专题:矩阵的秩

高等代数资源网
www.52gd.org

September 15, 2012

1 声明

关于如何使用本文的建议:首先保证自己认真做了一遍题目,否则请不要查看本文.记住:

别人做是别人的，自己做才是自己的 .

作者水平有限,错误不可避免,欢迎您来信指出:www52gdorg@163.com.

休息一下，欣赏美图，马上开始。

2 矩阵秩的定义及性质

1.矩阵的秩通常有三种等价定义:

(1)矩阵行(列)向量组的秩,即矩阵的行(列)向量组的极大无关组所含向量的个数;

(2)矩阵的非零子式的最高阶数;

(3)矩阵A的秩为r的充要条件是存在一个r级子式不为零,而所有高于r级的子式(若存在)都为零.

2.矩阵秩的性质

(1)$r(A_{m\times n})\leq min\{m,n\}$;

(2)$|r(A)-r(B)|\leq r(A\pm B)\leq r(A)+r(B)$;

(3)$r(kA)=r(A),k\neq 0$;

(4)$r(a)+r(B)-n\leq r(A_{m\times n}B_{n\times s})\leq min\{r(A),r(B)\}$,特别的,若$AB=0$,则有$r(A)+r(B)\leq n$;

(5)$r(A^T)=r(A)$;

(6)$A\in F^{n\times n},r(A)=n$的充要条件为$A$可逆;

(7)$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$,其中$A\in F^{s\times n},P\in F^{s\times s},Q\in F^{n\times n},P,Q$可逆;

(8)(北方交大03,07,重庆大学06)设A为$n\times n(n\geq 2)$矩阵,则

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ 0, & r(A)<n-1.\end{cases}$$

(9)令$C=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$,则$r(C)=r(A)+r(B)$.

(10)令$G=\begin{pmatrix} A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$,则$r(G)\geq r(A)+r(B)$.

(11)令$G=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$,则$r(G)=\begin{cases} r(A)+r(D-CA^{-1}B), & A\text{可逆};\\ r(D)+r(A-BD^{-1}C), & D\text{可逆}.\end{cases}$

(12)$r(A,B)\leq r(A)+r(B)$;

(13)$r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$.特别的,$r(A^3)\geq 2r(A^2)-r(A)$.

(14)划去矩阵的一行(列),其秩最多减少1.

3 矩阵秩的问题的处理方法

常用的方法有

(1)利用分块矩阵;

(2)利用齐次方程组的理论;

(3)利用向量组的秩处理;

(4)利用已知的矩阵秩的等式与不等式;

(5)利用线性变换的值域与核.

4 典型例题

例 4.1 (北师01, 山西师大05) $A \in P^{s\times n}, B \in P^{n\times m}$,证明:

$$min\{r(A), r(B)\} \geq r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证明:

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

故$r(A) + r(B) \leq r(C) = r(AB) + r(E_n)$.

例 4.2 设$A_1, \cdots, A_p$均为n阶矩阵, 且$A_1A_2\cdots A_p = 0$,则

$$r(A_1) + r(A_2) + \cdots + r(A_p) \leq (p-1)n.$$

证明:

$$\begin{aligned} 0 = r(A_1A_2\cdots A_p) &\geq r(A_1A_2\cdots A_{p-1}) + r(A_p) - n \\ &\geq \cdots \\ &\geq r(A_1) + r(A_2) + \cdots + r(A_p) - (p-1)n. \end{aligned}$$

例 4.3 (安徽师范08, 北邮07) 设A是n阶方阵, 则$A^2 = E(A^2 = A)$的充要条件为$r(A + E) + r(A - E) = n(r(A) + r(A - E) = n)$.

证明: (1)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A+E & 0 \\ 0 & A-E \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} A+E & 0 \\ A+E & A-E \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} A+E & -(A+E) \\ A+E & -2E \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} A+E+\frac{1}{2}(A+E)^2 & 0 \\ A+E & -2E \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} E-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 考虑相似对角化.

例 4.4 (北京科技大07) 设A为n阶幂等矩阵, 即$A^2 = A$.证明:

(1) A的特征值只能是0或1;

(2) $r(A) + r(E - A) = n$;

(3) A可以对角化;

(4) $r(A) = Tr(A)$.

例 4.5 设A,B均为n阶幂等矩阵, 且$E-A-B$可逆. 证明$r(A)=r(B)$.

证明:利用$A^2=A$的充要条件为$r(A)+r(E-A)=n$.由条件由

$$n=r(E-A-B)\le r(E-A)+r(B)=n-r(A)+r(B)$$

即

$$r(A)\le r(B)$$

同理可证

$$r(A)\ge r(B)$$

例 4.6 (华中科技04)设A为3阶方阵, 且$A^2=E,A\neq\pm E$.证明$A+E$与$A-E$中有一个秩为1, 另一个秩为2.

证明:

(1)利用上例的结论.

(2)考虑特征值.

例 4.7 设A是n阶方阵, 则$A^2=A(A^2=E)$, 则

$$r(A^m)+r((A-E)^k)=n(r(A+E)^m+r(A-E)^k=n).$$

其中m,n,k为任意自然数.

证明: 考虑相似对角化.

例 4.8 (汕头大学03)设A,B为n阶方阵, 证明

(1)若$AB=0$,则$r(A)+r(B)\le n$.

(2)若$A^2=2A$,则$r(A)+r(A-2E)=n$.

例 4.9 (同济大学00)设$A^2-4A=5E$,证明$r(A-5E)+r(A+E)=n$.

例 4.10 (北大01)设σ为数域K上的n维线性空间V的一个线性变换. 证明

$$\sigma^2=\sigma\Leftrightarrow r(\sigma)+r(\sigma-I)=n.$$

例 4.11 (北大05)设σ为数域R上n维线性空间V上的一个线性变换. 证明

$$\sigma^3=I\Leftrightarrow r(I-\sigma)+r(I+\sigma+\sigma^2)=n$$

这一类问题的一般形式是:

例 4.12 设$f(x),g(x)\in F[x],A\in F^{n\times n},(f(x),g(x))=1,f(A)g(A)=0$.则$r(f(A))+r(g(A))=n$.

证明: (法1) 由$(f(x),g(x))=1$,则存在$u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

从而有

$$f(A)u(A)+g(A)v(A)=E.$$

则

$$\begin{aligned} n=r(E)=r(f(A)u(A)+g(A)v(A)) &\le r(f(A)u(A))+r(g(A)v(A)) \\ &\le r(f(A))+r(g(A)). \end{aligned}$$

另一方面, 由$f(A)g(A)=0$,有

$$r(f(A))+r(g(A))\le n.$$

所以有

$$r(f(A))+r(g(A))=n.$$

(法2) 由$(f(x),g(x))=1$,则存在$u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

从而有

$$f(A)u(A)+g(A)v(A)=E.$$

由

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ u(A) & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ v(A) & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ f(A)u(A)+g(A)v(A) & g(A) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}.$$

故

$$r\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix} E & -f(A) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -g(A) \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -f(A)g(A) \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到条件$f(A)g(A)=0$,可得

$$r\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}=r(E)=n.$$

从而结论成立.

更一般的结果是:

例 4.13 设$f(x),g(x)\in F[x],A\in F^{n\times n},(f(x),g(x))=1$.则$r(f(A))+r(g(A))=n+r(f(A)g(A))$.

证明: 由$(f(x),g(x))=1$,则存在$u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

从而有

$$f(A)u(A)+g(A)v(A)=E.$$

由

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -u(A) & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -v(A) & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E-f(A)u(A)-g(A)v(A) & g(A) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix}.$$

故

$$r\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix}=r(f(A))+r(g(A)).$$

由

$$\begin{pmatrix} E & -f(A) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -g(A) \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -f(A)g(A) \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

可得

$$r\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ E & g(A) \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & -f(A)g(A) \\ E & 0 \end{pmatrix}=r(E)+r(-f(A)g(A))=n+r(f(A)g(A)).$$

从而结论成立.

例 4.14 (上海交大05)对于n阶方阵A,B,设

$$r(E-AB)+r(E+AB)=n$$

求证$r(A)=n$.

证明:

$$\begin{pmatrix} E-AB & 0 \\ 0 & E+AB \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} (E-AB)(E+AB) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

由此可知,

$$(E-AB)(E+AB)=0$$

即

$$(AB)^2=E$$

故结论成立.

例 4.15 (浙大04) 设$A,B\in P^{n\times n}$,且$r(A)+r(B)\leq n$.证明存在n阶可逆矩阵M,使得$AMB=0$.

证明: 设$r(A)=r,r(B)=s$,则存在可逆矩阵P_1,Q_1,P_2,Q_2使得

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix},P_2BQ_2=\begin{pmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}$$

于是由$r(A)+r(B)\le n$,可得

$$(AQ_1)(P_2B)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}Q_2^{-1}=0$$

例 4.16 (浙江师大05,厦门大学04)设A,B都是n阶矩阵,且A可逆,证明

$$r(A-B)\ge r(A)-r(B)$$

并且等号成立当且仅当$BA^{-1}B=B$.

证明:

$$\begin{pmatrix}B&0\\0&A-B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B&0\\B&A-B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B&B\\B&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B-BA^{-1}B&0\\0&A\end{pmatrix}$$

例 4.17 设P为数域, $A\in P^{n\times m},B\in P^{n\times s},C\in P^{m\times t},D\in P^{s\times t}$,且$r(B)=s,AC+BD=0$,证明$r\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=t$的充要条件为$r(C)=t$.

证明: (法1)充分性.

因$\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}\in P^{(m+s)\times t}$,故$r\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}\le t$.又$r\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}\ge r(C)=t$,从而结论成立.

必要性. 反证法.

若$r(C)<t$,则齐次方程组$Cx=0$有非零解, 设为$x_0\ne 0$.

构造齐次方程组$\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}y=0$.由题设知, 此方程组只有零解. 从而

$$0\ne\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}x_0=\begin{pmatrix}0\\Dx_0\end{pmatrix}$$

即$Dx_0 \neq 0$.

但 $0 = 0x_0 = (AC+BD)x_0 = ACx_0 + BDx_0 = B(Dx_0)$. 这说明$DX_0 \neq 0$为齐次方程组$Bz=0$的解. 这与$r(B)=s$矛盾.

(法2)

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ BD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于$r(B)=s$, 故$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是列满秩的, $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ A & E_n \end{pmatrix}$是满秩的. 故 $r\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = r(C)$. 故结论成立.

例 4.18 (华南理工05) 设A为$s\times n$实矩阵, 证明

(1) $Ax=0$与$A^TAx=0$同解.

(2) $r(A)=r(A^TA)$.

(3) $A^TAx=A^TB$ (B为任一s维列向量) 一定有解.

证明: (1) 显然$Ax=0$的解都是$A^TAx=0$的解. 设x_0为$A^TAx=0$的任一解, 即$A^TAx_0=0$,于是

$$0 = {x_0}^TA^TAx_0 = (Ax_0)^T(Ax_0)$$

注意到A是实矩阵, 从而x_0也是实向量, 从而可得$Ax_0=0$.

(2) 由 (1) 可得.

(3) 由于

$$r(A^TA, A^TB) \geq r(A^TA) = r(A)$$

又

$$r(A^TA, A^TB) = r(A^T(A,B)) \leq r(A^T) = r(A)$$

故$r(A^TA,A^TB)=r(A^TA)=r(A)$, 从而结论成立.

例 4.19 (华中师大07) 设A为$m\times n$矩阵.

(1) 若A为实矩阵, 证明:实线性方程组$AX=0$与$(A^TA)x=0$同解.

(2) 证明:$r(A)=r(A^TA)$.

(3) 在复数域上, 上述结论成立吗?为什么?

(4) 对复数域, 你认为应如何修改断言 (2) 得到一个正确断言?为什么?

例 4.20 (华东师大07) 设A为n阶方阵,

(1) 证明:如果A为实矩阵, 则非齐次线性方程组$A^TAX=A^TB$有解;

(2) 对任意的复矩阵A, 非齐次线性方程组$A^TAX=A^TB$是否一定有解?(请说明理由)

证明: (2) 不一定有解, 如$A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $B=(1,0)^T$.若是共轭转置, 则总有解.

例 4.21 (重庆大学03) (1) 设A,B为n阶方阵, 证明$r(AB)=r(B)$的充要条件为$ABx=0$的解均为$Bx=0$的解.

(2) 设A,B为n阶方阵, $r(AB)=r(B)$, 证明对于任意可以相乘的矩阵C,均有$r(ABC)=r(BC)$.

(3) 若有自然数k, 使得$r(A^k)=r(A^{k+1})$,则$r(A^k)=r(A^{k+j}), j=1,2,...$

例 4.22 (大连理工01) 设A为n阶方阵, 证明

(1) 如果$A^{k-1}\alpha\neq 0$,但是$A^k\alpha=0$,则$\alpha, A\alpha, ..., A^{k-1}\alpha(k>0)$线性无关.

(2) $r(A^{n+1})=r(A^n)$.

证明: (1) 设

$$l_0\alpha+l_1A\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$$

上式两边同乘以A^{k-1}, 并注意到$A^k\alpha=0$,可得

$$l_0A^{k-1}\alpha=0$$

由$A^{k-1}\alpha\neq 0$,可得$l_0=0$.同理可得$l_1=\cdots=l_{k-1}=0$.

(2) 只需证明$A^nx=0$与$A^{n+1}x=0$通解即可.

显然$A^nx=0$的解都是$A^{n+1}x=0$的解.

设x_0为$A^{n+1}x=0$的任一解, 即$A^{n+1}x_0=0$.若$A^nx_0\neq 0$,则由(1)

$$x_0, Ax_0, \cdots, A^nx_0$$

线性无关. 但这是$n+1$个n维向量, 从而线性相关. 矛盾.

例 4.23 (曲阜师大07) 设A为n阶方阵. 证明:线性方程组$AX=0$与$A^2X=0$同解的充要条件为$r(A)=r(A^2)$.

例 4.24 (曲阜师大06) 设A为n阶方阵. 证明:$r(A^n)=r(A^{n+1})$.

例 4.25 设$A,B,C\in P^{n\times n}$证明若$r(A)=r(BA)$,则$r(AC)=r(BAC)$.

证明:法1. $r(BAC)\geq r(BA)+r(AC)-r(A)$,

又$r(A)=r(BA)$,故$r(BAC)\geq r(AC)$.

又$r(BAC)\leq r(AC)$,故$r(BAC)=r(AC)$.

法2. 由$r(A)=r(BA)$知方程组$Ax=0$与$BAx=0$同解,

下证$BACx=0$与$ACx=0$同解.

事实上, $ACx=0$的解一定是$BACx=0$的解.

其次, 设x_0为$BACx=0$的任意解, 即

$$0=BACx_0=BA(Cx_0)$$

从而Cx_0为$BAx=0$的解,

即$Ax=0$的解, 于是$ACx_0=0$. 从而结论成立.

例 4.26 设$A\in F^{n\times n}$,试证$r(A^n)=r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\cdots$.

证明:只证明$r(A^n)=r(A^{n+1})$即可.

只需证明方程组$A^nx=0$与$A^{n+1}x=0$同解即可.

显然$A^nx=0$的解都是$A^{n+1}x=0$的解.

设x_0为$A^{n+1}x=0$的任一解,若$A^nx_0\neq 0$,则可证

$$x_0,AX_0,\cdots,A^nx_0$$

线性无关.但这是$n+1$个n维向量.矛盾.

例 4.27 (大连理工05)设A为n阶方阵,且$r(A)=r(A^2)$.证明对任意自然数k有$r(A^k)=r(A)$.

例 4.28 (东南大学04)设A为n阶方阵,求证存在正整数m,使得$r(A^m)=r(A^{m+1})$,并证明存在n阶矩阵B使得$A^m=A^{m+1}B$.

例 4.29 (北师大06)设A,B为n阶方阵,证明

(1)$r(A-ABA)=r(A)+r(I_n-BA)-n$.

(2)若$A+B=I_n,r(A)+r(B)=n$,则$A^2=A,B^2=B$且$AB=0=BA$.

证明:(1)考虑

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & I_n-BA\end{pmatrix}$$

(2)利用(1)可得

$$r(A-A^2)=r(A)+r(I_n-A)-n=0.$$

或者利用

$$n=r(A)+r(B)=r(A)+r(A-I_n)\Leftrightarrow A^2=A$$

$$AB=A(I_n-A)=A-A^2=0$$

例 4.30 (1)设向量组(I)$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$可由向量组(II)$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示,且它们的秩相等.证明:(I)与(II)等价.

(2)设$A\in F^{m\times n},B\in F^{n\times s},r(A)=r(AB)$.则存在$C\in F^{s\times n}$使得 $A=ABC$.

证明:(1)构造向量组(III)$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m$.则(III)与(II)等价,从而秩相等.于是(I),(II),(III)的秩相等.从而(I)的极大线性无关组也是(II)的极大线性无关组,从而(II)可由(I)的极大线性无关组线性表示,故(II)与(I)等价.

(2)设$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_s)=AB=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(bij)$$

故AB的列向量组可由A的列向量组线性表示,又其秩相等,故由(1)可知存在C使得结论成立.

例 4.31 设A,B是n阶方阵,满足$AB=BA$.求证

$$r(A+B)\le r(A)+r(B)-r(AB).$$

证明: (法1)设A的行空间为V_1,B的行空间为V_2.由于$A+B$的行向量可由A及B的行向量线性表示,AB的行向量可由B的行向量线性表示,BA的行向量可由A的行向量线性表示,则$A+B$的行空间$\subseteq V_1+V_2$,AB的行空间$\subseteq V_2$,BA的行空间$\subseteq V_2$.又由设$AB=BA$,故AB的行空间$\subseteq V_1\cap V_2$.所以

$$r(A+B)\le dim(V_1+V_2)=dimV_1+dimV_2-dim(V_1\cap V_2)\le r(A)+r(B)-r(AB).$$

(厦门大学数学科学学院 林鹭副教授 整理)

(法2)略.

(法3)记V_A为$Ax=0$的解空间,V_B为$Bx=0$的解空间,V_{A+B}为$(A+B)x=0$的解空间,V_{AB}为$ABx=0$的解空间,则$V_A\cap V_B\subseteq V_{A+B}$.又由设$AB=BA$知,$V_A+V_B\subseteq V_{AB}$,因此

$$\begin{aligned}n-r(AB)=dimV_{AB}&\ge dimV_{V_A+V_B}\\&=dimV_A+dimV_B-dim(V_A\cap V_B)\\&\ge(n-r(A))+(n-r(B))-(n-r(A+B)).\end{aligned}$$

(厦门大学数学科学学院 林鹭副教授 整理)

(法4)直接计算可得

$$\begin{pmatrix}E&E\\&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B\\E&-A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&AB-BA\\B&-BA\end{pmatrix}$$

又由设$AB=BA$,故

$$\begin{aligned}r(A)+r(B)&=r\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\\&\ge r\begin{pmatrix}A+B&0\\B&-BA\end{pmatrix}\\&=r\begin{pmatrix}A+B&0\\B&BA\end{pmatrix}\\&\ge r(A+B)+r(AB).\end{aligned}$$

(厦门大学数学科学学院 林鹭副教授 整理)

(法5)设线性变换σ,τ在线性空间V的基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的矩阵分别为A,B,则

$$r(A+B)=dimIm(\sigma+\tau),r(A)=dimIm\sigma,r(B)=dimIm\tau,r(AB)=dimIm\sigma\tau$$

因为$Im(\sigma+\tau)\subseteq Im\sigma+Im\tau$,所以

$$dimIm(\sigma+\tau)\le dim(Im\sigma+Im\tau)=dimIm\sigma+dimIm\tau-dim(Im\sigma\cap Im\tau).$$

又因为$AB=BA$,所以$\sigma\tau=\tau\sigma$,因此$Im\sigma\tau\subseteq Im\sigma\cap Im\tau$.故$dim(Im\sigma\cap Im\tau)\geq dimIm\sigma\tau$,从而

$$\begin{aligned}r(A+B)&=dimIm(\sigma+\tau)\\&\leq dimIm\sigma+dimIm\tau-dim(Im\sigma\cap Im\tau)\\&dimIm\sigma+dimIm\tau-dimIm(\sigma\tau)\\&=r(A)+r(B)-r(A+B).\end{aligned}$$

(厦门大学数学科学学院 林鹭副教授 整理)

例 4.32 设$P_i,Q_i(i=1,2,\cdots,k)$是n阶方阵,对$1\leq i,j\leq k-1$满足$P_iQ_j=Q_jP_i,r(P_i)=r(P_iQ_i)$,证明:$r(P_1P_2\cdots P_k)=r(P_1P_2\cdots P_kQ_1Q_2\cdots Q_1Q_2\cdots Q_k)$.

证明: (法一)先证明下列两个引理.

引理1 设$A,B\in K^{n\times n}$,则$r(B)=r(AB)$的充要条件是$Bx=0$与$ABx=0$同解.

证明: 充分性显然. 下证必要性. 记$V_B=\{x|Bx=0\},V_{AB}=\{x|ABx=0\}$.则对任意的$x\in V_B,Bx=0$,从而$ABx=0$.即$V_B\subseteq V_{AB}$,又由设$r(B)=r(AB)$,则$dimV_B=dimV_{AB}$,因此$V_B=V_{AB}$.

引理2 设$A,B\in K^{n\times n}$,且$r(B)=r(AB)$,则对任意的$C\in K^{n\times n}$,有$r(ABC)=r(BC)$.

证明: 一方面,由秩的基本性质,$r(ABC)\leq r(BC)$.

另一方面,对任意的$x\in V_{ABC},ABCx=0$,从而$Cx\in V_{AB}$,由条件$r(AB)=r(B)$及引理1知,$Cx\in V_B$,故$BCx=0$,从而$x\in V_{BC}$.因此$V_{ABC}\subseteq V_{BC}$,所以$r(ABC)\geq r(BC)$.至此证明了$r(ABC)=r(BC)$.

现证命题. 对k用数学归纳法.

当$k=2$时,由设$r(P_1)=r(P_1Q_1)=r(Q_1P_1)$,应用引理2有,$r(P_1P_2Q_2)=r(Q_1P_1P_2Q_2)$,又因为$P_iQ_j=Q_jP_i$,故$r(P_1P_2Q_2)=r(P_1Q_1P_2Q_2)=r(P_1P_2Q_1Q_2)$.另外,$r(P_2)=r(P_2Q_2)$,则$r(P_2')=r(Q_2'P_2')$.应用引理2得到$r(P_2'P_1')=r(Q_2'P_2'P_1')$,从而$r(P_1P_2)=r(P_1P_2Q_2)$,因此$r(P_1P_2)=r(P_1P_2Q_1Q_2)$.

假设结论对$k-1$成立,即若$P_iQ_j=Q_jP_i,r(P_i)=r(P_iQ_i)$,则

$$r(P_1P_2\cdots P_{k-1})=r(P_1P_2\cdots P_{k-1}Q_1Q_2\cdots Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}).$$

当k时,容易验证

$$P_iQ_{k-1}Q_k=Q_{k-1}Q_kP_i,P_{k-1}P_kQ_i=Q_iP_{k-1}P_k,P_{k-1}P_kQ_{k-1}Q_k=Q_{k-1}Q_kP_{k-1}P_k,(1\leq i\leq k-2),$$

且$r(P_{k-1}P_k)=r(P_{k-1}P_kQ_{k-1}Q_k)$.因此,$P_1,\cdots,P_{k-2},P_{k-1}P_k$和$Q_1,\cdots,Q_{k-2},Q_{k-1}Q_k$满足假设,故$r(P_1P_2\cdots P_k)=r(P_1P_2\cdots P_kQ_1Q_2\cdots Q_1Q_2\cdots Q_k)$.

(厦门大学数学科学学院 谭绍滨教授 解答)

(法二)设

$$U=\{x|P_1P_2\cdots P_{k-1}x=0\},$$

$$V=\{x|P_1P_2\cdots P_{k-1}Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}x=0\},$$

则$U\subseteq V$.因为对$\forall x\in U,P_1P_2\cdots P_{k-1}x=0$.由设$P_iQ_j=Q_jP_i$,因此

$$P_1P_2\cdots P_{k-1}Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}x=Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}P_1P_2\cdots P_{k-1}x=0,$$

即$x\in V$.

下证$V\subseteq U$.对任意的$x\in V$,即$P_1P_2\cdots P_{k-1}Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}x=0$,有

$$P_1Q_1(P_2\cdots P_{k-1}Q_2\cdots Q_{k-1})x=0,$$

$$Q_1P_1(P_2\cdots P_{k-1}Q_2\cdots Q_{k-1})x=0,$$

又因为$r(P_1)=r(P_1Q_1)=r(Q_1P_1)$,所以$P_1y=0$与$Q_1P_1y=0$同解, 从而有

$$P_1P_2(P_3\cdots P_{k-1}Q_2\cdots Q_{k-1})x=0,$$

$$Q_2P_1P_2(P_3\cdots P_{k-1}Q_3\cdots Q_{k-1})x=0,$$

又由$r(P_2)=r(P_2Q_2)$,推知

$$r(P_2')=r(Q_2'P_2'),r(Q_2'P_2'P_1')=r(P_2'P_1'),r(P_1P_2)=r(P_1P_2Q_2),$$

从而$r(P_1P_2)=r(P_1P_2Q_2)=r(Q_2P_2P_1)$,故$P_1P_2y=0$与$Q_2P_2P_1y=0$同解, 故有

$$P_1P_2(P_3\cdots P_{k-1}Q_3\cdots Q_{k-1})x=0.$$

同理可知,

$$r(P_1P_2P_3)=r(P_1P_2P_3Q_3),P_1P_2P_3(P_4\cdots P_{k-1}Q_4\cdots Q_{k-1})x=0.$$

以此类推,

$$r(P_1P_2\cdots P_m)=r(P_1P_2\cdots P_mQ_m),$$

$$P_1\cdots P_m(P_{m+1}\cdots P_{k-1}Q_{m+1}\cdots Q_{k-1})x=0,m=2,3,\cdots,k-1.$$

故$V\subseteq U$.

（山东大学威海分校数学与统计学院 04级王庆提供解答）

例 4.33 设A,B是任意的n阶矩阵, 证明:$rank(I-AB)=rank(I-BA)$.

证明: 因为

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ -B & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A\\ B & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & A\\ 0 & I-BA\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & -A\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A\\ B & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-AB & 0\\ B & I\end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} I & 0\\ -B & I\end{pmatrix},\begin{pmatrix} I & -A\\ 0 & I\end{pmatrix}$都是可逆矩阵, 所以

$$rank(I-AB)+n=rank\begin{pmatrix} I & A\\ 0 & I-BA\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} I & A\\ B & I\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} I-AB & 0\\ B & I\end{pmatrix}=rank(I-AB)+n.$$

命题得证.

(厦门大学数学科学学院 林鹭副教授 解答)

终于完成了,来张美图欣赏一下吧.