第二章　随机过程的基本概念与基本类型

2.1 随机过程的基本概念

2.2 随机过程的分布律与数字特征

2.3 复随机过程

2.4 几种重要的随机过程

2.1 基本概念

随机过程

状态空间

样本函数

随机过程定义

随机过程是一族无穷多个、相互有关的随机变量。

定义2.1：

设 (Ω, F, P) 是一概率空间，若对每一个参数 $t \in T$，$X(t,\omega)$ 都是定义在概率空间 $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ 上的随机变量，则称随机变量族 $X_T = \{X(t,\omega);\ \omega \in \Omega, t \in T\}$ 为该概率空间上的一个随机过程。

简记为 $\{X(t), t \in T\}$或$\{X_t,\ t \in T\}$。

$X(t)$ 所有可能的取值的集合称为状态空间或相空间，记为 I。 T是给定的参数集， 称T为参数集。

1. 随机过程的描述方法:

说明

用映射表示 X_T, $X(t,\omega): T\times\Omega\to R$

即 $X(\cdot,\cdot)$ 是一定义在 $T\times\Omega$ 上的二元单值函数.

固定 $t\in T$, $X(t,\cdot)$ 是定义在 Ω 上的一随机变量.

对于固定的 $\omega_0\in\Omega$, $X(t,\omega_0)$是一个关于参数 $t\in T$ 的函数, 通常称为**样本函数**, 或称随机过程的一次实现。

记号 $X(t,\omega)$ 有时记为 $X_t(\omega)$ 或简记为 $X(t)$.

参数T一般表示时间或空间.

2. 参数常用的一般有:

(1) $T=N_0=\{0,1,2,\cdots\}$, 此时称之为随机序列或时间序列. 随机序列写为$\{X(n),\ n\geq 0\}$ **或$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$.**

(2) $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

(3) $T=[a,b]$ 其中a可以取0或$-\infty$, b可以取$+\infty$.

3. 状态空间

随机过程$\{X(t);t\in T\}$可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间，记作S. S中的元素称为状态。状态空间可以由实数、复数构成。

4. 样本函数

对固定的 ω, $X(t,\omega)$是定义在T上的普通函数，称为随机过程的一个样本函数或样本轨道。

随机过程举例

例2.1

随机游动：一醉汉在直路上行走，以概率p前进一步，以概率$1-p$后退一步（假设其步长相同），以$X(t)$记他在t时刻在路上的位置，则随机过程$X(t)$就是一个随机过程。称其为直线上的随机游动。

例2.2 **抛掷一枚硬币，样本空间为 $S=\{H,T\}$定义：**

$$X(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{当出现H时} \\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中$P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是一随机过程。

例2.3

*Brown*运动：英国植物学家*Brown*注意到漂浮在液面上的微小粒子不断进行无规则的运动，这种运动后来称为*Brown*运动。它是同时分子大量随机碰撞的结果。记$(X(t),Y(t))$为t时刻粒子在平面上位置的坐标，则$X(t)$和$Y(t)$均是随机过程。

2.2 随机过程的分布律和数字特征

一、随机过程的分布函数

和*Kolmogorov*定理

二、随机过程的数字特征

一、随机过程的分布函数

1. 一维分布函数

设$X(t)$是一随机过程，称

$$F_t(x) \triangleq F(t,x) = P\{X(t) \le x\}$$ **为**一维分布函数

如果$X(t)$是连续型的（取值是一区间），

若 $\exists$ $f(t,x) \ge 0$, 使得

$$F_t(x) = F(t,x) = \int_{-\infty}^{x} f(t,y)dy$$

则称 $f(t,x)$ 为$\{X(t)\}$的一维概率密度.

2. 二维分布函数

$X(t)$是随机过程， 二维随机变量$\{(X(t_1), X(t_2))\}\left((t_1, t_2) \in T\right)$，的联合分布函数

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) \triangleq F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

称为$X(t)$的二维分布函数

二维概率密度$f(t_1, t_2, x_1, x_2)$

3. n维分布函数

n维随机向量$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$的联合分布函数为

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) \triangleq F(t_1,\cdots,t_n; x_1,\cdots,x_n)$$
$$= P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

称为随机过程$X(t)$的n维分布函数.

可以定义 $f(t_1,\cdots,t_n; x_1,\cdots,x_n)$为$n$维概率密度.

4. 有限维分布族

$X(t)$的一维、二维,…, n维分布函数的全体:

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n \in T, n \geq 1\}$$

称为**$X(t)$的有限维分布函数族**

5. 有限维分布族的性质

(1) 对称性

$$F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_n}}(x_{j_1},\cdots,x_{j_n})$$

$$= P\{X(t_{j_1}) \leq x_{j_1},\cdots,X(t_{j_n}) \leq x_{j_n}\}$$

$$= P\{X(t_1) \leq x_1,\cdots,X(t_n) \leq x_n\}$$

$$= F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

(2) 相容性　对于 $m<n$ 有

$$F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_m}}(x_1,\cdots,x_m)=F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_m},t_{j_{m+1}},\cdots,t_{j_n}}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)$$

注1: 随机过程的统计特性完全由它的有限维分布函数族决定。

注2: 有限维分布族与有限维特征函数族相互唯一确定。

反之: 满足对称性和相容性的函数族，作为分布函数族，其对应的随机过程是否存在?

定理:（Kolmogorov存在定理）

设已给参数集T及满足对称性和相容性的分布函数族 $\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n\in T, n\geq 1\}$, 则必有一随机过程 $\{X(t); t\in T\}$, 使 $\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n\in T, n\geq 1\}$ 恰好是 $\{X(t); t\in T\}$ 的有限维分布族，即:

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\leq x_1,\cdots,X(t_n)\leq x_n\}$$

*Kolmogorov*定理说明，$\{X(t); t \in T\}$的有限维分布族

包含了 $\{X(t); t \in T\}$ 的所有概率信息。

只要求出了随机过程的有限维分布族，随机过程的所有概率问题就能解决，但在实际问题中，要知道随机过程的全部有限维分布族是不可能的。因此，人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程的概率特征。

二、随机过程的数字特征

1. 均值函数

随机过程$\{X(t);t\in T\}$ 的均值函数定义为:

(假设 $E\{X(t)$ 是存在的)

$$m_X(t)\triangleq m(t)=E\{X(t)\}$$

注: $m(t)$是$X(t)$的所有样本函数在时刻t的函数值的平均，它表示随机过程$X(t)$ 在时刻t的摆动中心。

2. 方差函数

随机过程$\{X(t);t\in T\}$的方差函数定义为:

$$D_X(t)\triangleq D(t)=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}$$

$$=E[X(t)]^2-[E(X(t))]^2$$

简化算法

注1: 均方差函数$\sigma(t)=\sqrt{D(t)}$表示$X(t)$在各个时刻t对于均值$m(t)$的偏离程度。

注2: 若$\forall t\in T, E[X^2(t)]$ $\exists$，称$\{X(t)\}$是二阶矩过程。

3. (自)协方差函数

$X(t)$，$t_1,t_2\in T$ 的状态$X(t_1)$，$X(t_2)$的二阶中心混合矩

$$B_X(t_1,t_2)\triangleq E\{[X(t_1)-m(t_1)][X(t_2)-m(t_2)]\}$$

称为$X(t)$的自协方差函数，简称协方差函数。

当$t_1=t_2$时，自协方差就是方差：

$$D[X(t)]=Var[X(t)]=B_X(t,t)=E[X(t)-m(t)]^2$$

4. (自)相关函数

$X(t)$，$t_1,t_2 \in T$ 的状态$X(t_1)$，$X(t_2)$的二阶原点混合矩

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)X(t_2)]$$

称为$X(t)$的 自相关函数，简称相关函数。

注1: 当$E[X(t)]=m(t)=0$时， $R_X(t_1,t_2)=B_X(t_1,t_2)$

注2: $B_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m(t_1)m(t_2)$

注3: $B_X(t_1,t_2)$及$R_X(t_1,t_2)$反映了随机过程$X(t)$在时刻t_1和t_2时的线性相关程度。

注4: 对两个随机过程的关系，要引进互协方差函数或互相关函数来描述它们的线性关系。

5. (互)协方差函数

设$\{X(t),\ t\in T\}$,$\{Y(t),\ t\in T\}$是两个二阶矩过程，则称

$$B_{XY}(t_1,t_2)\triangleq E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}$$

——$X(t)$，$Y(t)$的互协方差函数。

其中：$m_X(t)=E[X(t)]$，$m_Y(t)=E[Y(t)]$

6. 互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)\triangleq E[X(t_1)Y(t_2)]$$

——$X(t)$，$Y(t)$的互相关函数。

注：$B_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$

7. 互不相关

若 $B_{XY}(t_1,t_2)=0$ ——称 $X(t)$，$Y(t)$ 互不相关。

注：若 $X(t),Y(t)$ 互不相关，则

$$R_{XY}(t_1,t_2)=m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

即

$$E[X(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$$

8. 特征函数

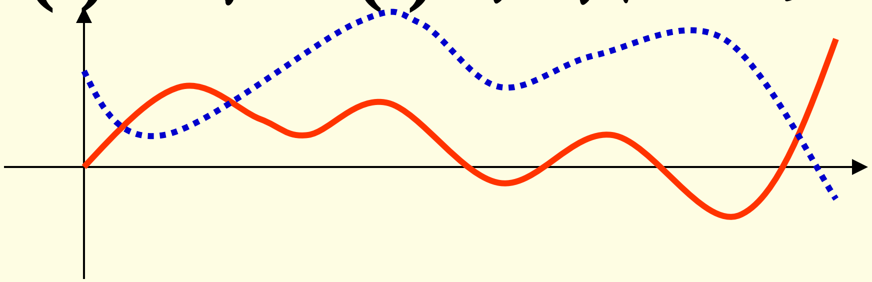
记:

$$\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$\triangleq E\{\exp\{i[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]\}\}$$

称 $\{\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$

为随机过程 $\{X(t);t\in T\}$ 的有限维特征函数族。

例 设$X(t)$为信号过程，$Y(t)$为噪声过程，$W(t)=X(t)+Y(t)$，求$W(t)$的均值函数和相关函数。



解

$$m_W(t)=EW(t)=E[X(t)+Y(t)]$$

$$=EX(t)+EY(t)=m_X(t)+m_Y(t)$$

$$R_W(s,t)=E[W(s)W(t)]$$

$$=E[(X(s)+Y(s))(X(t)+Y(t))]$$

$$
\begin{aligned}
&= E[X(s)X(t) + X(s)Y(t) \\
&\qquad\qquad + Y(s)X(t) + Y(s)Y(t)] \\
&= E[X(s)X(t)] + E[X(s)Y(\mathrm{t})] \\
&\qquad\qquad + E[Y(s)X(t)] + E[Y(s)Y(t)] \\
&= R_X(s,t) + R_{XY}(s,t) + R_{YX}(s,t) + R_Y(s,t)
\end{aligned}
$$

作业

P23-24:
题2.1---2.14
共14个题

2.3 复随机过程

主要探讨复随机过程的统计特征概念

- 定义 设$\{X_t, t\in T\}$，$\{Y_t, t\in T\}$是取实值的两个随机过程，对$t\in T$，$Z_t = X_t + iY_t$，则称$\{Z_t, t\in T\}$是复随机过程。
- 均值函数

$$m_Z(t) = EZ_t = EX_t + iEY_t = m_X(t) + im_Y(t)$$

- 方差函数

$$\begin{aligned} D_Z(t) &= E[|Z_t - m_Z(t)|^2] \\ &= E\left[(Z_t - m_Z(t))\overline{(Z_t - m_Z(t))}\right] \end{aligned}$$

- **相关函数** $$R_Z(s,t)=E\left[Z_s\overline{Z_t}\right]$$

- **协方差函数**

$$B_Z(s,t)=E\left[(Z_s-m_Z(s))\overline{(Z_t-m_Z(t))}\right]$$

☆显然有关系式

$$B_Z(s,t)=R_Z(s,t)-m_Z(s)\overline{m_Z(t)}$$

设$\{X_t, \ t\in T\}$，$\{Y_t, \ t\in T\}$是两个复随机过程，定义

- 互相关函数

$$R_{XY}(s,t)=E\left[X_s\overline{Y_t}\right]$$

- 互协方差函数

$$B_{XY}(s,t)=E\left[(X_s-m_X(s))\overline{(Y_t-m_Y(t))}\right]$$

☆显然有关系式

$$B_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-m_X(s)\overline{m_Y(t)}$$

2.4 随机过程的基本类型

一、分类

根据T和S，将随机过程分成不同的类：

参数空间分类：

$$\begin{cases} \text{离散参数} & \text{如 } T=\{0,1,2\cdots\} \\ \text{连续参数} & \text{如 } T=\{t \mid t\geq 0\} \end{cases}$$

状态空间分类：

$$\begin{cases} \text{离散状态} & S\text{取值是离散的} \\ \text{连续状态} & S\text{取值是连续的} \end{cases}$$

随机过程分为以下四类:

(1)离散参数离散型状态随机过程;

(2)连续参数离散状态随机过程;

(3)离散参数连续状态随机过程;

(4)连续参数连续状态随机过程。

以随机过程的统计特征或概率特征的分类，一般有：

独立增量过程；

正交增量过程；

二阶矩过程；

平稳过程；

Poission过程；

更新过程；

Markov过程；

鞅；

维纳过程。

二、正交增量过程

- **定义：** 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，且$EX(t)=0$, $EX^2(t)<+\infty$，若对任意的$t_1<t_2\leq t_3<t_4\in T$,有$E[(X(t_2)-X(t_1))(X(t_4)-X(t_3))]=0$，则称$\{X(t), t\in T\}$为**正交增量过程**。

- **定理：** 设$T=[a,b]$, 规定$X(a)=0$,

  若$\{X_t, t\in T\}$是正交增量过程，则

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X^2(\min(s,t))$$

证明如下：

证:对于$a<s<t<b$

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)$$
$$=R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$
$$=E[(X(s)-X(a))(X(t)-X(\mathrm{a}))]$$

$$=E[(X(s)-X(a))(X(t)-X(s)+X(s)-X(a))]$$

$$=E[(X(s)-X(a))(X(t)-X(s))]+E[(X(s)-X(a))^2]$$

$$=0+\sigma_X^2(s)=\sigma_X^2(s)$$

同理对于$a<t<s<b$,有 $\boldsymbol{B_X(s,t)=\sigma_X^2(t)}$

总之，$B_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X^2(\min(s,t))$

三、独立增量过程

定义1 设$\{X(t) \quad t\in T\}$是一随机过程,若对任意正整数$n, \forall n\in N$,及$t_1,\cdots,t_n\in T$, $t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$,随机过程的增量:

$$X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2),\cdots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

是相互独立的,则称$X(t)$为独立增量过程。

例:

设$\{X(n),\ n=0,1,2,\cdots\}$是相互独立的随机序列,

令 $Y(i)=\sum\limits_{n=0}^{i}X(n)$, 则 $\{Y(i),\ i=0,1,2,\cdots\}$

是一独立增量过程.

四、马尔可夫过程

定义: 设 $\{X(t), \ t \in T\}$为随机过程，若对任意正整数n及$t_1< t_2<\dots< t_n$,

$P\{X(t_1)=x_1,\dots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}>0$，且条件分布

$$P\{X(t_n)\le x_n | X(t_1)=x_1,\dots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$= P\{X(t_n) \le x_n | X(t_{n-1})=x_{n-1}\},$$

则称$\{X(t), \ t \in T\}$为**马尔可夫过程**。

☆若$t_1,t_2,\dots,t_{n-2}$表示过去，t_{n-1}表示现在，t_n表示将来，马尔可夫过程表明：在已知现在状态的条件下，将来所处的状态可以由现在的状态来预测。

五、正态过程和布朗过程

- **定义:** 设 $\{X(t), t\in T\}$是随机过程，对任意正整数n和$t_1<t_2<\dots<t_n\in T$, $(X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n))$是$n$维正态分布随机变量，则称$\{X(t), t\in T\}$是**正态过程**或**高斯过程**。

- **定义：** 设$\{W(t), -\infty< t < +\infty\}$是随机过程，如果

  (1)$W(0)=0$

  (2)$W(t)$是平稳独立增量过程

  (3)对任意s, t，增量$W(t)-W(s)\sim N(0, \sigma^2|t-s|)$，　$\sigma^2>0$

  则称$\{W(t), -\infty< t < +\infty\}$为**维纳过程**，或**布朗运动**。

平稳独立增量过程：若独立增量过程$\{X(t), t \in T\}$，若增量$X(t+h)- X(s+h)$与$X(t)- X(s)$有相同的分布，即分布仅依赖于时间长度而与时间起点无关。

维纳过程：$EX(t)=0$。

性质1：维纳过程是马尔科夫过程。

性质2： 设$\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，则对任意$-\infty < a < s, t < +\infty$,

$$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2\min(s-a, t-a)$$

特殊的，$B_W(s, t)=R_W(s, t)=\sigma^2\min(s, t)$

性质1：维纳过程是正态过程，马尔科夫过程。

证:

由独立增量和W(0)=0即可证明维纳过程是马尔科夫过程。

因为$X(0)=0$，对于T中的任意n个值$t_1,t_2,\cdots$，$t_n,t_1<t_2<\cdots<t_n$，有

所以$P\left(X(t_n)\le x_n \middle| X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\right)$

$$=P\left(X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1} \middle| X(t_1)-X(0)=x_1, X(t_2)-X(t_1)=x_2\text{-}x_1,\cdots, X(t_{n-1})-X(t_{n-2})=x_{n-1}-x_{n-2}\right)$$

因为增量独立，

$$上式=P\left(X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1}\right)=P\left(X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1} \middle| X(t_{n-1})-X(0)=x_{n-1}\right)$$

$$=P\left(X(t_n)\le x_n \middle| X(t_{n-1})=x_{n-1}\right)$$

所以，维纳过程是马尔科夫过程。

六、平稳过程

1. 严平稳过程

定义1: 设随机过程$\{X(t), \ t\in T\}$,若对$\forall n\,(n=1,2,\cdots)$, $t_1,\cdots,t_n\in T$和任意实数τ, 当$t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau\in T$时,$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$和$(X(t_1+\tau),\cdots,X(t_n+\tau))$有相同的分布函数,即

$$F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

$$=P\{X(t_1+\tau)\le x_1,\cdots,X(t_n+\tau)\le x_n\}$$

$$=F(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,\cdots,x_n)$$

则$\{X(t), \ t\in T\}$称为严平稳过程.

平稳过程的参数T：

$$\begin{cases}\text{可以是连续的，} & \text{如} t\in[0,+\infty),(-\infty,+\infty)\\ \text{可以是离散的，} & \text{如} t\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots\},\{0,1,2,\cdots\}\end{cases}$$

严平稳过程的特点

1. 严平稳过程$X(t)$的一维概率密度$f(t;x)$与t无关；二维概率密度$f(t_1,t_2;x_1,x_2)$仅与$\tau=t_1-t_2$有关，而与时间的起点无关。

2. 若严平稳过程存在二阶矩 (即 $E[X(t)]^2<\infty$)，则

(1) 均值函数为常数：$m(t)=E[X(t)]=m$

（2）协方差函数 $B_X(t_1,t_2)$,(自)相关函数$R_X(t_1,t_2)$仅是时间差$\tau=t_1-t_2$的函数.

2. 宽平稳过程　　(简称平稳过程)

定义2: 设随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$,如果它满足:

(1) $X(t)$是二阶矩过程;

(即所以二阶矩存在$E[X(t)]^2<\infty$)

(2) 均值函数为常数: 即 $m(t)=E[X(t)]=m$;

(3) 协方差函数$\gamma_X(t_1,t_2)$,(自)相关函数$R_X(t_1,t_2)$仅依赖于时间差$\tau=t_1-t_2$.

则称$X(t)$为宽平稳过程，或二阶平稳过程.

当T为整数集时，称$\{X(t)\}$为平稳时间序列.

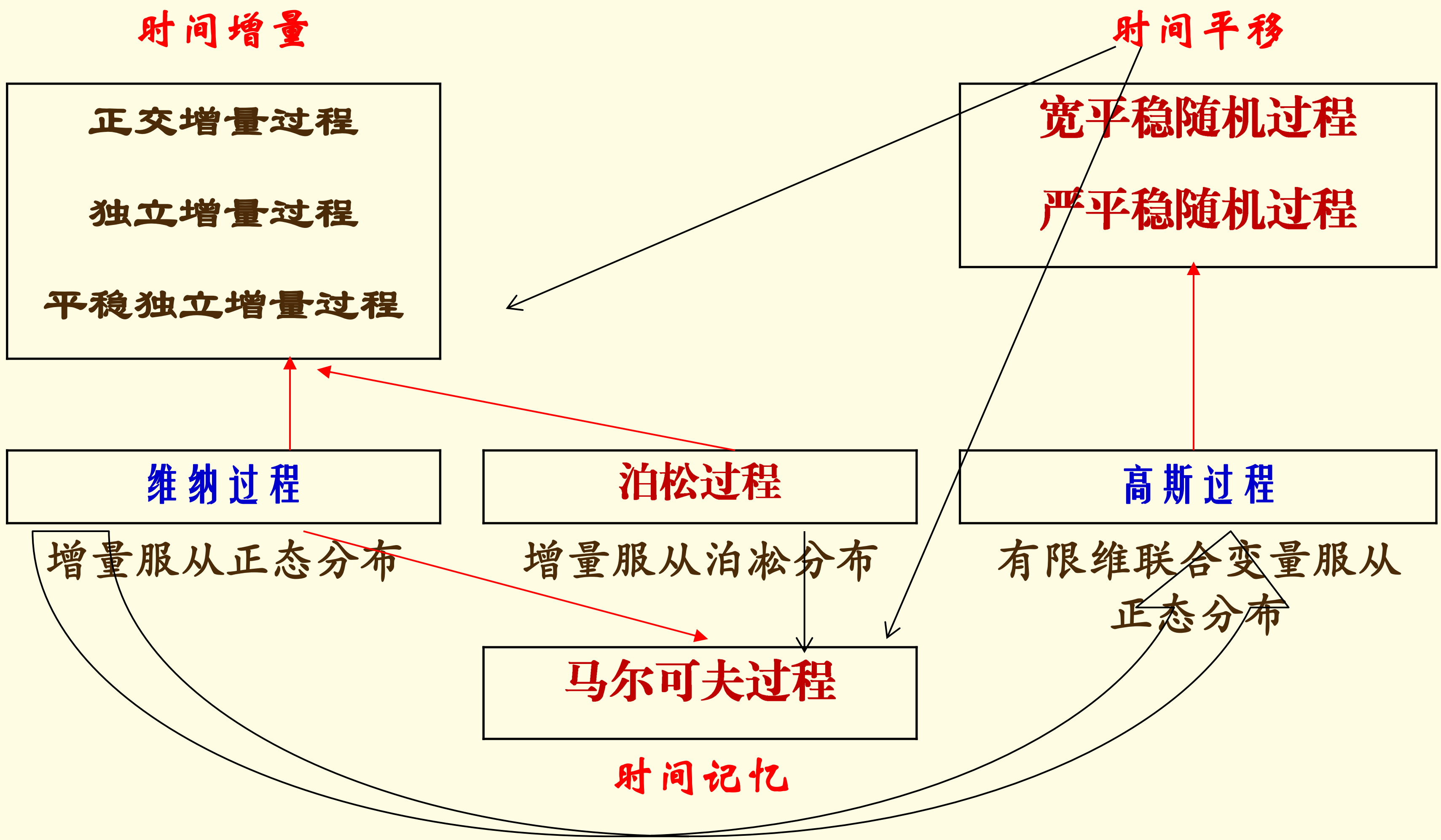
注1: 严平稳过程不一定是宽平稳过程。

因为：严平稳过程不一定是二阶矩过程。若严平稳过程存在二阶矩，则它一定是宽平稳过程.

注2: 宽平稳过程也不一定是严平稳过程。

因为：宽平稳过程只保证一阶矩二阶矩不随时间的推移而改变，这当然不能保证其有限维分布不随时间而推移。

2.4 几种重要的随机过程



作业

- 29页：2.15-2.17

第二章 总结复习

- 随机过程相关概念
- 随机过程的概率分布和数字特征
- 复随机过程
- 几种重要的随机过程