MATRICES

MUTIPLICACIÓN DE MATRICES

MATRIZ CUADRADAS IMPORTANTES

Una fabrica produce grabadoras de las siguientes características:

Modelo A, formado por 6 transistores y 2 parlantes

Modelo B, formado por 10 transistores y 3 parlantes

Modelo C, formado por 12 transistores y 4 parlantes

MODELO	A	B	C
TRANSISTORES	6	10	12
PARLANTES	2	3	4

Se ha recibido pedidos en los meses de enero y febrero de los modelos A, B Y C, según las siguientes cantidades

MODELO	enero	febrero
A	20	30
B	10	12
C	5	0

¿Qué cantidad de transistores y parlantes se usaron en cada modelo según los meses?

	ENERO	FEBRERO
TRANSISTORES	6X20 + 10X10 + 12X5	6X30 + 10X12 + 12X0
PARLANTES	2X20 +3X10+4X5	2X30 +3X12 +4X0

MODELO	A	B	C
TRANSISTORES	6	10	12
PARLANTES	2	3	4

MODELO	enero	febrero
A	20	30
B	10	12
C	5	0

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 10 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$AxB = \begin{pmatrix} 6x20 + 10x10 + 12x5 & 6x30 + 10x12 + 12x0 \\ 2x20 + 3x10 + 4x5 & 2x30 + 3x12 + 4x0 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$AxB = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{2x2}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

DEFINICION:

Sean las matrices $A=(a_{ij})_{mxp}$ $B=(b_{ij})_{pxn}$ entonces el producto AxB es la matriz $C = AxB = (c_{ij})_{mxn}$ donde cada elemento c_{ij} es la suma de los productos formados al Multiplicar cada elemento de la i-ésima fila de A por los elementos de la j-ésima columna de B, es decir:

$$Cij = a_{i\,j}b_{ij} + a_{i2}b_{2\,j} + \ldots a_{i\,p}b_{pj}$$

$$Cij = \sum_{p=1}^{n} a_{i\,p}b_{pj} \;,\; i = 1,2,3,\ldots m \;\; y \;\; j = 1,2,3,\ldots n$$

El producto de dos matrices esta definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Si sucede esto se dice que A es conformable con B para la multiplicación. Esto no implica necesariamente que B sea conformable con A para la multiplicación.

PROPIEDADES

Si A, B y C son conformables para la multiplicación y la adición, entonces se cumple

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$AB \neq BA$$

$$AB = 0 ... no ... implica ... A = 0, B = 0$$

$$AB = AC ... no ... implica ... B = C$$

$$\forall A \in \mathrm{M}^n, \exists I \in \mathrm{M}^n / AI = IA = A$$

Demostrar $A(B+C) = AB + AC$

Ejercicio 01: Si E=2ABC+3C, determinar $S = e_{11} + 2e_{23} + e_{32} - 3e_{12}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 02: Determinar todas las matrices conmutables con la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICES CUADRADAS IMPORTANTES

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{1x3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}_{2x3}$ → **M . Rectangulares**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$

→ **M. Cuadradas**

$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{3x3}$

TRaza = 1 + 0+ 4 = 5

MATRICES CUADRADAS IMPORTANTES

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Es una matriz cuadrada donde sus elementos situados debajo de la diagonal principal son todos ceros es decir si $a_{ij} = 0, \forall i > j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Es una matriz cuadrada donde sus elementos situados encima de la diagonal principal son todos ceros es decir si $a_{ij} = 0, \forall i < j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRICES CUADRADAS IMPORTANTES

MATRIZ DIAGONAL

Es una matriz cuadrada en la que todos sus elementos son iguales a cero, excepto los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

Es una matriz diagonal en la cual los elementos de la diagonal principal son todos iguales a un escalar. $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots a_{nn} = k$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRICES CUADRADAS IMPORTANTES

MATRIZ UNIDAD O IDENTIDAD

Es una matriz escalar donde el escalar K es igual a la unidad, se representa por I,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDEMPOTENTE

Una matriz A es idempotente si $A^2 = A$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICES CUADRADAS IMPORTANTES

MATRIZ INVOLUTIVA

Una matriz A es involutiva si: $A^2 = I$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 \quad = I$$

MATRIZ PERIODICA

Sea la matriz A, si para un numero entero positivo P, se dice que A es una matriz periódica de periodo P, si: $A^{P+1} = A$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^1 = A$

$A^2 = I$

$A^3 = A$

$P = 2$

MATRICES CUADRADAS IMPORTANTES

MATRIZ NILPOTENTE

Si A es una matriz cuadrada se dice que es nilpotente de índice P, si se cumple: $A^P = 0, P \in Z^+$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

A^2

A^3

$A^3 = 0$

MATRIZ COMPLEJA

Una matriz es compleja si al menos un elemento es un número complejo

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 3 & 3+i \\ 1+i & 2 & 5 \\ i & 1-i & -i \end{pmatrix}$$

MATRICES CUADRADAS IMPORTANTES

MATRIZ CONJUGADA

Es aquella matriz cuyos elementos son los conjugados de la matriz compleja, se denota por

$$A=\begin{pmatrix} 2-i & 3 & 3+i \\ 1+i & 2 & 5 \\ i & 1-i & -i \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} 2+i & 3 & 3-i \\ 1-i & 2 & 5 \\ -i & 1+i & i \end{pmatrix}$$

Propiedades

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{kA} = k\,\overline{A}$$

$$\overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B}$$

$$\overline{A.B} = \overline{A}.\overline{B}$$

Ejercicio 01: demostrar que si A_{nxn} B_{nxn}

Son matrices idempotentes y permutables, entonces AB es idempotente

MATRIZ TRANSPUESTA O TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -1/2 & 3 & 6 \\ -2/5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & -2/5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA O TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

DEFINICION:

Dada una matriz A, de orden mxn, se denomina matriz transpuesta de A, A la matriz de orden nxm cuyos elementos se obtienen intercambiando las filas por las columnas, denotada por: $A^t = A^|$

$$A = (a_{ij})_{mxn} \Rightarrow A^t = (a_{ij})_{nxm}$$

PROPIEDADES:

Sean las matrices A y B con sus respectivas transpuestas, conformables para la adición y multiplicación y λ un escalar cualquiera, se cumple:

$$(A^t)^t = A$$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz cuadrada A es simétrica si: $A = A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix} \qquad A^t = A$$

PROPOSICIÓN

Si A es una matriz cuadrada de orden nxn entonces la matriz $A + A^t$ es simétrica.

MATRIZ ANTISIMÉTRICA O HEMISIMETRICA

Si A es una matriz cuadrada decimos que A es antisimétrica si $A = -A^t$

En una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal deben ser ceros.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad -A^t = A$$

PROPOSICIÓN

Si A es una matriz cuadrada de orden n la matriz $A - A^t$ Es antisimetrica.

PROPOSICIÓN

Toda matriz cuadrada A, se puede descomponer en la suma de una matriz simétrica y otra antisimetrica. Es decir.

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

MATRIZ HERMITIANA O HERMETICA

Una matriz A compleja es hermética si se cumple $(\overline{A^t}) = (\overline{A})^t = A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 4i \\ 1+i & 0 & 2+3i \\ -4i & 2-3i & 1 \end{pmatrix} \qquad (\overline{A})^t = A$$

PROPOSICIÓN

Si A es una matriz cuadrada de orden n, la matriz $A + \overline{A}^t$ es hermitiana.

MATRIZ ANTIHERMITIANA

Una matriz A compleja es antihermitiana si se cumple $A = -(\overline{A^t}) = -(\overline{A})^t$

Los elementos de la diagonal principal son ceros o imaginarios puros o ambos.

$$A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 3-2i \\ -2-i & 0 & -1+i \\ -3-2i & 1+i & -i \end{pmatrix} \qquad -(\overline{A})^t = A$$

PROPOSICIÓN

Si A es una matriz cuadrada de orden n, la matriz $A - \overline{A}^t$ es simétrica.

PROPOSICIÓN

Una matriz A puede ser expresada como la suma de una matriz hermitiana y otra antihermitiana.

$$A = \frac{1}{2}(A + \overline{A}^t) + \frac{1}{2}(A - \overline{A}^t)$$