Ingeniería de Sistemas
Universidad Nacional de Cajamarca

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA II

MÉTODO DE PLANO DE CORTE

Ingeniería de Sistemas
Ing. Néstor Muñoz

Logro de sesión

- Al culminar la sesión, el estudiante aplica el método de plano de corte en la solución de problemas de programación lineal entera.

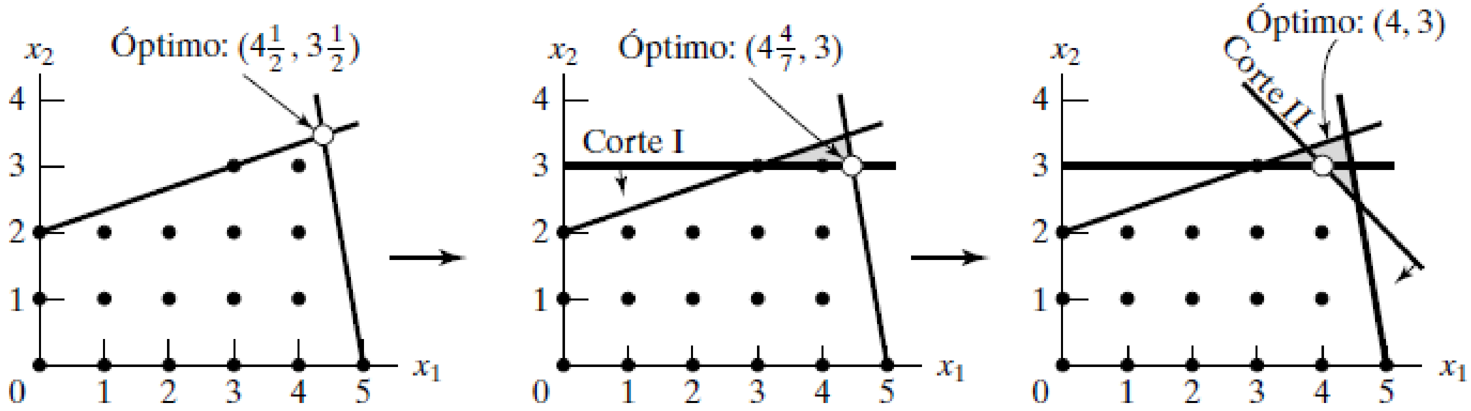
MÉTODO DE PLANO DE CORTE

Se tiene la siguiente programación lineal entero:

$$\text{Maximizar } z = 7x_1 + 10x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 \geq 0 &\text{ y enteras} \end{aligned}$$



El algoritmo del plano de corte modifica el espacio de soluciones agregando *cortes* que producen un punto extremo entero óptimo. La siguiente figura muestra un ejemplo de dos cortes de esos.
Se parte del óptimo del programa lineal continuo, z = 661/2, $x1$ = 41/2, $x2$ = 31/2.
A continuación se agrega el corte I, que produce la solución lineal óptima continua z= 62, $x1$ = 44/7, x2=3.
A continuación se agrega el corte II, que junto con el corte I y las restricciones originales, llega al óptimo del programa lineal z = 58, $x1$ = 4, $x2$ = 3. La última solución es entera, que era lo que se buscaba.

MÉTODO DE PLANO DE CORTE

- Consiste en alterar gradualmente el espacio de direcciones incorporando restricciones adicionales que representan condiciones necesarias de integralidad.
- Si se tiene el problema de programación lineal entera como:

Min o Maz Z= cx

s.a.

Ax=b

x>=0 y enteras

MÉTODO DE PLANO DE CORTE

Tomaremos a x* como el vector solución y a xi* del problema como fila i del mismo.

Separaremos este valor xi* como la suma de la parte entera y la parte fraccionaria:

xi*=[xi*]+fi

Seleccionaremos el elemento i cuya parte fraccionaria sea la mayor de todos los que pertenecen al vector solución del problema:

$$f_i = \max_{1 \leq k \leq m} f_k$$

MÉTODO DE PLANO DE CORTE

Luego separaremos esta expresión en sus partes enteras y en sus partes fraccionarias.

Siendo fi la parte fraccionaria de la solución y fij la parte fraccionaria de los valores de las variables no básicas.

$$f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j \leq f_i < 1$$

$$f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j \leq f_i \leq 0$$

$$f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j \leq 0$$

$$-\sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j \leq -f_i$$

ALGORITMO DE PLANO DE CORTE

En resumen el algoritmo es el siguiente:

- Tomamos a P como el problema de programación lineal entera a resolver.
- Y debemos repetir lo siguiente:

  1. Resolver P como un problema de programación lineal PL.
  2. Si la solución no es entera entonces debemos incorporar una restricción adicional.
  3. Debemos repetir esto hasta que encontremos una solución entera.

Ejercicio 1

$$Max\ Z = 3X_1 + 4X_2$$
$$s.a.$$
$$2X_1 + X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 9$$
$$X_1, X_2 \geq 0, enteras$$

$$Min - Z = -3X_1 - 4X_2$$

Si es maximizar, convertimos Maz Z = Min –Z el tablero óptimo, multiplicando por -1 a los coeficientes objetivo y coeficientes básicos, por ende también a –Z.

Solución del problema
Ejercicio 1

It. Op.	Cj	-3	-4	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_B
-3	X_1	1	0	¾	-1/4	9/4
-4	X_2	0	1	-1/2	1/2	3/2
Z_j - C_j		0	0	-1/4	-5/4	-12.75

- 2 ¼
- 1 ½

- Para comenzar a iterar con el método de los planos de corte, partimos del tablero óptimo de la programación lineal y debemos fijarnos en el valor de nuestras variables y ver cuál es la que tiene la fracción mayor.
- Por lo tanto como ½ es el mayor, la fila de X_2 es la escogida para poder realizar las operaciones y hacer ingreso de la restricción.

Solución del problema ejercicio 1

	Cj	-3	-4	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_B
-3	X_1	1	0	¾	-1/4	9/4
-4	X_2	0	1	-1/2	1/2	3/2
$Z_j - C_j$		0	0	-1/4	-5/4	-12.75

$\longrightarrow$ 2 ¼

$\longrightarrow$ 1 ½

- La restricción queda de la siguiente manera, S_1 es la variable que hemos inventado. Todos los valores son las fracciones que hemos encontrado en la fila de X_2:

$$S_1 - \frac{1}{2}X_3 - \frac{1}{2}X_4 = -\frac{1}{2}$$

Solución del problema ejercicio 1

	Cj	-3	-4	0	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	X_B
-3	X_1	1	0	¾	-1/4	0	9/4
-4	X_2	0	1	-1/2	1/2	0	3/2
0	S_1	0	0	-1/2	-1/2	1	-1/2
	$Z_j - C_j$	0	0	-1/4	-5/4	0	-12.75

- Hacemos ingreso de la restricción y la nueva variable a la tabla quedando de la siguiente forma S_1 ahora es una variable básica pero su valor es negativo, por lo tanto esta solución no puede ser aceptada y debemos decidir por qué variable de las no básicas va a ser reemplazada.

Solución del problema ejercicio 1

	Cj	-3	-4	0	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	X_B
-3	X_1	1	0	¾	-1/4	0	9/4
-4	X_2	0	1	-1/2	1/2	0	3/2
0	S_1	0	0	-1/2	-1/2	0	-1/2
$Z_j - C_j$		0	0	-1/4	-5/4	1	-12.75

- En este caso las candidatas son X_3 y X_4 y para poder decidirlo realizamos la división de -1/4 entre -1/2 representando a X_3 y -5/4 entre -1/2 representando a X_4.

- *El menor valor de estas divisiones* nos dirá qué variable es la que debe ingresar a la base. En esta ocasión es X_3 la que debe hacer ingreso, por lo tanto el cuadro con marca en negrita debe ser llevado a 1 mediante operaciones de fila y todos los valores que estén sobre él llevados a cero, así X_3 va a poder hacer el ingreso a la base.

Solución del problema ejercicio 1

- Al realizar todas estas operaciones, la tabla resultante es la siguiente, obteniendo comosolución:

	Cj	-3	-4	0	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	X_B
-3	X_1	1	0	0	-1	3/2	3/2
-4	X_2	0	1	0	1	-1	2
0	X_3	0	0	1	1	-2	1
$Z_j - C_j$		0	0	0	-1	-1/2	-12.75

- Ahora solo nos queda X1 con valor no entero, así que debemos agregar una restricción que nos oblige a tomar el valor deseado:

Solución del problema ejercicio 1

- Al realizar todas estas operaciones, la tabla resultante es la siguiente, obteniendo comosolución:

	Cj	-3	-4	0	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	X_B
-3	X_1	1	0	0	-1	3/2	3/2
-4	X_2	0	1	0	1	-1	2
0	X_3	0	0	1	1	-2	1
	$Z_j - C_j$	0	0	0	-1	-1/2	-12.75

- La restricción queda de la siguiente manera:

$$S_2 - \frac{1}{2} S_1 = -\frac{1}{2}$$

Solución del problema ejercicio 1

- Hacemos ingreso de la nueva restricción quedando de la siguiente manera:

	Cj	-3	-4	0	0	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	X_B
-3	X_1	1	0	0	-1	3/2	0	3/2
-4	X_2	0	1	0	1	-1	0	2
0	X_3	0	0	1	1	-2	0	1
0	S_2	0	0	0	0	-1/2	1	-1/2
$Z_j - C_j$		0	0	0	-1	-1/2	0	-12.75

- Y al igual que en el caso anterior S_2 tiene un valor negativo por lo tanto debe ser reemplazado por una variable no básica. En este caso la única candidata es S_1 dado que X_4 aparece con cero en la fila de S_2. Hacemos ingreso de S_1 en la base.

Solución del problema ejercicio 1

- Encontramos finalmente una solución entera, X_1=0, X_2=3, Z=12.

	Cj	-3	-4	0	0	0	0	
C_B	V_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	X_B
-3	X_1	1	0	0	-1	0	3	0
-4	X_2	0	1	0	1	0	-2	3
0	X_3	0	0	1	1	0	-4	3
0	S_1	0	0	0	0	1	-2	1
$Z_j - C_j$		0	0	0	-1	0	-1	-12

- Y de esta manera es como se utiliza el método de los planos de corte para problemas de programación lineal entera.

Ejemplo 2:

Dado:

			Disponibilidad
Maquina 1	3.2	2.4	16
Maquina 2	2	3	15
Utilidad	130	150	

X1: Cantidad de producto A

X2: Cantidad de producto B

F.O:

Max Z=130X1+150x2

s.a.

3.2x1+2.4x2+s1=16

2x1+3x2+s2=15

Cj			130	150	0	0
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2
0	s1	16	3.2	2.4	1	0
0	s2	15	2	3	0	1
Zj		0	0	0	0	0
Zj-Cj			-130	-150	0	0

Lado Derecho	
16	7
15	5

Resolvemos con el método simplex

Cj			130	150	0	0
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2
0	s1	4	1.6	0	1	-0.8
150	x2	5	0.6667	1	0	0.333
Zj		750	100	150	0	50
Zj-Cj			-30	0	0	50

Cj			130	150	0	0
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2
0	s1	4	1.6	0	1	-0.8
150	x2	5	0.6667	1	0	0.333
Zj		750	100	150	0	50
Zj-Cj			-30	0	0	50

1er CORTE

Cj			130	150	0	0
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2
130	x1	2.5	1	0	0.625	-0.5
150	x2	3.33	0	1	-0.4167	0.667
Zj		825	130	150	18.75	35
Zj-Cj			0	0	18.75	35

1er corte

x1+0.63s1+(-1(0.5)s2=2.5

5/8

$$x1 + \frac{5}{18}s1 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)s2 = 2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{18}s1 + \frac{1}{2}s2 = \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{2} - \frac{5}{18}s1 - \frac{1}{2}s2$$

$$-\frac{5}{18}s1 - \frac{1}{2}s2 + \frac{1}{2} <= 0 \qquad -\frac{5}{18}s1 - \frac{1}{2}s2 + s3 = -\frac{1}{2}$$

Ingresamos nueva restricción y aplicamos el método simplex

Cj			130	150	0	0	
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2	s3
130	x1	2.5	1	0	0.625	-0.5	0
150	x2	3.33	0	1	-0.4167	0.667	0
	s3	- 1/2	0	0	- 5/8	- 1/2	1
Zj		825	130	150	18.75	35	
Zj-Cj			0	0	18.75	35	
		aplicamos simplex dual			30	70	

Cj			130	150	0	0	
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2	s3
130	x1	2.5	1	0	0.625	-0.5	0
150	x2	3.33	0	1	-0.4167	0.667	0
0	s3	- 1/2	0	0	- 5/8	- 1/2	1
Zj		825	130	150	18.75	35	
Zj-Cj			0	0	18.75	35	0
					30	70	

Cj			130	150	0	0	0
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2	s3
130	x1	2	1	0	0	-1	1
150	x2	3 2/3	0	1	0	1	- 2/3
0	s1	0.80	0.00	0.00	1.00	0.80	-1.60
Zj		810	130	150	0	20	30
Zj-Cj			0	0	0	20	30

2do CORTE

2do corte

x2+1s2+(-1+1/3)s3=3.2/3

$$x2 + 1s2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)s3 = 3 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}s3 = \frac{2}{3} \qquad = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}s3$$

$$-\frac{1}{3}s3 + \frac{2}{3} <= 0 \qquad -\frac{1}{3}s3 + s4 = -\frac{2}{3}$$

Cj			130	150	0	0	0			
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2	s3	s4		Lado Derecho
130	x1	2	1	0	0	-1	1	0		2
150	x2	3.66667	0	1	0	1	-0.7	0		3.7
0	s1	0.8	0.00	0.00	1.00	0.80	-1.60	0		0.8
0	s4	-2/3	0	0	0	0	-0.3	1		-0.7
Zj		810	130	150	0	20	30			
Zj-Cj			0	0	0	20	30			

aplicamos simplex dual 90

Cj			130	150	0	0	0	0		
Cb	Xb	Bi	X1	X2	s1	s2	s3	s4		Lado Derecho
130	x1	0	1	0	0	-1	0	3		0
150	x2	5	0	1	0	1	0	-2		5.0
0	s1	4	0.00	0.00	1.00	0.80	0.00	-4.80		4.0
0	s4	2	0	0	0	0	1	-3		2.0
Zj		750	130	150	0	20	0			
Zj-Cj			0	0	0	20	0	0		

X1	0
X2	5
Z	750

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Gracias

- Néstor Muñoz
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe

941434300

60 años

Universidad Nacional de Cajamarca   www. unc.edu.pe/   Universidad Nacional de Cajamarca