LÓGICA CUANTIFICACIONAL

FUNCION PROPOSICIONAL

El símbolo P(x) es la representación de una propiedad P relativa al objeto determinado “x”, perteneciente a cierto conjunto o universo.

Así, si nos referimos a los números naturales y estamos interesados en la propiedad de “ser par”, entonces la traducción de P(x) consiste en “x es par”

P(X): x es par

Esta expresión no es una proposición, ya que a menos que se especifique quien es x, no podemos decir nada acerca de su verdad o falsedad.

FUNCION PROPOSICIONAL

DEFINICION: Función proposicional en una variable x es todo enunciado en el que figura x como sujeto, el cual se convierte en proposición para cada especificación de x

El conjunto de todos los valores convenidos para la variable x recibe el nombre de dominio de la variable.

P(5): 5 es par (F)

P(8): 8 es par (V)

FUNCION PROPOSICIONAL

También se puede expresar funciones proposicionales en dos o mas variables

P(x,y): x múltiplo de y

Si x e y son números naturales, entonces P(x,y) no es una proposición, pero para cada particularización de x e y se tiene una proposición.

P(2,6): 2 es múltiplo de 6 (F)

P(6,2): 6 es múltiplo de 2 (V)

CUANTIFICACION

Es una forma de obtener proposiciones, que están asociadas a la variable x

$\forall x$:

$\exists x$:

Denominados cuantificador universal y cuantificador existencial

$\forall x \in U : P(x)$ todo elemento del universo verifica la propiedad P

$\exists x \in U : P(x)$ existen elementos del universo que verifican la propiedad P

Una función proposicional cuantificada adquiere el carácter de proposición.

Ejemplos

Si N es el conjunto de los números naturales

$x \in N$ significa: x es un numero natural

$\forall x \in N$ significa: Todos los números naturales
Cualquier numero natural

$\exists x \in N$ significa:

Existen números naturales
Hay números naturales
Algunos números naturales
Un numero natural
Existe por lo menos un numero natural

Ejemplos

Si P es el conjunto de personas

$x \in P$ significa: x es una persona

$\forall x \in P$ significa: Todos las personas
Cualquier persona

$\exists x \in P$ significa:
Existen personas
Hay personas
Algunas personas
Una persona
Existe una persona por lo menos

Ejemplos

$\forall x \in N: x^3 \in N$ significa:

- Todo numero natural al cubo es natural
- El cubo de todo numero natural es natural

$\exists x \in N / x < 5$ significa:

- Hay naturales que son menores que 5
- Algunos naturales son menores que 5

$\exists x \in Z / 2x=4$	significa:	Existe un número entero que multiplicado por dos es igual a cuatro
		El duplo de algún número entero es igual a cuatro
		Hay números enteros que multiplicados por 2 es igual a 4
$\forall x \in N: 5=m(x)$	significa:	5 es múltiplo de cualquier número natural
		5 es múltiplo de todo número natural
$\forall x \in N: x \nless 0$	significa:	Todo número natural no es menor que cero
		Ningún número natural es menor que cero

$\forall x \in N, \exists y \in Z / x + y = 0$

significa: Todo número natural sumado con algún entero es igual a cero

$\forall x \in R, \exists y \in R / (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

significa: El cuadrado de la suma de dos números reales cualesquiera es igual al cuadrado del primero, mas el doble del primero por el segundo mas el cuadrado del segundo

Ejemplos

Ciertos números reales son divisibles por 10

$\exists x \in R / \; x/10 \in R$

NEGACIÒN DE UNA CUANTIFICACIÒN

Todos los números naturales son pares

$\forall x \in N$: x es par

Negación

No todos los números naturales son pares

Existen números naturales que no son pares

$\exists x \in N /$ x no es par

NEGACIÒN DE UNA CUANTIFICACIÒN

Para negar una cuantificación

1) Se cambia el cuantificador de universal a existencial y de existencial a universal

2) Se niega la función proposicional.

Ejemplo:

$\sim[\forall\, x \in U : P(x)] \cong \exists x \in U / \sim P(x)$

Es falso que todo elemento del universo que verifique la propiedad P

Equivale:

Existe algún elemento del universo que no verifica la propiedad P

Ejemplo:

$\sim[\exists\, x \in U : P(x)] \cong \forall x \in U / \sim P(x)$

Es falso que existe algún elemento del universo que verifique la propiedad P

Equivale:

Todo elemento del universo no verifica la propiedad P

Ejemplo:

$\sim[\forall\, x \in U, \forall\, y \in U : P(x, y)] \cong \exists\, x \in U, \exists\, y \in U / \sim P(x,y)$

$\sim[\, \forall\, x \in N, \exists\, y \in N : x < 2y\,] \cong \exists\, x \in N, \forall\, y \in U /\; x \nless 2y$

$\cong \exists\, x \in N, \forall\, y \in N /\; x \geq 2y$

Ejemplo:

$\forall x \in N: x + 1 < 10$

$\exists\, x \in Z / 2x = 6$

$\exists\, x \in Q / x^2 \geq 15$

$\exists\, x \in N / x + 1 \geq 10$

$\forall\, x \in Z: 2x \neq 6$

$\forall\, y \in Q: x^2 < 15$

SIMBOLIZACION

- Para traducir una expresión a la LC, necesitamos no solo reconocer la presencia de proposiciones conectadas, sino también reconocer un universo del lenguaje y, dentro de este , subconjuntos que se relacionan.
- Nuestro esfuerzo se dirigir a resaltar las propiedades que en un universo supuesto delimitan conjuntos, y las relaciones que entre estos colaboran a establecer la conexion lógica entre premisa y conclusión.

Ejemplo 01: Todo el que la conoce la admira.

Puede enunciarse: Cualquiera que sea la persona, si la conoce entonces la admira.

Universo: P (conjunto de personas)

Cuantificador: $\forall$

Funciones proposicionales: $P(x)$: x la conoce; $Q(x)$: x la admira

Luego: $\forall x \in P:\ P(x) \rightarrow Q(x)$

Negación: $\sim [\, \forall x \in P:\ P(x) \rightarrow Q(x)\,] \cong \exists\, x \in P \,/ \sim [\, P(x) \rightarrow Q(x)\,]$

$\cong \exists\, x \in P \,/\ P(x) \wedge \sim Q(x)\,]$

Hay personas que la conocen y no la admiran.

Algunos la conocen y no la admiran

Ejemplo 02: Todo número entero admite un inverso aditivo

Puede enunciarse: Cualquiera que sea el entero, existe otro entero que sumado a el da cero

Universo: Z…Z

Cuantificador: $\forall$, $\exists$

Funciones proposicionales: $P(x,y): x + y = 0$

Simbolización: $\forall x \in Z, \exists y \in Z \,/\, x + y = 0$

Negación: $\sim [\forall x \in Z, \exists y \in Z \,/\, x + y = 0] \cong \exists x \in Z, \forall y \in Z \,/\, x + y \neq 0$

Existen enteros que sumados con cualquier otro entero da una suma diferente de cero.

Algunos enteros no admiten un inverso aditivo

Ejemplo 03: Hay alumnos que estudian y trabajan

Universo: A (Conjunto de alumnos)

Cuantificador $\exists$

Funciones proposicionales: P(x): x estudia Q (x): x trabaja

Simbolización $\exists\, x \in A / P(x) \wedge Q(X)$

Negación: $\sim [\exists\, x \in A / P(x) \wedge Q(X)]$ $\cong \forall\, x \in A: \sim P(x) \vee \sim Q(x)$

Cualquiera que sea el alumno, no estudia o no trabaja

Todos los alumnos no estudian o no trabajan

Ejemplo 04: Es de día o todo el mundo se ha levantado

(Es de día) o (todo el mundo se ha levantado)

P : Es de día

Universo: S (personas)

Cuantificador: $\forall$

P(x): x se ha levantado

Luego: $p \vee \forall x \in S / P(x)$

Negación: $\sim [p \vee \forall x \in S / P(x)]$

$\cong \sim p \wedge \sim [\forall x \in S / P(x)]$

$\cong \sim p \wedge \exists x \in S / \sim P(x)]$

No es de día pero alguien no se ha levantado

Es de noche y alguno no se ha levantado

Ejemplo 05: Si hay examen entonces alguien es desaprobado

Si (hay examen) entonces (alguien es desaprobado)

P : Hay examen

Universo: A (alumnos)

Cuantificador: $\exists$

P(x): x es aprobado

Luego: $p \rightarrow \exists\, x \in A \,/\, \sim P(x)$

Negación: $\sim [p \rightarrow \exists\, x \in A \,/\, \sim P(x)\ ]$

$\cong \sim [\sim p \vee \exists\, x \in S \,/\, \sim P(x)\,]$

$\cong\ p \wedge\ \forall\, x \in A \,/\, P(x)\,]$

Hay examen y todos son aprobados

Hay examen sin embargo todos están aprobados