Definición intuitiva de límite

Si al aproximar x lo suficientemente cerca de un número a (sin ser a) tanto del lado izquierdo como del derecho, $f(x)$ se aproxima a un número L, entonces el límite cuando x tiende al número a es L. Esto lo escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Donde la notación $x \to a$ se lee "x tiende a a", para decir que: "tiende a a por la izquierda" se utiliza $x \to a^-$, para decir que: "x tiende a a por la derecha" utilizamos $x \to a^+$, de tal forma que:

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Es decir, si los límites laterales existen y tienden a un mismo número L entonces el límite cuando tiende al número a es L. Para que el límite exista no se necesita que la función esté definida para el número a, basta que esté definida para valores muy cercanos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el límite cuando x tiende a 3 de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

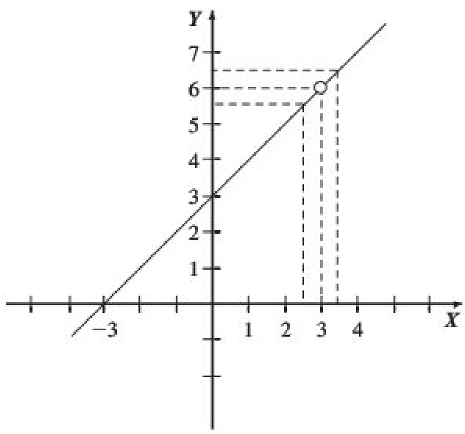
Solución

La función no está definida para $x = 3$, sin embargo, podemos evaluar la función en valores muy cercanos por la izquierda y por la derecha. Por otro lado graficaremos la función utilizando la simplificación:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$$

es decir, graficamos la recta $f(x) = x + 3$ con la restricción $x \neq 3$ donde se formará un hueco.

x	f(x)
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
2.9999	5.9999
3.0001	6.0001
3.001	6.001
3.01	6.01
3.1	6.1



Se observa que para valores de x muy cercanos a 3 por la izquierda (2.9, 2.99, 2.999, 2.9999), $f(x)$ tiende a 6, lo mismo pasa para valores cercanos por la derecha (3.0001, 3.001, 3.01, 3.1), es decir:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

por tanto $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

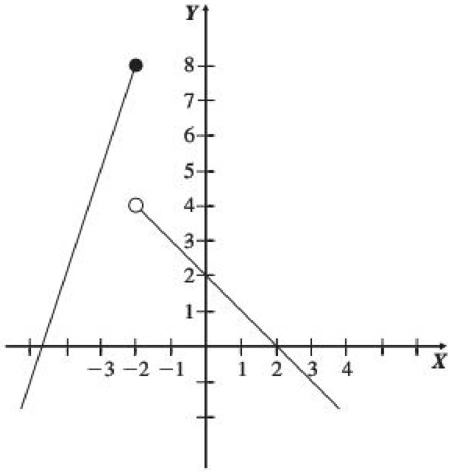
2 Si $f(x) = \begin{cases} 3x+14 & \text{si } x \le -2 \\ -x+2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ determina $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Solución

Graficamos la función y evaluamos en valores muy cercanos a 2.

x	f(x)
−2.1	7.7
−2.01	7.97
−2.001	7.997

−1.999	3.999
−1.99	3.99
−1.9	3.9



Aquí tenemos que: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 8$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$

entonces $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ por tanto $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe

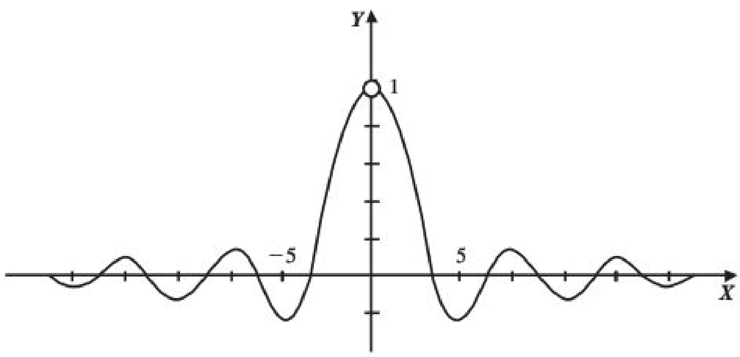
3 Determina $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

Solución

Evaluamos con valores muy cercanos a 0 por la izquierda y por la derecha. Observe que la función no está definida en $\theta = 0$ y que los valores serán tomados como radianes.

θ	$f(\theta)$
−0.005	0.999995833
−0.004	0.99999733
−0.003	0.9999985
−0.001	0.999999833

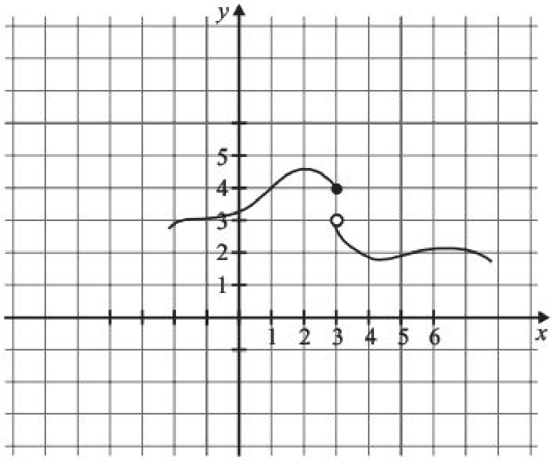
0.001	0.999999833
0.003	0.9999985
0.004	0.99999733
0.005	0.999995833



Tenemos: $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ y $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

entonces $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$ por tanto $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

4 Para la función $f(x)$ mostrada en la figura determina: *a*) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y *b*) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$



Solución

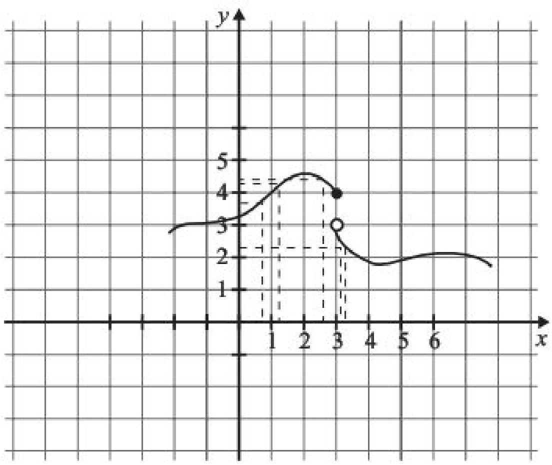
a) Calculamos los límites por la izquierda y derecha

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$

los límites laterales son iguales por tanto $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$

los límites laterales son diferentes, por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe



EJERCICIO 15

Utilizando una tabla con valores muy cercanos al valor que tiende el límite, calcula:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+1)$

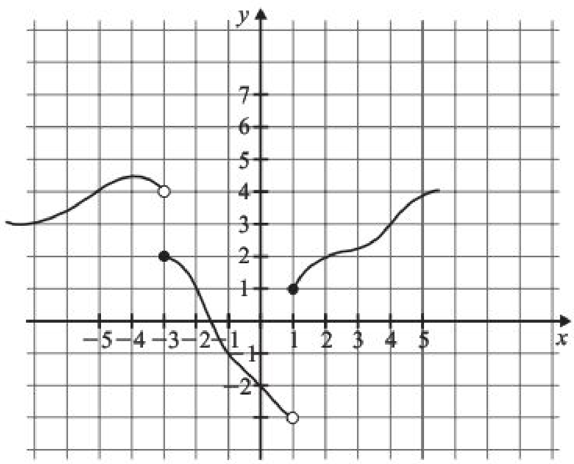
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

La gráfica de una función $f(x)$ es la siguiente:



De acuerdo con ella determina:

6. $\lim\limits_{x\to -5}f(x)$

7. $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$

8. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

9. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

10. $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

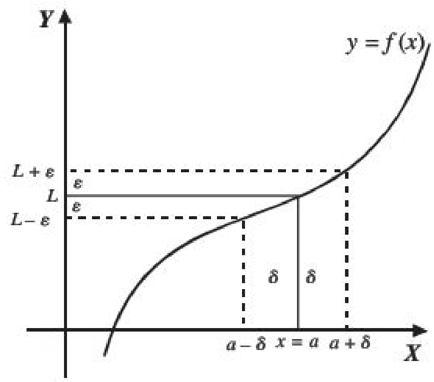
Definición formal de límite

A continuación se presenta la definición formal de límite, la cual también es conocida como definición ε-δ (epsilón-delta).

El $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta, \text{entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho de otra forma, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para cualquier número positivo elegido ε, por pequeño que sea, existe un número positivo δ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$



La definición nos dice que para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe un número $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para un número $\varepsilon > 0$ dado, tal que todo x en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con excepción posiblemente del mismo a, tendrá su imagen $f(x)$ en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Observa que para un $\delta_1 < \delta$ para el mismo ε, la imagen de un valor x en el intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ estará dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lo cual sólo cambia si tomamos un valor de epsilón distinto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$

Solución

Para un $\varepsilon > 0$, se quiere encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - 3| < \delta$ entonces:

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

de donde

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = |2|\,|x - 3| = 2|x - 3| < \varepsilon$$

entonces $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, por lo que basta escoger $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ para que $0 < |x - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Comprobación

Para $0 < |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tenemos que

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2|x - 3| < \varepsilon$$

$$|2(x - 3)| < \varepsilon$$

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

2 Demuestra que $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x+1}=-7$

Solución

Si $0<|x-(-1)|<\delta$ entonces $\left|\dfrac{x^2-5x-6}{x+1}-(-7)\right|<\varepsilon$

de donde

$$\left|\frac{x^2-5x-6}{x+1}+7\right|=\left|\frac{x^2-5x-6+7x+7}{x+1}\right|=\left|\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right|$$

$$=\left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right|=|x+1|=|x-(-1)|<\varepsilon$$

por tanto se escoge $\delta=\varepsilon$

3 Si $\lim\limits_{x\to 1}(2-3x)=-1$ y $\varepsilon=0.06$, determina el valor de δ.

Solución

Se aplica la definición y se obtiene:

Si $0<|x-1|<\delta$, entonces $|(2-3x)-(-1)|<\varepsilon$, donde $|3-3x|<\varepsilon$

$$|3|\,|1-x|<\varepsilon$$

$$|1-x|<\frac{\varepsilon}{|3|}$$

Pero $|1-x|=|x-1|$, por tanto, $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ y el valor de δ está determinado por:

$$\delta\le\frac{\varepsilon}{3}\le\frac{0.06}{3}\le 0.02$$

EJERCICIO 16

Demuestra los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+4)=10$
2. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-5)=-3$
3. $\lim\limits_{x\to -3}(5-x)=8$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{4}x+1\right)=1$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}=-3$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2x-1)=0$
7. $\lim\limits_{x\to -2}(1-3x)=7$
8. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x-7}=14$
9. $\lim\limits_{x\to -2a}(2a-3x)=8a$
10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}-3x\right)=-\dfrac{11}{2}$

Obtén el valor de δ o ε en los siguientes ejercicios:

11. Si $\lim_{x\to -1}(3x-2)=-5$ y $\varepsilon = 0.03$, encuentra el valor de δ

12. Si $\lim_{x\to -\frac{2}{5}}(5x+1)=-1$ y $\varepsilon = 0.4$, determina el valor de δ

13. Si $\lim_{x\to 0}(2x+7)=7$ y $\varepsilon = 0.05$, obtén el valor de δ

14. Si $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(3+2x)=2$ y $\varepsilon = 0.8$, ¿cuál es el valor de δ?

15. Si $\lim_{x\to 2}(3x-7)=-1$ y $\delta = 0.06$, determina el valor de ε

16. Si $\lim_{x\to 1}(2-7x)=-5$ y $\delta = 0.0014$, obtén el valor de ε

17. Si $\lim_{x\to \frac{1}{5}}(5x+2)=3$ y $\delta = 0.05$, encuentra el valor de ε

18. Si $\lim_{x\to \frac{4}{3}}(2x+1)=\frac{11}{3}$ y $\delta = 0.001$, ¿cuál es el valor de ε?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, c una constante y n número real, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ con $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

Límites por evaluación

El límite se obtiene al aplicar los teoremas anteriores y evaluar el valor al cual tiende la variable en la función propuesta, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Utiliza los teoremas anteriores y comprueba que el $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=6$

Solución

Se aplican los respectivos teoremas, se evalúa el valor de $x=2$, y se demuestra que:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x-\lim_{x\to 2}4=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+3\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}4=(2)^2+3(2)-4=6$$

2 Si $f(x)=\dfrac{3-2x}{3+2x}$, determina el valor de $\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$

Solución

Se aplican los teoremas y se sustituye el valor de x para obtener el valor buscado:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3-2x}{3+2x}=\frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3-2x)}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3+2x)}=\frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3-\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3+\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x}=\frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3-2\lim_{x\to\frac{1}{2}}x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}3+2\lim_{x\to\frac{1}{2}}x}=\frac{3-2\left(\frac{1}{2}\right)}{3+2\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Estos teoremas nos permiten hacer una sustitución de la variable independiente por el valor al que tiende el límite.

3 Si $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$, encuentra el valor de $\lim_{x\to 2}f(x)$

Solución

Se sustituye el valor de la variable independiente y se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(2)^2-4}=\frac{4}{4-4}=\frac{4}{0}$$

El límite no existe, ya que la división entre cero no está definida.

4 Obtén el $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1}$

Solución

Se sustituye $x=3$ y se realizan las operaciones:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1}=\frac{\sqrt{9-(3)^2}}{2(3)+1}=\frac{\sqrt{9-9}}{6+1}=\frac{0}{7}=0$$

EJERCICIO 17

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 2}(7-2x)$
2. $\lim_{x\to 3}\left(4x^2-2x-6\right)$
3. $\lim_{x\to -4}(6-3x)$
4. $\lim_{t\to -2}\sqrt{8+t^3}$
5. $\lim_{z\to 2}\sqrt{7z^2+14z-7}$
6. $\lim_{x\to 4}\left(x^2-8\right)(4x-8)$
7. $\lim_{x\to -3}(6-3x)\left(\frac{3}{5}x^{-1}\right)$
8. $\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$
9. $\lim_{r\to 4}\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{2}\right)\left(r^2-\frac{4}{r}\right)$
10. $\lim_{y\to 2}\sqrt{4y^2-2y}$
11. $\lim_{y\to -5}(3-y)\sqrt{y^2-9}$
12. $\lim_{z\to -1}\frac{4z+3}{2z+1}$
13. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+4}{x+5}$
14. $\lim_{z\to \frac{1}{2}}\frac{3z+1}{2z-5}$
15. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x+1}$
16. $\lim_{y\to 1}\frac{2+\sqrt{y^2+3}}{y-1}$
17. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} x+1}{2}$
18. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{2}}$
19. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-x^2}{x+1}$
20. $\lim_{x\to h}\frac{x^2+h^2}{x+h}$
21. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites indeterminados

Son aquellos cuyo resultado es de la forma $\frac{0}{0}$.

Ejemplos

Se sustituye el valor de la variable independiente en cada caso y se realizan las respectivas operaciones, para obtener:

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}=\frac{(3)^2-9}{2(3)-6}=\frac{9-9}{6-6}=\frac{0}{0}$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+1}=\frac{\sqrt{1-1}}{(1)^2-2(1)+1}=\frac{\sqrt{0}}{1-2+1}=\frac{0}{0}$
3. $\lim_{y\to 0}\frac{3y^2+5y^4}{2y^2-3y^4}=\frac{3(0)^2+5(0)^4}{2(0)^2-3(0)^4}=\frac{0}{0}$
4. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{\sqrt{(2)^2+5}-3}{2-2}=\frac{\sqrt{9}-3}{0}=\frac{0}{0}$

Se observa que los resultados son de la forma $\frac{0}{0}$, por consiguiente es necesario eliminar la indeterminación.

Una indeterminación se elimina al factorizar o racionalizar (de ser posible) la función, para después simplificarla y obtener el límite.

Casos de factorización:

a) Factor común $\quad ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$

b) Diferencia de cuadrados $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

c) Trinomio cuadrado perfecto $\quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

d) Trinomio de la forma $\quad x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

e) Suma o diferencia de cubos $\quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

f) Factorización de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

g) Factorización de $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \dfrac{a+b}{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

h) Factorización de $\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}$ $\quad \sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b} = \dfrac{a-b}{a^{4/5} + a^{3/5}b^{1/5} + a^{2/5}b^{2/5} + a^{1/5}b^{3/5} + b^{4/5}}$

i) Factorización de $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ $\quad \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \dfrac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}} + b^{\frac{n-1}{n}}}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8}$

Solución

Al sustituir x con 0 en la función, el límite se indetermina:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{3(0)^2+5(0)^4}{2(0)^2+6(0)^4-7(0)^8} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación se factorizan el numerador y el denominador con la aplicación del factor común:

$$\frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{x^2(3+5x^2)}{x^2(2+6x^2-7x^6)}$$

Al simplificar la expresión se obtiene:

$$\frac{3+5x^2}{2+6x^2-7x^6}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{3+5x^2}{2+6x^2-7x^6} = \frac{3+5(0)^2}{2+6(0)^2-7(0)^6} = \frac{3}{2}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8} = \frac{3}{2}$$

2 Determina el $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$

Solución

Se sustituye el valor de $x=-2$ en la expresión:

$$\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}=\frac{4-(-2)^2}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

Se factoriza el numerador con la aplicación de la diferencia de cuadrados:

$$4-x^2=(2+x)(2-x)$$

Se simplifica y sustituye para obtener,

$$\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(2+x)(2-x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2-x)=2-(-2)=4$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}=4$$

3 Calcula el valor del $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3}$

Solución

Al sustituir $y=1$ se verifica que existe la indeterminación:

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3}=\frac{(1)^2-2(1)+1}{(1)^2-4(1)+3}=\frac{1-2+1}{1-4+3}=\frac{0}{0}$$

Al factorizar el numerador (trinomio cuadrado perfecto) y el denominador (trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$), se obtiene:

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)^2}{(y-3)(y-1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y-3}=\frac{1-1}{1-3}=\frac{0}{-2}=0$$

Finalmente, el resultado es:

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{y^2-4y+3}=0$$

4 Determina el $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$

Solución

Al sustituir $x=2$ se observa que existe la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\frac{(2)^3-8}{2(2)^2-3(2)-2}=\frac{8-8}{8-6-2}=\frac{0}{0}$$

Se factoriza la diferencia de cubos y el trinomio de la forma ax^2+bx+c.

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4),\qquad 2x^2-3x-2=(x-2)(2x+1)$$

Se simplifica, se sustituye y se obtiene el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2x+1}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2(2)+1}=\frac{12}{5}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}=\frac{12}{5}$$

5 Calcula el valor del $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$

Solución

Se sustituye $x=2$ en la función:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\frac{(2)^2-4}{3-\sqrt{2+7}}=\frac{4-4}{3-3}=\frac{0}{0}$$

Se racionaliza el denominador de la función, multiplicando por $3+\sqrt{x+7}$, que es el conjugado de la expresión $3-\sqrt{x+7}$:

$$\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}\cdot\frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{9-(x+7)}=\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se factoriza x^2-4:

$$\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se simplifica la expresión,

$$\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\left[-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)\right]=-(2+2)\left(3+\sqrt{2+7}\right)=-(4)(3+3)=-24$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=-24$$

6 Determina $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$

Solución

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{1/3}\cdot 2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{2/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Por tanto $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

EJERCICIO **18**

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+2x^2}{5x+6x^3}$
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^3-5h^2+h}{h^4-h^2}$
3. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{4y^5+5y^3}{y^4-y^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx^3}{cx^2+dx^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^n-3x^{n-1}+4x^{n-2}}{2x^n-6x^{n-2}}$
6. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z-1}{z^2-1}$
7. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{9x^2-4}{3x-2}$
8. $\lim\limits_{y\to -h}\dfrac{y+h}{h^2-y^2}$
9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{4-x^2}$
10. $\lim\limits_{w\to a}\dfrac{a^2-w^2}{a-w}$
11. $\lim\limits_{z\to 7}\dfrac{z^2-5z-14}{z-7}$
12. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+7x+12}$
13. $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{h-1}{h^2-4h+3}$
14. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^2+2x-15}$

15. $\lim\limits_{v\to 4}\dfrac{v^2-6v+8}{2v^2-8v}$

16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$

17. $\lim\limits_{h\to \frac{1}{2}}\dfrac{4h^2+4h-3}{2h-1}$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{3x-2}{3x^2-11x+6}$

19. $\lim\limits_{w\to -\frac{4}{3}}\dfrac{9w^2+9w-4}{3w^2+7w+4}$

20. $\lim\limits_{y\to 6}\dfrac{2y^2-15y+18}{3y^2-17y-6}$

21. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-13x+15}{x^2-x-20}$

22. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{6x^2+5x+1}$

23. $\lim\limits_{y\to -1}\dfrac{y+1}{y^3+1}$

24. $\lim\limits_{h\to \frac{1}{2}}\dfrac{8h^3-1}{1-2h}$

25. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{27x^3-8}{9x^2-4}$

26. $\lim\limits_{w\to -2}\dfrac{w^2+5w+6}{w^3+8}$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{64x^3-1}{4x^3-x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

29. $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y+2}{\sqrt{y+3}-1}$

30. $\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}}$

31. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}-2}{2x-1}$

32. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$

34. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x+5}-3}$

35. $\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{a-\sqrt{w^2+a^2}}{b-\sqrt{w^2+b^2}}$

36. $\lim\limits_{y\to p}\dfrac{\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{p}}{y-p}$

37. $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\sqrt{4-2v+v^2}-2}{v}$

38. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^3+x^2-4x-4}$

39. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2+4x+3}$

40. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+2x^3-11x^2-12x+36}{x^3-2x^2-x+2}$

41. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+6x^2+5x-12}$

42. $\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^3-6y^2+12y-8}{y^4-4y^3+16y-16}$

43. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$

44. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x^2-a^2}$

45. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt[3]{9x^2+4}-2}{3x-2}$

46. $\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{\sqrt[4]{y^3+8}-\sqrt{2+y}}{y-2}$

47. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

48. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{4x+19}}{x-2}$

49. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt[3]{x-1}-1}$

50. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[5]{2x+3}-1}{x^5+1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites cuando x tiende al infinito

Sea una función f definida en el intervalo (a, ∞). Si se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

entonces significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a L tanto como se quiera para una x lo suficientemente grande, sabemos que ∞ no es un número, sin embargo, se acostumbra decir "el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L".

Cuando en una función $x \to \infty$, se busca la base de mayor exponente y ésta divide a cada uno de los términos de la función, después, para obtener el valor del límite, se aplica el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ , con } c \text{ constante}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1}$

Solución

La base del término con mayor exponente es x^2, por consiguiente, todos los términos del numerador y del denominador se dividen entre esta base:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

Se simplifica y aplica el teorema para obtener el límite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{6 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 6 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{6 + 0 - 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{6x^2 + 2x - 1} = \frac{1}{3}$

2 Determina el $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3}$

Solución

La base del término con mayor exponente es x, por tanto, se dividen los términos entre esta base y se simplifica la expresión para obtener el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2 - 5}}{x}}{\frac{2x + 3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2 - 5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{5}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 9 - \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 0}}{2 + 0} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

3 Determina el resultado de $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+2}{x^3+2}$

Solución

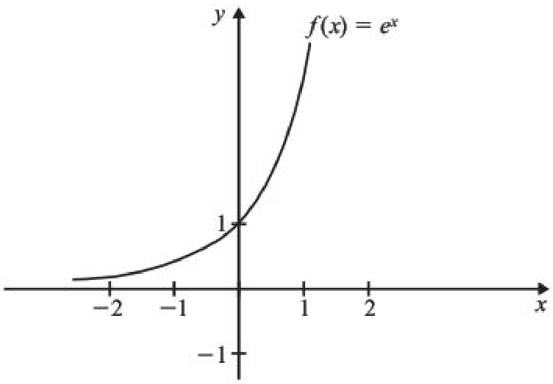
Se dividen todos los términos entre x^3, se simplifica y se obtiene el valor del límite.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+2}{x^3+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2}+\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^3}}{\lim_{x \to \infty} 1+\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^3}} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Finalmente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+2}{x^3+2} = 0$$

Si observamos la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$, tenemos que cuando $x \to -\infty$, $f(x)$ tiende a cero.

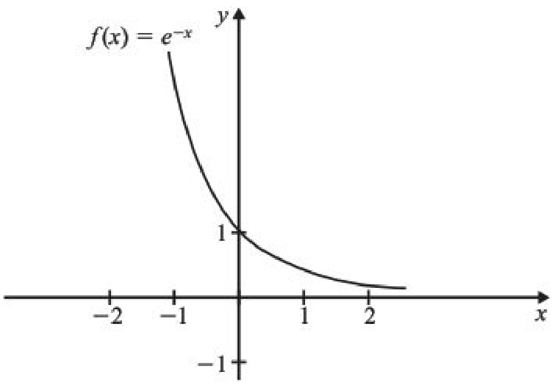


entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

esto cumple también cuando tenemos la función $g(x) = a^x$ para $a > 0$, es decir

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \text{ para } a > 0$$

Por otro lado, si tenemos $f(x) = e^{-x}$, tenemos que cuando $x \to \infty$, $f(x)$ se aproxima a cero.



entonces $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$

También se cumple $\lim_{x \to \infty} a^{-x} = 0$ para $a > 0$

EJERCICIO 19

Obtén los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+8}{4x+3}$

2. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2y^2-3y+5}{y^2-5y+2}$

3. $\lim\limits_{w\to\infty}\dfrac{3w^2+5w-2}{5w^3+4w^2+1}$

4. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{5h^4-2h^2+3}{3h^3+2h^2+h}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{18x^2-3x+2}{2x^2+5}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x^2+3}}{2x+1}$

7. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{y^3}-3y^4}{9y^4-\dfrac{5}{y^2}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{-1}+3x^{-2}}{x^{-2}+4}$

9. $\lim\limits_{v\to\infty}\dfrac{\sqrt{v^2+1}}{\sqrt[3]{v^3-3}}$

10. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{\sqrt{h^2+4}-\sqrt{h^2-4}}{h}$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x+6}{4-6x}$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x-2)(3x+1)}{(2x+7)(x-2)}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_mx^m+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+...+a_1x+b_0}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^n+bx^m}{cx^n-dx^m}$ con $n>m$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{ax^n+1}}{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Asíntotas horizontales

Sea la función $y=f(x)$, si la curva tiene una asíntota horizontal en $y=c$, entonces la ecuación de la asíntota es:

$$y=\lim_{x\to\infty}f(x)\ \text{ o }\ y=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+3}$

Solución

Al aplicar $y=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, se obtiene:

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x+1}{x}}{\dfrac{2x+3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{3}{x}}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, la curva tiene una asíntota horizontal en $y=\dfrac{3}{2}$ o $2y-3=0$

2 Determina la ecuación de la asíntota horizontal de $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Solución

Se aplica $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, entonces la asíntota horizontal tiene por ecuación:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

El resultado $y = 0$ indica que la asíntota horizontal es el eje X.

3 Obtén la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

Solución

Se aplica la definición $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y se obtiene:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x-3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{0}$$

El límite no existe ya que la división entre cero no está definida.

El resultado indica que la curva no tiene asíntotas horizontales.

EJERCICIO 20

Encuentra las ecuaciones de las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

1. $y = \dfrac{2x+3}{4x-5}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{5}$
4. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+3x+1}{x^3-1}$
6. $y = \dfrac{ax+b}{cx-d}$
7. $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$
8. $xy + 2x - 1 = 0$
9. $f(x) = 2x + 5$
10. $f(x) = \dfrac{ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{bx^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Asíntotas oblicuas

Se le denomina asíntota oblicua a aquella recta cuyo ángulo de inclinación θ es diferente de 0° y 90°.

Caso I

Sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el grado de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$ siendo $f(x) = ax + b + \dfrac{R(x)}{P(x)}$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

EJEMPLOS

1 Determina las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$

Solución

La función no tiene asíntotas horizontales, pero sí posee una asíntota vertical en $x = -1$

El grado del numerador es un grado mayor que el grado del denominador y éste no es factor del numerador, entonces:

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+1}$$

Para obtener la asíntota oblicua se aplica cualquiera de las dos condiciones:

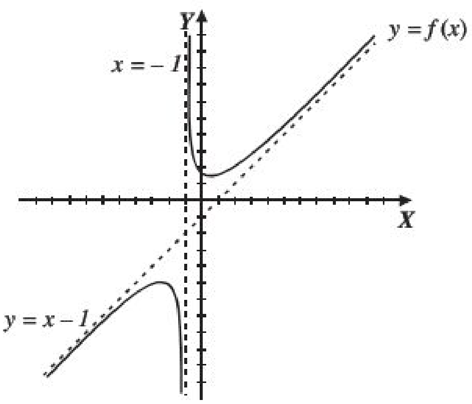
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$$

Pero $f(x) - (x-1) = \dfrac{3}{x+1}$, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

La función tiene una asíntota oblicua en la recta $y = x - 1$



2 Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

Solución

La función carece de asíntotas verticales y horizontales, para obtener las asíntotas oblicuas la función se representa de la siguiente forma:

$$f(x) = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

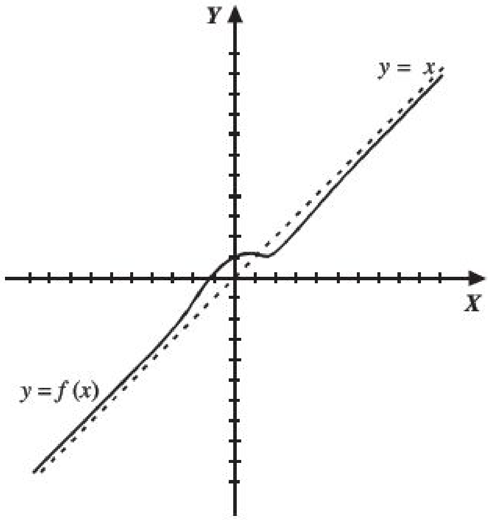
Para comprobar que $y = x$ es la ecuación de la asíntota oblicua, se aplica la definición:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2+1}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right)$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $y = x$



Analicemos otro método; sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$, cuyos valores de a y b están dados por:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

Ejemplo

Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x}$

Solución

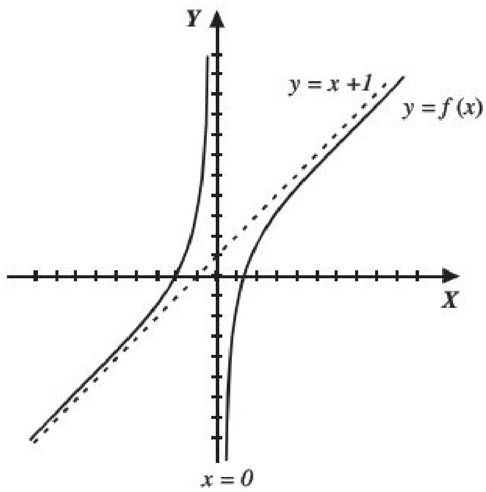
La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y no tiene asíntota horizontal, para obtener la ecuación de la asíntota oblicua se aplican los límites anteriores:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2+x-3}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+x-3}{x}-x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+x-3-x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right) = 1$$

Se sustituyen a y b en la ecuación $y = ax + b$, por tanto, la asíntota es: $y = x + 1$

Gráfica



Caso II

Sea una función $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es mayor que uno y mayor al grado de $P(x)$, la función tiene una asíntota oblicua no lineal.

Ejemplo

Determina las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

Solución

Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

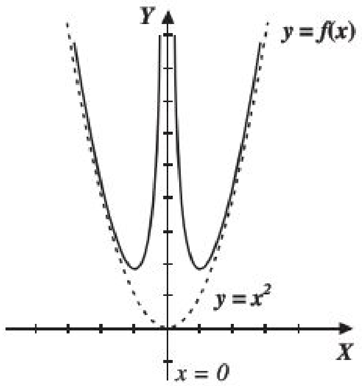
Se realiza el cociente y el resultado es:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Por consiguiente, la función tiene una asíntota cuya ecuación es $y = x^2$



EJERCICIO 21

De las siguientes funciones determina las ecuaciones de las asíntotas y traza sus gráficas:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x - 3}$
3. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 3x^2)^{-\frac{1}{3}}}$
9. $f(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x^2 - 1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites laterales

Límite por la derecha

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo abierto (x_o, b), el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_o por la derecha es L y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a aproximarse con valores mayores que x_o

Límite por la izquierda

Sea una función definida en el intervalo abierto (a, x_o), el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_o, por la izquierda es L y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a aproximarse con valores menores que x_o

Teorema

El límite cuando $x \to x_o$ de una función $f(x)$, existe y es igual a L, si y solo si los límites laterales son iguales a L, es decir

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<2 \\ 5-x^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Solución

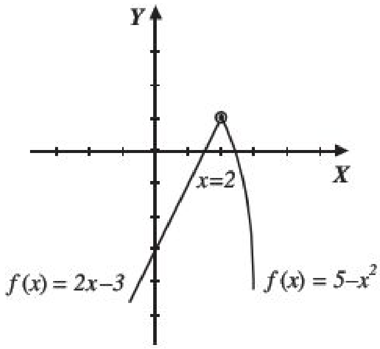
Se calculan los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-3) = 2(2) - 3 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (5-x^2) = 5-(2)^2 = 5-4 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

Por consiguiente el $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$



2 Calcula el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si } x\geq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Solución

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(0)^2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+1) = 2(0)+1 = 1$$

Dado que, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, entonces el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

La existencia de un límite lateral no implica la existencia del otro (ejemplo anterior). Cuando $f(x)$ está definida de un solo lado, entonces el $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ es igual al límite lateral de dicho lado.

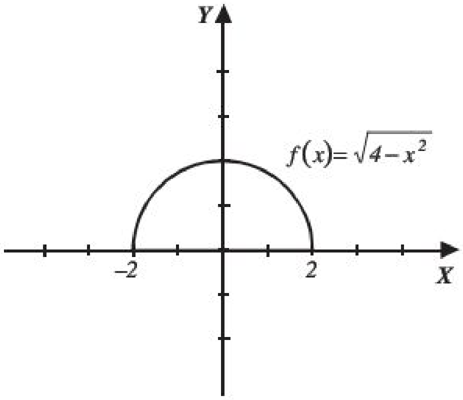
3 ¿Cuál es el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$?

Solución

Esta función está definida en el intervalo $-2 \le x \le 2$, por tanto, los valores de x tienden únicamente a 2 por la izquierda, entonces el valor del límite es:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$



EJERCICIO 22

Para las siguientes funciones, determina el valor de los límites indicados:

1. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 2x+5 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ *a)* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, *b)* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, *c)* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

2. Si $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -2 \\ x^2-5 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ -6 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ *a)* $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$, *b)* $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$, *c)* $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$, *d)* $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, *e)* $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, *f)* $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

3. Si $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}-1 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \dfrac{x^2-11}{3} & \text{si } 3 < x \end{cases}$ *a)* $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$, *b)* $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$, *c)* $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$, *d)* $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$, *e)* $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$, *f)* $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

4. Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } -1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$ *a)* $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, *b)* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, *c)* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, *d)* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, *e)* $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

5. Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \le 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x < 4 \\ \sqrt{x+5} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ *a)* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, *b)* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, *c)* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, *d)* $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, *e)* $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, *f)* $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

6. Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-10}{x+2} & \text{si } x\le -2\\ \dfrac{3-2x}{x^2-5} & \text{si } x>-2\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

7. Si $h(\theta)=\begin{cases}\operatorname{sen}\theta & \text{si } \theta<\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos 2\theta & \text{si } \theta\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} h(\theta)$

8. Si $g(x)=\begin{cases}3e^x & \text{si } x\le 0\\ 3+7\log(x+1) & \text{si } x>0\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

9. Si $w(x)=\begin{cases}\sqrt{4-3\operatorname{sen}x} & \text{si } x<\pi\\ \dfrac{3\cos x+5}{1-\log\left(\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si } x\ge\pi\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to\pi} w(x)$

10. Si $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x+\cos x & \text{si } x\le 0\\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } x>0\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites de funciones trigonométricas

A continuación se muestra la tabla de valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables, así como los ángulos de 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ y 2π

Ángulos en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe	0
Cotangente	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	No existe	0	No existe
Secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No existe	−1	No existe	1
Cosecante	No existe	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	No existe	−1	No existe

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor del $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x$

Solución

Se sustituye el valor de $x = \dfrac{\pi}{4}$ en la función:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

2 ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x}$?

Solución

Al sustituir $x = 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = \frac{\operatorname{sen}\ 2(0) - 3\cos 2(0)}{1+0} = \frac{\operatorname{sen} 0 - 3\cos 0}{1} = \frac{0-3(1)}{1} = -3$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1+x} = -3$

3 Obtén $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1}$

Solución

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1} = \frac{\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \cos\pi}{1+1} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

EJERCICIO 23

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 3x}{x+3}\right)$
2. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{6}}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$
3. $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\left(2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)$
4. $\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{\tan^2 w - 1}{\tan^2 w + 1}$
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$
7. $\lim\limits_{h\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan h}{\operatorname{sen}^2 h - 1}$
8. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
9. $\lim\limits_{w\to\pi}\dfrac{\sec^2 w}{1-\operatorname{sen}^2 w}$
10. $\lim\limits_{\beta\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{sen}\beta - \cos\beta}{\tan\beta - \sqrt{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Límites trigonométricos indeterminados

Para evitar la indeterminación en un límite de funciones trigonométricas, se transforma la función utilizando identidades trigonométricas, en ocasiones con esto es suficiente, también se puede simplificar hasta obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x},\ \frac{1-\cos x}{x}\ \text{o}\ \frac{\cos x - 1}{x}$$

y utilizar los siguientes teoremas:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\operatorname{sen} v}{v}=1;\quad \lim_{v\to 0}\frac{1-\cos v}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{\cos v-1}{v}=0$$

A continuación se da una lista de las identidades que se pueden utilizar.

Identidades trigonométricas fundamentales	Funciones del ángulo doble
$\tan\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha\csc\alpha=1\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{\csc\alpha}\\ \csc\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\end{cases}$	$\cos 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha-1$ $\cos 2\alpha=1-2\cos^2\alpha$
$\cos\alpha\sec\alpha=1\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{\sec\alpha}\\ \sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}\end{cases}$	$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
	Funciones de suma o diferencia de ángulos
$\tan\alpha\cot\alpha=1\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}\end{cases}$	$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
	Transformaciones de sumas o restas de funciones trigonométricas a producto
$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\begin{cases}\operatorname{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha\\ \cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha\end{cases}$	$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

Solución

Se sustituye $\theta = \frac{\pi}{4}$, resultando:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = \frac{1-\tan\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación, se aplican las identidades trigonométricas con el fin de obtener una expresión equivalente que no se indetermine:

$$\frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = \frac{1-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = \frac{\frac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{-\cos\theta+\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)} = -\frac{1}{\cos\theta}$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta} = -\sqrt{2}$

2 Calcula el $\lim\limits_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w}$

Solución

Al evaluar el límite:

$$\lim_{w\to 0} \frac{\cos w-\cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \frac{\cos 0-\cos 2(0)}{\operatorname{sen}^2(0)} = \frac{1-1}{(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Se indetermina la función, por consiguiente, se transforma mediante identidades trigonométricas, como se ilustra:

$$\lim_{w\to 0} \frac{\cos w-\cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w\to 0} \frac{\cos w-(\cos^2 w-\operatorname{sen}^2 w)}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w\to 0} \frac{\cos w-\cos^2 w+\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}$$

$$= \lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)+\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right] = \lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)}{\operatorname{sen}^2 w}+\frac{\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}\right]\lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)}{1-\cos^2 w}+1\right]$$

$$= \lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w\,(1-\cos w)}{(1+\cos w)(1-\cos w)}+1\right] = \lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w}{1+\cos w}+1\right]$$

Se aplica el límite:

$$= \lim_{w\to 0}\left[\frac{\cos w}{1+\cos w}+1\right] = \frac{\cos 0}{1+\cos 0}+1 = \frac{1}{1+1}+1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

Finalmente, el valor del límite es $\frac{3}{2}$

3 Obtén el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}$

Solución

Para que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}$ adopte la forma $\lim\limits_{v\to 0}\frac{\text{sen }v}{v}$, se multiplica por 3 tanto el numerador como el denominador

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}\cdot\frac{3}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{6\text{ sen }3x}{3x}=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{3x}=6(1)=6$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }3x}{x}=6$

4 ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}$?

Solución

Se sustituye $y=0$ en la función:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{\cos a(0)-\cos b(0)}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la diferencia de cosenos en producto,

$$\cos ay-\cos by=-2\text{ sen}\left(\frac{ay+by}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{ay-by}{2}\right)=-2\text{ sen}\frac{(a+b)y}{2}\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-2\text{ sen}\frac{(a+b)y}{2}\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\left[\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\right]$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a+b)}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a-b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{\frac{(a+b)y}{2}}\cdot\frac{(a-b)}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{\frac{(a-b)y}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}(1)\cdot\frac{(a-b)}{2}(1)$$

$$=\frac{-2(a^2-b^2)}{4}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

Por tanto, $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{b^2-a^2}{2}$

5 Determina el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+(x-1)\cos x}{4x}$

Solución

Se evalúa la función para $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+(0-1)\cos(0)}{4(0)}=\frac{1+(-1)(1)}{4(0)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la expresión de la siguiente forma

$$\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+x\cos x-\cos x}{4x}=\frac{1-\cos x+x\cos x}{4x}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\frac{x\cos x}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\cos x\right]\\ &= \frac{1}{4}[0+1]\\ &= \frac{1}{4}(1)\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1}{4}$$

EJERCICIO 24

Determina el valor de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{w^2}{\cos w - 1}$

2. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan 4\theta}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x}$

4. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{2 \operatorname{sen} \alpha - \tan 2\alpha}{\alpha}$

5. $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{1 - \sec v}{v^2 \sec v}$

6. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\tan^3 \theta}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(\cos x - 1)^2}}{\tan x}$

8. $\lim\limits_{w \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2w}{\cos w - \operatorname{sen} w}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}$

10. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\tan(3 + \alpha) - \tan(3 - \alpha)}{\operatorname{sen}(3 - \alpha) - \operatorname{sen}(3 + \alpha)}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2(a^2 - b^2)}{\cos ax - \cos bx}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\operatorname{sen} x)^m}{(\operatorname{sen} 2x)^m}$

13. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \tan \theta$

14. $\lim\limits_{w \to 0} \left(\dfrac{1}{\tan w} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} w}\right)$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{2 \tan x - \operatorname{sen} 2x}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^3 \csc^2 x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2}$

18. $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{\sec 2w - 1}{w \sec 2w}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{2x^2}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos^2 2x}{x}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Continuidad

Reseña HISTÓRICA

En el siglo XIX la matemática se apoyaba en la geometría y el álgebra para buscar sustento a sus afirmaciones.

En el cálculo infinitesimal se siguieron las líneas que le eran posibles con el sustento conceptual, como la existencia de funciones continuas.

Es cuando Weierstrass publica en 1872, gracias a su discípulo Paul Du Bois Reymond, su teorema sobre la existencia de funciones continuas que en algunos puntos no tenían derivada; las consecuencias de este teorema fueron de gran interés, en su época se decía que una función era continua si su gráfica se podía trazar sin despegar el lápiz del papel, aún en nuestra época esto da una idea informal de la continuidad de una función.

Pero el resultado de Weierstrass mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje totalmente analítico, sin necesidad de recurrir a imágenes geométricas. Este lenguaje proporcionó la advertencia sobre lo peligroso que resultaba confiar demasiado en las conclusiones extraídas de un dibujo.

Karl Weierstrass
(1815-1897)

Continuidad puntual

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x_o \in R$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ está definida.
2. $\lim_{x \to x_o} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Verifica si $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $x_o = 2$

Solución

Se deben verificar las tres condiciones:

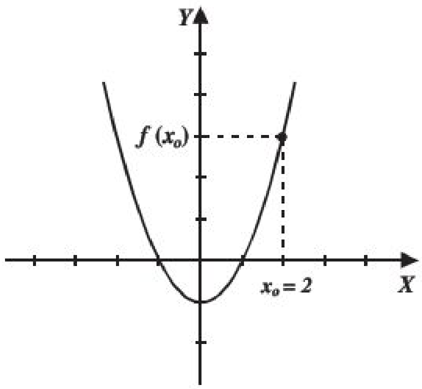
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$, por tanto $f(x)$ está definida para $x_o = 2$
2. Se calcula el valor de cada límite lateral:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

Entonces, $\lim_{x \to 2} f(x)$ sí existe y $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

3. Como $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ y $f(2) = 3$, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 2$



2 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x_o = 1$

Solución

Se verifican las condiciones:

1. $f(1) = -(1)$

   $f(1) = -1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. Se determinan los límites laterales:

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$

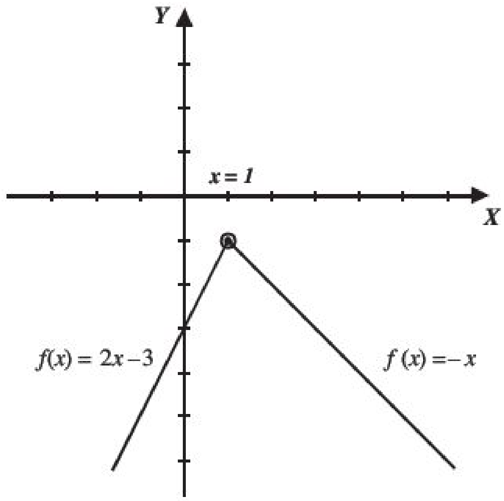
   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x) = -(1) = -1$

   Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

3. Probar que el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$

   Finalmente, es continua en $x_o = 1$



3 Determina si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$

Solución

Se verifican las condiciones para los puntos $x = 1$ y $x = 3$:

1. $f(1) = (1)^2 = 1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$;

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

   Debido a que el $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

   Por tanto, $f(x)$ no es continua en $x_o = 1$

   Se verifica la continuidad en $x_o = 3$

1. $f(3) = 2(3) - 3 = 3$, la función está definida en $x_o = 3$

2. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 2(3) - 3 = 3$

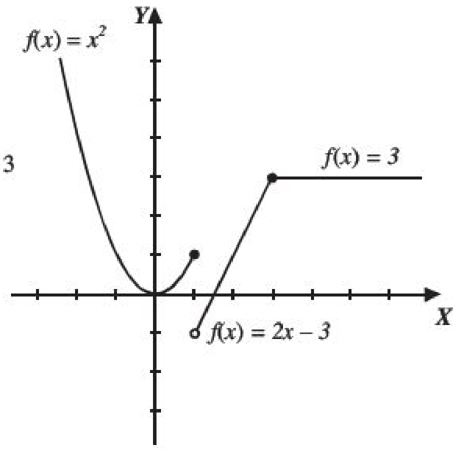
   Se concluye que,

   $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   Entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$

3. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$ y $f(x) = 3$ entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

   Por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 3$



4 Es continua $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x_o = \frac{\pi}{2}$

Solución

Si se verifican los pasos se obtiene:

1. $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en $x_o = \frac{\pi}{2}$

Discontinuidad evitable o removible

Sea $f(x)$ una función racional no continua en $x = x_0$, si mediante una simplificación algebraica, $f(x)$ se vuelve continua en $x = x_o$, entonces recibe el nombre de discontinuidad evitable o removible.

EJEMPLOS

1 Verifica si es continua la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

Solución

1. Se evalúa la función en $x = \dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{6\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

La función se indetermina o no está definida para el valor de $x = \dfrac{1}{2}$, lo cual implica que es discontinua en este punto; sin embargo, se elimina la indeterminación mediante una simplificación algebraica.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1} = \frac{(3x - 2)(2x - 1)}{2x - 1} = 3x - 2; \text{ si } x \neq \frac{1}{2}$$

Esta simplificación indica que la gráfica es una línea recta con discontinuidad evitable o removible en $x = \dfrac{1}{2}$