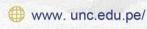


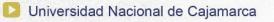
Programación Lineal Entera

Método Aditivo de Egon Balas para problemas binarios (0,1)



1 Universidad Nacional de Cajamarca







Método Aditivo de Egon Balas

El Método de Balas (o método de enumeración implícita de Egon Balas) es un método específico para resolver problemas de programación entera donde las variables de decisión son enteras. Este método se utiliza, sobre todo, en problemas de tipo knapsack o de combinaciones binarias. Su enfoque es similar al de ramificación y acotamiento pero adaptado para mejorar la eficiencia en problemas con restricciones específicas.







El método de Egon Balas es una técnica de **programación entera disyuntiva**. El objetivo es evitar evaluar todas las combinaciones posibles de variables enteras al dividir el espacio de soluciones en subconjuntos y acotar las soluciones no factibles o no óptimas.

La filosofía del método se basa en pensar que si se tiene una función objetiva minimizando y todos sus términos son positivos, entonces, entre menos variables tomen el valor de uno (1), la función objetiva será mínima.

Algoritmo



- 1. La función objetivo se minimiza, en caso de maximización, use la regla de equivalencia: Maximizar (Z) = Minimizar (-Z).
- 2. Se requiere que Cj > 0, para todo j. En caso de que Cj < 0, entonces Xj se sustituye por: 1 - X'J, es decir: Xj = 1 - X'J

Ejemplo: Min Z =
$$3X_1 - 2X_2 => X_2 = 1 - X_2'$$

Remplazando Z = $3X_1 - 2(1 - X_2') = 3X_1 - 2 + 2X_2'$

Min Z = $3X_1 + 2X_2' - 2$, que para el caso queda: Min Z = $3X_1 + 2X_2'$

Nota: El cambio de variable, también se debe aplicar a todas las restricciones.



Ejemplo 1



Para apreciar la utilidad del método, resolveremos el siguiente ejemplo, primero, contemplando todas las posibles soluciones y a continuación aplicando el método aditivo de Egon Balas, que reduce el número de soluciones posibles a contemplar.

Minimice:

$$Z = 8X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 5X_4 + X_5$$
s.a.
$$-6X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 < -3$$

$$-4X_1 - 5X_2 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 < -7$$

$$Xi = 0,1 ; i = 1,2,3,4,5$$





El número posible de soluciones es de 2n, en donde n es el número de variables. En el ejemplo, el número posible de soluciones es $2^5 = 32$

En el siguiente diagrama se muestran todas las 32 posibles soluciones.

		32 POSIBLES SOLUCIONES																														
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X_3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
X4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X_5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Algunas de éstas soluciones no son factibles, ya que no satisfacen las restricciones. Aquellas que satisfagan las restricciones, deberán ser remplazadas en la función objetivo y la que la haga más pequeña, será la solución óptima. Éste procedimiento es dispendioso, tanto en la consecución de todas las soluciones como en su evaluación para todas las restricciones y en su evaluación final sobre la función objetiva.





Evaluamos cada restricción, primeramente suponiendo que todas las variables valgan cero, y después, alternativamente a cada variable le asignamos el valor de uno (1) y al resto de variables el valor de cero (0). Cada vez que una solución no satisfaga una restricción, el que tan lejos está de satisfacerla, lo llamamos infactibilidad.

Ejemplo: Si
$$X_1 = 1$$
 y $X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$

Remplazando en la restricción uno (1), establecemos que: -3 < 0, luego aquí la infactibilidad es cero (0), ya que la solución evaluada, satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación **verdadera**.

$$(1) \quad -6X1 - 3X2 + 2X3 - 4X4 - X5 < -3$$





Remplazando en la restricción dos (2), establecemos que: 3 < 0 , luego aquí la infactibilidad es tres (3), ya que la solución evaluada, no satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación falsa. El que tan lejos está de ser una verdad, es lo que llamamos infactibilidad.

En total, la solución evaluada tiene una infactibilidad de 0 + 3 = 3

Si en ésta primera iteración, encontramos una solución cuya infactibilidad sea cero (0), hemos encontrado la solución factible y óptima. Si encontramos que varias soluciones tienen la infactibilidad igual a cero (0), remplazamos todas éstas soluciones en la función objetivo y la solución óptima será aquella que haga que Z sea mínima.

$$(2) \quad -4X1 - 5X2 - 4X3 - 3X4 + 3X5 < -7$$







Aplicación del Método de Egon Balas

Si no hay ninguna solución con su infactibilidad igual a cero (0), Escogemos la solución que menor infactibilidad tenga y de ella la variable que esté valiendo uno (1).

Remplazamos en las restricciones dicha variable y sobre dichas restricciones iniciamos la segunda iteración. Éste procedimiento se repite hasta encontrar la solución óptima factible.

Ejemplo 1:



Minimice:

$$Z = 8X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 5X_4 + X_5$$
s.a.
$$-6X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 < -3$$

$$-4X_1 - 5X_2 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 < -7$$

$$Xj = 0,1 ; j = 1,2,3,4,5$$



SEGUNDA ITERACIÓN (X2 = 1)



$$-6X1 + 2X3 - 4X4 - X5 < 0$$

$$-4X1 - 4X3 - 3X4 + 3X5 + 2 < 0$$

$$X1 = 1$$
; $X3 = X4 = X5 = 0$

-6 < 0

-2 < 0

Infactibilidad = 0;

$$X3 = 1$$
; $X1 = X4 = X5 = 0$

2 < 0

-2 < 0

Infactibilidad = 2

$$X4 = 1$$
; $X1 = X3 = X5 = 0$

-4 < 0

-1 < 0

Infactibilidad = 0

$$X5 = 1$$
; $X1 = X3 = X4 = 0$

-1 < 0

5 < 0

Infactibilidad = 5

En ésta iteración hay dos soluciones con infactibilidad igual a cero (0), evaluado la función objetivo con ambas soluciones, encontramos la solución óptima con Z = 12

Minimice:

$$Z = 8X1 + 7X2 + 6X3 + 5X4 + X5$$
s.a.
$$-6X1 - 3X2 + 2X3 - 4X4 - X5 < -3$$

$$-4X1 - 5X2 - 4X3 - 3X4 + 3X5 < -7$$

$$Xj = 0,1 ; j = 1,2,3,4,5$$



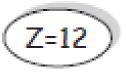
(X1 = 1 y X2 = 1)

$$X1 = 1$$
; $X3 = X4 = X5 = 0$

$$(X2 = 1 y X4 = 1)$$

$$X4 = 1$$
; $X1 = X3 = X5 = 0$

$$-4 < 0$$



En ésta iteración hay dos soluciones con infactibilidad igual a cero (0), evaluado la función objetivo con ambas soluciones, encontramos la solución óptima con Z = 12





```
Solución:
X1* = 0;
X2* = 1;
X3* = 0;
X4* = 1;
X5* = 0;
Z^* = 12
```

Solamente se hizo necesario escudriñar 10 de las 32 soluciones posibles.

Podemos asegurar que el método hace una búsqueda sistemática que evita probar todas las combinaciones posibles.

Analicemos el siguiente ejercicio:



Max
$$Z = 3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - 2y_4 + 3y_5$$

s. a: $y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \le 4$
 $7y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \le 8$
 $11y_1 - 6y_2 + 3y_4 - 3y_5 \ge 3$
 $x_{ij} = 0.1 \ (binarias)$



1. La función objetivo se minimiza, en caso de maximización, use la regla de equivalencia:

Maximizar (Z) = Minimizar (-Z).

Min W =
$$-3y_1 - 2y_2 + 5y_3 + 2y_4 - 3y_5$$

s. a: $y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \le 4$
 $7y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \le 8$
 $-11y_1 + 6y_2 - 3y_4 + 3y_5 \le -3$
 $x_{ij} = 0.1 \ (binarias)$

Ajustando el modelo:



Min W =
$$-3y_1 - 2y_2 + 5y_3 + 2y_4 - 3y_5$$

s. a: $y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \le 4$
 $7y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \le 8$
 $-11y_1 + 6y_2 - 3y_4 + 3y_5 \le -3$
 $x_{ij} = 0,1 \ (binarias)$

Ajustando el modelo:



2. Se requiere que Cj > 0 , para todo j. En caso de que Cj < 0 , entonces Xj se sustituye por: 1 - X'J , es decir: Xj = 1 - X'J

$$y_1 = 1 - x_1$$
, $y_2 = 1 - x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4$, $y_5 = 1 - x_5$
 $Min W' = -3(1 - x_1) - 2(1 - x_2) + 5(x_3) + 2(x_4) - 3(1 - x_5)$
 $s.a: (1 - x_1) + (1 - x_2) + (x_3) + 2(x_4) + (1 - x_5) \le 4$
 $7(1 - x_1) + 3(x_3) - 4(x_4) + 3(1 - x_5) \le 8$
 $-11(1 - x_1) + 6(1 - x_2) - 3(x_4) + 3(1 - x_5) \le -3$
 $x_{ij} = 0.1 \ (binarias)$

NOTA: El cambio de variable, también se debe aplicar a todas las restricciones.





En lugar de analizar las 2ⁿ en este ejemplo 2⁵=32 opciones de 0,1 para las variables como en el método de enumeración implícita, en el método aditivo sólo analizaremos algunas de ellas, comenzando con todas las variables igual a 0.

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$-(0) - (0) + (0) + 2(0) - (0) - 1 \le 0$$

$$-7(0) + 3(0) - 4(0) - 3(0) + 2 \le 0$$

$$11(0) - 6(0) - 3(0) - 3(0) + 1 \le 0$$

$$1 \le 0$$



$$X_1=1$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$-(1) - (0) + (0) + 2(0) - (0) - 1 \le 0 \qquad -2 \le 0$$

$$-7(1) + 3(0) - 4(0) - 3(0) + 2 \le 0 \qquad -5 \le 0$$

$$11(1) - 6(0) - 3(0) - 3(0) + 1 \le 0 \qquad 12 \le 0$$

Infactibilidad=12

$X_2 = 1$

$$x_2 = 1, \quad x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$-(0) - (1) + (0) + 2(0) - (0) - 1 \le 0 \qquad -2 \le 0$$

$$-7(0) + 3(0) - 4(0) - 3(0) + 2 \le 0 \qquad 2 \le 0$$

$$11(0) - 6(1) - 3(0) - 3(0) + 1 \le 0 \qquad -5 \le 0$$



$$X_3=1$$

$$x_3 = 1, \quad x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$$

$$-(0) - (0) + (1) + 2(0) - (0) - 1 \le 0$$

$$-7(0) + 3(1) - 4(0) - 3(0) + 2 \le 0$$

$$11(0) - 6(0) - 3(0) - 3(0) + 1 \le 0$$

$0 \le 0$

$$5 \le 0$$

$$1 \leq 0$$

Infactibilidad=6

$X_4=1$

$$x_4 = 1, \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$$

$$-(0) - (0) + (0) + 2(1) - (0) - 1 \le 0$$

$$-7(0) + 3(0) - 4(1) - 3(0) + 2 \le 0$$

$$-1(0) - 6(0) - 3(1) - 3(0) + 1 \le 0$$

$$-2 \le 0$$



$$X_5=1$$

$$x_5 = 1, \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

$$-(0) - (0) + (0) + 2(0) - (1) - 1 \le 0 \qquad -2 \le 0$$

$$-7(0) + 3(0) - 4(0) - 3(1) + 2 \le 0 \qquad -1 \le 0$$

$$11(0) - 6(0) - 3(0) - 3(1) + 1 \le 0 \qquad -2 \le 0$$

SOLUCIÓN:



Tomamos el caso en el que la Infactibilidad=0

$$x_5 = 1$$
, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Ahora sustituimos el resultado en el cambio de variable que hicimos, es decir:

$$y_1 = 1 - (0) = 1$$
, $y_2 = 1 - (0) = 1$, $y_3 = (0) = 0$, $y_4 = (0) = 0$, $y_5 = 1 - (1) = 0$

Sustituyendo esto en la función objetivo del problema original tenemos:

La solución es
$$y_1 = y_2 = 1$$
, $y_3 = y_4 = y_5 = 0$ con Z=5





Actividad:

De manera individual comparta por el SIA la solución al siguiente planteamiento utilizando Método Aditivo de Egon Balas

Min Z =
$$X'_1 + 1.8X'_2 + 1.6X'_3 + 0.8X'_4 + 1.4X'_5$$

C.S.R. $-6X'_1 - 12X'_2 - 10X'_3 - 4X'_4 - 8X'_5 + 20 < 0$



GRACIAS

- Néstor Muñoz
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe
- 941434300