(4) 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

(5) 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, 其中 $a > 0$.

(6) 求 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

(7) 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

已知导数的乘法公式为

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

等式两边求不定积分得

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx,$$

即

$$uv = \int vdu + \int u dv,$$

所以

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

这就是分部积分公式.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.1:求 $\int x \cos x dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.1:求 $\int x \cos x dx$.

解:

$$\text{原式} = \int x d \sin x,$$

令

$$u = x, v = \sin x,$$

那么

$$\begin{aligned} \int x d \sin x &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

现在问题转化为用分部积分法求

$$\int f(x)g(x)dx,$$

到底是 $u = f(x)$, $v' = g(x)$ 还是 $u = g(x)$, $v' = f(x)$?有没有一些基本的原则?

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

现在问题转化为用分部积分法求

$$\int f(x)g(x)dx,$$

到底是 $u = f(x)$, $v' = g(x)$ 还是 $u = g(x)$, $v' = f(x)$?有没有一些基本的原则?

► 原则1:如果

$$\int f(x)dx \text{ 比 } \int g(x)dx$$

容易算,那么 $f(x) = v'$.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

现在问题转化为用分部积分法求

$$\int f(x)g(x)dx,$$

到底是 $u = f(x)$, $v' = g(x)$ 还是 $u = g(x)$, $v' = f(x)$?有没有一些基本的原则?

► 原则1:如果

$$\int f(x)dx \text{ 比 } \int g(x)dx$$

容易算,那么 $f(x) = v'$.

► 原则2:在原则1无法判断的情况下,如果

$$d(f(x)) \text{ 比 } d(g(x))$$

容易算,那么 $f(x) = u$.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例3.2: 求 $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.2: 求 $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$.

解: 令

那么

$$u = \ln \cos x, v' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \ln \cos x d(\tan x) \\ &= \tan x \ln \cos x - \int \tan x d(\ln \cos x) \\ &= \tan x \ln \cos x - \int \tan x \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx \\ &= \tan x \ln \cos x + \int \tan^2 x dx \\ &= \tan x \ln \cos x + \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x \ln \cos x + \tan x - x + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

我们接触的初等函数一般可以分成如下几类:

反三角函数,对数函数,幂函数,指数函数,三角函数.

如果被积函数可以看成是如上五类函数的任两类的乘积,该如何去选取 u 和 v' ?根据前述原则,显然反三角函数的不定积分最难算,对数函数次之,幂函数再次之,指数函数和三角函数两者差不多都比较容易算,但是指数函数的导数比三角函数的导数来得相对简单些,所以我们可以按照

"反对幂指三"

的顺序来选择 u . 以例4.1来说明,要求

$$\int x \cos x dx,$$

x 为幂函数, $\cos x$ 为三角函数,所以选择

$$u = x, v' = \cos x.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.3:求 $\int x \ln x dx$.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例3.3:求 $\int x \ln x dx$.

解: x 是幂函数, $\ln x$ 是对数函数,所以令

$$u = \ln x, v' = x,$$

那么

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d(\ln x) \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.\end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.4: 求 $\int x \arctan x dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.4: 求 $\int x \arctan x dx$.

解: x 为幂函数, $\arctan x$ 为反三角函数, 所以令

$$u = \arctan x, v' = x,$$

那么

$$\begin{aligned}\int x \arctan x dx &= \int \arctan x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) \\&= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 d(\arctan x) \\&= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + C.\end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.5: 求 $\int e^x \sin x dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.5:求 $\int e^x \sin x dx$.

解: e^x 为指数函数, $\sin x$ 为三角函数, 所以令

则 $u = e^x, v' = \sin x,$

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= \int e^x d(-\cos x) = -e^x \cos x + \int \cos x d(e^x) \\&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\&= -e^x \cos x + \int e^x d(\sin x) \\&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x d(e^x) \\&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}$$

所以

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 多次分部积分的公式

$$\begin{aligned}\int uv^{(n+1)}dx &= \int ud(v^{(n)}) \\&= uv^{(n)} - \int v^{(n)}du \\&= uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}dx \\&= uv^{(n)} - \int u'd(v^{(n-1)}) \\&= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int v^{(n-1)}du' \\&= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int u''v^{(n-1)}dx \\&= \dots \\&= \sum_{k=0}^n (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k)} + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx.\end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

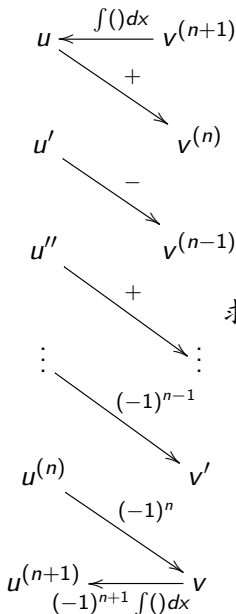
5. 各节参考答案

► 多次分部积分的快速表格计算

$$\begin{aligned}
 & \int u v^{(n+1)} dx \\
 = & \sum_{k=0}^n (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k)} \\
 & + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx
 \end{aligned}$$

求导

求积分



1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例3.6:用多次分部积分的快速表格计算 $\int x^3 e^x dx$.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分**
- (4)课后习题

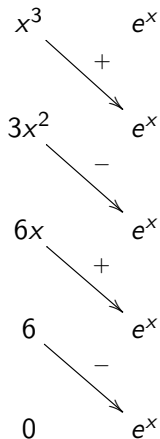
4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例3.6:用多次分部积分的快速表格计算 $\int x^3 e^x dx$.

解:



所以

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(1) 求 $\int \sin(\ln x) dx$.

(2) 求 $\int x^3 (\ln x)^4 dx$.

(3) 求 $\int e^{kx} \cos(ax + b) dx$.

(4) 求 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

六类典型有理函数的积分:

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

六类典型有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

六类典型有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \text{ 其中 } n \neq 1;$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

六类典型有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \text{ 其中 } n \neq 1;$$

$$(3) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \text{ 其中 } p^2 - 4q < 0;$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

六类典型有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \text{ 其中 } n \neq 1;$$

$$(3) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0;$$

$$(4) \int \frac{x}{x^2+px+q} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0;$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

六类典型有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \text{ 其中 } n \neq 1;$$

$$(3) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0;$$

$$(4) \int \frac{x}{x^2+px+q} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0;$$

$$(5) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0, n \neq 1;$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

六类典型有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{1}{x-a} dx;$$

$$(2) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \text{ 其中 } n \neq 1;$$

$$(3) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0;$$

$$(4) \int \frac{x}{x^2+px+q} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0;$$

$$(5) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0, n \neq 1;$$

$$(6) \int \frac{x}{(x^2+px+q)^n} dx, \text{ 其中 } p^2-4q < 0, n \neq 1.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(1)

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C;$$

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

(1)

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C;$$

(2)

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C;$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(1)

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C;$$

(2)

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C;$$

(3)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} d(x + \frac{p}{2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{1}{(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}})^2 + 1} d(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C; \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(4)

$$\begin{aligned}& \int \frac{x}{x^2 + px + q} dx \\&= \int \frac{(x + \frac{p}{2})}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} d(x + \frac{p}{2}) - \frac{p}{2} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{d((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \\&= \frac{1}{2} \ln(x^2 + px + q) - \frac{p}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \\&= \frac{1}{2} \ln(x^2 + px + q) - \frac{p}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C;\end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(5)

$$\begin{aligned}& \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx \\&= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) - (x + \frac{p}{2})^2}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^n} dx \\&= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx \\&\quad - \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{(x + \frac{p}{2})^2}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^n} dx \\&= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx \\&\quad + \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})} \int (x + \frac{p}{2}) d\left(\frac{1}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{q - \frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx \\
&\quad + \frac{x + \frac{p}{2}}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})(x^2 + px + q)^{n-1}} \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{p^2}{4})} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx \\
&= \frac{2x + p}{(n-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{n-1}} \\
&\quad + \frac{4n-6}{(n-1)(4q - p^2)} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx;
\end{aligned}$$

记所求的

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx = I_n,$$

我们得到递推表达式

$$I_n = \frac{2x + p}{(n-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{4n-6}{(n-1)(4q - p^2)} I_{n-1}.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(6)

$$\begin{aligned}& \int \frac{x}{(x^2 + px + q)^n} dx \\&= \int \frac{x + \frac{p}{2}}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} dx - \frac{p}{2} I_n \\&= \frac{1}{2(1-n)((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n \\&= \frac{1}{2(1-n)(x^2 + px + q)^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n;\end{aligned}$$

这归结为求 I_n .

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

(6)

$$\begin{aligned}& \int \frac{x}{(x^2 + px + q)^n} dx \\&= \int \frac{x + \frac{p}{2}}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} dx - \frac{p}{2} I_n \\&= \frac{1}{2(1-n)((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n \\&= \frac{1}{2(1-n)(x^2 + px + q)^{n-1}} - \frac{p}{2} I_n;\end{aligned}$$

这归结为求 I_n .

有理函数的不定积分都可以转化成以上六类积分的形式.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例4.1:求 $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$.

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

例4.1:求 $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解:令

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}, \quad (1)$$

(1)式左右两边分别乘上 $(1+2x)$ 得到

$$\frac{1}{1+x^2} = A + \frac{Bx}{1+x^2}(1+2x) + \frac{C}{1+x^2}(1+2x), \quad (2)$$

在(2)式两边令 $x = \frac{1}{2}$ 推出 $A = \frac{4}{5}$.在(2)式两边令 $x = 0$ 有

$$1 = A + C,$$

推出 $C = \frac{1}{5}$.在(2)式两边令 $x = 1$ 有

$$\frac{1}{2} = A + \frac{3}{2}B + \frac{3}{2}C,$$

1.不定积分

- (1)微分的反问题
- (2)不定积分的概念
- (3)不定积分与微分的关系
- (4)基本积分表
- (5)不定积分的性质
- (6)课后习题

2.换元积分法

- (1)第一换元法
- (2)第二换元法
- (3)换元法小结
- (4)课后习题

3.分部积分法

- (1)分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3)多次分部积分
- (4)课后习题

4.其他类型不定积分的求法

- (1)有理函数的不定积分
- (2)三角函数有理式的不定积分
- (3)一类无理根式的不定积分
- (4)课后习题

5.各节参考答案

推出 $B = -\frac{2}{5}$. 即

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right),$$

所以

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)} \\ &= \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+2x} dx - \frac{2}{5} \int \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{2}{5} \ln |1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

- 形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的三角函数有理式的不定积分
可以令 $t = \tan \frac{x}{2}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ 的三角函数有理式的不定积分
可以令 $t = \tan \frac{x}{2}$.

例4.2: 求 $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的三角函数有理式的不定积分
可以令 $t = \tan \frac{x}{2}$.

例4.2: 求 $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

解: 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$,
所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx &= \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2})} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t dt + \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{4} t^2 + t + \frac{1}{2} \ln |t| + C \\ &= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

- 形如 $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx$ 的三角函数有理式的不定积分可以令 $t = \tan x$.

例4.3: 求 $\int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx (ab \neq 0)$.

解: 令 $t = \tan x, dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx &= \int \frac{1}{(at + b)^2} dt \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(at + b)^2} d(at + b) = -\frac{1}{a(at + b)} + C \\ &= -\frac{1}{a^2 \tan x + ab} + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

- 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

例4.4: 求 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

例4.4: 求 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $t = \sqrt[3]{x+2}$, 则 $dx = 3t^2 dt$, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}} &= \int \frac{3t^2}{1+t} dt \\ &= 3 \int (t-1)dt + 3 \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= \frac{3}{2}(t-1)^2 + 3 \ln|1+t| + C \\ &= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+2}-1)^2 + 3 \ln|1 + \sqrt[3]{x+2}| + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

例4.5: 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 的无理式不定积分可以令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

例4.5: 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

解: 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, $dx = \frac{-2tdt}{(t^2 - 1)^2}$, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2 - 1)t \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt \\ &= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -2 \int dt - \int \frac{1}{t - 1} dt + \int \frac{1}{t + 1} dt \\ &= -2t - \ln|t - 1| + \ln|t + 1| + C \\ &= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1\right| + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

- 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})dx$ 的无理式不定积分
可以令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, 其中 p 为 m, n 的最小公倍数.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

- 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})dx$ 的无理式不定积分
可以令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, 其中 p 为 m, n 的最小公倍数.

例4.6: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})dx$ 的无理式不定积分
可以令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, 其中 p 为 m, n 的最小公倍数.

例4.6: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

解: 令 $t = \sqrt[6]{x}$, 则 $x = t^6, dx = 6t^5 dt$, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt \\ &= 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t+1| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

► 形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ 的无理式不定积分可以如下换元:

- (1) 当 $a > 0$, 可以令 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x \pm t$;
- (2) 当 $a < 0, c \geq 0$, 可以令 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$;
- (3) 当 $a < 0, c < 0$, 由于

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2},$$

此时 $\frac{4ac - b^2}{4a^2} < 0$, 令 $u = x + \frac{b}{2a}, k^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 则

$$ax^2 + bx + c = -a(k^2 - u^2),$$

令 $u = k \sin t$ 即可.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例4.7:求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例4.7:求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

解:令 $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = x - t$, 则解得 $x = \frac{t^2 + 3}{2(t - 1)}$, 故

$$x - t = \frac{-t^2 + 2t + 3}{2(t - 1)}, dx = \frac{t^2 - 2t - 3}{2(t - 1)^2} dt,$$

则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} &= \int \frac{2(t - 1)}{-t^2 + 2t + 3} \frac{t^2 - 2t - 3}{2(t - 1)^2} dt \\ &= - \int \frac{1}{t - 1} dt \\ &= - \ln |t - 1| + C \\ &= - \ln |x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}| + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例4.8: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例4.8: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}$.

解: 令 $\sqrt{-x^2 - 2x + 3} = xt - \sqrt{3}$, 则解得 $x = \frac{2(\sqrt{3}t - 1)}{t^2 + 1}$, 故

$$xt - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3}}{t^2 + 1}, dx = \frac{-2\sqrt{3}t^2 + 4t + 2\sqrt{3}}{(t^2 + 1)^2} dt,$$

则

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} \\ &= \int \frac{t^2 + 1}{\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3}} \frac{-2\sqrt{3}t^2 + 4t + 2\sqrt{3}}{(t^2 + 1)^2} dt \\ &= -2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = -2 \arctan t + C \\ &= -2 \arctan \frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 3} + \sqrt{3}}{x} + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例4.9:求 $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}} dx$.

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

例4.9: 求 $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}} dx$.

解:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}} dx \\ = & \int \frac{x}{\sqrt{1 - (x + 2)^2}} dx \\ \stackrel{x+2=\sin t}{=} & \int \frac{(\sin t - 2) \cos t dt}{\cos t} \\ = & -\cos t - 2t + C \\ = & -\sqrt{-x^2 - 4x - 3} - 2 \arcsin(x + 2) + C. \end{aligned}$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

$$(1) \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = ?$$

$$(2) \int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx = ?$$

$$(3) \int \frac{1+\sin x}{3+\cos x} dx = ?$$

$$(4) \int x\sqrt{2x-3} dx = ?$$

$$(5) \int \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} dx = ?$$

$$(6) \int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3} dx = ?$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

不定积分

$$(1) -\frac{1}{x} - \arctan x + C. \quad (2) \tan x - \cot x + C.$$

$$(3) \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C. \quad (4) -\ln|x| + C.$$

$$(5) \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2. \quad (6) A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$$

换元积分法

$$(1) \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + C. \quad (2) x + \ln|x| - \ln|1 + xe^x| + C.$$

$$(3) \ln|x| - \frac{1}{10} \ln(1 + x^{10}) + C. \quad (4) \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$$

$$(5) \ln(\sqrt{a^2 + x^2} + x) + C.$$

$$(6) \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$(7) 2 \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - x + C.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案

分部积分法

$$(1) \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

$$(2) \frac{1}{4}x^4(\ln^4 x - \ln^3 x + \frac{3}{4}\ln^2 x - \frac{3}{8}\ln x + \frac{3}{32}) + C$$

$$(3) \begin{cases} x \cos b + C, & a^2 + k^2 = 0 \\ \frac{a \sin(ax + b) + k \cos(ax + b)}{a^2 + k^2} e^{kx} + C, & a^2 + k^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$(4) 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$$

其他类型不定积分的求法

$$(1) \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

$$(2) 6 \ln|x-3| - 5 \ln|x-2| + C.$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} - \ln(1 + \cos^2 \frac{x}{2}) + C.$$

$$(4) \frac{1}{10}(2x-3)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$(5) \sqrt{x^2+1} - \ln(\sqrt{x^2+1} + 1) + C.$$

$$(6) 4\sqrt[4]{x} - 12 \ln(1 + \sqrt[4]{x}) - 12(1 + \sqrt[4]{x})^{-1} + 2(1 + \sqrt[4]{x})^{-2} + C.$$

1. 不定积分

- (1) 微分的反问题
- (2) 不定积分的概念
- (3) 不定积分与微分的关系
- (4) 基本积分表
- (5) 不定积分的性质
- (6) 课后习题

2. 换元积分法

- (1) 第一换元法
- (2) 第二换元法
- (3) 换元法小结
- (4) 课后习题

3. 分部积分法

- (1) 分部积分公式
- (2) u 和 v' 的选取
- (3) 多次分部积分
- (4) 课后习题

4. 其他类型不定积分的求法

- (1) 有理函数的不定积分
- (2) 三角函数有理式的不定积分
- (3) 一类无理根式的不定积分
- (4) 课后习题

5. 各节参考答案