INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA I

Programación Lineal bidimensional. Maximización y minimización.

MÉTODO GRÁFICO

Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto

Logro de sesión

- Al término de la sesión, el estudiante elabora modelos bidimensionales de programación lineal y los resuelve utilizando el método gráfico.

Programación lineal bidimensional

La programación lineal bidimensional trata de optimizar,

es decir, de maximizar o minimizar una función lineal con dos variables

sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales.

Ejemplo: Dado el espacio definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

Maximizar $Z = 30X_1 + 20X_2$

Sujeto a:

$X_1 + X_2 \leq 7$

$2X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Resolución de problemas de PL

- Método gráfico
- Método Simplex

Función objetivo

- La función objetivo en un problema de programación lineal, es la función lineal en dos variables que se desea optimizar. Se representa por:
  - **Max o Min Z=** $a\ X_1 + b\ X_2$

- Continuando con el ejemplo anterior, se tiene que la función objetivo es:
  - **Max Z=** $30\ X_1 + 20\ X_2$

Región factible

- La región factible de una función objetivo es un polígono convexo finito o infinito en el que toma valores la función objetivo; es decir, son todos los puntos del plano que verifican todas las restricciones del enunciado del problema.
- Del ejemplo se obtiene la región factible:

Maximizar $Z = 30X_1 + 20X_2$

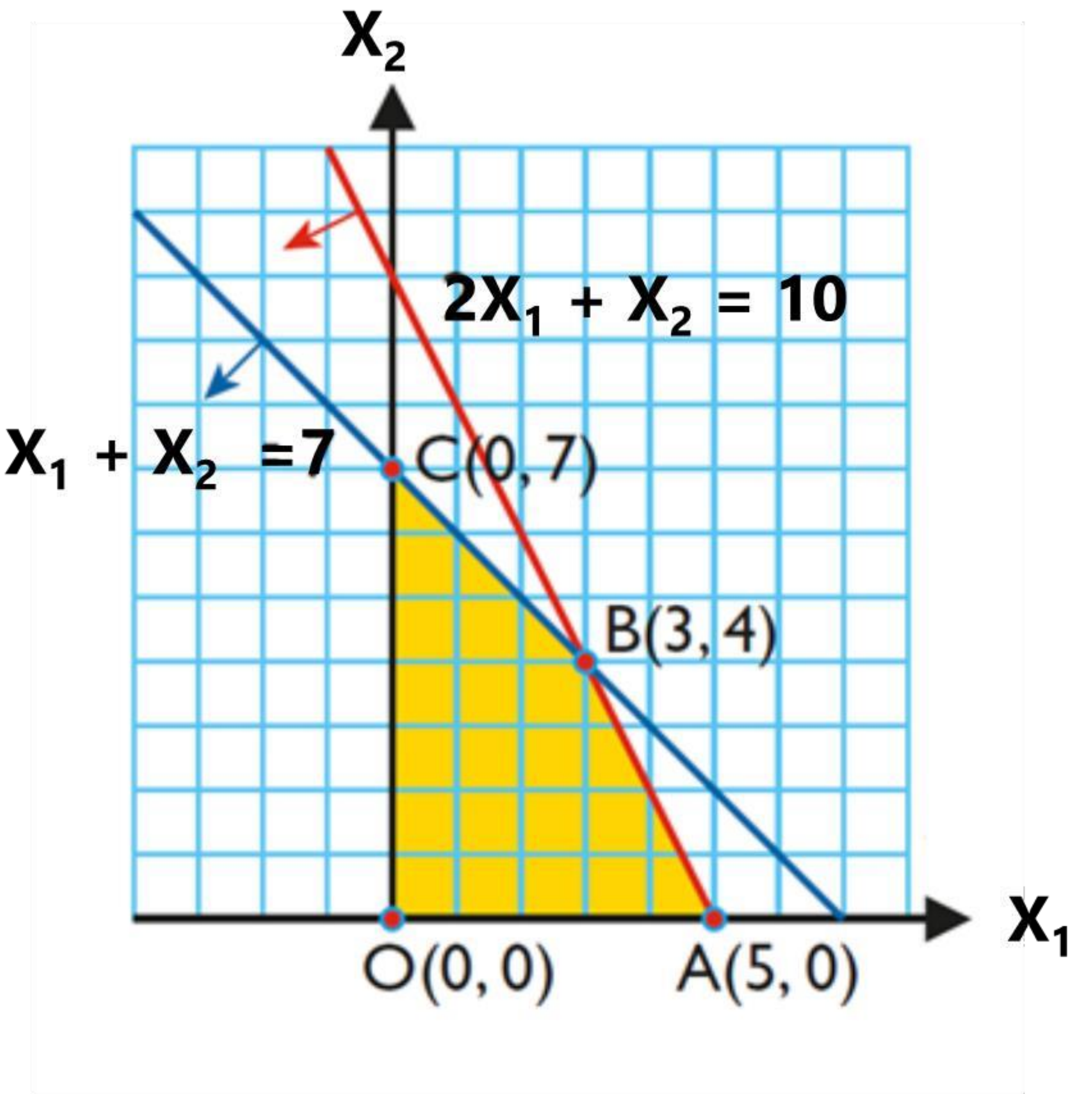
Sujeto a:

$X_1 + X_2 \leq 7$

$2X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$



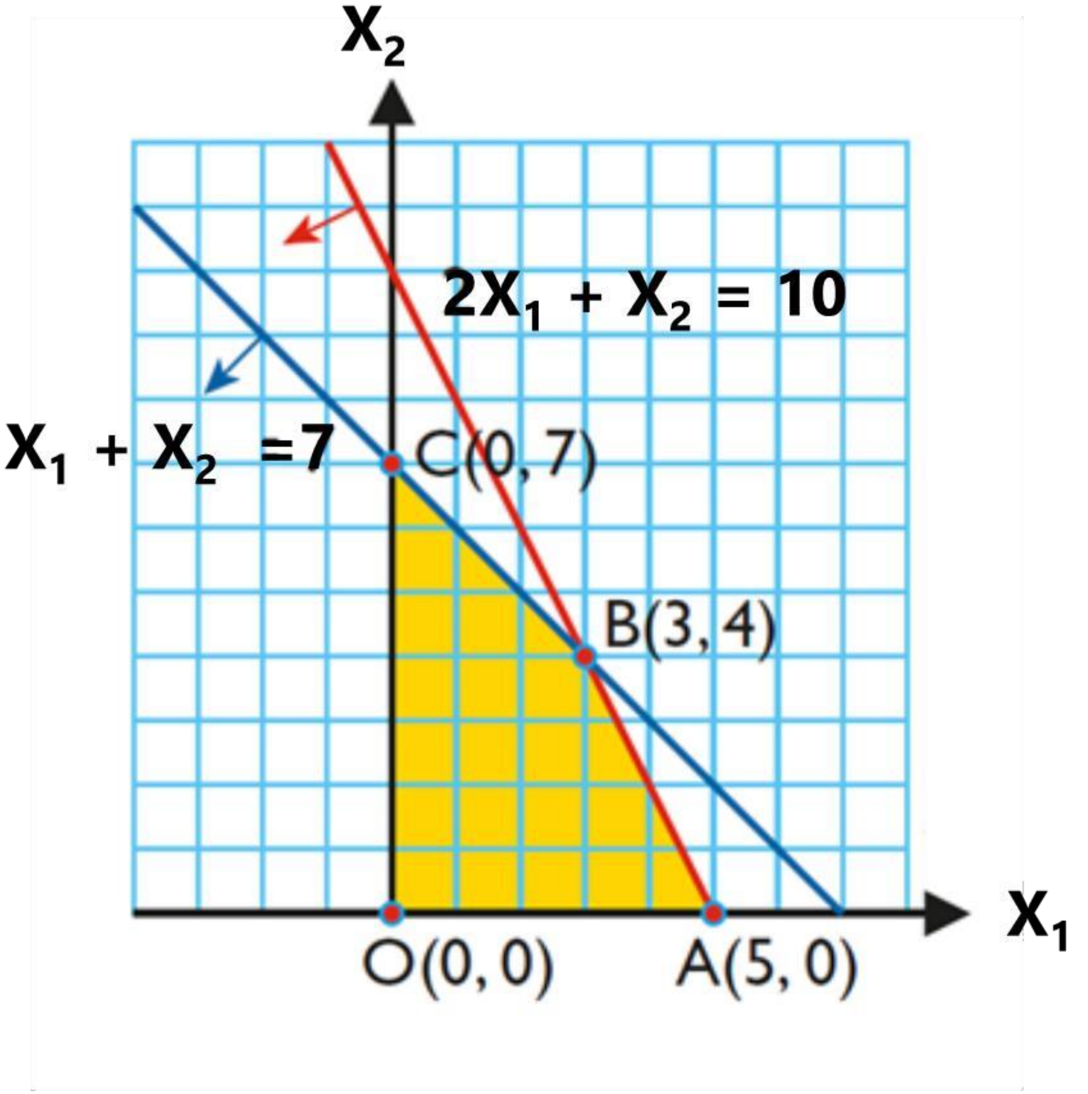
Restricciones de no negatividad
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

- Prácticamente en todos los problemas de programación lineal se exige que las variables X_1 y X_2 sean mayores o iguales que cero; en estos casos, la región factible se dibuja directamente en el 1er cuadrante.

Maximizar $Z = 30X_1 + 20X_2$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 \leq 7$$
$$2X_1 + X_2 \leq 10$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$



Vector director de la función objetivo

- El vector director de la función objetivo $Z = aX_1 + bX_2$ es el vector: (-b, a)
- Las dos coordenadas del vector director de la función objetivo se pueden multiplicar o dividir por un mismo número distinto de cero, y su dirección no varía.
- En el ejemplo, el vector director de la función objetivo $Z = 30X_1 + 20X_2$ es

  $(-20, 30) \parallel (-2, 3)$

Maximizar $Z = 30X_1 + 20X_2$

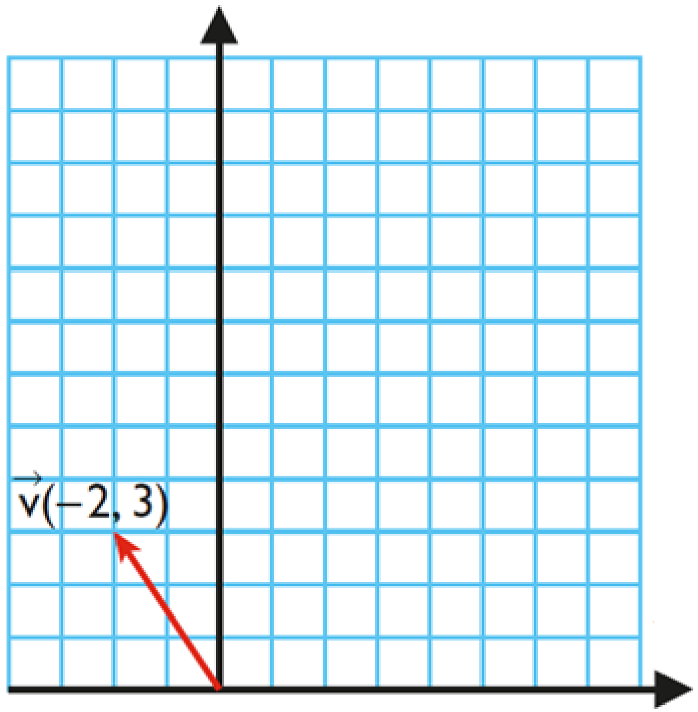
Sujeto a:

$X_1 + X_2 \leq 7$

$2X_1 + X_2 \leq 10$

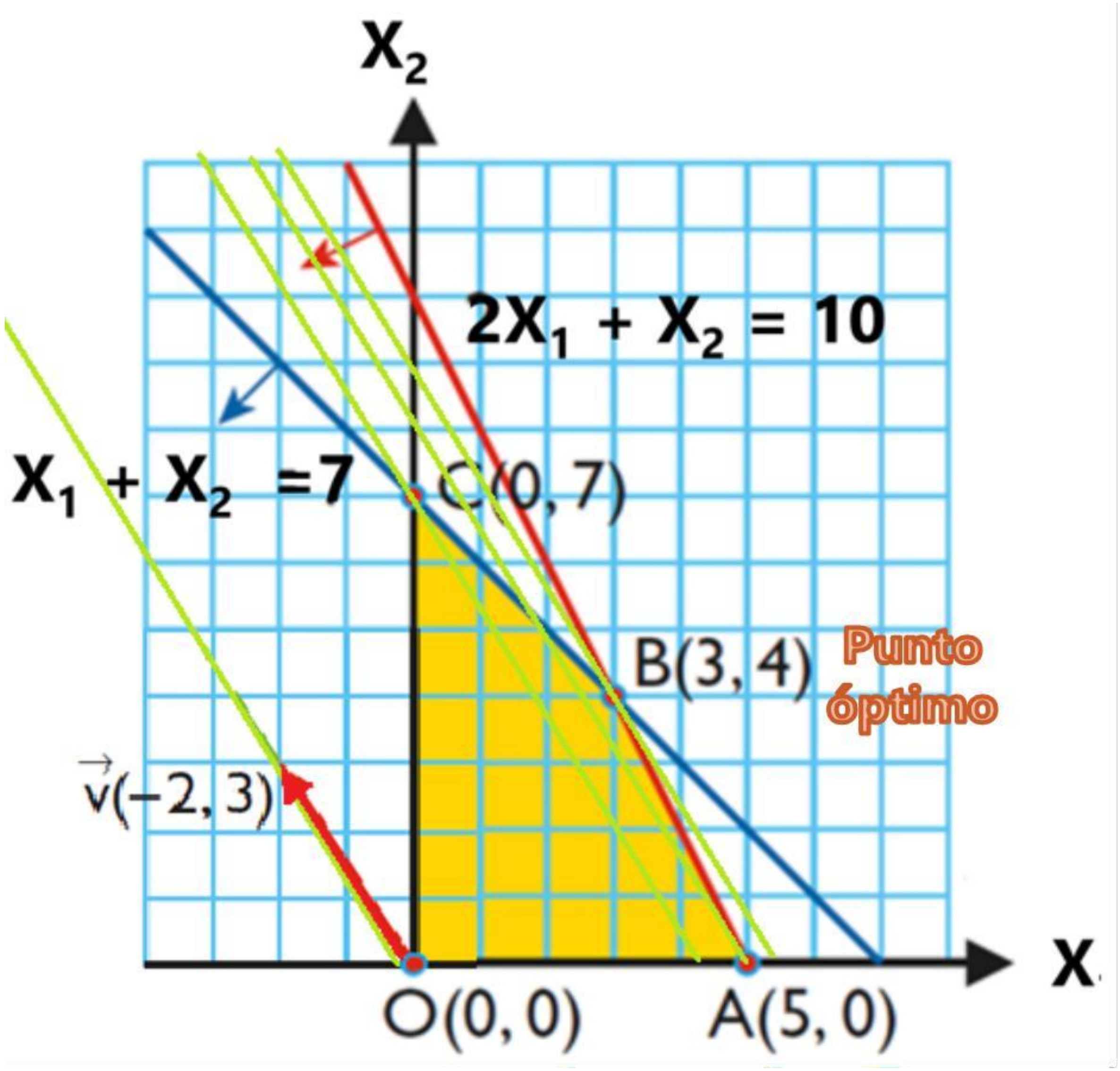
$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$



Rectas de nivel

- Son las líneas paralelas al vector objetivo que pasan por cada punto o vértice del área de solución factible.
- Si es maximizar, empezamos desde el origen hacia arriba y la derecha. El último vértice del área de solución factible en alcanzar será el Punto óptimo.



Solución óptima

La solución óptima son los puntos de la región factible donde la función objetivo alcanza el valor óptimo, es decir, el máximo o el mínimo.

Si la solución óptima es única, es uno de los vértices de la región factible.

Si existen varias soluciones, son todos los puntos que están sobre uno de los lados.

Gráficamente, si la solución óptima es un máximo, ésta corresponde al punto o puntos en los que la recta de nivel esté lo más alta posible.

Si la solución es un mínimo, corresponde al punto o puntos en los que la recta de nivel esté lo más abajo posible.

Continuando con el mismo ejemplo, la solución óptima es B(3, 4).

Analíticamente, para hallar la solución óptima, se prueba en la función objetivo cada uno de los vértices de la región factible.

Solución óptima

Continuando con el mismo ejemplo: $Z = 30X_1 + 20X_2$

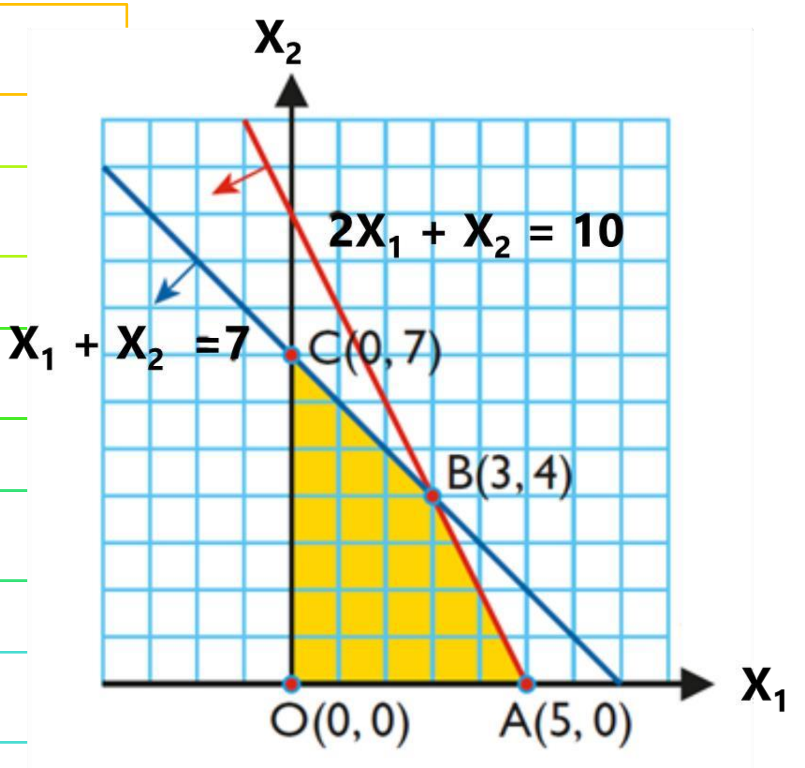
O(0, 0) → Z= 30 x 0 + 20 x 0 = 0

A(5, 0) → Z= 30 x 5 + 20 x 0 = 150

B(3, 4) → Z= 30 x 3 + 20 x 4 = 170 → ***Máximo***

C(0, 7) → Z= 30 x 0 + 20 x 7 = 140

La solución óptima es B(3, 4)



El método gráfico

Se emplea para resolver problemas que presentan sólo 2 variables de decisión. El procedimiento consiste en trazar las ecuaciones de las restricciones en un eje de coordenadas X_1, X_2 para tratar de identificar el área de soluciones factibles (soluciones que cumplen con todas las restricciones).

La solución óptima del problema se encuentra en uno de los vértices de esta área de soluciones creada, por lo que se buscará en estos datos el valor mínimo o máximo del problema.

EJEMPLO 1: Una compañía de auditores se especializa en preparar liquidaciones y auditorías de empresas pequeñas. Tienen interés en saber cuantas auditorías y liquidaciones pueden realizar mensualmente para maximizar sus ingresos. Se dispone de 800 horas de trabajo directo y 320 horas para revisión. Una auditoría en promedio requiere de 40 horas de trabajo directo y 10 horas de revisión, además aporta un ingreso de 300 dls. Una liquidación de impuesto requiere de 8 horas de trabajo directo y de 5 horas de revisión, produce un ingreso de 100 dls. El máximo de liquidaciones mensuales disponibles es de 60.

- OBJETIVO : Maximizar el ingreso total.
-
- VARIABLE DE DECISION: Cantidad de auditorías (X_1).
- Cantidad de liquidaciones (X_2).
-
- RESTRICCIONES : Tiempo disponible de trabajo directo
- Tiempo disponible de revisión
- Número máximo de liquidaciones.

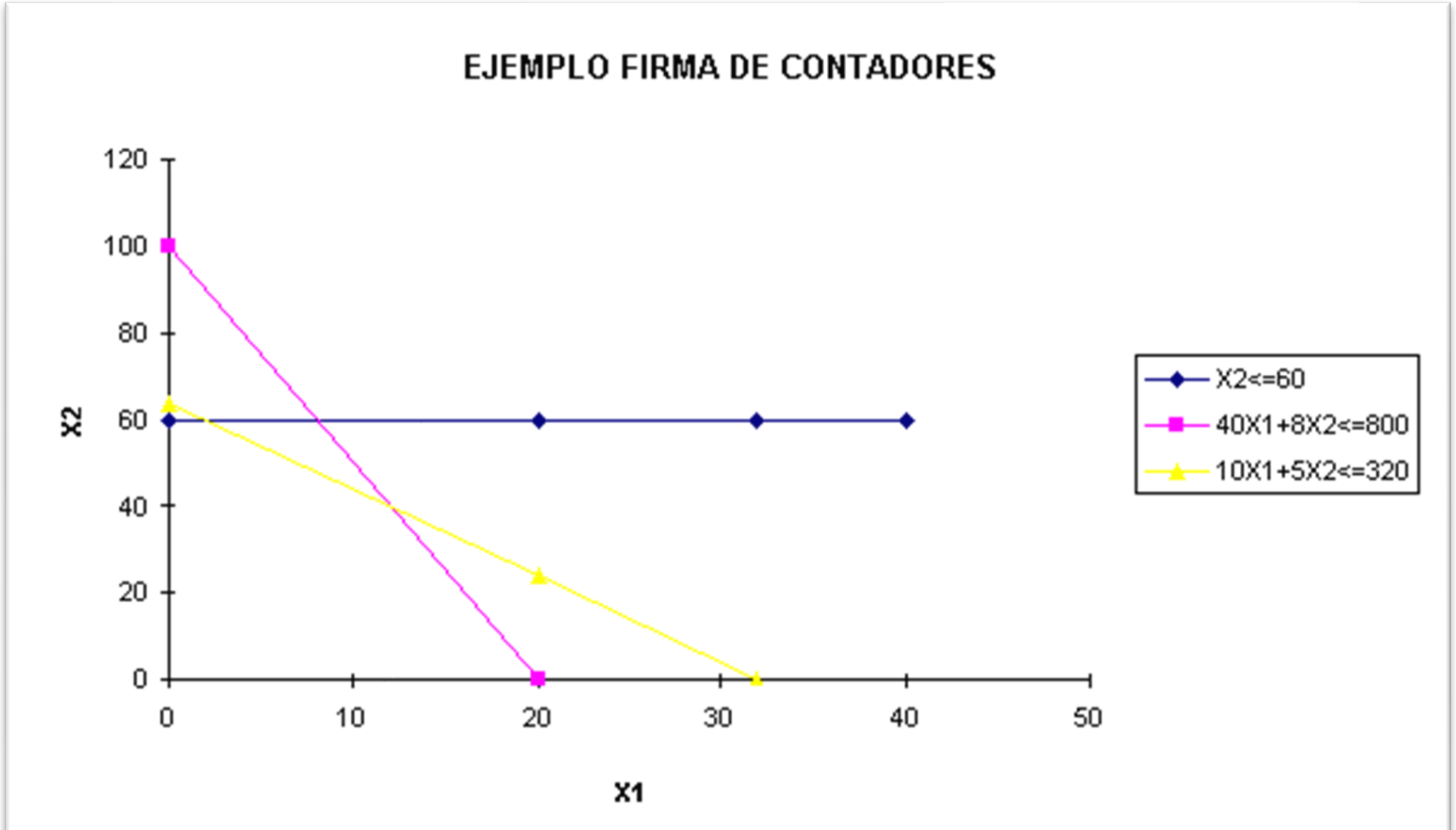
Maximizar $Z = 300X_1 + 100X_2$

Sujeto a:

$$40X_1 + 8X_2 \leq 800$$
$$10X_1 + 5X_2 \leq 320$$
$$X_2 \leq 60$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

La solución óptima siempre se encuentra en uno de los vértices del conjunto de soluciones factibles. Se analizan estos valores en la función objetivo. El vértice que representa el mejor valor de la función objetivo será la

solución óptima.



$$(0,60)\ \ Z = 300(0) + 100(60) = \$6000$$

$$(2,60)\ \ Z = 300(2) + 100(60) = \$6600$$

$$(12,40)\ \ Z = 300(12) + 100(40) = \$7600$$

$$(20,0)\ \ Z = 300(20) + 100(60) = \$6000$$

$$(0,0)\ \ Z = 300(0) + 100(0) = \$0$$

Solución óptima :

$X_1 = 12$ auditorías

$X_2 = 40$ liquidacio nes

$Z = \$7600$

EJEMPLO 2. Un departamento de publicidad tiene que planear para el próximo mes una estrategia de publicidad para el lanzamiento de una línea de T.V. a color tiene a consideración 2 medios de difusión: La televisión y el periódico.
Los estudios de mercado han mostrado que:

- 1. La publicidad por T.V. Llega al 2 % de las familias de ingresos altos y al 3 % de las familias de ingresos medios por comercial.
- 2. La publicidad en el periódico llega al 3 % de las familias de ingresos altos y al 6 % de las familias de ingresos medios por anuncio.
- 3. La publicidad en periódico tiene un costo de 500 dls. por anuncio y la publicidad por T.V. tiene un costo de 2000 dls. por comercial. La meta es obtener al menos una presentación como mínimo al 36 % de las familias de ingresos altos y al 60 % de las familias de ingresos medios minimizando los costos de publicidad.

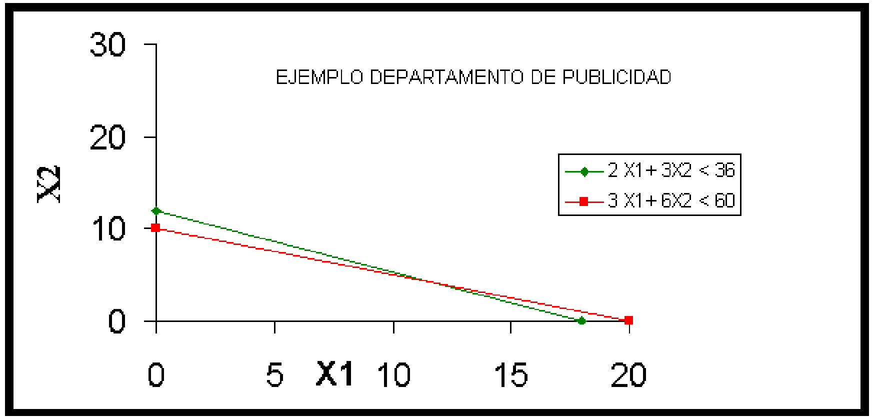
OBJETIVO : Minimizar los costos de publicidad.

- ***VARIABLE DE DECISION***:
- Anuncios para las familias de ingreso alto (X_1).
  - Anuncios para las familias de ingreso medio (X_2).
- ***RESTRICCIONES*** : Porcentaje de presentación.
  - Minimizar

$$Z = 2000X_1 + 500X_2$$

- Sujeto a:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 36$$
$$3X_1 + 6X_2 \leq 60$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



$$X_1 = 0 \text{ comerciales en T.V.}$$
$$X_2 = 12 \text{ anuncios en el periódico}$$
$$Z = \$6,000 \text{ dls}$$

EJEMPLO 3.

Un expendio de carnes acostumbra preparar carne para hamburguesa con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 80 % de carne y 20 % de grasa y le cuesta a la tienda 80 centavos por libra. La carne de cerdo contiene 68 % de carne y 32 % de grasa y cuesta 60 centavos por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda por cada libra de carne para hamburguesa si desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de 25 %?

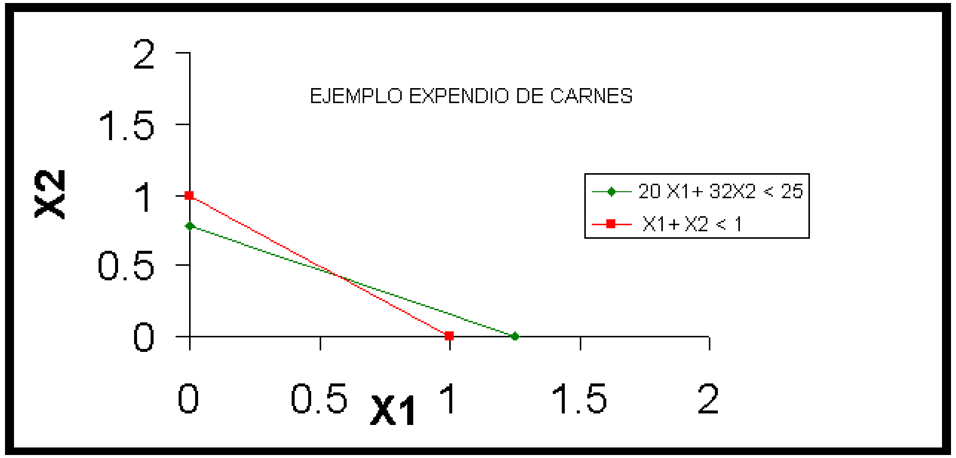
Minimizar $Z = 80X_1 + 60X_2$

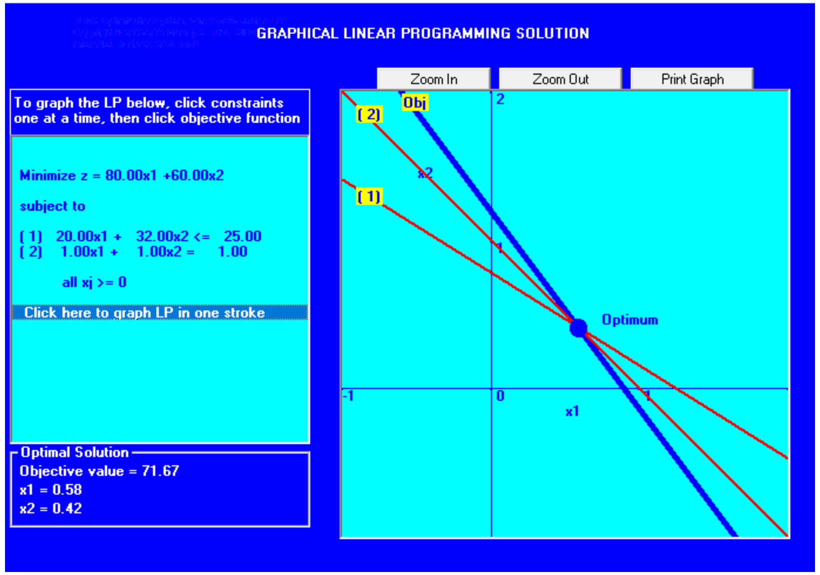
Sujeto a:

$$20X_1 + 32X_2 \leq 25$$

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$





X_1 = 7/12 lbs de carne de res

X_2 = 5/12 lbs de carne de cerdo

Z = 215/3 centavos

Tipos de soluciones en PL con el método gráfico:

- En la programación lineal, al resolver problemas usando el método gráfico, podemos encontrarnos con diferentes tipos de soluciones. Las soluciones pueden ser clasificadas en función de cómo se intersectan las restricciones y la función objetivo en la región factible. Aquí están los tipos de soluciones que se pueden encontrar:

Solución Óptima Única

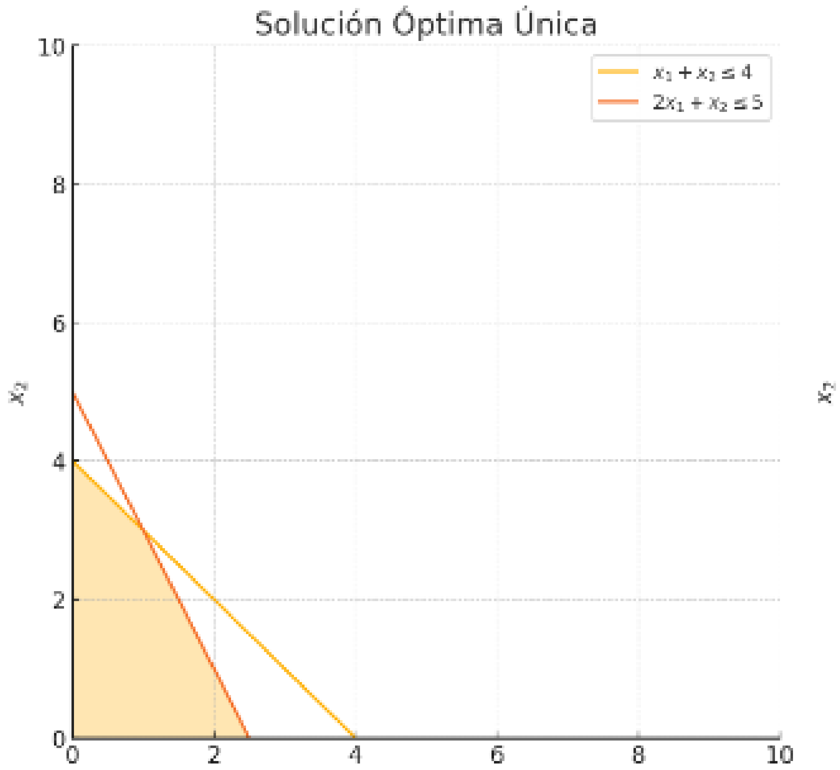
Esta es la situación más común y deseada. Ocurre cuando la función objetivo alcanza su valor máximo o mínimo en un solo punto dentro de la región factible. Este punto suele ser uno de los vértices (o esquinas) del polígono que forma la región factible.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

- Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$
- Sujeto a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Solución Múltiple

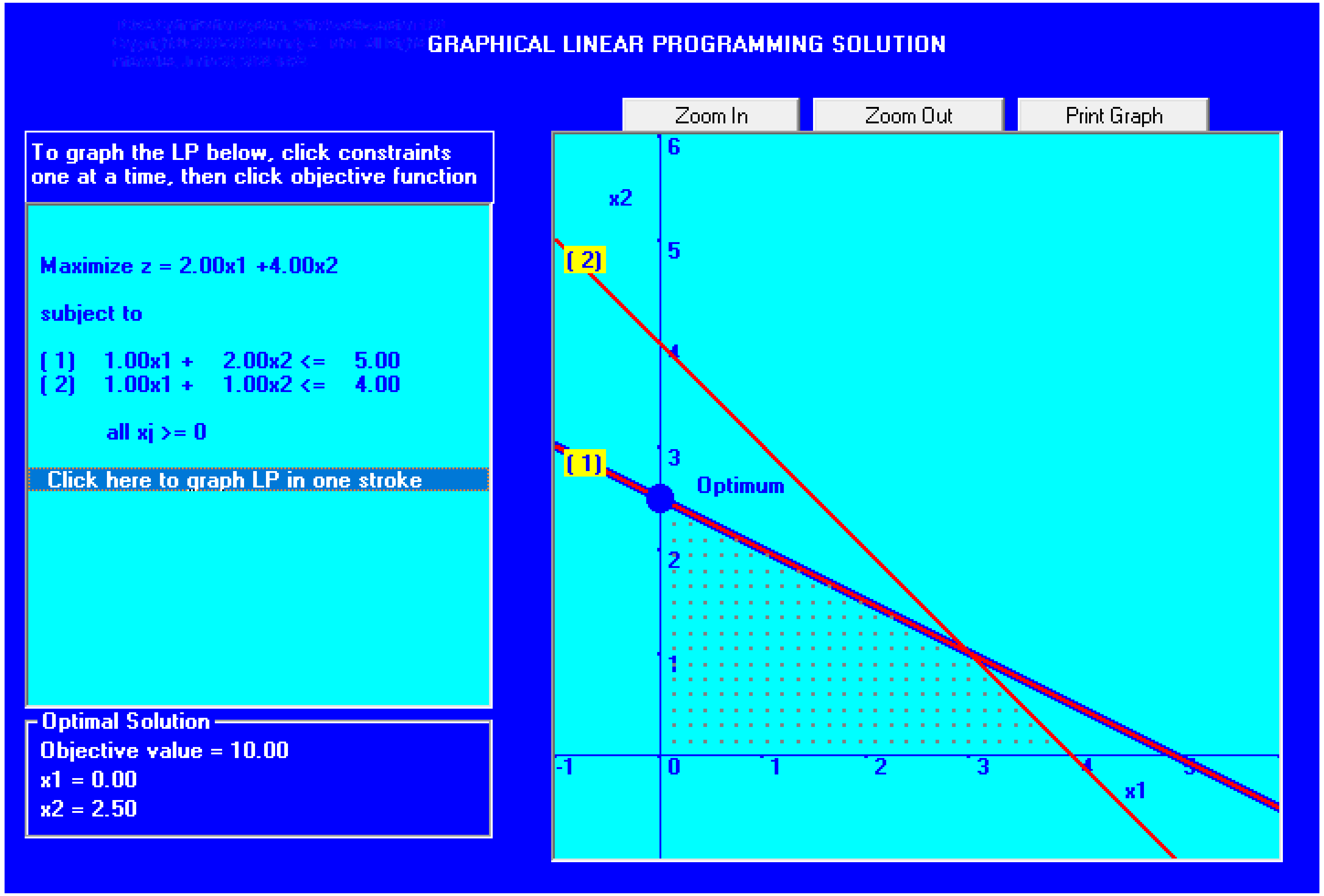
Max: $Z=2X_1+4X_2$

S.A.

$X_1+2X_2<=5$

$X_1+X_2<=4$

$X_1,X_2>=0$



Actividad:

En equipos sustente los casos de tipos de soluciones de PL con el método gráfico para:

- - Solución No Acotada
  - Sin Solución Factible

Conclusión:

1. **Solución Óptima Única:** La solución óptima se encuentra en un solo vértice de la región factible.
2. **Solución Múltiple:** La función objetivo es paralela a una de las restricciones, resultando en una línea de soluciones óptimas en la frontera de la región factible.
3. **Solución No Acotada:** La región factible no está cerrada en la dirección en la que se maximiza la función objetivo, permitiendo que la función objetivo crezca indefinidamente.
4. **Sin Solución Factible**: Las restricciones son contradictorias, resultando en una región factible vacía. No hay ningún punto que cumpla todas las restricciones simultáneamente.

Recursos:

phpSimplex

Lindo

Gracias

Néstor Muñoz
Docente
nestormunoz@unc.edu.pe
941434300

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"