第七章 平稳过程的谱分析

7.1 平稳过程的谱密度
7.2 谱密度的性质
7.3 窄带过程及白噪声过程的功率谱密度
7.4 联合平稳过程的互谱密度及其性质
7.5 平稳过程通过线性系统的分析

补充知识：随机过程的收敛性及均方连续

1. 随机序列收敛性的概念

定义 设有二阶矩随机序列$\{X_n\}$和二阶矩随机变量X，若有

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^2\right] = 0$$

成立，则称$\{X_n\}$均方收敛于X。

记作 $X_n \xrightarrow{\text{m.s}} X$ 或 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X$

(mean square) **(limit in mean)**

2. 均方连续

定义6 设有二阶矩过程$\{X(t), t\in T\}$， 若对每一个$t\in T$，有

$$\lim_{h\to 0} E\left[|X(t+h)-X(t)|^2\right]=0$$

则称$X(t)$在t点均方连续，记作：

$$\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t+h)=X(t)$$

若对T中的一切点都均方连续，则称$X(t)$在T上均方连续。

随机过程可以看做关于时间和样本点的“二元函数”。

- 前面主要讨论的是平稳过程关于时间这一自变量的变化情况，即其在时域上的讨论. 如相关函数就是在时域上描述了平稳过程的统计特征.

现在我们也讨论平稳过程关于样本点的“统计特征”。

- 事实上，许多物理和工程领域中问题，不仅要研究其在时域上的特性，还要研究其在频域内的特征,即从频率的角度来研究随机过程的统计特征.

例如对信号处理、线性系统分析以及随机振动的研究，其中广泛采用的方法是频域分析方法.

这个“频域”分析方法，就可以看做是对“样本点”这个自变量的分析。

- 频域分析方法的重要工具是 **Fouier**变换，它可以确定时域与频域的转换关系.
- 为了在频域上描述平稳过程的统计特征，需要研究相关函数的谱分析。为此要引入谱密度.

谱密度是在频域内研究平稳过程的重要指标.

在数学上，它是相关函数的**Fouier**变换，

而其物理意义则是功率谱密度.

- 时域分析法与频域分析法相互联系,且各有优点,构成了研究平稳过程的两个重要分支.

预备知识1：傅氏变换：

若$x(t)$绝对可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt < \infty$,则$x(t)$的傅氏变换存在，且为：

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$F_x(\omega)$ 的傅氏反变换为：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Fourier变换的性质

- 线性性质 $\mathcal{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{F}[f_1(t)]+\beta\mathcal{F}[f_2(t)]$

- 位移性质 $\mathcal{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm j\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)]$

- 微分性质 $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n\mathcal{F}[f(t)]$

§1 平稳过程的谱密度

1.相关函数的谱分解

定理1 (维纳-辛钦定理)

设{X(t), -∞<t<+ ∞}是均方连续的平稳过程,则其相关函数可以表示为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}dF_X(\omega),\quad -\infty<\tau<+\infty$$

其中$F_X(\omega)$ 在（$-\infty,+\infty$）上非负，有界，单调不减，右连续，且F（$-\infty$）$=0$，F（$+\infty$）$=2\pi R_X(0)$

定义:

这时称函数$F_X(\omega)$为平稳过程$X(t)$ 的谱函数.

函数$F_X(\omega)$是平稳过程{X(t), -∞<t<+ ∞} 的谱函数.

称 $$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}dF_X(\omega),\quad -\infty<\tau<+\infty$$

为平稳过程{X(t), -∞<t<+ ∞}相关函数的谱展开式,或谱分解式.

定义 如果存在函数$S_X(\omega)$,使得

$$F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\lambda)d\lambda,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

则称$S_X(\omega)$为平稳过程{X(t), -∞<t<+ ∞} 的谱密度.

定理 2

设{X(t), -∞<t<+ ∞}是均方连续的平稳过程,且$R_X(\tau)$绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|R_X(\tau)\right| d\tau < +\infty$$

则 $F_X(\omega)$可微, 且有维纳-辛钦公式

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R_X(\tau) d\tau, \quad -\infty < \omega < +\infty$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S_X(\omega) d\omega, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

谱密度是自相关函数的傅氏变换，自相关函数是谱密度的傅氏反变换。

举例1 **设{X(t), -∞<t<+ ∞}是平稳过程,其相关函数为**

$$R_X(\tau) = e^{-2\mu|\tau|}, \mu > 0,$$

求{X(t), -∞<t<+ ∞}的谱密度和谱函数

解 谱密度 $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R_X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) e^{-2\mu|\tau|} d\tau$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2\mu\tau}\cos\omega\tau d\tau \overset{\text{2次分部积分}}{=} \frac{4\mu}{4\mu^2+\omega^2}$$

谱函数 $F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S_X(\lambda) d\lambda$

$$= \int_{-\infty}^{\omega} \frac{4\mu}{4\mu^2+\lambda^2} d\lambda = 2\arctan\frac{\omega}{2\mu} + \pi$$

§2. 谱密度的性质和计算

定理1 平稳过程的谱密度是非负实函数.

特别 实平稳过程的谱密度是非负实偶函数.

定理2

$$R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega$$

$$S_X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)d\tau$$

说明

以上是$\tau=0$，$\omega=0$时, 一对特殊的Fourier变换.

要求：

已知相关函数求普密度，

已知谱密度求相关函数.

定理2 $$R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega$$

平均功率

$$S_X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)d\tau$$

说明

以上是$\tau=0$，$\omega=0$时，两对特殊的Fourier变换.

第一式说明功率谱密度曲线下的总面积(平均功率)等于平稳过程的均方值.

第二式说明功率谱密度的零频率分量等于相关函数曲线下的总面积.

例2. 已知平稳过程的相关函数

$$R_X(\tau)=5+4e^{-3|\tau|}(\cos^2 2\tau)$$

求其谱密度.

解 $\because R_X(\tau)=5+2e^{-3|\tau|}+2e^{-3|\tau|}\cos 4\tau)$

$\therefore S_X(\omega=\mathcal{F}[R_X(\tau)]$

$$=5\mathcal{F}[1]+2\mathcal{F}[e^{-3|\tau|}]+2\mathcal{F}[e^{-3|\tau|}\cos^2 4\tau]$$

$$=10\pi\delta(\omega)+\frac{12}{9+\omega^2}+2[\frac{3}{9+(\omega-4)^2}+\frac{3}{9+(\omega+4)^2}]$$

§4. 互谱密度及其性质

定义 设{**X(t)**, -∞<t<+ ∞}, {**Y(t)**, -∞<t<+ ∞}是联合平稳的平稳过程,如果互相关函数绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| R_{XY}(\tau) \right| d\tau < +\infty$$

则称

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{XY}(\tau) d\tau, -\infty < \omega < +\infty$$

为平稳过程{**X(t)**, -∞<t<+ ∞}和 {**Y(t)**, -∞<t<+ ∞}的互谱密度.

定理 2 (互谱密度的性质)

(1) $\overline{S_{XY}(\omega)} = S_{YX}(\omega)$ $\quad(\because \quad \overline{R_{XY}(\tau)} = R_{YX}(-\tau)\quad)$

(2) $R_{XY}(\tau)$和$S_{XY}(\omega)$是一对$Fourier$变换.

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{XY}(\tau) d\tau, -\infty < \omega < +\infty$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} S_{XY}(\omega) d\omega, -\infty < \tau < +\infty$$

(3) 若{X(t), -∞<t<+ ∞}, {Y(t), -∞<t<+ ∞}是实联合平稳的平稳过程,则$S_{XY}(\omega)$的实部为偶函数,虚部为奇函数.

$$\because \quad S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{XY}(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)\cos\omega\tau d\tau - j\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

（ω的偶函数）（ω的奇函数）

(4) $\left|S_{XY}(\omega)\right|^2 \le S_X(\omega)\cdot S_Y(\omega), \quad \left|S_{YX}(\omega)\right|^2 \le S_X(\omega)\cdot S_Y(\omega)$

总结

1. **概念**：平稳过程的谱函数、谱密度

$X(t)$为均方连续的平稳过程

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}dF_X(\omega),\quad -\infty<\tau<+\infty$$

$$F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\lambda)d\lambda,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

2. **公式**：相关函数与谱密度的互算

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega\tau}R_X(\tau)d\tau,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}S_X(\omega)d\omega,\quad -\infty<\tau<+\infty$$

总结

3. 公式：联合平稳过程的互相关函数与互谱密度的互算

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega\tau}R_{XY}(\tau)d\tau,-\infty<\omega<+\infty$$

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega\tau}S_{XY}(\omega)d\omega,-\infty<\tau<+\infty$$

4. 了解谱密度的性质