

第三章 泊松过程

3.1 泊松过程概念

3.2 泊松过程的基本性质

3.3 非齐次泊松过程

3.4 复合泊松过程

3.1 泊松过程概念

泊松过程是一类重要的计数过程。

一、计数过程

定义3.1: 随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程, 如果

$N(t)$ 表示从 0 到 t 时刻某一特定事件 A 发生的次数,

它具备以下两个特点:

(1) $N(t)$ 取值为整数;

(2) $s < t$ 时, $N(s) \leq N(t)$ 且 $N(t) - N(s)$ 表示 $(s, t]$ 时间内事件 A 发生的次数。

例子

某商店一段时间内购物的顾客数；

某段时间内电话转换台呼叫的次数；

加油站一段时间内等候加油的人数等。

注意如下两个概念：

1. 计数过程有独立增量

如果在不相交的时间区间中发生的事件个数是独立的，则称该计数过程有独立增量。即当 $t_1 < t_2 < t_3$ 时，有 $X(t_2) - X(t_1)$ 与 $X(t_3) - X(t_2)$ 是独立的。

2. 计数过程有平稳增量

若在任一时间区间中的事件个数的分布只依赖于时间区间的长度，则计数过程有平稳增量。即对一切 $t_1 < t_2$ 及 $s > 0$ ，在 $(t_1 + s, t_2 + s]$ 中事件个数与区间 $(t_1, t_2]$ 中事件的个数有相同的分布。

泊松过程是一类具有独立增量和平稳增量的计数过程。

二、泊松过程定义

泊松与泊松过程

Poission过程最早是由法国数学家Poission引入的。

泊松，法国数学家，青年时期曾学过医学，后因喜好数学，于1798年入巴黎综合工科学学校深造，1800年毕业时研究论文优秀而被指定为讲师，1806年接替傅立叶任该校教授，1812年当选为巴黎科学院院士。他工作的特色是应用数学方法研究各类力学和物理问题，并由此得到数学上的发现。



(Poisson ,1781-1840)

泊松于1837年引入了泊松过程。

1943年C.帕尔姆在电话业务问题中研究了这一过程,上世纪50年代辛钦在服务系统的研究中又进一步发展了这一种随机过程。

定义1: 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ *Poisson* 过程, 如果

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 过程具有独立增量;
- (3) 对任意的 $s, t \geq 0$,

$$P(N(s+t) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

注: 由条件 (3) 知, *Poisson* 过程具有平稳增量, 且

增量服从泊松分布, $E[N(t)] = \lambda t$

显然, 可以认为 λ 是单位时间内发生事件的平均次数,

称 λ 为 *Poisson* 过程的 **强度或速度或发生率**。

例

来某商店的顾客数服从强度为 $\lambda = 4$ 人 / 小时的 *Poisson* 过程, 已知商店上午 9:00 开门, 试求到 9:30 时仅来了 1 位顾客、到 11 时半总计达 5 位顾客的概率。

解: 设 $X(t)$ 表示从开门到 t 时刻来商店的顾客数, 则 $X(t)$ 是参数为 4 的泊松过程。所以

$$\begin{aligned} P(X(0.5) = 1, X(2.5) = 5) &= P(X(0.5) = 1, X(2.5) - X(0.5) = 4) \\ &= P(X(0.5) = 1) \cdot P(X(2.5) - X(0.5) = 4) = \frac{(4 \times 0.5)^1}{1!} e^{-4 \times 0.5} \cdot \frac{(4 \times 2)^4}{4!} e^{-4 \times 2} \\ &= \frac{1024}{3} e^{-10} \approx 0.0155 \end{aligned}$$

例 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 服从强度为 λ 的 *Poisson* 过程, 求

(1) $P\{N(5) = 4\}$; (2) $P\{N(2) = 9 \mid N(5) - N(3) = 4\}$.

(3) $P\{N(5) = 4, N(7.5) = 6, N(12) = 9\}$

解: (1) 由 $P\{N(t) = n\} = P\{N(t) - N(0) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ 得:

$$P\{N(5) = 4\} = e^{-5\lambda} \frac{(5\lambda)^4}{4!}.$$

$$(2) P\{N(2) = 9 \mid N(5) = 4\} = P\{N(2) = 9\} = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^9}{9!}.$$

$$(3) P\{N(5) = 4, N(7.5) = 6, N(12) = 9\} = P\{N(5) = 4\} \cdot P\{N(7.5) = 6\}$$

$$\cdot P\{N(12) = 9\} = e^{-5\lambda} \frac{(5\lambda)^4}{4!} \cdot e^{-7.5\lambda} \frac{(7.5\lambda)^6}{6!} \cdot e^{-12\lambda} \frac{(12\lambda)^9}{9!}.$$

这样做是错的!

(3)的正确做法如下:

$$P\{N(5) = 4, N(7.5) = 6, N(12) = 9\}$$

$$= P\{N(5) = 4, N(7.5) - N(5) = 2, N(12) - N(7.5) = 3\}$$

$$= e^{-5\lambda} \frac{(5\lambda)^4}{4!} \bullet e^{-2.5\lambda} \frac{(2.5\lambda)^2}{2!} \bullet e^{-4.5\lambda} \frac{(4.5\lambda)^3}{3!}$$

$$= \lambda^9 e^{-12\lambda} \frac{5^4 \square 2.5^2 \square 4.5^3}{288}.$$

注：

从定义 3.2 知，为了确定一个任意的计数过程实际上是不是 *Poisson* 过程，则必须验证是否满足 (1) – (3)，
条件 (1) 说明计数过程从 0 开始，
条件 (2) 通常可以从我们对过程的实际情况去直接验证。
然而条件 (3) 一般完全不清楚如何去判定。

可以从“二项分布的泊松近似”这一思路去“改造”这一条件：在很短的时间内事件发生的概率很小，但考虑很多个这样很短时间的连接，事件的发生将会有有一个大致稳定的概率”。

用“无穷小的阶”来给出 *Poisson* 过程的第二种定义。

定义2: 一计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 λ 的 *Poisson* 过程, 若满足:

(1) $N(0) = 0$;

(2) 是独立增量及平稳增量过程.

(3) 对任意 $t > 0$, 和充分小的 $\Delta t > 0$, 有

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t)$$

(4) 对任意 $t > 0$ 、充分小的 Δt , 有

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

数学专业的学生要求掌握此定义

说明1：定义中各条件的解释

第一个条件说明计数过程从零时刻开始；

第二个条件说明不断进行的这些试验是相互独立的；

第三个条件说明事件是一件一件发生的，在统一瞬间同时发生多个事件的可能性极小；

第四个条件说明事件发生的概率 $p = \lambda \Delta t$ ，而且 p 很小。

这正好是贝努利试验的模型。

进一步可以用“二项分布的泊松近似”说明三四两条件与上一定义的“增量服从泊松分布”一致。

说明2：两种定义相比较

后一定义更易于应用到实际问题中，作为判断某一现象能否用泊松过程来描述的依据。

定理：泊松过程的上述两个定义是等价的。

时间间隔与泊松过程定义3

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，则 $X(t)$ 表示0到 t 时刻为止事件A发生的次数。用 T_n 表示第 $n-1$ 次事件A发生到第 n 次事件A发生的时间间隔， $n \geq 0$ 。

泊松过程定义3:

如果每次事件发生的时间间隔 T_1, T_2, \dots 相互独立且服从同一参数 λ 的指数分布，则该计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的 *Poisson*过程。

注意： 密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

指数分布数学期望为 $1 / \lambda$ 。

3.2 泊松过程的基本性质

一、数字特征

二、时间间隔和等待时间的分布

一、数字特征

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程,
对任意 $t, s \in [0, +\infty)$, 若 $s < t$, 则有

$$(1) E[X(t) - X(s)] = D[X(t) - X(s)] = \lambda(t - s)$$

$$(2) m_X(t) = E[X(t)] = E[X(t) - X(0)] = \lambda t$$

$$(3) \sigma_X^2(t) = D[X(t)] = D[X(t) - X(0)] = \lambda t$$

$$(4) R_X(s, t) = \lambda s(\lambda t + 1)$$

$$(5) B_X(s, t) = R_X(s, t) - m_X(s)m_X(t) = \lambda s$$

$$(6) \text{若 } t < s, \text{ 则 } B_X(s, t) = \lambda t, \text{ 从而}$$

$$B_X(s, t) = \lambda \min(s, t)$$

例1 设从早上8:00开始有无穷多个人排队等候服务,只有一名服务员,且每个人接受服务的时间是独立的并服从均值为20 min的指数分布,则到中午12:00为止平均有多少人已经离去? 已有9个人已接受服务的概率是多少?

用定义3

解: 设 $N(t)$ 为8点后第 t (min)时刻已接受服务的人数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程, $1/\lambda = 20\text{min}$. 中午12点即 $t = 240\text{min}$, $\lambda t = 12$

(1)由 $m(N(t)) = \lambda t$ 得: $m(N(240)) = \lambda t = \frac{1}{20} \times 240 = 12$ (人)

即, 到12:00为止平均有12人已经离去.

(2)由 $P(N(s+t)-N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ 得:

$$P(N(240) = 9) = e^{-12} \frac{(12)^9}{9!}$$

即, 此时有9人已接受服务的概率为 $e^{-12} \frac{(12)^9}{9!}$

二、时间间隔和等待时间的分布

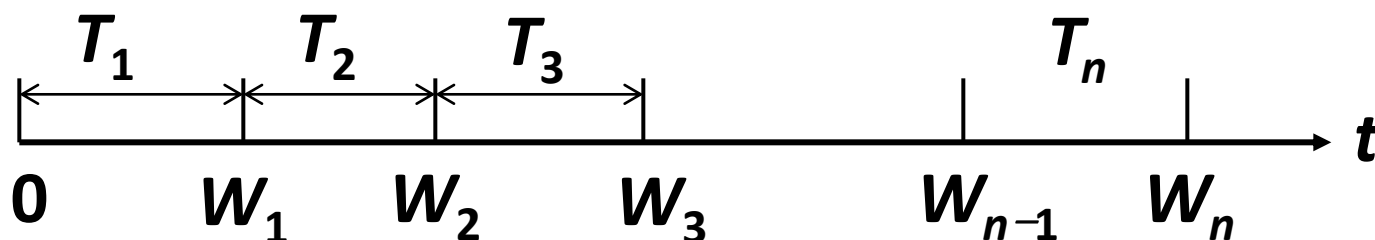
设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程,

$X(t)$ 表示0到 t 时刻为止事件A发生的次数,

W_n 表示第 n 次事件A发生的时间($n \geq 1$),

也称为第 n 次事件A的等待时间,或到达时间,

T_n 表示第 $n-1$ 次事件A发生到第 n 次事件A发生的时间间隔。



等待时间 W_n 与时间间隔 T_n 均为连续型随机变量,

来探讨 W_n 与 T_n 这两类随机变量的概率分布规律。

1. 时间间隔 T_n 的分布的推导

以下都是 t 非负的情况， $t < 0$ 时密度函数值均为0.

(1) 先看 $n = 1$ 的情况，计算 $F_{T_1}(t)$ 后再推导出 $f_{T_1}(t)$ 。

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P(X(t) = 0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_{T_1}(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)'_t = \lambda e^{-\lambda t} \quad T_1 \text{ 服从参数为 } \lambda \text{ 的指数分布.}$$

(2) 求 T_2 的密度函数

$$F_{T_2}(t) = P(T_2 \leq t | T_1 = s_1) = 1 - P(T_2 > t | T_1 = s_1)$$

$$= 1 - P(\text{在 } (s_1, s_1 + t] \text{ 内事件发生数为 } 0 | T_1 = s_1)$$

$$= 1 - P(X(s_1 + t) - X(s_1) = 0 | X(s_1) - X(0) = 1) \quad \text{所以 } T_2 \text{ 也服从参数}$$

$$= 1 - P(X(s_1 + t) - X(s_1) = 0) \quad (\text{增量独立}) \quad \text{为 } \lambda \text{ 的指数分布.}$$

$$= 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_{T_2}(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)'_t = \lambda e^{-\lambda t}$$

如此，可证对任意非零自然数 n ,

T_n 都服从参数为 λ 的指数分布.

时间间隔的分布定理

- 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, $\{T_n, n \geq 1\}$ 是相应第 $n-1$ 次事件A发生到第 n 次事件A发生的时间间隔序列, 则随机变量 $T_n, n=1, 2, \dots$ 独立同分布, 均服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

用解析式详述如下:

定理3.2

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\{T_n, n \geq 1\}$ 是相应第 $n-1$ 次事件A发生到第 n 次事件A发生的时间间隔序列, 则随机变量 $T_n, n=1, 2, \dots$ 独立同分布, 均服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布

时间间隔 T_n 的分布函数为

$$F_{T_n}(t) = P\{T_n \leq t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

概率密度为

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

可以证明这是充要条件

定理3 如果每次事件发生的时间间隔 T_1, T_2, \dots 相互独立且服从同一参数 λ 的指数分布，则该计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的 *Poisson* 过程。

注：这是泊松过程定义3的来历。

推广：空间上的泊松过程

如果任意相继出现的两个质点的点间间距是相互独立的，且服从同一参数为 λ 的指数分布，则质点流构成强度为 λ 的 *Poisson* 过程。

教材习题3.1

定理 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 是分别具有参数 λ_1 和 λ_2 的泊松过程，
则其和是具有参数 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。
其差不是泊松过程。

例2 甲、乙两路公共汽车都通过某一站,两路汽车的达到分别服从10分钟1辆(甲),15分钟一辆(乙)的 *Poisson* 分布.假定车总不会满员,试问可乘坐甲或乙两路公共汽车的乘客在此车站所需要等待时间的概率分布及其期望。

解：从两车同时离开该站开始计时，到 t 时刻时已来的车的辆数 $N(t)$ 是泊松过程，且

$$\lambda = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$$

平均相当于每 6 分钟来一趟车，

所以，候车时间服从 $[0,6)$ 上均匀分布，即

$$T \sim U[0,6).$$

$$ET = 3$$

2. 等待时间 W_n 的分布

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\{W_n, n \geq 1\}$ 是相应等待时间序列, 来推导出 W_n 的密度函数。

$$t < 0 \text{ 时, } F_{W_n}(t) = 0, \quad t \geq 0 \text{ 时, 有 } F_{W_n}(t) = P\{W_n \leq t\} = P\{X(t) \geq n\} = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

$t > 0$ 时, 对 t 求导得密度函数:

$$f_{W_n}(t) = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right)'_t = - \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

W_n 的概率密度为

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

这是参数为 n 与 λ 的 Γ 分布的密度函数

定理3.3 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\{W_n, n \geq 1\}$ 是相应等待时间序列, 则 W_n 服从参数为 n 与 λ 的 Γ 分布(爱尔兰分布), 概率密度为

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

注意到 $W_n = \sum_{k=1}^n T_k$

Γ 分布是 n 个相互独立且服从指数分布的随机变量之和的概率分布。

教材38-39页例3.6

例 设 $\{X_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{X_2(t), t \geq 0\}$ 是两个相互独立的泊松过程，它们在单位时间内平均出现的事件数分别为 λ_1 和 λ_2 。记 $W_k^{(1)}$ 为过程 $X_1(t)$ 的第 k 次事件到达时间，记 $W_1^{(2)}$ 为过程 $X_2(t)$ 的第1次事件到达时间。

求 $P \{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\}$ 。

即第一个泊松过程第 k 次事件发生比第二个泊松过程第1次事件发生早的概率。

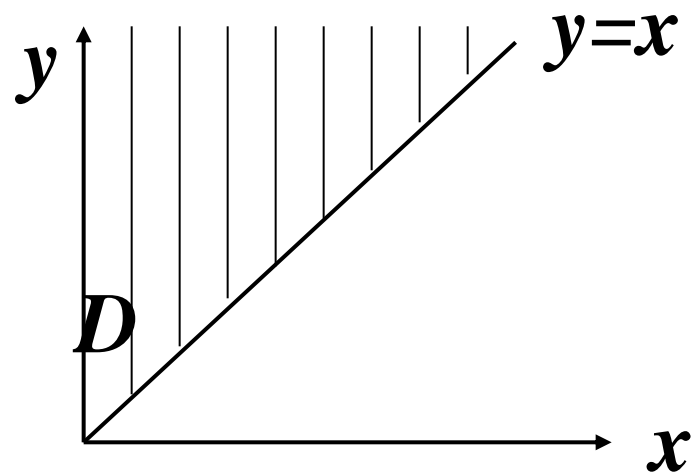
解 设 $W_k^{(1)}$ 的取值为 x , $W_1^{(2)}$ 的取值为 y ,

$$f_{W_k^{(1)}}(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_{W_1^{(2)}}(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } P \{W_k^{(1)} < W_1^{(2)}\} \\ = \iint_D f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

因 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 相互独立，
所以 $W_k^{(1)}$ 和 $W_1^{(2)}$ 相互独立，



$$\text{所以 } f(x, y) = f_{W_k^{(1)}}(x) f_{W_1^{(2)}}(y)$$

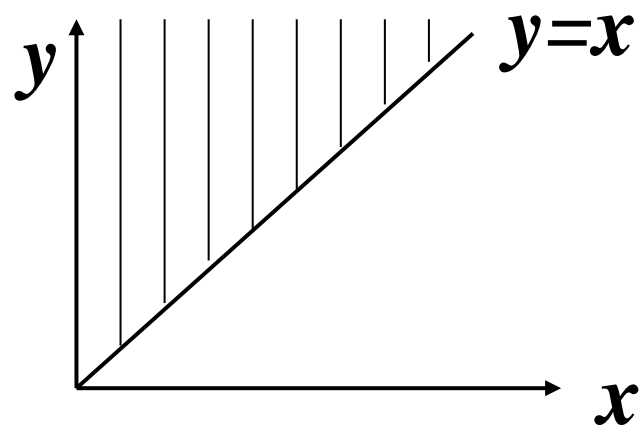
$$= \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$P \left\{ W_k^{(1)} < W_1^{(2)} \right\}$$

$$= \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy dx$$

$$= \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} \int_0^\infty x^{k-1} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k$$



3. 等待时间 W_n (事件发生时刻) 的条件分布

讨论在给定 $N(t) = n$ 的条件下, W_1, W_2, \dots, W_n 的条件分布相关性质及其应用。

定理: 假设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 *Poisson* 过程,

则 W_1 的条件分布函数和条件密度函数分别是:

$$F_{W_1|N}(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ \frac{s}{t}, & s \in (0, t] \\ 1, & s > t \end{cases} \quad f_{W_1|N}(s) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \in (0, t] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即, 在已知 $[0, t]$ 时间内只发生一次的前提下, A 发生的时间服从 $[0, t]$ 上的均匀分布。

这个性质能否推广到 $N(t) = n, n \geq 1$ 的情况?

- 定理

- 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程，已知在 $[0, t]$ 内事件 A 发生 n 次，则这 n 次事件的到达时间 $W_1 < W_2 < \dots < W_n$ 的条件（联合）概率密度为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.3 非齐次泊松过程

3.4 复合泊松过程

3.3 非齐次泊松过程

- 当泊松过程的强度 λ 不再是常数，而与时间 t 有关时，泊松过程就被推广为**非齐次泊松过程**。
- 非齐次泊松过程**不具有平稳增量**。
- **非齐次泊松过程的例子：**
 - (1) 设备出现的故障数。注意：随着使用年限的变化，出现故障的可能性会随之增加。
 - (2) 昆虫产卵数。注意：随着昆虫年龄的变化，其年均产卵数会随之减少。

一、非齐次泊松过程的定义

定义3.4 如果计数过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 满足

(1) $X(0)=0$;

(2) $X(t)$ 是独立增量过程;

(3) 对 \forall 实数 $t \geq 0, s > 0$, 增量 $N(t+s) - N(t) \sim P\left(\int_t^{t+s} \lambda(u) du\right)$
则称计数过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为具有跳跃强度函数 $\lambda(t)$ 的
非齐次泊松过程。

$\lambda(t)$ 称为跳跃强度函数, 简称强度函数。

一、非齐次泊松过程的定义

定义3.5 如果计数过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 满足

(1) $X(0)=0$;

(2) $X(t)$ 是独立增量过程;

(3) $P \{ X(t+h) - X(t) = 1 \} = \lambda(t)h + o(h)$

$$P \{ X(t+h) - X(t) \geq 2 \} = o(h)$$

则称计数过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为具有强度函数 $\lambda(t)$ 的**非齐次泊松过程**,

性质

- 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程，则有

$$(1) m_X(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

$$(2) P\{X(t) = n\} = \frac{[m_X(t)]^n}{n!} e^{-m_X(t)}$$

$$(3) P\{X(t+s) - X(t) = n\} \\ = \frac{[m_X(t+s) - m_X(t)]^n}{n!} e^{-[m_X(t+s) - m_X(t)]} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(4) DX(t) = EX(t) = m_X(t)$$

$$\text{注意：} E(X(t+s) - X(t)) = m_X(t+s) - m_X(t)$$

例 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是具有强度函数

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega t)$$

的非齐次泊松过程($\omega \neq 0$), 求 $EX(t)$ 和 $DX(t)$ 。

解: $EX(t) = DX(t) = m_X(t)$

$$= \int_0^t \lambda(s) ds = \int_0^t \frac{1}{2}(1 + \cos \omega s) ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]$$

例 某路公共汽车从早晨5时到晚上9时有车发出，乘客流量如下：5时按平均乘客为200人/小时计算；5时至8时乘客平均人数线性增加，8时为1400人/小时；8时至18时保持平均人数不变；18时到21时线性下降，到21时为200人/小时，假定乘客数在不相交的区间内是相互独立的，求：

- (1) 12时至14时有2000人乘车的概率，并求这两个小时内来站乘车人数的数学期望。
- (2) 16时到19时有2000人乘车的概率，并求这3个小时内来站乘车人数的数学期望。

解 设 $t=0$ 为早晨5时,
 $t=3$ 时为8时, $t=13$ 为18时, $t=16$ 为21时,
• 则

$$\lambda(t) = \begin{cases} 200 + 400t, & 0 \leq t \leq 3 \\ 1400, & 3 < t \leq 13 \\ 1400 - 400(t - 13), & 13 < t \leq 16 \end{cases}$$

在 $[0, t]$ 内到达的乘车人数 $X(t)$ 服从强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程

(1) 12时至14时为 $t \in [7, 9]$

12时至14时乘车人数的数学期望为

$$E[X(9) - X(7)] = m_X(9) - m_X(7)$$

$$= \int_7^9 \lambda(s) ds = \int_7^9 1400 ds = 2800$$

12时至14时有2000人来站乘车的概率为

$$P\{X(9) - X(7) = 2000\} = e^{-2800} \frac{2800^{2000}}{2000!}$$

(2) 16时至19时为 $t \in [11, 14]$

16时至19时乘车人数的数学期望为

$$\begin{aligned} E[X(14) - X(11)] &= m_X(14) - m_X(11) \\ &= \int_{11}^{14} \lambda(s) ds = \int_{11}^{13} 1400 ds + \int_{13}^{14} (1400 - 400(s - 13)) ds = 4000 \end{aligned}$$

16时至19时有2000人来站乘车的概率为

$$P\{X(14) - X(11) = 2000\} = e^{-4000} \frac{4000^{2000}}{2000!}$$

3.4 复合泊松过程

定义3.5

- 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度 λ 的泊松过程, $\{Y_k, k=1, 2, \dots\}$ 是一列独立同分布随机变量, 且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 则称

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t \geq 0 \quad \text{为复合泊松过程。}$$

- **例** 设 $N(t)$ 是在 $[0, t]$ 内来到某商店的顾客数, Y_k 是第 k 个顾客的花费, 则

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \quad \text{是} [0, t] \text{内的营业额。}$$

定理3.6:

- 设 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t \geq 0$ 是复合泊松过程, 则
 - (1) $\{X(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程;
 - (2) $X(t)$ 的特征函数 $g_{X(t)}(u) = \exp \{ \lambda t [g_Y(u) - 1] \}$
 λ 是 $N(t)$ 的强度, $g_Y(u)$ 是随机变量 Y_1 的特征函数;
 - (3) 若 $E(Y_1^2) < \infty$, 则

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1], D[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2]$$

例 设顾客以每分钟6人的平均速率进入某商场，这一过程可以用泊松过程来描述。又设进入该商场的每位顾客买东西的概率为0.9，且每位顾客是否买东西互不影响，也与进入该商场的顾客数无关。求这一天（12小时）在该商场买东西的顾客数的均值。

解：以 $N_1(t)$ 表示在时间 $(0, t]$ 内进入该商场的顾客数，则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 是强度（速率）为 $\lambda = 6$ （人 / 分钟）的泊松过程。再以 $N_2(t)$ 表示在时间 $(0, t]$ 内在该商场买东西的顾客数，并设

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 位顾客在该商场买东西} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 位顾客在该商场未买东西} \end{cases}$$

则 Y_i 独立且同分布于 $B(1, 0.9)$, 并且与 $\{(N_1(t), t \geq 0)\}$ 独立, 且

$$N_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

由定理 3.6 可知一天 (12 小时) 在该商场买东西的平均顾客数为:

$$E(N_2(720)) = \lambda t E(Y_1) = 6 \times 720 \times 1 \times 0.9 = 3888 (\text{人})$$

小结与作业

1. 非齐次泊松过程

定义、强度函数、概率计算、数字特征计算

2. 复合泊松过程

定义、性质、均值函数计算

作业：39-40： 9、10

第三章总结

一、泊松过程

1. 三个定义、一个充要条件
2. 性质：(1) 数字特征 (2) 时间间隔和等待时间的分布
(3) 等待时间的条件分布

问题：相关的数字特征、条件期望、概率计算

二、非齐次泊松过程

两种定义、数字特征、概率性质

三、复合泊松过程

定义、性质、均值计算