Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA I

Análisis de dualidad
Relación primal – dual

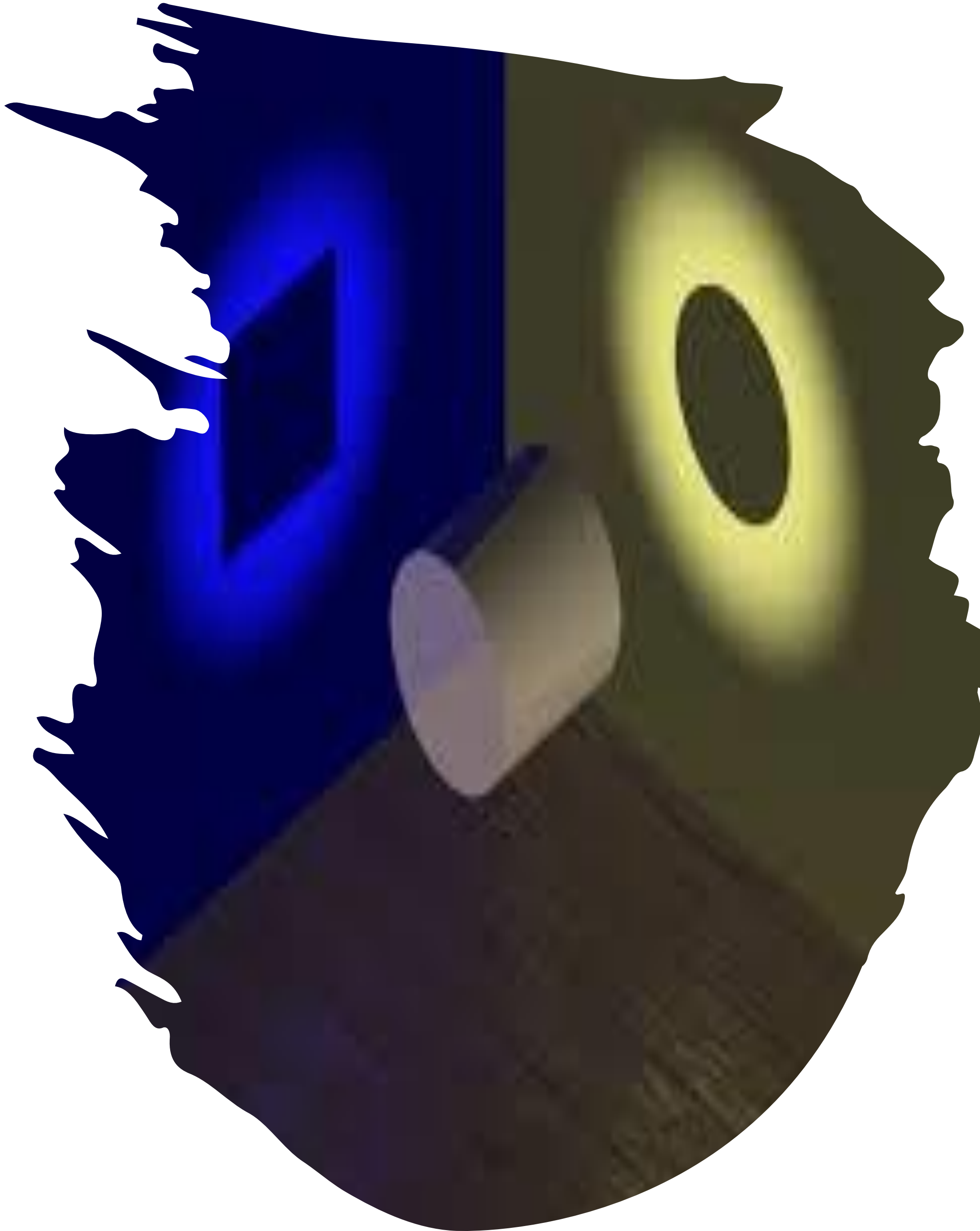
Ingeniería de Sistemas
Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto

LOGRO DE LA SESIÓN

- Al término de la sesión, el estudiante analiza la relación primal – dual y resuelve ejercicios en equipos de trabajo de manera clara y ordenada.

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Introducción



En la sesión anterior vimos que el mundo real, los ambientes de decisión rara vez permanecen estáticos, y es esencial determinar cómo cambia la solución óptima cuando cambian los parámetros del modelo. Eso es lo que hace el *análisis de sensibilidad*. Proporciona técnicas de cómputo eficientes para estudiar el comportamiento dinámico de la solución óptima que resulta al hacer cambios en los parámetros del modelo.

Todo problema de programación lineal en adelante P.L. de maximización tiene asociado un problema de P. L. de minimización llamado dual y viceversa. Los dos problemas se construyen a partir del mismo problema real, sólo que si en uno de ellos el objetivo es maximizar las utilidades, en el otro el objetivo es minimizar los costos y como resultado el valor de la función objetivo de ambos problemas coincide, es decir, $Z_{máx}=Z_{mín}$ en las soluciones óptimas.
Esto significa que hay un equilibrio entre utilidad y costo.

Definición:

- El problema **dual** es una programación lineal definida en forma directa y sistemática a partir del modelo original (o **primal**) de programación lineal. Los dos problemas están relacionados en forma tan estrecha que la resolución óptima de un problema produce en forma automática la resolución óptima del otro.

- Nuestra definición del problema dual requiere expresar el problema primal en *forma de ecuaciones*, como se presentó en la sección 3.1: todas las restricciones son ecuaciones, con lado derecho no negativo y todas las variables son no negativos. Este requisito es consistente con el formato de la tabla de inicio símplex. En consecuencia, todo resultado obtenido a partir de la solución primal óptima se aplican en forma directa al problema dual asociado

Objetivo:

El estudio del problema dual se realiza con dos objetivos:

- Si tenemos un modelo de P. L. cuyo objetivo es minimizar (con restricciones de la forma *mayor igual que*) llamado modelo primal, entonces el modelo dual asociado será de maximización (con restricciones de la forma *menor igual que*), *el dual se resuelve por el algoritmo descrito en la sección anterior*. *La solución óptima del modelo dual estará en el valor de las variables de holgura del primal donde se cumple que* $Z_{máx}=Z_{mín}$.

- Al resolver el problema dual obtenemos un análisis de sensibilidad del modelo calculando los precios sombra.

¿Cómo se forma el problema dual?

Se define el primal en forma de ecuaciones como sigue:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Las variables x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, incluyen las variables excedentes, holguras y artificiales, si las hay.

Modelo primal

$$Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

s.a.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

NN $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

¿Cómo se forma el problema dual?

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Modelo primal

$$Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

s.a.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

NN $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$

Modelo Dual

$$Min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

s.a.

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m &\ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m &\ge c_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m &\ge c_n \end{aligned}$$

NN $y_1, y_2, \ldots, y_m \ge 0$

1. Se define una variable dual por cada ecuación primal (restricción).
2. Se define una restricción dual por cada variable primal.
3. Los coeficientes de restricción (columna) de una variable primal definen los coeficientes en el lado izquierdo de la restricción dual, y su coeficiente objetivo define el lado derecho.
4. Los coeficientes objetivo del dual son iguales al lado derecho de las ecuaciones de restricción primal.

Ejemplo:

Resolver el siguiente modelo de P. L.:

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

PRIMAL

$$
\begin{aligned}
Z_{min} &= 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s. a:}\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

DUAL

$$
\begin{aligned}
Y_{máx} &= 4y_1 + 3y_2 \\
\text{s. a:}\ & \boxed{2y_1 + 3y_2} \leq 4 \\
& y_1 + 3y_2 \leq 1 \\
& 2y_1 + y_2 \leq 1 \\
& y_i \geq 0 \quad i = 1,\ 2
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Forma de ecuación:

DUAL

$$Y_{máx} = 4y_1 + 3y_2$$
$$\text{s. a.: } \boxed{2y_1 + 3y_2} \leq 4$$
$$y_1 + 3y_2 \leq 1$$
$$2y_1 + y_2 \leq 1$$
$$y_i \geq 0 \quad i = 1,\ 2$$

$$Y_{máx} = 4y_1 + 3y_2$$
$$\text{s. a.: } 2y_1 + 3y_2 + h_1 = 4$$
$$y_1 + 3y_2 + h_2 = 1$$
$$2y_1 + y_2 + h_3 = 1$$
$$y_i \geq 0 \quad h_j \geq 0 \quad i = 1,\ 2 \quad j = 1,\ 2,\ 3$$

Ejemplo:

DUAL

$$Y_{máx} = 4y_1 + 3y_2$$
$$\text{s. a.: } \boxed{2y_1 + 3y_2} \le 4$$
$$y_1 + 3y_2 \le 1$$
$$2y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_i \ge 0 \quad i = 1,\ 2$$

Forma de ecuación:

$$Y_{máx} = 4y_1 + 3y_2$$
$$\text{s. a: } 2y_1 + 3y_2 + h_1 = 4$$
$$y_1 + 3y_2 + h_2 = 1$$
$$2y_1 + y_2 + h_3 = 1$$
$$y_i \ge 0 \quad h_j \ge 0 \quad i = 1,\ 2 \quad j = 1,\ 2,\ 3$$

Tabla inicial o forma estándar

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	Solución	
R_0	Z	1	−4	−3	0	0	0	0	Función objetivo
R_1	h_1	0	2	3	1	0	0	4	Primera restricción
R_2	h_2	0	1	3	0	1	0	1	Segunda restricción
R_3	h_3	0	2	1	0	0	1	1	Tercera restricción

Iteraciones:

Tabla después de la primera iteración

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	–1	0	0	2	2
R_1	h_1	0	0	2	1	0	–1	3
R_2	h_2	0	0	2.50	0	1	–0.50	0.50
R_3	y_1	0	1	0.50	0	0	0.50	0.50

Sin embargo la solución de primer problema de minimización al tomar los coeficientes de las variables de holgura renglón R_0:

$x_1 = h_1 = 0$
$x_2 = h_2 = 0.40$
$x_3 = h3 = 1.80$

Al sustituir en la función objetivo

$$Z_{mín} = 4x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{s. a: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

Tabla después de la segunda iteración

	Variables básicas	Z	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	0	0	0.40	1.80	2.20
R_1	h_1	0	0	0	1	–0.80	–0.60	2.60
R_2	y_2	0	0	1	0	0.40	–0.20	0.20
R_3	y_1	0	1	0	0	0.20	0.60	0.40

$$Z_{mín} = 4x_1 + x_2 + x_3$$
$$Z_{mín} = 4(0) + 0.40 + 1.80$$
$$Z_{mín} = 2.20$$

Tabla óptima la cual tiene como solución DUAL lo siguiente:

$y_1 = 0.40$
$y_2 = 0.20$
$Z_{máx} = 2.20$

Se comprueba que la función objetivo del problema DUAL tiene el mismo valor que la función objetivo del primal

Utilizando Software:

```
C:\WIN...
max 4y1+3y2
        st
        2y1+3y2<=4
        y1+3y2<=1
        2y1+y2<=1
        y1,y2>=0
        end
```

```
Reports Window
      ROW         CURRENT          ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS            INCREASE         DECREASE
        2         4.000000         2.000000         3.000000
        3         3.000000         9.000000         1.000000
        4         0.000000         0.000000         INFINITY

LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       2.200000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       Y1        0.400000         0.000000
       Y2        0.200000         0.000000
    Y1,Y2        0.000000         0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)        2.600000         0.000000
       3)        0.000000         0.400000
       4)        0.000000         1.800000
       5)        0.000000         0.000000

NO. ITERATIONS=        2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      Y1        4.000000        2.000000         3.000000
      Y2        3.000000        9.000000         1.000000
   Y1,Y2        0.000000        0.000000         INFINITY

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE         DECREASE
       2        4.000000        INFINITY         2.600000
       3        1.000000        2.000000         0.500000
       4        1.000000        1.000000         0.666667
       5        0.000000        0.000000         INFINITY
```

	Variables básicas	Z	y_1			h_2	h_3	Solución
R_0	Z	1	0	0	0	0.40	1.80	2.20
R_1	h_1	0	0	0	1	−0.80	−0.60	2.60
R_2	y_2	0	0	1	0	0.40	−0.20	0.20
R_3	y_1	0	1	0	0	0.20	0.60	0.40

Actividad:

- Resolver los siguientes modelo de P.L. aplicando la relación primal dual, luego verificar con el uso de software:

$$
\begin{aligned}
Z_{\min} &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\
\text{s.a: } & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\
& x_1 + 3x_3 + x_4 \geq 10 \\
& 3x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 7 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{\min} &= 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\
\text{s.a: } & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 8 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Gracias

- Néstor Muñoz
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe

941434300