INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA I

Introducción a la PROGRAMACIÓN LINEAL con Modelos de 2 o más Variables

Método simplex primal para maximización

Ingeniería de Sistemas

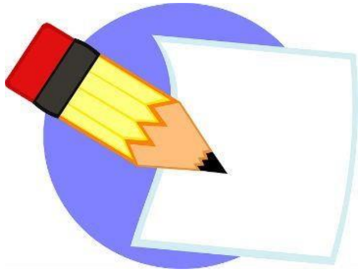
Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto

LOGRO DE LA SESIÓN

- Al término de la sesión, el estudiante encuentra la solución algebraica a modelos de programación lineal de dos o más variables, a partir del análisis de un caso y utilizando el método simplex, sigue un procedimiento lógico y muestra la solución óptima.

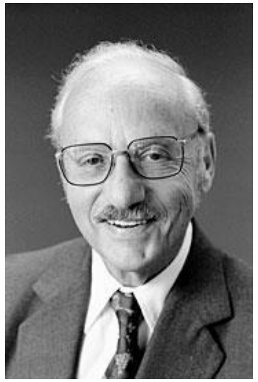
Método Simplex

Es un método analítico de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver **modelos más complejos** que los resueltos mediante el método gráfico **sin restricción** en el **número** de **variables**.



El Método Simplex es un **método iterativo** que permite ir mejorando la solución en **cada paso.**

Este famoso método fue creado en el año de 1947 por el estadounidense George Bernard Dantzig y el ruso Leonid Vitalievich Kantorovich, con el ánimo de crear un algoritmo capaz de solucionar problemas de *m* restricciones y *n* variables. Se usa en forma rutinaria para resolver problemas grandes en las computadoras actuales.



George Bernard Dantzig

Leonid Vitalievich Kantorovich

TERMINOLOGÍA COMÚN PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

Ejemplo prototipo	Problema general
Capacidad de producción de las plantas	Recursos
3 plantas	m recursos
Fabricación de productos	Actividades
2 productos	n actividades
Tasa de producción del producto j, xj	Nivel de la actividad j, xj
Ganancia Z	Medida global de efectividad Z

FORMA ESTÁNDAR DEL MODELO

Maximizar $Z=c1x1+c2x2+....+cnxn$

Sujeta alas restricciones

$a11x1+a12x2+.....+a1nxn \quad <=b1$

$a21x1+a22x2+...+a2xn \quad <=b2$

$am1x1+am2x2+...+amnxn \quad <=bm$

$X1,x2,xn >=0$

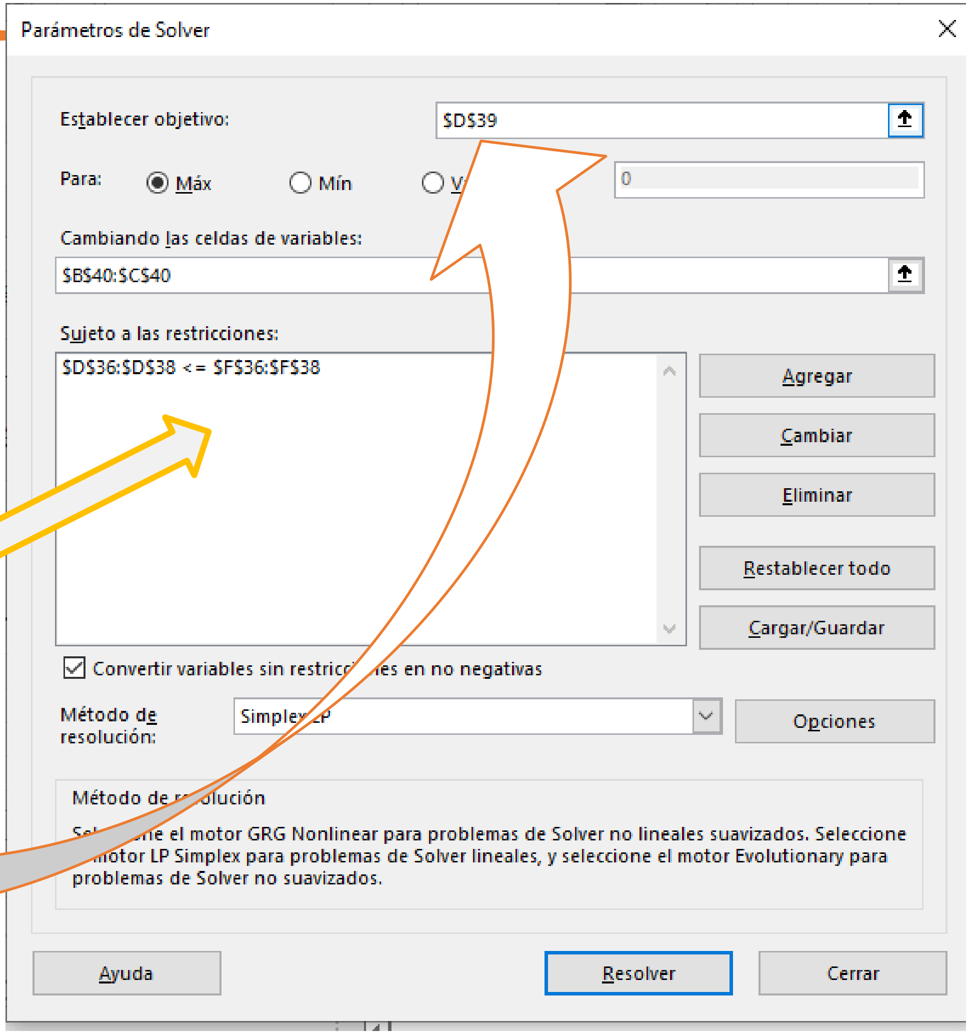
Datos necesarios para un modelo de programación lineal que maneja la asignación de recursos a actividades

Recursos	Consumo de recursos por unidad de actividad Actividad				Cantidad de recursos disponibles
	1	2	…	n	
1	a11	a12	…	a1n	b1
2	a21	a22	…	a2n	b2
.					.
.	…	…		…	.
.					.
m	am1	am2		amn	bm
Contribución a Z por unidad de actividad	c1	c2		cn	

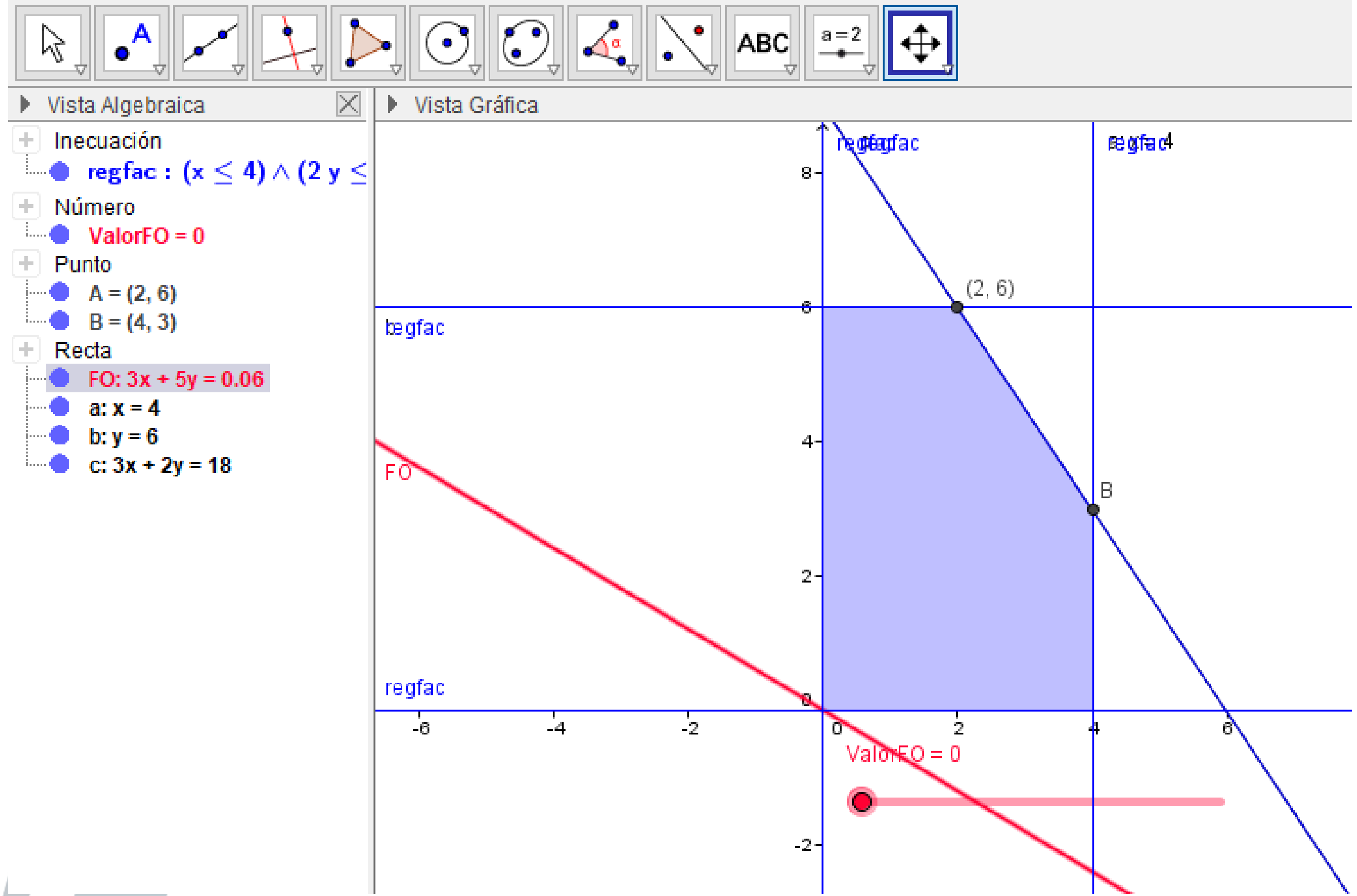
Datos necesarios para un modelo de programación lineal que maneja la asignación de recursos a actividades

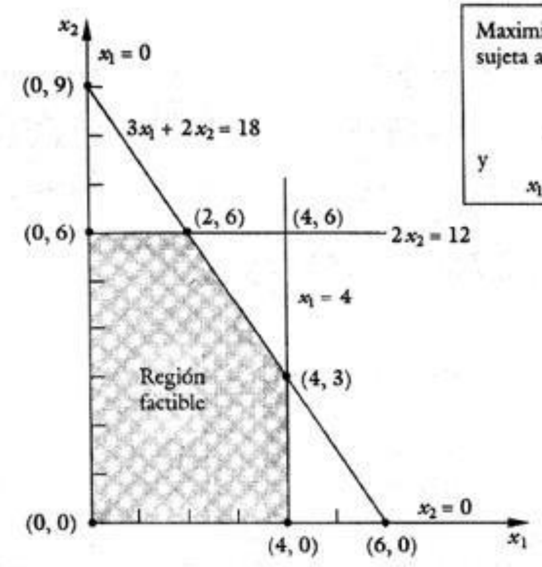
Solución con hoja de cálculo, herramienta *Solver*

	A	B	C	D	E	F
32						
33	Problema de mezcla de productos					
34		Horas usadas por unidad productiva				Cantidad de
35		Puertas	Ventanas	Totales		recursos disponibles
36	Planta 1	1	0	=B36*B40+C36*C40		
37	Planta 2	0	2	12	<=	12
38	Planta 3	3	2	18	<=	18
39	Ganancia por unidad ($ miles)	3	5	36		
40	Solución	2	6			



Solución con GeoGebra / PHPSimplex





Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeta a

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

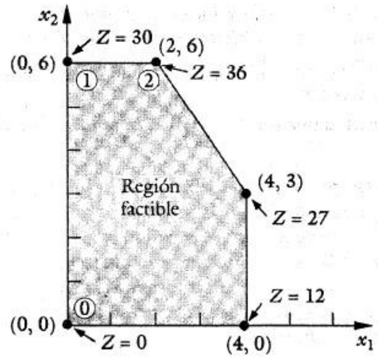
y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Conceptos de solución importantes

El primer concepto de solución se basa directamente en la relación entre las soluciones óptimas y las soluciones factibles en los vértices dadas al final de la sección 3.2.

URA 4.2
a gráfica muestra la secncia de soluciones FEV , ①, ②) examinadas por método símplex para el oblema de la Wyndor ss Co. La solución óptima 6) se encuentra después examinar tres soluciones.



Método Simplex

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

- Pasamos de un método geométrico a un método algebraico
- El procedimiento algebraico se basa en la solución de sistemas de ecuaciones.
- Pasos:
  1. Pasamos las restricciones funcionales de desigualdad en restricciones de igualdad equivalentes excepto las de no negatividad. Esta conversión se logra con la introducción de variables de ***holgura***
  2. ***Igualamos la función objetivo a cero***

$Z=3x1+5x2$ $\quad$ $-3x1-5x2+Z=0$

Por ejemplo:

$x1 <= 4$

La variable de holgura para esta restricción se define como

$h1=4-x1$

$x1+h1=4$

si y solo si:

$4-x1=h1>=0$

Por tanto

$x1>=0$

$x1+h1=4$ y $h1>=0$

3. Escribimos la tabla inicial **Simplex** considerando las ***holguras.***

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

a) Forma algebraica	b) Forma tabular									
	Variable básica	Coeficinetes de:								
		Z	x1	x2	h1	h2	h3	Lado derecho		
Z -3x1 -5x2 =0	Z		-3	-5	0	0	0	0		
x1 h1 =4	h1		1	0	1	0	0	4		
2x2 h2 =12	h2		0	2	0	1	0	12	12/2	6
3x1 +2x2 h3 =18	h3		3	2	0	0	1	18	18/2	9

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2,$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2,$

sujeta a

$$\begin{aligned} &(1) \quad x_1 + x_3 = 4 \\ &(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12 \\ &(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \end{aligned}$$

y

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

4. **Encontrar la variable de decisión que entra en la base y la variable de holgura que sale de la base (la columna y fila pivote),** Determinamos la columna pivote: Coeficiente negativo que tiene mayor valor absoluto (coeficiente "más negativo") en la ecuación Z .
Se determina variable básica que sale , se elige los coeficientes de la columna pivote estrictamente positivos (>0) y se divide entre el elemento del lado derecho en el mismo renglón, se identifica el menor

b) Forma tabular									
Variable	Coeficinetes de:								
básica	Z	x1	x2	h1	h2	h3	Lado derecho		
Z		-3	-5	0	0	0	0		
h1		1	0	1	0	0	4		
h2		0	2	0	1	0	12	12/2	6
h3		3	2	0	0	1	18	18/2	9

Número pivote

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

5. **Encontrar los coeficientes de la nueva tabla**

El número pivote lo transformamos a 1 dividiendo la fila pivote entre el valor del número pivote.

Renglón pivote nuevo = Renglón pivote antiguo / pivote

Variable Básica	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado derecho
Z	1	–3	–5	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	3	2	0	0	1	18
Z	1						
x_3	0						
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_5	0						

6. A continuación hacemos ceros los restantes términos de la columna pivote, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de las otras filas incluyendo los de la función objetivo Z.

Renglón nuevo = renglón antiguo – (coeficiente en la columna pivote × renglón pivote nuevo)

en donde el *coeficiente en la columna pivote* es el número en la columna pivote correspondiente a este renglón.

7. Se repite el proceso hasta que los coeficientes de Z no sean negativos.

Para ilustrar con el ejemplo, los nuevos renglones se obtienen de la forma siguiente:

Renglón de Z:		[–3	–5	0	0	0,	0]
	–(–5)	[0	1	0	1/2	0,	6]
Renglón nuevo =		[–3	0	0	5/2	0,	30]

Renglón 1: Sin cambio porque su coeficiente en la columna pivote es cero.

Renglón 3:		[3	2	0	0	1,	18]
	–(2)	[0	1	0	1/2	0,	6]
Renglón nuevo =		[3	0	0	–1	1,	6]

Estos cambios llevan a la nueva tabla símplex que se muestra en la siguiente tabla para la iteración 1:

Variable básica	Coeficinetes de: Z	x1	x2	h1	h2	h3	Lado derecho
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30
h1	0	1	0	1	0	0	4
h2	0	0	1	0	1/2	0	6
h3	0	3	0	0	-1	1	6

Iteración 2

Variable básica	Coeficinetes de: Z	x1	x2	h1	h2	h3	Lado derecho		
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30		
h1	0	1	0	1	0	0	4	4/1	4
h2	0	0	1	0	1/2	0	6		
h3	0	3	0	0	-1	1	6	6/3	2

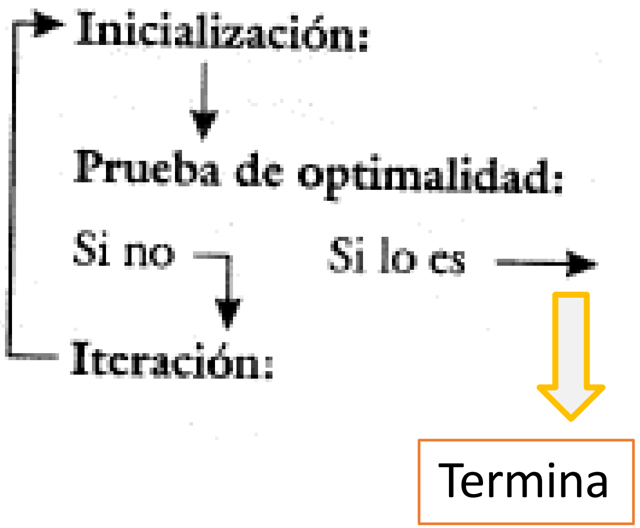


Tabla *simplex* completa para el caso Wyndor Glass Co.

Iteración	Variable básica	Ec. núm.	Coeficiente de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado derecho
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Considere el caso anterior del problema de Wyndor Glass Co. donde la función objetivo se cambie a Z=3x1+2x2.

Ejemplo de Maximización

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Función Objetivo:

$$\textbf{Maximizar } Z = f(x,y) = 3x + 2y$$

Restricciones:

$$2x + y <= 18$$

$$2x + 3y <= 42$$

$$3x + y <= 24$$

$$x, y >= 0$$

Paso 01: **Convertir las desigualdades en igualdades**

Se introduce una *variable de holgura* por cada una de las restricciones, para convertirlas en igualdades, resultando el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + h &= 18 \\ 2x + 3y + s &= 42 \\ 3x + y + d &= 24 \end{aligned}\right\}$$

h, s, d : Variables de holgura

Ejemplo de Maximización

Paso 02: **Igualar la función objetivo a cero**

$$\mathbf{Z = f(x,y) = 3x + 2y} \Rightarrow -3x - 2y + Z = 0 \quad / \quad Z - 3x - 2y = 0$$

Paso 03: **Escribir la tabla inicial simplex**

En las columnas aparecerán todas las variables del problema y, en las filas, los coeficientes de las igualdades obtenidas, una fila para cada restricción y la última fila con los coeficientes de la función objetivo:

Iteración I

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*h*	*s*	*d*	
h	2	1	1	0	0	18
s	2	3	0	1	0	42
d	3	1	0	0	1	24
Z	-3	-2	0	0	0	0

Ejemplo de Maximización

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Paso 04: **Encontrar la variable de decisión que entra en la base y la variable de holgura que sale de la base**

a. Escoger la variable de decisión que entra en la base

Nos fijamos en la **última fila**, la de los **coeficientes** de la **función objetivo** y escogemos la variable con el **coeficiente negativo mayor** (en valor absoluto).

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*h*	*s*	*d*	
h	2	1	1	0	0	18
s	2	3	0	1	0	42
d	3	1	0	0	1	24
Z	-3	-2	0	0	0	0

Columna Pivote

Ejemplo de Maximización

b. Encontrar la variable de holgura que tiene que salir de la base

Se divide **cada término** de la **última columna** (valores solución) por el término correspondiente de la **columna pivote**, siempre que estos últimos sean mayores que cero.

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución	
	x	*y*	*h*	*s*	*d*		
h	2	1	1	0	0	18	18/2 = 9
s	2	3	0	1	0	42	42/2 = 21
d	3	1	0	0	1	24	24/3 = 8
Z	-3	-2	0	0	0	0	

Número Pivote

Columna Pivote

Fila Pivote

Si hubiese algún elemento menor o igual que cero no se hace dicho cociente. En el caso de que todos los elementos fuesen menores o iguales a cero, entonces tendríamos una solución no acotada y no se puede seguir.

Ejemplos - Maximización

Paso 05: **Encontrar los coeficientes de la nueva tabla.**

Los nuevos coeficientes de *x* se obtienen dividiendo todos los coeficientes de la fila *d* por el número pivote, 3, que es el que hay que convertir en 1.

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
h	2	1	1	0	0	18
s	2	3	0	1	0	42
x	**3/3**	**1/3**	**0**	**0**	**1/3**	**24/3**
z	-3	-2	0	0	0	0

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
h	2	1	1	0	0	18
s	2	3	0	1	0	42
x	**1**	**1/3**	**0**	**0**	**1/3**	**8**
z	-3	-2	0	0	0	0

Ejemplos - Maximización

A continuación hacemos ceros los restantes términos de la columna pivote, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de las otras filas incluyendo los de la función objetivo Z.

Fila del pivote:

Nueva fila del pivote= (Vieja fila del pivote)

Resto de las filas:

Nueva fila= (Vieja fila) **-** (Coeficiente de la vieja fila en la columna pivote) **X** (Nueva fila del pivote)

Por ejemplo la Fila s

Vieja fila de s	2	3	0	1	0	42
	-	-	-	-	-	-
Coeficiente	2	2	2	2	2	2
	x	x	x	x	x	x
Nueva fila pivote	1	1/3	0	0	1/3	8
	=	=	=	=	=	=
Nueva fila de s	0	7/3	0	1	-2/3	26

Ejemplos - Maximización

Iteración II

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*h*	*s*	*d*	
h	0	**1/3**	1	0	-2/3	2
s	0	7/3	0	1	-2/3	26
x	1	1/3	0	0	1/3	8
Z	0	-1	0	0	1	24

Como en los elementos de la última fila hay uno negativo, **-1**, significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. Hay que repetir el proceso:

Base	**Variables de decisión**		**Variable de holgura**			**Valores solución**
	x	**y**	**h**	**s**	**d**	
h	0	1/3	1	0	-2/3	2
s	0	7/3	0	1	-2/3	26
x	1	1/3	0	0	1/3	8
z	0	-1	0	0	1	24

Ejemplos - Maximización

Repetir el procesos desde el **paso 4**:

a. Escoger la variable de decisión que entra en la base

La columna pivote es *y*, por ser la variable que corresponde al coeficiente -1

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
h	0	1/3	1	0	-2/3	2
s	0	7/3	0	1	-2/3	26
x	1	1/3	0	0	1/3	8
z	0	-1	0	0	1	24

b. Encontrar la variable de holgura que tiene que salir de la base

Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote: 2/(1/3)=6, 26 /(7/3)=78 y 8 /(1/3)=8

Ejemplos - Maximización

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
h	0	1/3	1	0	-2/3	2
s	0	7/3	0	1	-2/3	26
x	1	1/3	0	0	1/3	8
z	0	-1	0	0	1	24

Los nuevos coeficientes de *y* se obtienen dividiendo todos los coeficientes de la fila *h* por el número pivote, 1/3, que es el que hay que convertir en 1.

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
y	0	1	3	0	-2	6
s	0	7/3	0	1	-2/3	26
x	1	1/3	0	0	1/3	8
z	0	-1	0	0	1	24

Ejemplos - Maximización

A continuación hacemos **ceros** los restantes términos de la **columna pivote**.

Iteración III

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	**y**	**h**	**s**	**d**	
y	0	1	3	0	-2	6
s	0	0	-7	0	4	12
x	1	0	-1	0	1	6
z	0	0	3	0	-1	30

Como en los elementos de la última fila hay uno negativo, **-1**, significa que **no** hemos llegado todavía a la **solución óptima**. Hay que repetir el proceso, desde el **paso 4**.

Ejemplos - Maximización

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

a. Escoger la variable de decisión que entra en la base

La columna pivote es **d**, por ser la variable que corresponde al coeficiente **-1**.

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
y	0	1	3	0	-2	6
s	0	0	-7	0	4	12
x	1	0	-1	0	1	6
z	0	0	3	0	-1	30

b. Encontrar la variable de holgura que tiene que salir de la base

Para calcular la fila pivote, dividimos los términos de **la última columna** entre los términos correspondientes de la nueva **columna pivote**:
6/(-2) =-3 , 12/4 =3, y 6/1 =6

Ejemplos - Maximización

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
y	0	1	3	0	-2	6
s	0	0	-7	0	4	12
x	1	0	-1	0	1	6
z	0	0	3	0	-1	30

Los nuevos coeficientes de *d* se obtienen dividiendo todos los coeficientes de la fila *s* por el número pivote, 4, que es el que hay que convertir en 1.

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
y	0	1	3	0	-2	6
d	0	0	-7/4	0	1	3
x	1	0	-1	0	1	6
z	0	0	3	0	-1	30

Ejemplos - Maximización

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

A continuación hacemos **ceros** los restantes términos de la **columna pivote**.

Iteración IV

Base	Variables de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
y	0	1	-1/2	0	0	**12**
d	0	0	-7/4	0	**1**	3
x	1	0	-3/4	0	0	**3**
z	0	0	5/4	0	0	**33**

Como todos los coeficientes de la fila de la función objetivo son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

Los solución óptima viene dada por

x= 3 **y= 12** **z= 33**

Actividad

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

- Desarrollar los ejercicios vistos en clase de manera individual, y subir al SIA en la actividad de nuestra quinta sesión.

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Gracias

Néstor Muñoz
Docente
nestor.munoz@unc.edu.pe
941434300