INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA II

PRÁCTICA

02 PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO - Branch and bound

Ingeniería Ingeniería de Sistemas

Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

LOGRO DE LA SESIÓN

Al culminar la sesión, el estudiante aplica el método de ramificación y acotamiento en la solución de problemas de programación lineal entera.

SABERES PREVIOS

- Ramificación
- Acotamiento

Repaso:
Metodología de resolución:
Algoritmo branch and bound

- Un primer paso para la resolución de un modelo de programación lineal entera es resolver, mediante el método símplex, el problema lineal asociado. Se trata de un problema lineal con la misma función objetivo y restricciones que el modelo original, pero al que se han relajado la condición de que todas o algunas de las variables de decisión sean enteras. Si la solución así obtenida es entera, habremos encontrado la solución del modelo de programación lineal entera. En caso contrario (el más frecuente), la solución así obtenida es una primera aproximación a la solución del modelo.

Metodología de resolución: Algoritmo branch and bound

- Resulta tentador redondear los valores no enteros a enteros en la solución obtenida para el problema lineal asociado. Esto sólo se puede hacer si los valores de las variables son tan grandes que el redondeo no afecta excesivamente al resultado final, pero se debe tener cuidado al hacerlo pues se corren dos riesgos:

1. Es posible que la solución redondeada no sea factible.
2. Aún siendo factible, no existe ninguna de garantía que la solución sea óptima.

Pasos para su solución:

1. Resolver el problema lineal asociado al problema entero: misma función objetivo y restricciones, pero variables no enteras.
2. Si la solución obtenida es entera: finalizar. El óptimo será aquella solución entera con mejor valor de la función objetivo.

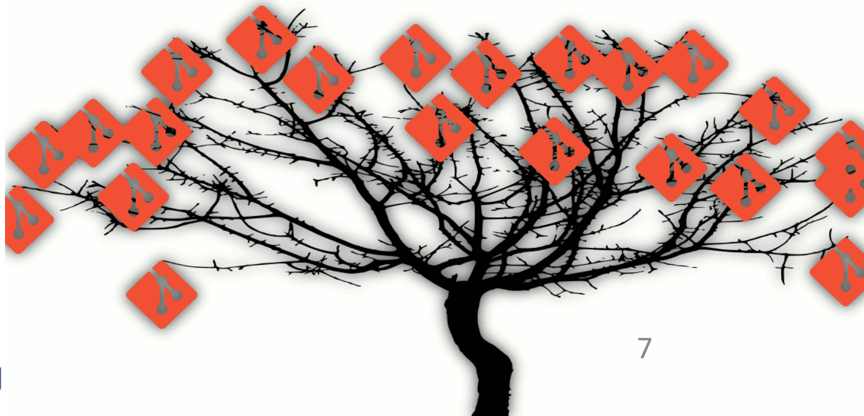
   Si no, ir a paso 3.
3. Escoger una variable básica cuyo valor en la solución x_{Bi} no sea entero.
4. Ramificación: resolver dos nuevos problemas lineales.
   - Al primero se le añade la restricción: $x_i \leq E(x_{Bi})$ (redondeo por defecto).
   - Al segundo añadiremos la restricción: $x_i \geq E(x_{Bi}) + 1$ (redondeo por exceso).

5. Acotación: de los dos problemas, escoger aquel que dé como resultado un valor mejor de la función objetivo.
6. Ir a paso 2.

Método de ramificación y acotamiento

- En primer lugar se escoge una variable del problema cuya solución no sea entera, dejando de lado las de holgura, y se comienza la ramificación agregando restricciones contrarias al intervalo de valores no deseados.

- Cada ramificación significa una restricción extra que se va agregando al problema, independiente a la otra rama.



Método de ramificación y acotamiento

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Ejercicio 1

Max $Z=60X1+50X2$

s.a.

$2X1+4X2\leq 80$

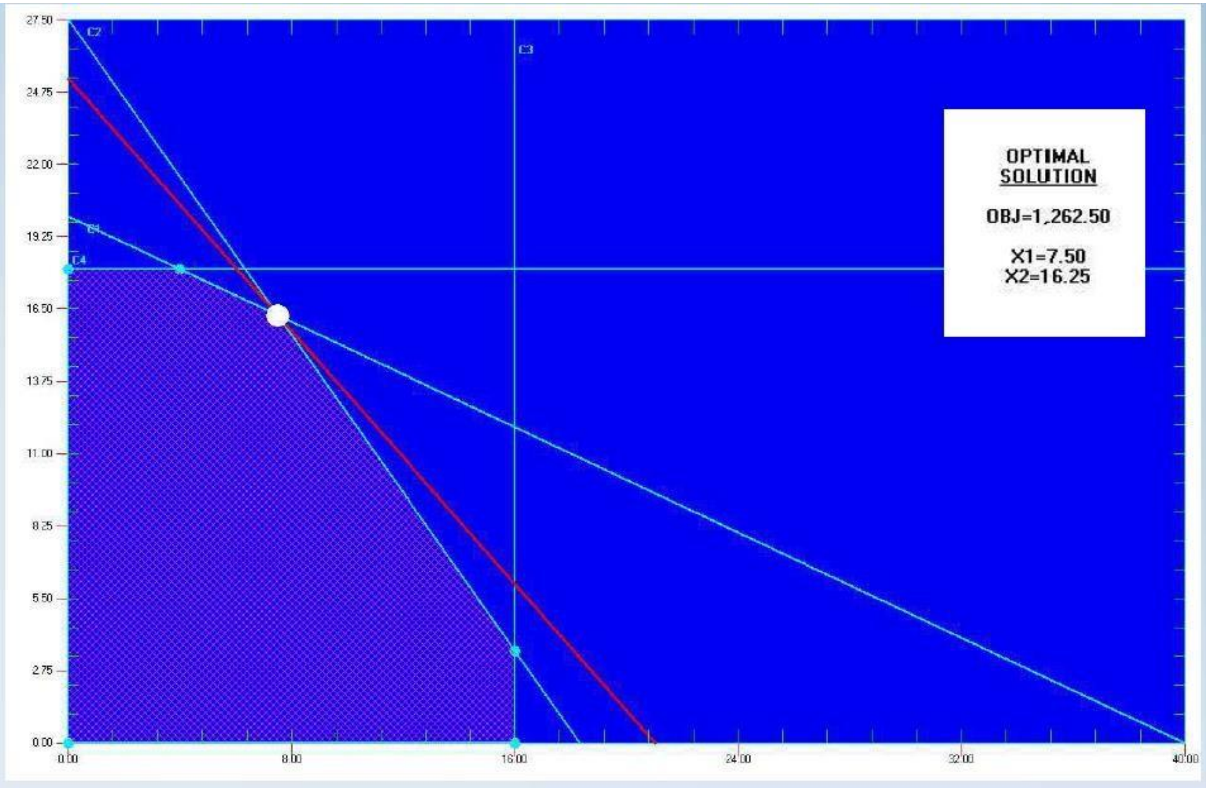
$3X1+2X2\leq 55$

$X1\leq 16$

$X2\leq 18$

X1, X2 valores enteros.

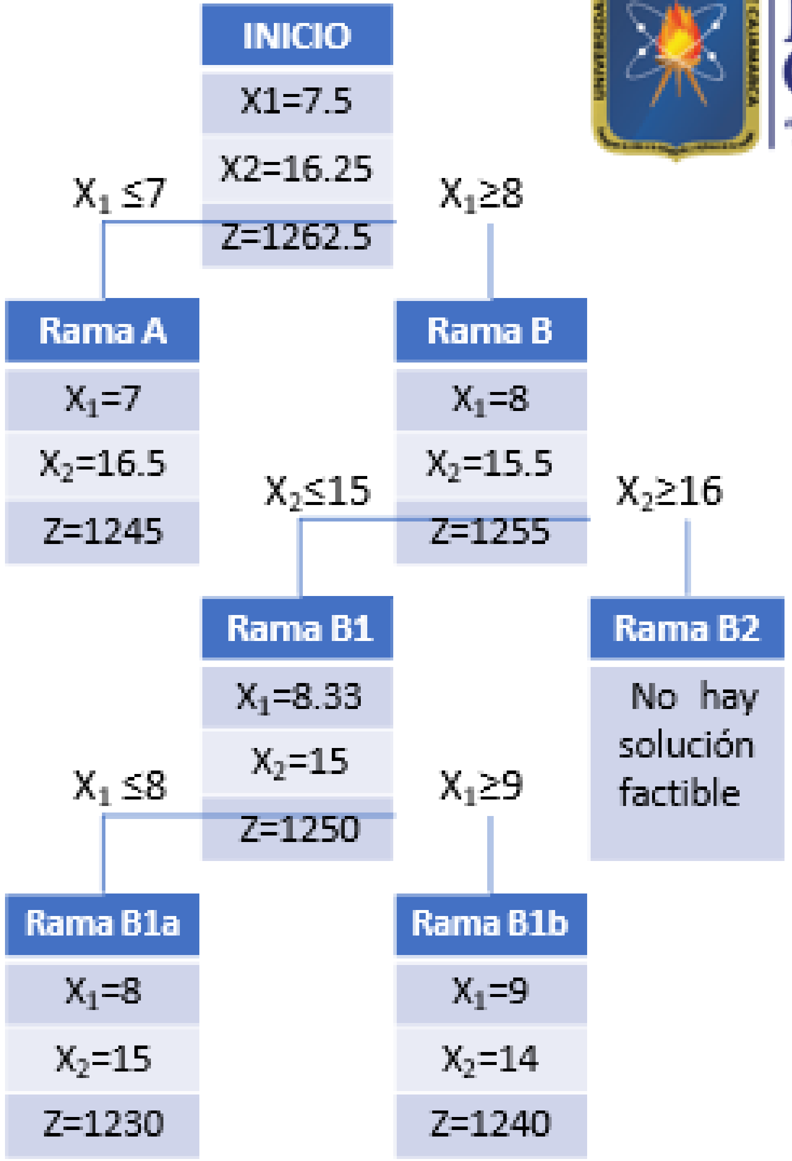
Se parte de la solución óptima.



Método de Ramificación y acotamiento-Maximización

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

- Se elige arbitrariamente una variable de solución fraccionaria. Elegimos X_1=7.5.
- Intervalo no deseado: $(7 \leq X_1 \leq 8)$
- Agregamos ramas, por la izquierda $X_1 \leq 7$ y por la derecha $X_1 \geq 8$.
- Como es Maximizar, se elige la rama que presenta el mayor valor Z para seguir ramificando hasta encontrar la solución óptima entera.



Método de Ramificación y acotamiento

- Rama A:

Max $Z=60X_1+50X_2$

s.a.

$2X_1+4X_2\leq 80$

$3X_1+2X_2\leq 55$

$X_1\leq 16$

$X_2\leq 18$

$X_1\leq 7$

Se eliminan las restricciones redundantes.

- Rama B:

Max $Z=60X_1+50X_2$

s.a.

$2X_1+4X_2\leq 80$

$3X_1+2X_2\leq 55$

$X_1\leq 16$

$X_2\leq 18$

$X_1\geq 8$

No hay restricciones redundantes.

Método de Ramificacióny acotamiento

- Como X_1 es entera y la variable X_2 es fraccionaria, se elige X_2 =15.5 . Intervalo de valores no deseados: ($15 \leq X_2 \leq 16$).

Rama B1: Max $Z=60X_1+50X_2$	Rama B2: Max $Z=60X_1+50X_2$
s.a.	s.a.
$2X_1+4X_2 \leq 80$	$2X_1+4X_2 \leq 80$
$3X_1+2X_2 \leq 55$	$3X_1+2X_2 \leq 55$
$X_1 \leq 16$	$X_1 \leq 16$
$\cancel{X_2 \leq 18}$	$X_2 \leq 18$
$X_1 \geq 8$	$X_1 \geq 8$
$X_2 \leq 15$	$X_2 \geq 16$

Método de Ramificacióny acotamiento

- Como X_2 es entera y la variable X_1 es fraccionaria, se elige $X_1 = 8.33$. Intervalo de valores no deseados: $(8 \le X_1 \le 9)$.

Rama B1a: Max $Z=60X_1+50X_2$

s.a.

$2X_1+4X_2 \le 80$

$3X_1+2X_2 \le 55$

$X_1 \le 16$

$X_1 \ge 8$

$X_2 \le 15$

$X_1 \le 8$

Rama B1b: Max $Z=60X_1+50X_2$

s.a.

$2X_1+4X_2 \le 80$

$3X_1+2X_2 \le 55$

$X_1 \le 16$

$X_1 \ge 8$

$X_2 \le 15$

$X_1 \ge 9$

Método de Ramificacióny acotamiento

- La decisión final depende del valor de Z:

Solución

$X_1=9$

$X_2=14$

$Z^*=1240.$

El punto (9,14) tiene los valores enteros más próximos que dan el mejor valor a nuestro modelo de maximización.

Método de Ramificacióny acotamiento

Ejercicio 2

Max $Z = 3X_1 + 4X_2$

s.a.

$2X_1 + X_2 <= 6$

$3X_1 + 4X_2 <= 9$

X_1 y $X_2 >= 0$ y enteras

PLANTEAMIENTO DE CASOS

Encontrar la solución al modelo de programación entera

$[MAX]\ z = 10x + y$

$$x + 6y \leq 50$$

$$12x + y \leq 60$$

$$x, y \geq 0, \text{ enteras}$$

Resolución de programación entera mediante programa informático

Gran parte de los paquetes informáticos que resuelven programación lineal resuelven también programación entera, usando variantes más o menos sofisticadas del algoritmo de bifurcación y acotamiento

Hay que indicar que la introducción de variables enteras aumenta considerablemente el

número de cálculos a realizar, por lo que nos podemos encontrar con limitaciones al número de variables enteras que podemos introducir en el modelo. En el caso del programa LINDO, se utilizan dos instrucciones:

INTEGER <nombre de la variable>

Mediante la instrucción INTEGER, se indica al programa que la variable designada es binaria, esto es, que sólo puede tomar los valores 0 o 1.

GIN <nombre de la variable>

Mediante la instrucción GIN, se indica al programa que la variable designada es entera positiva. Ambas instrucciones deben insertarse después de la instrucción END, que indica al programa el fin del modelo lineal considerado.

Actividad

PLANTEAMIENTO DE CASOS:

Un agricultor decide subdividir el terreno en 6 campos de la misma área, de modo que en cada campo sólo podrá plantar un tipo de cultivo, ya sea cebada o lechuga. El granjero ha calculado que según el precio mínimo garantizado por el Gobierno y después de restar todos los costes, obtendrá un beneficio neto de 1000 soles por campo de cebada y 1600 soles por campo de lechugas. La recogida de un campo de cebada necesita 80 horas de mano de obra y la de un campo de lechugas 160 horas. Durante la cosecha el granjero dispondrá de 700 horas disponibles de mano de obra. Existe además la restricción de que no podrá explotar más de 3 campos de cebada.

¿Cuántos campos de lechuga y cuántos campos de cebada debe cultivar el agricultor para maximizar su beneficio?

GRACIAS

- **Néstor Muñoz**
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe
- 941434300

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"