INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA I

El problema del transporte
Métodos de solución.

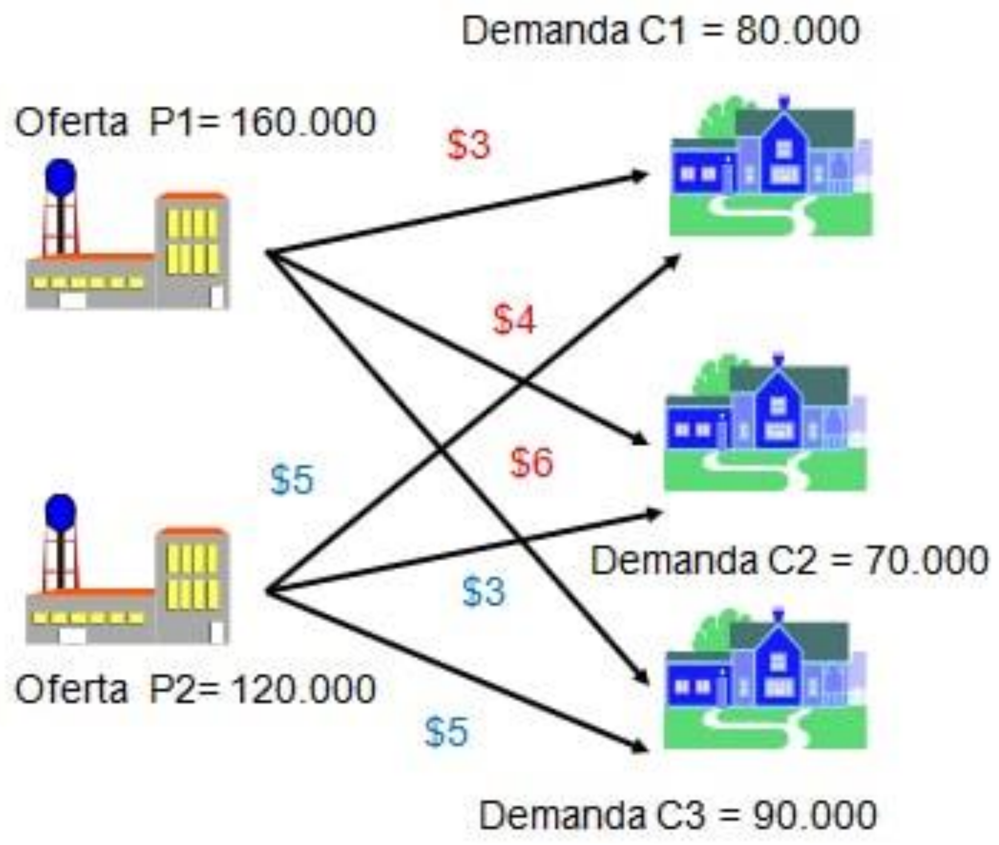
Ingeniería de Sistemas
Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto

LOGRO DE LA SESIÓN

- Al término de la sesión, el estudiante analiza ***modelo de transporte*** y sus variantes, resuelve ejercicios en equipos de trabajo de manera clara y ordenada.

Modelo de transporte

- El modelo de transporte es una clase especial de programación lineal que tiene que ver con transportar un artículo desde sus **fuentes** (es decir, fábricas) hasta sus **destinos** (es decir, bodegas).
- ***El objetivo*** es determinar el programa de transporte que minimice el costo total del transporte y que al mismo tiempo satisfaga los límites de la ***oferta y la demanda***



El algoritmo de transporte

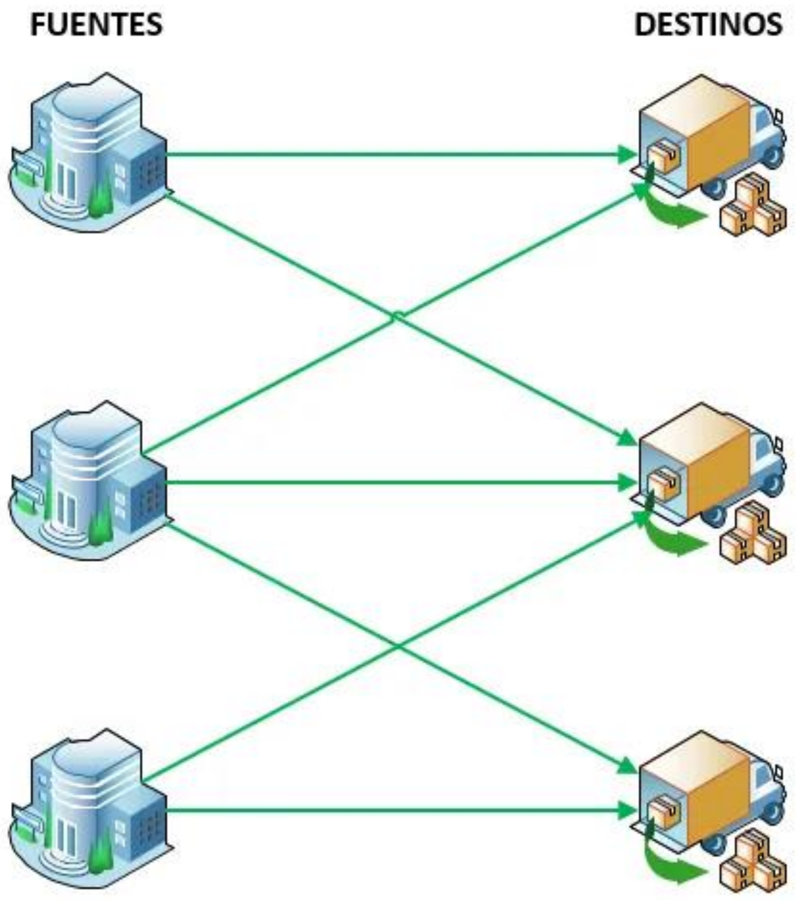
La compañía SunRay Transport transporta grano desde tres silos hasta cuatro molinos.

La oferta (en camionadas) y la demanda (también en camionadas) se resume en el modelo de transporte de la siguiente tabla, junto con los costos unitarios de transporte por camionada en las distintas rutas. Los costos unitarios de transporte, *cij* (que se ven en la esquina superior derecha o "esquina noreste" de cada tabla), están en cientos de $.

		Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo	1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
Silo	2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	**25**
Silo	3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demanda		**5**	**15**	**15**	**15**	

El algoritmo de transporte

El algoritmo especial de transporte fue desarrollado por primera vez cuando la norma eran los cálculos a mano, y se necesitaba soluciones “con método abreviado”.
Hoy contamos con poderosos programas de cómputo que pueden resolver un modelo de transporte de cualquier tamaño en forma de programación lineal.



Determinación de la solución de inicio

Un modelo general de transporte con m fuentes y n destinos tiene $m+ n$ ecuaciones de restricción, una para cada fuente y cada destino Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta =suma de la demanda), una de esas ecuaciones es redundante. Entonces, el modelo tiene $m + n$-1 ecuaciones independientes de restricción, lo que quiere decir que la solución básica de inicio consiste en $m + n$- variables básicas.
La estructura especial del modelo de transporte permite asegurar que haya una solución básica no artificial de inicio, obtenida con uno de los tres métodos siguientes:

1. Método de la esquina noroeste (superior, izquierda).
2. Método del costo mínimo.
3. Método de aproximación de Vogel.

Método de la esquina noroeste

El método comienza en la celda (ruta) de la esquina noroeste, o superior izquierda.

Paso 1. Asignar todo lo más que se pueda a la celda seleccionada y ajustar las cantidades
asociadas de oferta y demanda restando la cantidad asignada.

Paso 2. Salir del renglón o la columna cuando se alcance oferta o demanda cero, y tacharlo, para indicar que no se pueden hacer más asignaciones a ese renglón o columna.
Si un renglón y una columna dan cero al mismo tiempo, *tachar sólo uno* (el renglón o la columna) y dejar una oferta (demanda) cero en el renglón (columna) que no se tachó.

Paso 3. Si queda *exactamente un* renglón o columna sin tachar, detenerse. En caso contrario, avanzar a la celda de la derecha si se acaba de tachar una columna, o a la de abajo si se tachó un renglón. Seguir con el paso 1.

	1	2	3	4	Oferta
1	10 **5**	2 **10**	20	11	**15**
2	12	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
3	4	14	16	18 **10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

La solución básica de inicio es la siguiente:

$x11 = 5$, $x12 = 10$
$x22 = 5$, $x23 = 15$, $x24 = 5$
$x34 = 10$

El costo del programa correspondiente es
$z = 5 * 10 + 10 * 2 + 5 * 7 + 15 * 9 + 5 * 20 + 10 * 18 = \$520$

Método del costo mínimo

Este método determina una mejor solución de inicio, porque se concentra en las rutas menos costosas. Se inicia asignando todo lo posible a la celda que tenga el mínimo costo unitario (los empates se rompen en forma arbitraria). A continuación, el renglón o la columna ya satisfechos se tacha, y las cantidades de oferta y demanda se ajustan en consecuencia. Si se satisfacen en forma simultánea un renglón y una columna al mismo tiempo, *sólo se tacha uno* de los dos, igual que en el método de la esquina noroeste. A continuación se busca la celda no tachada con el costo unitario mínimo y se repite el proceso hasta que queda sin tachar exactamente un renglón o una columna.

		Molino			
	1	2	3	4	Oferta
1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
Silo 2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	**25**
3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

	1	2	3	4	Oferta
1	10	2 **15**	20	11 **0**	**15**
2	12	7	9 **15**	20 **10**	**25**
3	4 **5**	14	16	18 **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Método del costo mínimo

La celda (1, 2) tiene el costo unitario mínimo de toda la tabla (= \$2). Lo más que se puede transportar por (1, 2) es x_{12} =15 camionadas, y en este caso se satisfacen al mismo tiempo el renglón 1 y la columna 2. Se tacha en forma arbitraria la columna 2 y se ajusta la oferta del renglón 1 a cero.

2. La celda (3, 1) tiene el mínimo costo unitario sin tachar (= \$4). Se asigna x_{31}= 5, se tacha la columna 1 porque quedó satisfecha y se ajusta la demanda del renglón 3 a 10 – 5= 5 camionadas.

3. Al continuar de este modo, se asignan en forma sucesiva 15 camionadas a la celda (2, 3), 0 camionadas a la celda (1, 4), 5 a la celda (3, 4) y 10 a la (2, 4).

El valor objetivo asociado es:

$$z = 15 * 2 + 0 * 11 + 15 * 9 + 10 * 20 + 5 * 4 + 5 * 18 = \$475$$

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
Silo 2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	**25**
Silo 3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

	1	2	3	4	Oferta
1	10	2 **15**	20	11 **0**	**15**
2	12	7	9 **15**	20 **10**	**25**
3	4 **5**	14	16	18 **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Método de aproximación de Vogel

Es una versión mejorada del método del costo mínimo, que en general produce mejores soluciones de inicio.

Paso 1. Determinar para cada renglón (columna) una medida de penalización restando el elemento de costo unitario *mínimo* en el renglón (columna) del elemento con costo unitario *siguiente al mínimo* del mismo renglón (columna).

	1	2	3	4		Penalización de renglón
1	10	2	20	11	**15**	10 − 2 = 8
2	12	7	9	20	**25**	9 − 7 = 2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	14 − 4 = 10
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización de columna	10 − 4 = 6	7 − 2 = 5	16 − 9 = 7	18 − 11 = 7		

Método de aproximación de Vogel

Paso 2. Identificar el renglón o columna con la mayor penalización. Romper los empates en forma arbitraria. Asignar todo lo posible a la variable que tenga el mínimo costo unitario del renglón o columna seleccionado. Ajustar la oferta y la demanda y tachar el renglón *o* la columna ya satisfechos. Si se satisfacen un renglón y una columna en forma simultánea, sólo se tacha uno de los dos y al que queda se le asigna oferta o demanda cero.

	Molino 1	2	3	4	Oferta
Silo 1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	**25**
3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Método de aproximación de Vogel

	1	2	3	4		Penalización de renglón
1	10	2	20	11	**15**	9
2	12	7	9	20	**25**	2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	2
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización de columna	—	5	7	7		

Paso 3.

a) Si queda sin tachar exactamente un reglón o columna con cero oferta o demanda, detenerse.

b) Si queda sin tachar un renglón (columna) con oferta (demanda) *positiva*, determinar las variables básicas en el renglón (columna) con el método de costo mínimo. Detenerse.

c) Si todos los renglones y columnas que no se tacharon tienen cero oferta y demanda (restante), determinar las variables básicas *cero* por el método del costo mínimo. Detenerse.

d) En cualquier otro caso, seguir en el paso 1.

Método de aproximación de Vogel

	1	2	3	4		Penalización de renglón
1	10	2	20	11	**15**	9
2	12	7	9	20	**25**	2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	2
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización de columna	—	5	7	7		

Como el renglón 3 tiene la máxima penalización (=10) y la celda (3, 1) tiene el costo unitario mínimo de ese renglón, se asigna la cantidad 5 a x_{31}. Queda satisfecha ahora la columna 1 y se debe tachar. A continuación se vuelven a calcular nuevas penalizaciones, como se ve en la tabla.

En la tabla se ve que el renglón 1 tiene la penalización máxima (=9). En consecuencia, se asigna la máxima cantidad posible a la celda (1, 2), con lo que se obtiene x_{12} =15, y al mismo tiempo se satisfacen tanto el renglón 1 como la columna 2. En forma arbitraria se tacha la columna 2 y se ajusta a cero la oferta en el renglón 1.

Al continuar en la misma forma, el renglón 2 produce la penalización máxima (=11) y se asigna x_{23} =15, con lo que se tacha la columna 3 y quedan 10 unidades en el renglón 2. Sólo queda la columna 4, y tiene 15 unidades de oferta positiva. Al aplicar el método del costo mínimo a esa columna, se asignan en forma sucesiva $x_{14} = 0$, $x_{34} = 5$ y $x_{24} = 10$.

El valor objetivo asociado a esta solución es:

$$z = 15 * 2 + 0 * 11 + 15 * 9 + 10 * 20 + 5 * 4 + 5 * 18 = \$475$$

Sucede que esta solución tiene el mismo valor objetivo que la obtenida con el método del costo mínimo. En general, el método de Vogel obtiene mejor solución de inicio.

Actividad:

- Resolver los siguientes ejercicio utilizando los métodos del modelo de transporte

Una empresa energética colombiana dispone de **cuatro plantas** eléctricas para satisfacer la **demanda diaria** en **cuatro ciudades**: **Cali**, **Bogotá**, **Medellín** y **Barranquilla**. Las plantas 1, 2, 3 y 4 pueden **satisfacer** 80, 30, 60 y 45 millones de Kw al día respectivamente. Las **necesidades** de las ciudades de Cali, Bogotá, Medellín y Barranquilla son de 70, 40, 70 y 35 millones de Kw al día, respectivamente. Los costos asociados al envío de suministro energético por cada millón de Kw entre cada planta y cada ciudad son los registrados en la siguiente tabla.

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla
Planta 1	5	2	7	3
Planta 2	3	6	6	1
Planta 3	6	1	2	4
Planta 4	4	3	6	6

Gracias

- Néstor Muñoz
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe

941434300