



Unidad 2:

Modelo de Redes:

Problema de Flujo

Máximo



Problema del Flujo Máximo: Introducción

- Hay problemas en donde lo importante es la cantidad de flujo que pasa a través de la red como por ejemplo: en la línea de gasoductos, redes eléctricas, transmisión de datos....
- En dichos problemas es importantes determinar **el flujo máximo** que pasa que podría pasar a través de la red.
- En este tipo de problemas es necesario que **existan restricciones** para la capacidad de los arcos tales como condiciones de la capa asfáltica, diámetros de tubería, etc.
- Resuelve por ejemplo las siguientes interrogantes: ¿Cuál es la cantidad máxima de vehículos, líquidos, peatones, llamadas telefónicas, ..., que pueden entrar y salir del sistema en un período determinado de tiempo?



Problema del Flujo Máximo: Alcance

- Este modelo se utiliza para reducir los embotellamientos entre ciertos puntos de partida y destino en una red.
- Existe un flujo que viaja desde un único lugar de origen hacia un único lugar destino a través de arcos que conectan nodos intermedios.
- Cada arco tiene una capacidad que no puede ser excedida.
- La capacidad no debe ser necesariamente la misma para cada dirección del arco.
- Al límite máximo de flujo de una rama se le denominará capacidad de flujo.
- Se requiere transportar la máxima cantidad de flujo desde un punto de partida (fuente) a un punto final (pozo).



...Problema del Flujo Máximo: Alcance

- El objetivo es maximizar la cantidad total de flujo del origen al destino.
- Nos permite conocer(calcular) la máxima cantidad de cualquier artículo o información que podemos transportar desde un origen hasta un destino.
- Existe un nodo origen (con el número 1), del cual los flujos emanan.
- Existe un nodo terminal (con el número n), en el cual todos los flujos de la red son depositados.
- Existen $n-2$ nodos (numerados del 2, 3,..., $n-1$), en el cual el flujo que entra es igual al flujo que sale.
- La capacidad C_{ij} que transita del nodo i al nodo j , y la capacidad C_{ji} para la dirección opuesta.

Algoritmo de Flujo Máximo



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

- Este algoritmo se basa en el hallazgo de rutas de avance con flujo positivo entre los nodos fuente y sumidero (destino). Cada ruta destina una parte de o todas las capacidades de sus arcos al flujo total en la red.
- Considérese el arco (i, j) con capacidades bidireccionales $((C_{ij}), (C_{ji}))$, se utiliza la notación (C_{ij}, C_{ji}) para representar los residuos.
- Para un nodo j que recibe flujo del nodo i , se define una etiqueta $[a_j, i]$, donde a_j es el flujo del nodo i al nodo j .

Algoritmo de Flujo Máximo- Pasos:



Universidad
Nacional de
Cajamarca

"Norte de la Universidad Peruana"

PASO 1. Para todos los arcos iguale la capacidad residual con la capacidad de diseño esto es $(C_{ij}, C_{ji}) = (C_{ij}, C_{ji})$. Sea $a_1 = \infty$ y se etiqueta el nodo fuente con $[\infty, -]$. Designe $i=1$ y se prosigue en el paso 2.

PASO 2. Determinar S_i , el conjunto de los nodos no etiquetados j al que se puede llegar directamente desde el nodo i por medio de arcos con residuos positivos (es decir $C_{ij} > 0$ para toda $j \in S_i$). Si $S_i \neq \emptyset$, ir al paso 3. de lo contrario, a una ruta parcial terminal en el nodo i . Continúe con el paso 4.

PASO 3. Determinar $k \in S_i$ de modo que:

$$C_{ik} = \max_{j \in S_i} \{C_{ij}\}.$$

Igualar $a_k = C_{ik}$ y etiquete el nodo k con $[a_k, i]$. Si $k=n$, el nodo sumidero ha sido etiquetado, y se ha encontrado una ruta de avance, continúe con el paso 5. En caso contrario, igualar $i=k$ y seguir en el paso 2.

PASO 4. (Retroceso). Si $i=1$, no es posible avanzar, continúe con el paso 6. de lo contrario, sea r el nodo (en la ruta parcial) que se etiquetó inmediatamente antes del nodo actual i y elimine i del conjunto de nodos adyacentes a r . Igualar $i=r$ y regrese al paso 2.





...Algoritmo de Flujo Máximo- Pasos:

- **PASO 5.** (Determinación de los residuos). Defina los nodos de la ruta de avance p-ésima del nodo 1 al nodo o $N_p = (1, k_1, k_2, \dots, k_n)$. . Entonces el flujo máximo a lo largo de la ruta se calcula como:

$$f_p = \min\{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_n\}.$$

La capacidad residual de cada arco a dirección inversa; es decir, para los nodos i y j en la ruta, el flujo residual se cambia del actual (C_{ij}, C_{ji}) a:

- a) $(C_{ij} - f_p, C_{ji} + f_p)$ si el flujo va de i a j.
- b) $(C_{ij} + f_p, C_{ji} - f_p)$ si el flujo va de j a i.

Restaure los nodos que se eliminaron en el paso 4. Poner $i=1$ y regrese al paso 2

PASO 6. (Solución)

- a) Dado que se determinaron m rutas de avance, el flujo máximo en la red es:

$$F = f_1 + f_2 + \dots + f_m.$$

- b) Utilizando las capacidades de diseño (inicial) y los residuos finales del arco (i,j) , (C_{ij}, C_{ji}) , $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ respectivamente, el flujo óptimo en el arco (i,j) se calcula como sigue:
 $(\alpha, \beta) = (\bar{C}_{ij} - C_{ij}, C_{ij} - \bar{C}_{ij})$. Si $\alpha > 0$, el flujo óptimo de i a j es α . Por otra parte Si $\beta > 0$, el flujo óptimo de j a i es β . (Es imposible que tanto α y β sean positivos al mismo tiempo).

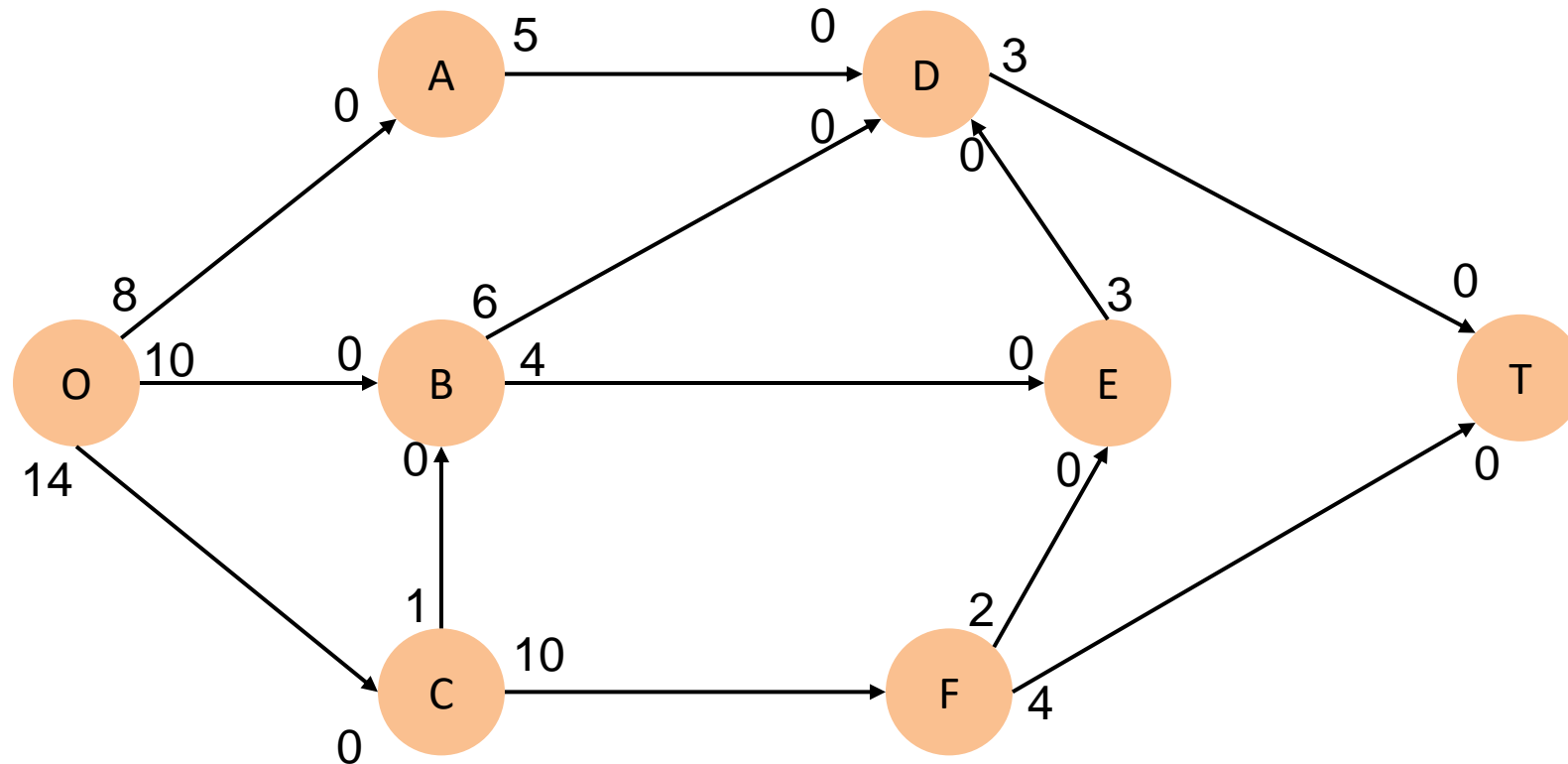
Síntesis de los Pasos del Algoritmo de Flujo Máximo

1. Encontrar el camino que vaya del Origen al Destino y que tenga capacidad Mayor a cero en el sentido deseado.
2. Encontrar la rama de menor capacidad (P_f) del camino seleccionado en el paso anterior y programar el envío de dicha capacidad (P_f)
3. Para el camino elegido en el paso 1 reducir la cantidad de P_f en las ramas involucradas y aumentar dicha cantidad en el sentido contrario
4. Repetir el procedimiento desde el paso 1

Ejercicio 1



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"



Ejemplo 2

Una ciudad es atravesada por una red interestatal de carreteras de norte a sur que le permite alcanzar un nivel de 15 000 vehículos por hora, en hora punta (pico).

Debido a un programa de mantenimiento general, el cual exige cerrar dichas vías, un grupo de ingenieros han propuesto una red de rutas alternas para cruzar la ciudad de norte a sur, la cual incorpora avenidas importantes, como se muestra en la siguiente red.

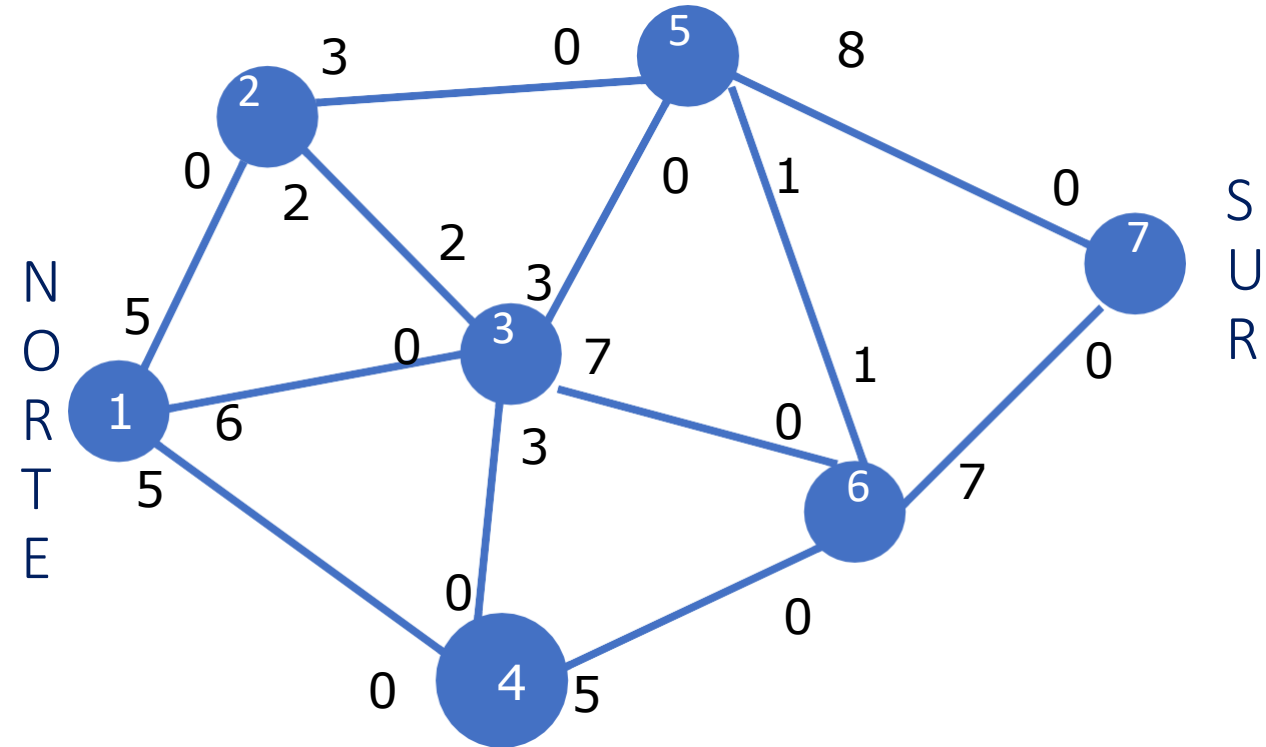
La red propuesta incluye el número de vehículos (miles) que pueden circular por dichas vías.

- 1.- ¿Cuál es el flujo máximo de vehículos que permite la red, cada hora?
2. ¿Puede la red propuesta dar cabida a un flujo máximo de 15 000 v/h de norte a sur?
- 3.- ¿Qué flujo se debe canalizar sobre cada arco de la red?

Agregamos 0: representa que no se enviado nada por los canales.

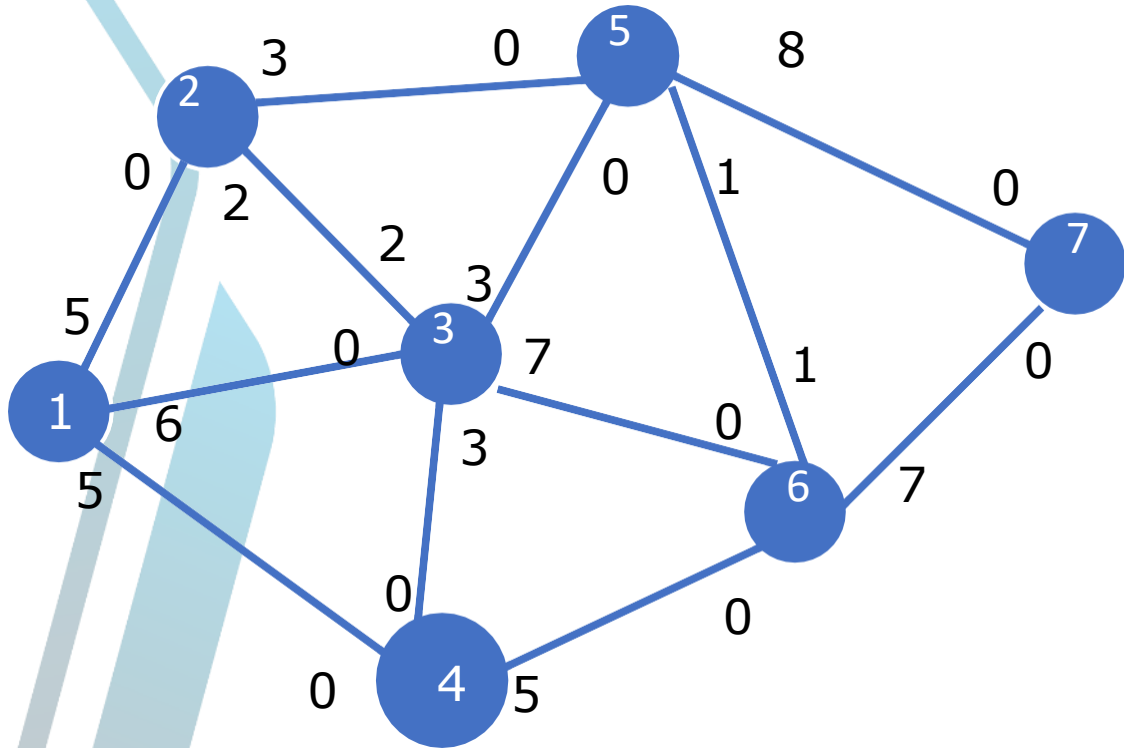


Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

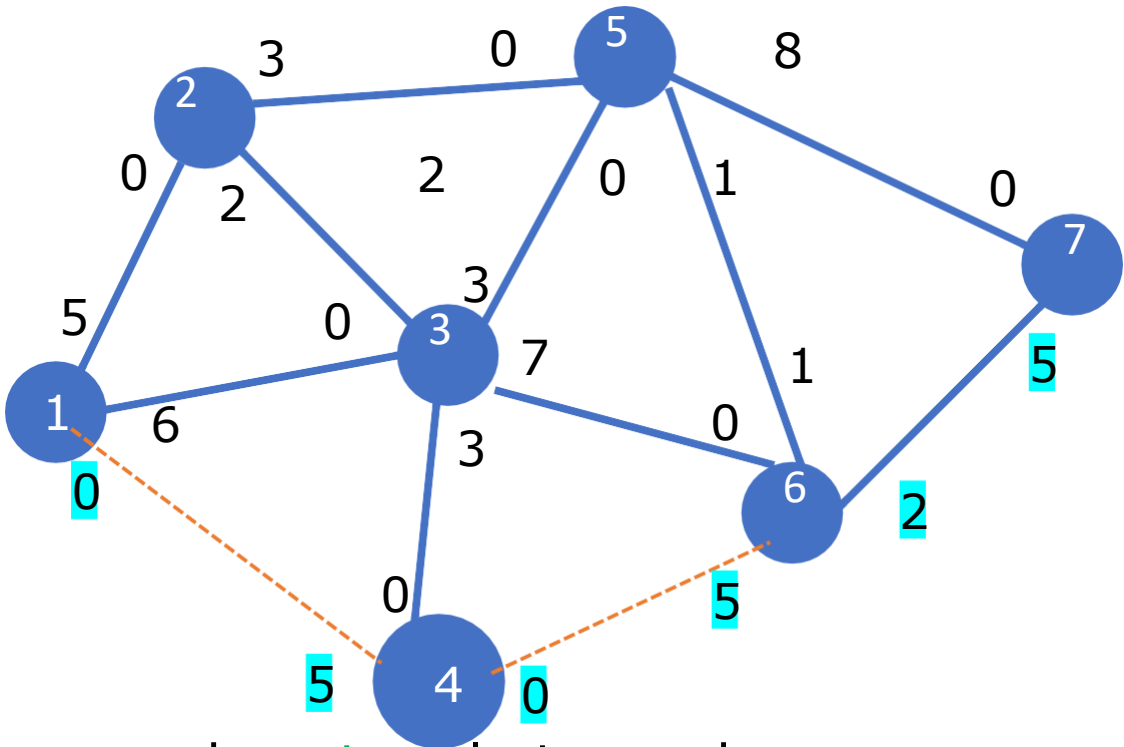


SOLUCIÓN:

1ero: Se busca la mayor capacidad o mayor número de alguno de los caminos que vaya del origen (Nodo 1) al destino (Nodo 2) (1-4-6-7)

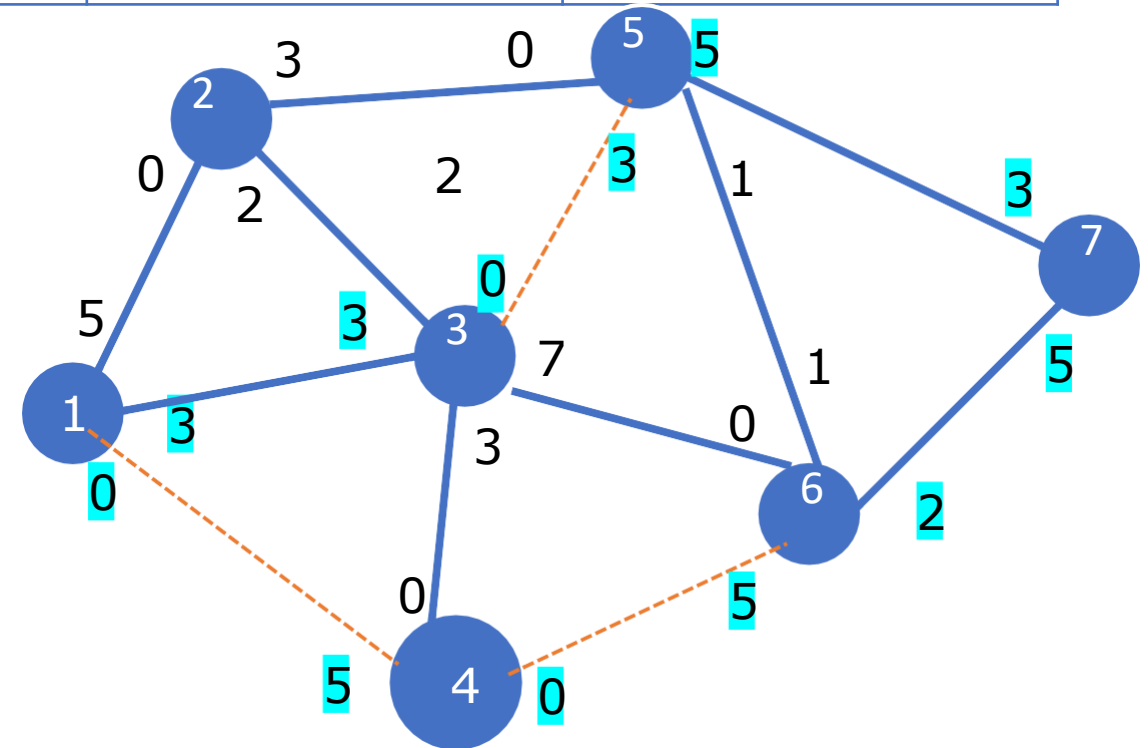
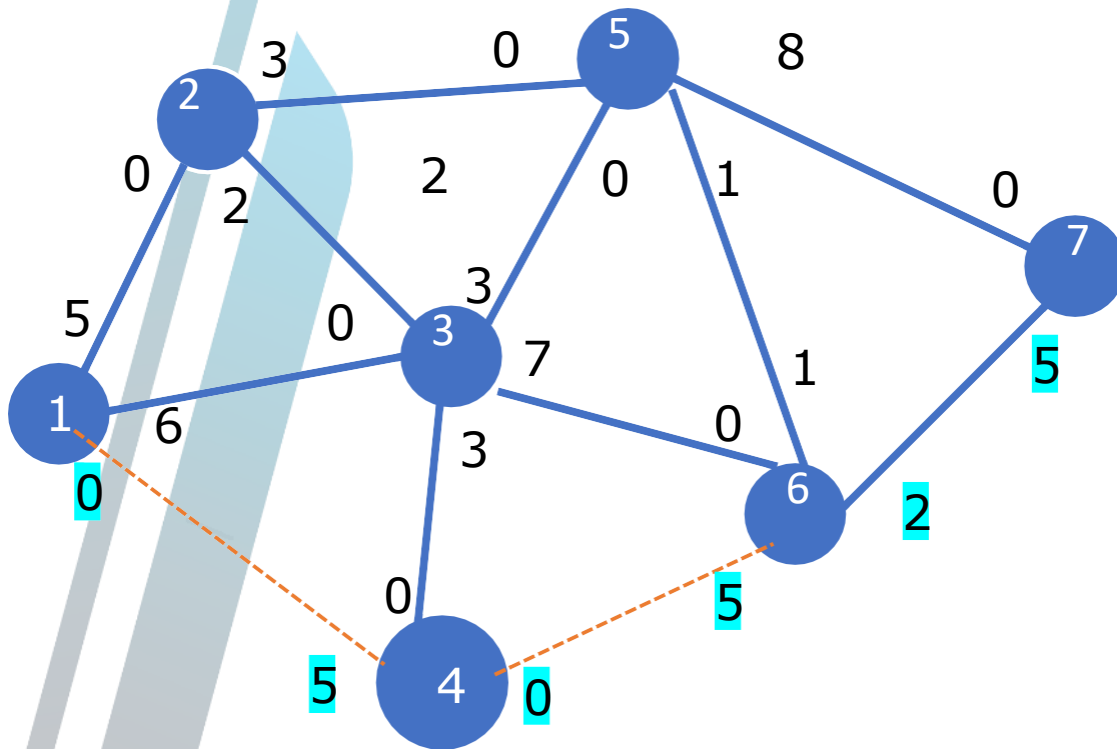


#	Ruta del nodo 1 al nodo 7	Unidades que se pueden mover
1	1-4-6-7	5

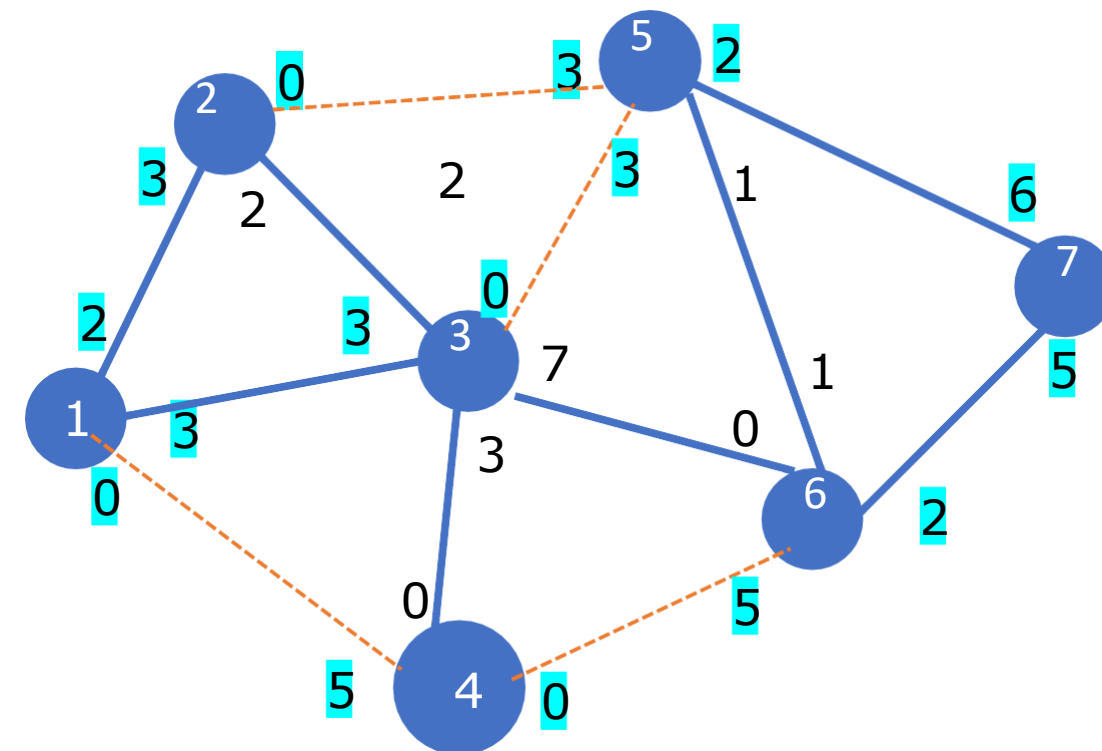
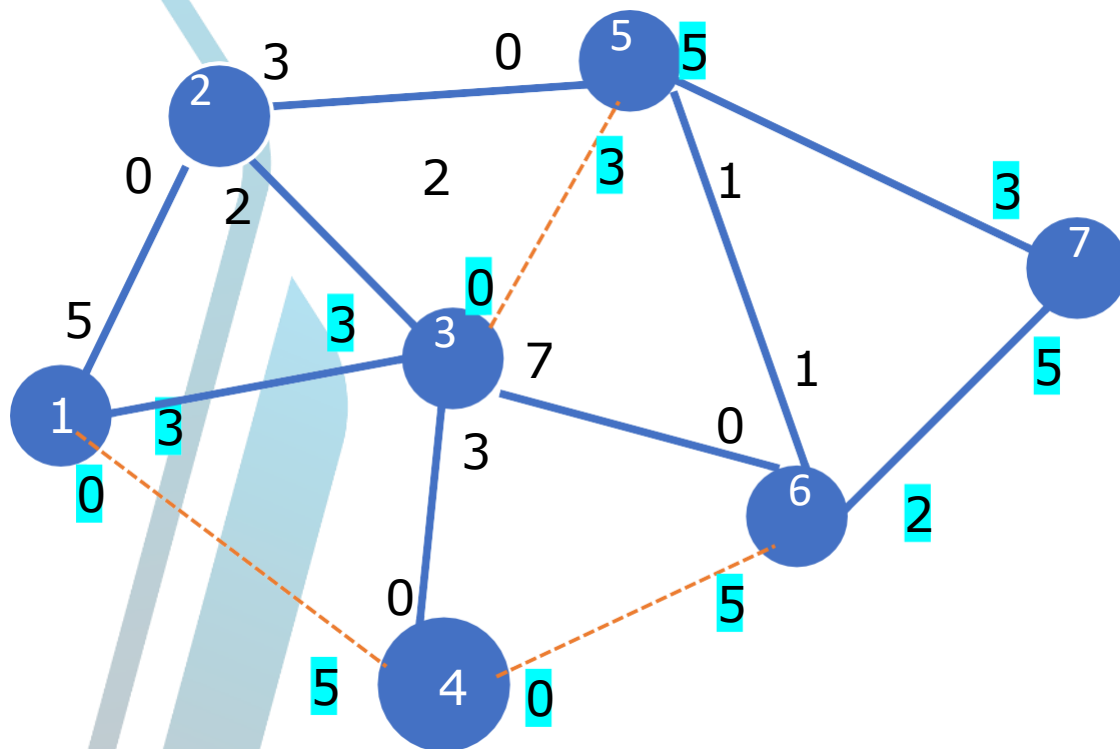


Nota: la capacidad que **sale** de un nodo **se resta** y cuando **entra** al otro nodo **se suma**, indicándolo sobre el mismo arco. Cuando un arco ha sido utilizado en toda su capacidad (ej. 1.4) y (4,6) implica que no se podrán considerar como parte de alguna otra ruta, por lo que se les colocará en forma punteada para no tomarlos en cuenta

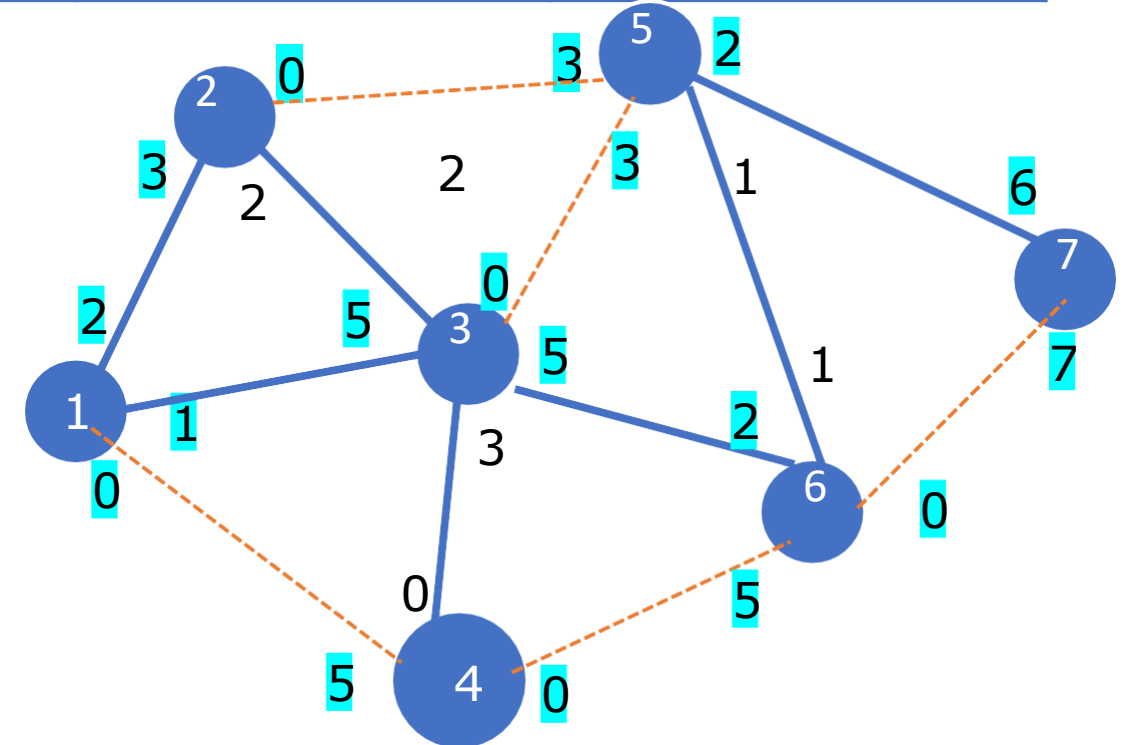
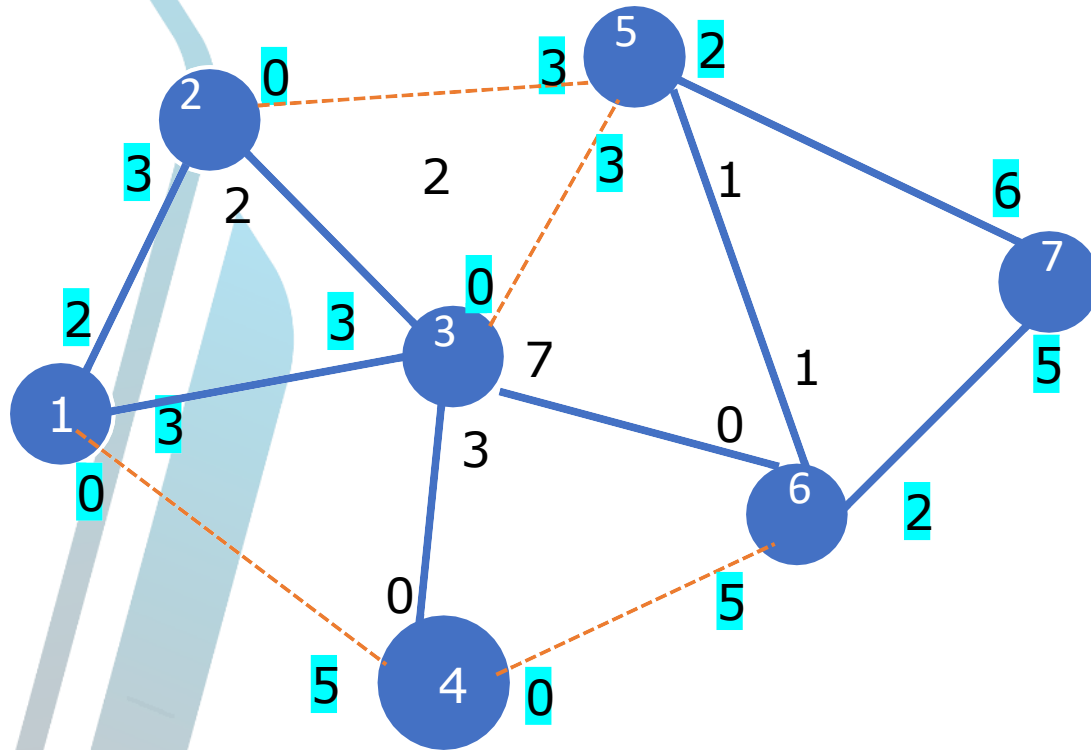
#	Ruta del nodo 1 al nodo 7	Unidades que se pueden mover
1	1-4-6-7	5
2	1-3-5-7	3

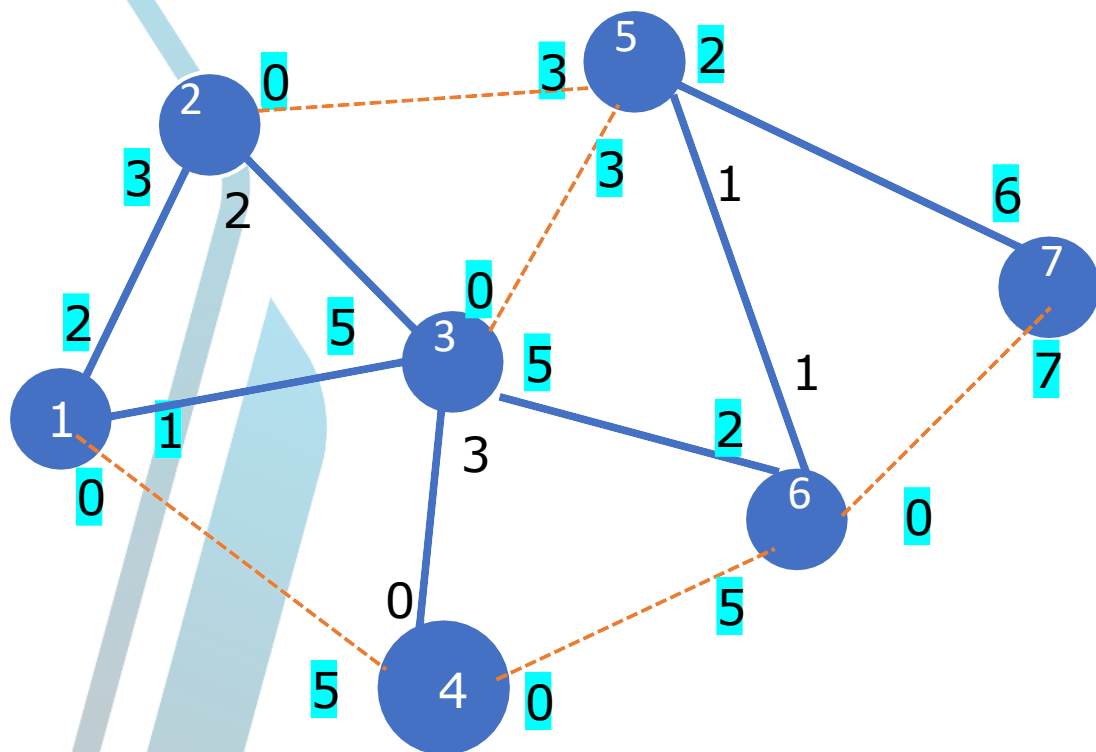


#	Ruta del nodo 1 al nodo 7	Unidades que se pueden mover
1	1-4-6-7	5
2	1-3-5-7	3
3	1-2-5-7	3

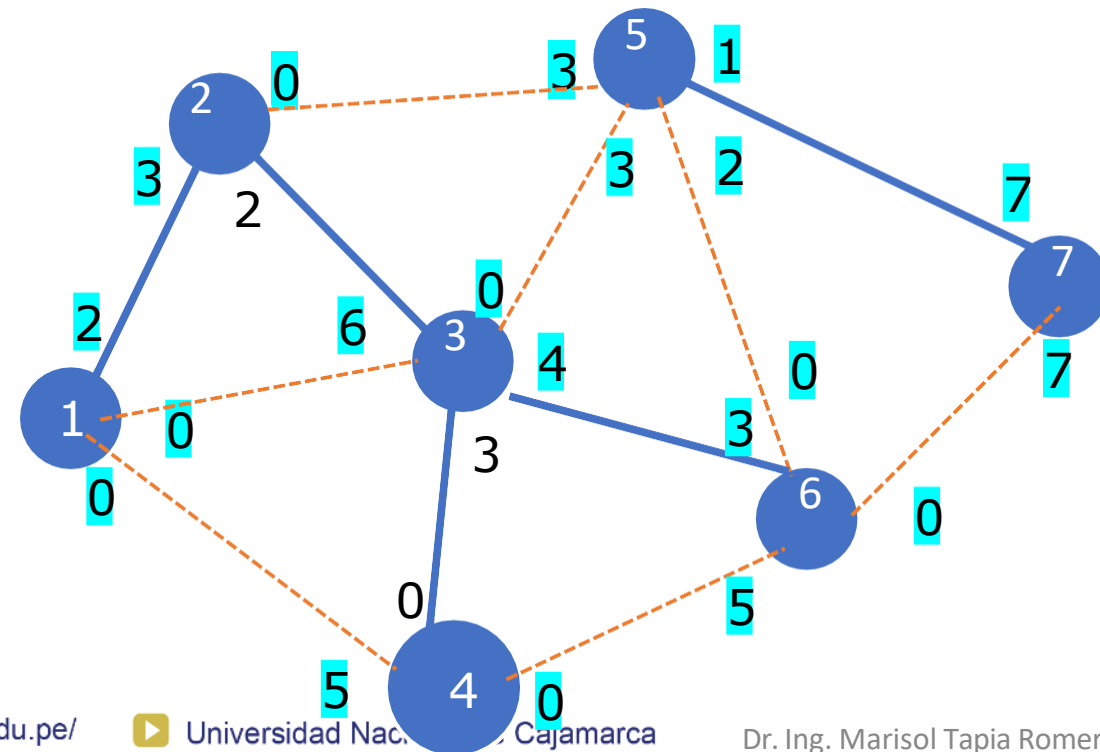


#	Ruta del nodo 1 al nodo 7	Unidades que se pueden mover
1	1-4-6-7	5
2	1-3-5-7	3
3	1-2-5-7	3
4	1-3-6-7	2





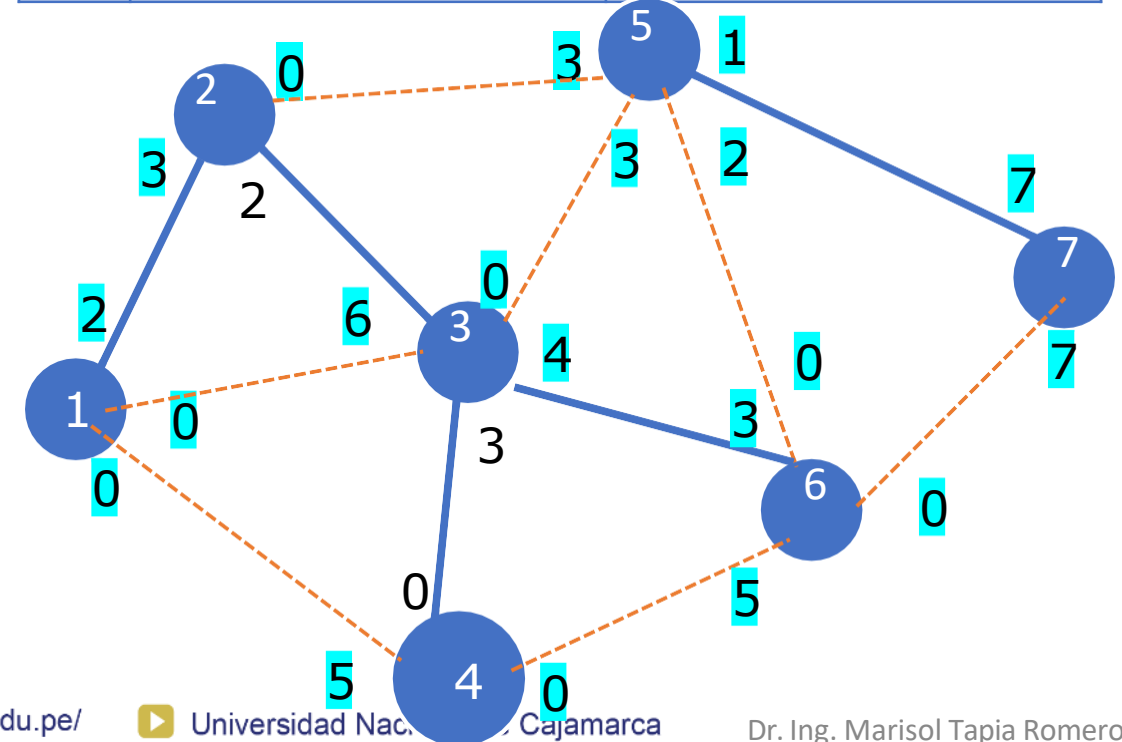
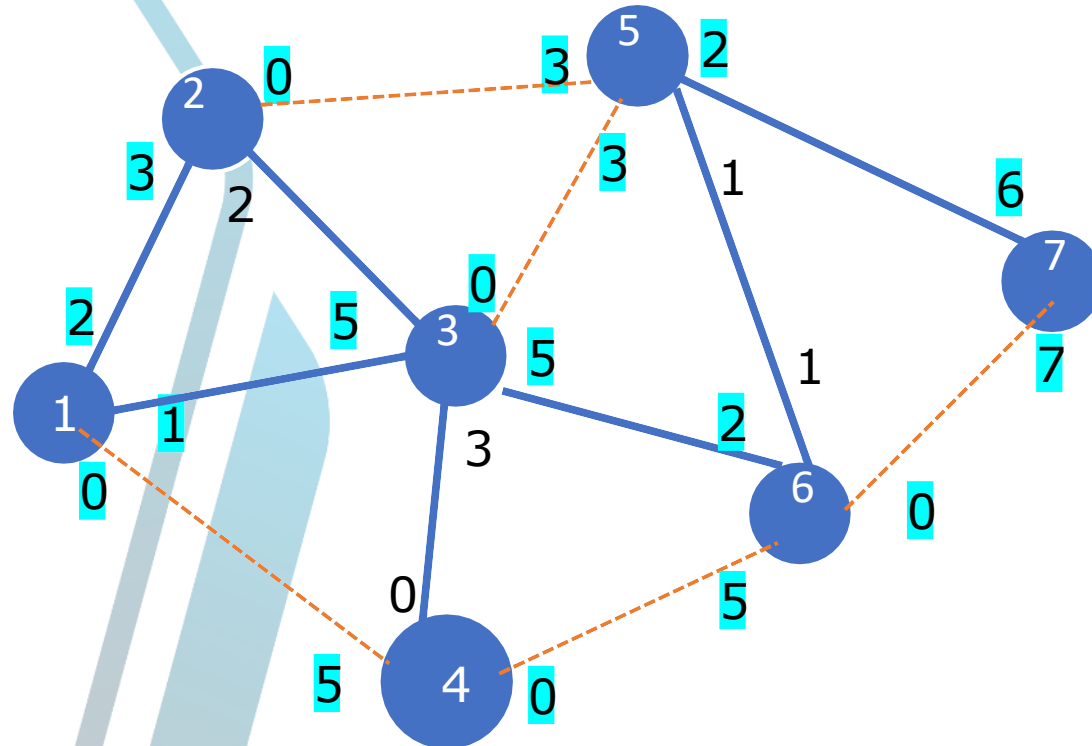
#	Ruta del nodo 1 al nodo 7	Unidades que se pueden mover
1	1-4-6-7	5
2	1-3-5-7	3
3	1-2-5-7	3
4	1-3-6-7	2
5	1-3-5-6-7	1
		14





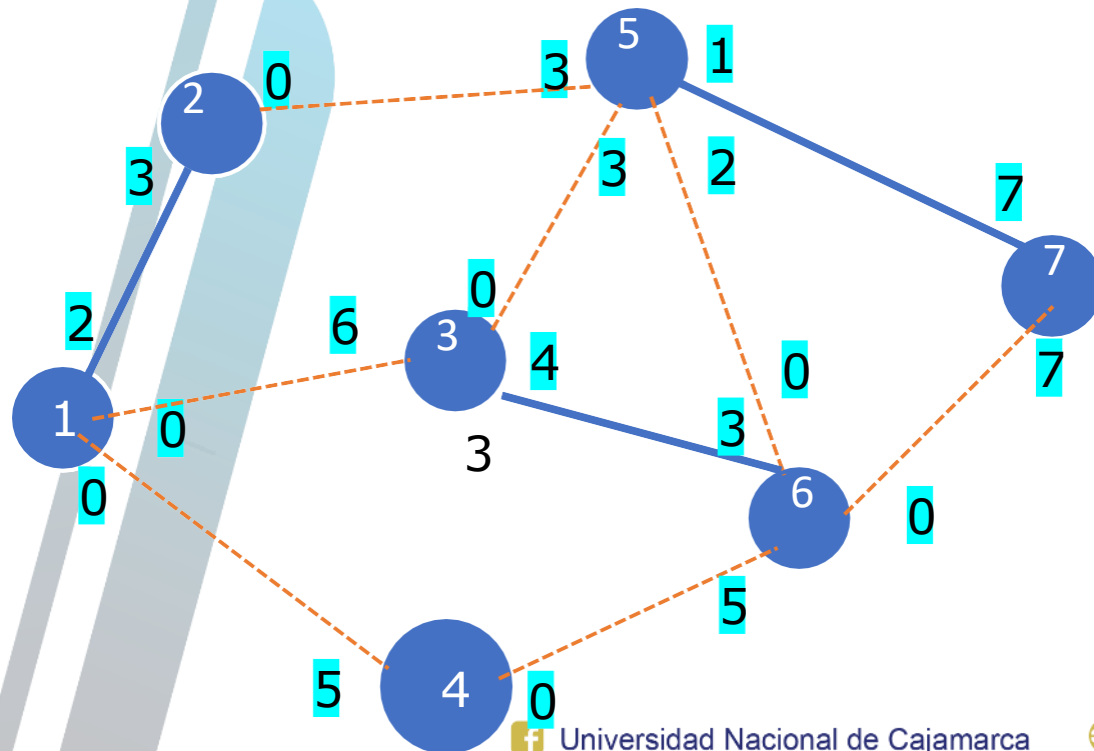
Unidades que se
pueden mover

#	Ruta del nodo 1 al nodo 7	
1	1-4-6-7	5
2	1-3-5-7	3
3	1-2-5-7	3
4	1-3-6-7	2
5	1-3-5-6-7	1
		14



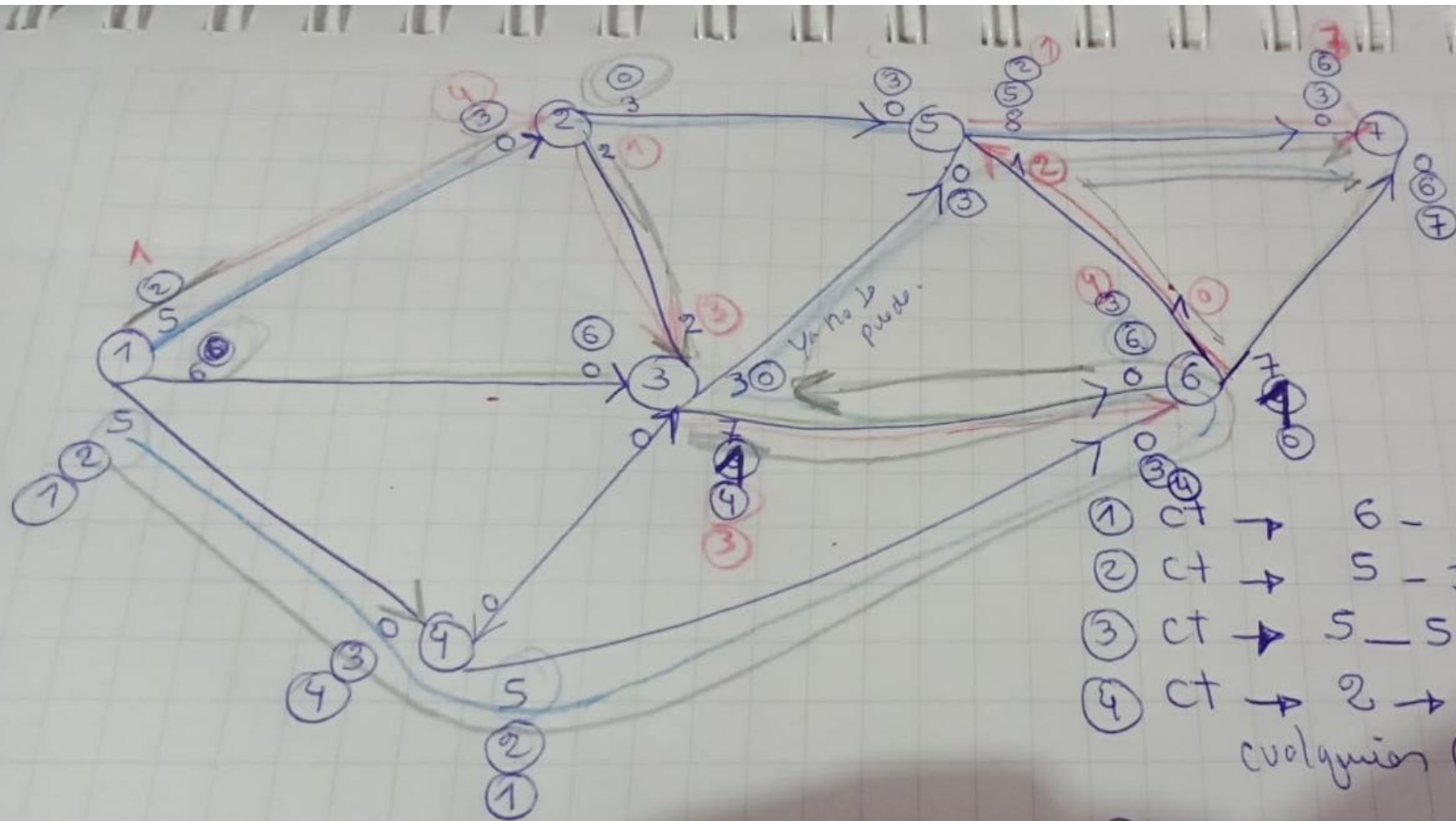


#	Ruta del nodo 1 al nodo 7	Unidades que se pueden mover
1	1-4-6-7	5
2	1-3-5-7	3
3	1-2-5-7	3
4	1-3-6-7	2
5	1-3-5-6-7	1
		14



Respuesta:

1. El flujo máximo de vehículos que irán de norte a sur es igual a 14 000 vehículos/hora.
2. La red propuesta no da cabida a un flujo máximo de 15 00 v/h de norte a sur?. verdadero
- 3.- ¿Qué flujo se debe canalizar sobre cada arco de la red?
Se muestra en la tabla
Los que ingresan al nodo



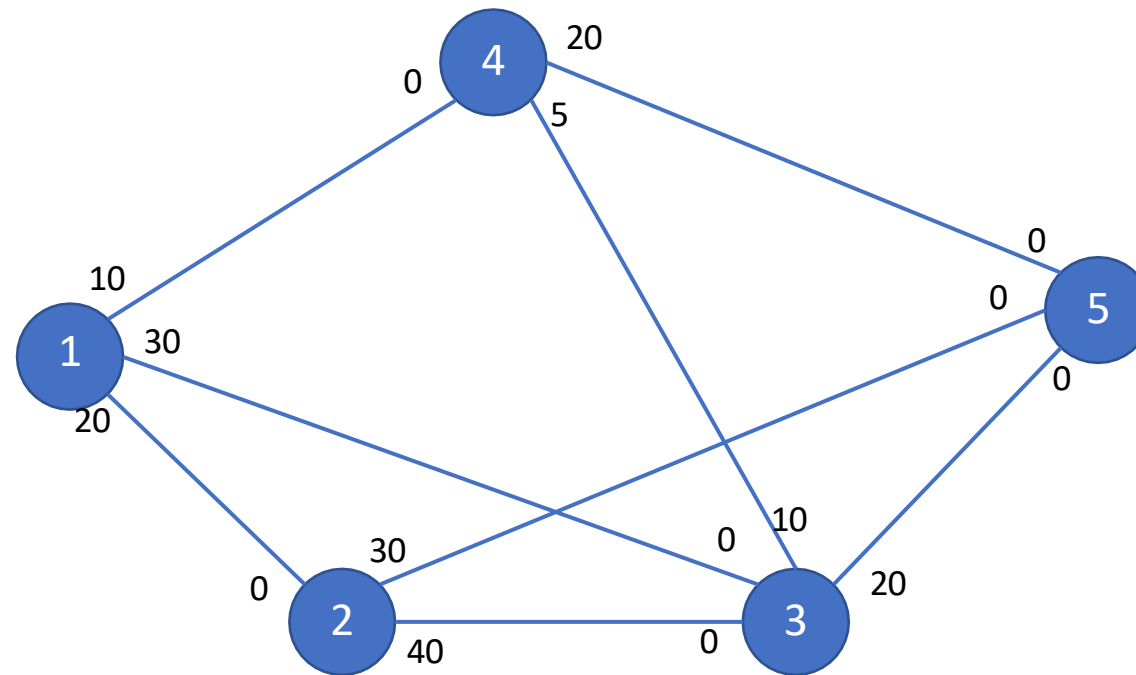
① ct $\rightarrow 6 - 7 - 7 \rightarrow 6$
 ② ct $\rightarrow 5 - 3 - 8 \rightarrow 3$
 ③ ct $\rightarrow 5 - 5 - 6 - 3 - 8 \rightarrow 3$
 ④ ct $\rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 1$
 evolucion ①

⑤ ct $\rightarrow \underline{2} \rightarrow \underline{2} \rightarrow 4 \rightarrow 1 - 2 \rightarrow 1$

$$6 + 3 + 3 + 1 + 1 = 14$$

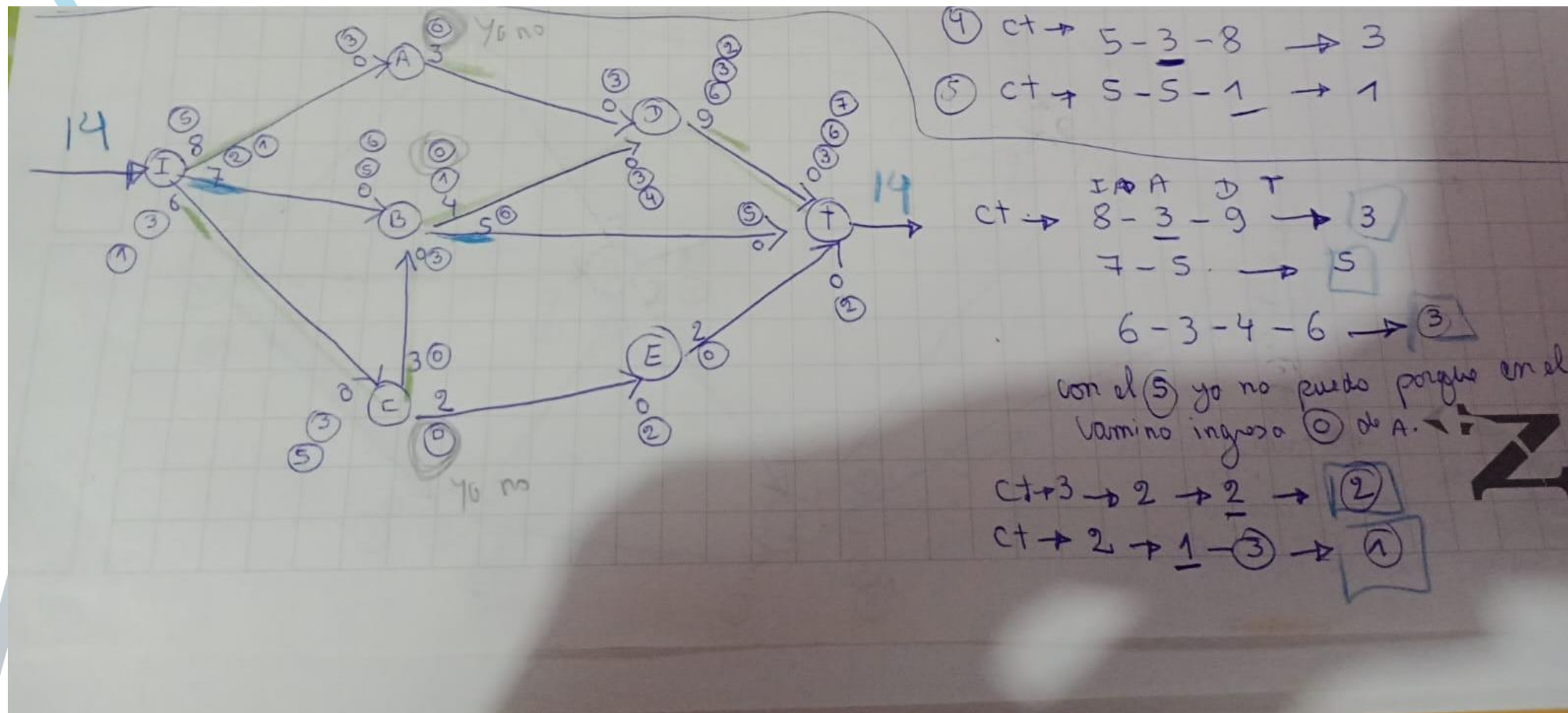
Ejercicio :

En la siguiente Red encuentre el Flujo Máximo



Resolver

Respuesta 60





**Universidad
Nacional de
Cajamarca**
"Norte de la Universidad Peruana"



Universidad Nacional de Cajamarca



www.unc.edu.pe/



Universidad Nacional de Cajamarca