

Ejercicio 1

TEMA: _____

FECHA: _____

PROGRAMACIÓN
ENTERA

Algoritmo de planos
de corte

Autor: Ralph
Gomory (1960)

- * Un corte es una desigualdad válida que elimina una solución fraccional del problema entero.
- * Los métodos de hiperplanos de corte consisten en, una vez, solucionado el problema relajado si este muestra solución fraccional, introducir un hiperplano (es decir, una nueva restricción) cumpliendo las siguientes propiedades:

- ✓ El punto óptimo del problema relajado no verifica la condición del hiperplano;
- ✓ todas soluciones enteras del problema satisfacen las condiciones impuestas por el hiperplano.

PROGRAMACIÓN ENTERA

Algoritmo de planos de corte

Autor: Ralph Gomory
(1960)

Su base matemática es bastante amplia.

Lo aplicaremos utilizando un conjunto de pasos:

1° Se elige el MENOR valor fraccionario de la solución óptima de las variables

2° Se elige los valores de la fila correspondiente a la variable elegida

3° Se descompone los valores de la fila elegida en el paso 2° en ENTEROS y FRACCIONES menores que 1 POSITIVAS

4° Se ordena los enteros al lado del izquierdo y las fracciones del lado derecho.

5° Se eliminan los enteros

6° Los valores que quedan se igualan a ≤ 0

7° Se traslada al lado derecho los valores sin variable

8° Para lograr la igualdad se agrega una variable de holgura

9° Los valores producidos de aplicar el paso

8° se agrega como una fila más a la tabla óptima del método Simplex

10° Se soluciona inicialmente
aplicando el método Simplex
dual

Ej. Maximización

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$1) 3x_1 + x_2 \leq 6 \quad 2) 2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$x_1, x_2 \geq 0$, enteras

CS	VS	3	4	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
3	x_1	1	0	$3/7$	$-1/7$	$12/7$
4	x_2	0	1	$-2/7$	$3/7$	$2/7$
$Z_j - C_j$		0	0	$1/7$	$12/7$	$12/3$

sol ópt.

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1.29 \quad x_3 = 2.14 \quad x_4 = 12.31$$

TEMA:

FECHA:

CS	VS	3	4	0	0	
		x1	x2	x3	x4	xB
3	x1	1	0	3/7	-1/7	12/7

CS	VS	3	4	0	0	0	
		x1	x2	x3	x4	s1	xB
3	x1	1	0	3/7	-1/7	0	12/7
4	x2	0	1	-2/7	3/7	0	2/7
0	s1	0	0	-3/7	-6/7	1	-2/7
Zj-Cj		0	0	1/4	1/4	0	12/3/4

TEMA:

FECHA:

CS	VS	3	4	0	0	0	XB
		X1	X2	X3	X4	S1	
3	X1	1	0	$3/7$	$-1/7$	0	$12/7$
4	X2	0	1	$-2/7$	$3/7$	0	$21/7$
0	S1	0	0	$-3/7$	$-6/7$	1	$-2/7$
$Z_j - C_j$		0	0	$1/4$	$11/4$	0	$123/4$

CS	VS	3	4	0	0	0	XB
		X1	X2	X3	X4	S1	
3	X1	1	0	0	-1	1	1
4	X2	0	1	0	1	$-2/3$	$21/3$
0	X3	0	0	1	2	$-21/3$	$2/3$
$Z_j - C_j$		0	0	0	1	$1/3$	$121/3$

TEMA:

FECHA:

CS	VS	3	4	0	0	0	
		x1	x2	x3	x4	S1	xB
0	x3	0	0	1	2	-2/3	2/3

CS	VS	3	4	0	0	0	0	
		x1	x2	x3	x4	S1	S2	xB
3	x1	1	0	0	-1	0	1/2	0
4	x2	0	1	0	1	0	-1	3
0	x3	0	0	1	2	0	-3/2	3
0	S1	0	0	0	0	1	-1/2	1
$Z_j - C_j$		0	0	0	1	0	1/2	12

Ejercicio 2.

$$\text{Max. } z = 5x_1 + x_2 + x_3$$

Sujeto a:

$$R_1: x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$R_2: 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ enteros}$$

Paso 1. Método Simplex

$$\text{Max. } z = 5x_1 + x_2 + x_3$$

s.a:

$$R_1: x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \xrightarrow{x_4} x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 \leq 10$$

$$R_2: 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10 \xrightarrow{x_5} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0x_5 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\text{Max. } z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

coeficientes de la variable solución	Variables solución	5	1	1	0	0		
F.O.		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_j	
0	x_4	1	1	2	1	0	10	$\rightarrow 10/1 = 10$
0	x_5	0/0	2/6	2/6	0/6	1/6	10/6	$\rightarrow 10/6 = 1.67$
$z_j - C_j$		-5	-1	-1	0	0		
0	x_4	0	2/3	5/3	1	-1/6	25/3	
5	x_1	1	1/3	1/3	0	1/6	5/3	\leftarrow menor valor
$z_j - C_j$		0	2/3	2/3	0	5/6	25/3	fraccionario

PASO 2: Aplicando Gomory

$$x_1: x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + 0x_4 + \frac{1}{6}x_5 = \frac{5}{3}$$

- Descomponer en enteros y fracciones positivos menores a 1.

$$x_1: x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_5 = \frac{5}{3}$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_5 = (1 + \frac{2}{3})$$

Izg. enteros

Derecha: fraccionarios

$$x_1 - 1 = -\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 + \frac{2}{3} \leq 0$$

Se eliminan los enteros

$$-\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \leq -\frac{2}{3}$$

Variables solución	5	1	1	0	0	S_1	B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_4	0	2/3	5/3	1	-1/6	0	25/3
x_1	1	1/3	1/3	0	1/6	0	5/3
z	0	2/3	2/3	0	5/6	0	25/3
S_1	0	-1/3	-1/3	0	-1/6	1	-2/3
z	0	0	0	0	1/2	2	7
x_4	0	0	1	1	-1/2	2	7
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_2	0	1	1	0	1/2	-3	2

z/S_1 : columna pivote, menor valor abso.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & z &= 5x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 &= 2 & z &= 5 + 2 + 0 \\ x_3 &= 0 & z &= 7 \\ z &= 7 \end{aligned}$$

Ejercicio 03

Ejercicio 3

$$\text{Min } Z = x_1 - 11x_2$$

Sujeto a:

$$1) -x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$2) 10x_1 + 10x_2 \leq 205$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z = x_1 + 11x_2 = 0$$

$$1 \quad -x_1 + 10x_2 + x_3 = 40$$

$$2 \quad 10x_1 + 10x_2 + x_4 = 205$$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	R.
Z	1	-1	11	0	0	0
x_3	0	-1	10	1	0	40 $40/10 = 4$
x_4	0	10	10	0	1	205 $205/10 = 20.5$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	R.
Z	1	1/10	0	-1/10	0	-4
x_2	0	-1/10	1	1/10	0	4 $4/(-1/10) = -40$
x_4	0	1	0	-1	1	105 $105/11 = 15$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	R.
Z	1	0	0	-1/11	0	-45 $1/2$
x_2	0	0	1	1/11	0	5 $1/2$
x_1	0	1	0	-1/11	1/11	15

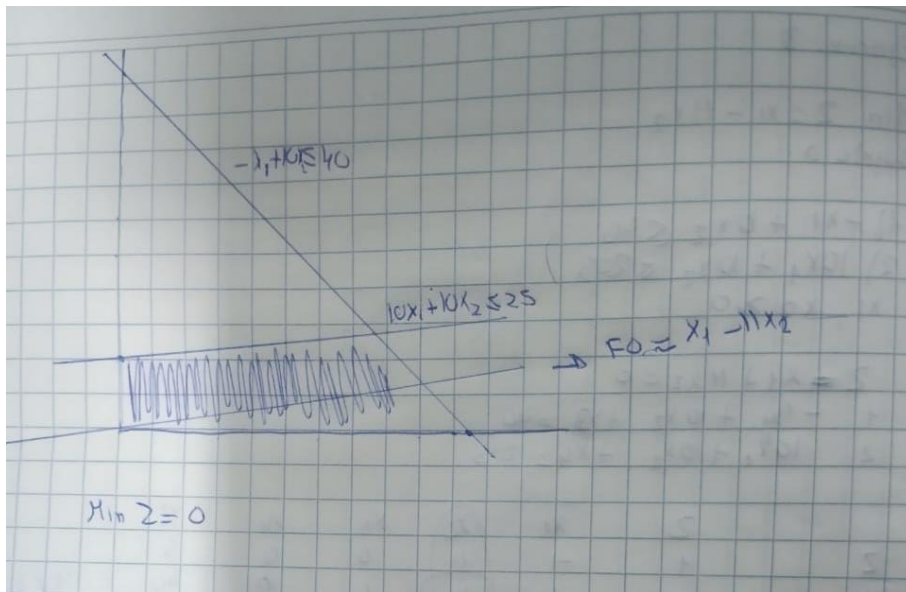
$$1 \quad x_2 + 1/11 x_3 = 5 + 1/2$$

$$1 \quad x_2 - 5 = 1/2 - 1/11 x_3$$

$$1/2 - 1/11 x_3 \leq 0$$

$$-1/11 x_3 \leq -1/2$$

$$-1/11 x_3 + 5 = -1/2$$



Ejercicio 04

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2.5x_2$$

$s.t.$

$$P_1: 2x_1 + 4x_2 \geq 40 \rightarrow -2x_1 - 4x_2 \leq -40$$

$$P_2: 3x_1 + 2x_2 \geq 50 \rightarrow -3x_1 - 2x_2 \leq -50$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ Enteros}$$

P_1

$$x_1 = 0 \\ x_2 = 10$$

$$x_2 = 0 \\ x_1 = 20$$

P_2

$$x_1 = 0 \\ x_2 = 25$$

$$x_2 = 0 \\ x_1 = 50/3$$

Intersección P_1 y P_2

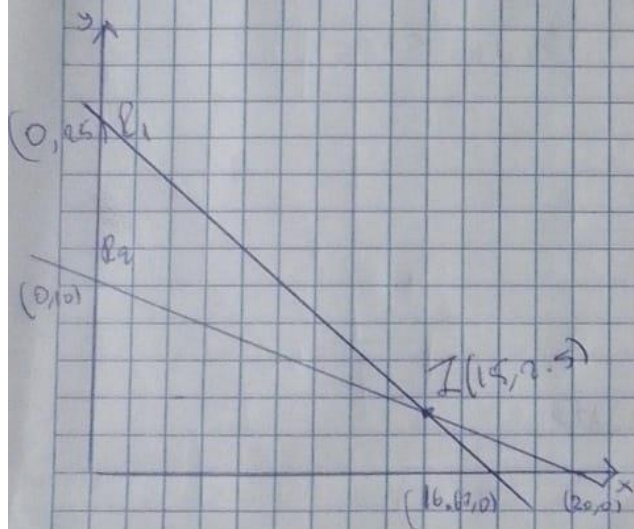
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 40 \\ -6x_1 - 4x_2 &= -100 \\ \hline -4x_1 &= -60 \\ x_1 &= 15 \\ x_2 &= 2.5 \end{aligned}$$

$$I(15, 2.5)$$

$$x_1 = 15 \\ x_2 = 2.5$$

$$Z = 51.25$$

$$\begin{aligned} P_1: -2x_1 - 4x_2 + x_3 &= -40 \\ P_2: -3x_1 - 2x_2 + x_4 &= -50 \end{aligned}$$



Simplex

COEFICIENTES	VARIABLES	3	2.5				
VARIABLES SOLUCION	SOLUCION	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3		-2	-4	1	0	-40	$\rightarrow 10$ ($\times -1$)
x_2		$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{50}{2}$	
x_4		-3	-2	0	1	-50	$\rightarrow 25$
$Z_j - C_j$		-3	-2.5	0	0	0	

COEFFICIENTS Variable Solution	VARIABLE SOLUTION	x_1	x_2	x_3	x_4	BS
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	10 $\rightarrow 20$
	x_4	-2	0	$\frac{1}{2}$	1	-30 $\rightarrow 15$ ($\div -2$)
$Z_j - C_j$		-1.75	0	-0.625	2.5	-12.5

COEFFICIENTS Variable Solution	VARIABLE SOLUTION	x_1	x_2	x_3	x_4	BS
	x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$	2.5
	x_1	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	15
$Z_j - C_j$		0	0	1.75	1.625	51.25

$$x_1 = 15$$

$$x_2 = 2.5$$

$$Z = 51.25$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 = 10$$

$$\cancel{\frac{1}{2}x_1} + \cancel{x_2} - \cancel{\frac{1}{4}x_3} = \cancel{10}$$

$$x_2 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 2 + \frac{1}{2}$$

$$\cancel{x_2} - \cancel{\frac{3}{4}x_3} + \cancel{\frac{1}{4}x_4} = \cancel{2} + \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right) = (-1) + \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x_2 - 1x_3 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 2 + \frac{1}{2}$$

$$x_2 - x_3 - 2 = -\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$-\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + x_5 \leq -\frac{1}{2} \quad \therefore (S_1)$$

Coefficients
Variable Solution

Variable
Solution

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_i
x_2	0	1	$3/4$	$1/4$	0	2.5 \rightarrow
x_1	1	0	1	$-1/2$	0	1.5 $\rightarrow 1.5$
S_1	0	0	$3/4$	$-1/4$	1	$-1/2 \rightarrow 0.66 (x = 1/3)$
$Z_j - C_j$	0	0	1.75	1.625	0	51.25 $\rightarrow 29$

CVS

VS

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_i
x_2	0	1	0	$1/4$	$3/4$	3 $\rightarrow 4 (x = 4/3)$
x_1	1	0	0	$-1/6$	$4/3$	$1.5/3 \rightarrow 0.5/4$
x_3	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	$2/3 \rightarrow$
$Z_j - C_j$	0	0	0	1.04	2.33	50.08 $\rightarrow 1.09$

CVS

VS

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_i
x_5	0	$1/3$	0	$2/3$	1	4 $\rightarrow 6$
x_1	1	$-1/9$	0	$1/9$	0	9 $\rightarrow 1.0$
x_3	0	$1/9$	1	$1/9$	0	6 $\rightarrow 9.11$
$Z_j - C_j$	0	-3.11	0	0.26	0	40.746

CVS	v_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B_j
	x_4	0	2	0	1	$3/2$	6
	x_1	1	$-17/12$	0	0	$-1/12$	$-26/3$
	x_3	0	$-2/3$	1	0	$-1/6$	$-4/3$
$Z_j - C_j$		0	$-26/3$	0	0	$-30/1$	3818

$$x_1: \quad x_1 - 17/12 x_2 - 1/12 x_5 = -26/3$$

$$x_1 - 9x_2 + \frac{1}{9}x_2 \rightarrow 11x_2 + \frac{11}{12}x_5 = -9 + \frac{1}{3}$$

$$x_1 - 2x_2 - x_5 + 9 = -\frac{1}{9}x_2 - \frac{11}{12}x_5 + \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{9}x_2 - \frac{11}{12}x_5 + \frac{1}{3} \leq 0$$

$$-\frac{1}{9}x_2 - \frac{11}{12}x_5 \leq -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{9}x_2 - \frac{11}{12}x_5 + x_6 \leq -\frac{1}{3} \quad \dots S_2$$

CVS	v_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B_j
	x_4	0	2	0	1	$3/2$	0	6
	x_1	1	$-17/12$	0	0	$-1/12$	0	$-26/3$
	x_3	0	$-2/3$	1	0	$-1/6$	0	$-4/3$
	x_6	0	$-1/9$	0	0	$-1/12$	1	$-1/3$
$Z_j - C_j$		0	$-26/3$	0	0	$-30/1$	$-30/1$	3818