Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA I

Introducción a la PROGRAMACIÓN LINEAL con Modelos de 2 o más Variables

Ingeniería de Sistemas
Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto

60 años

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

LOGRO DE LA SESIÓN

Al finalizar la sesión el estudiante comprende la Programación Lineal con Modelos de 2 o más variables para poder usarlos como herramientas en la solución de problemas.

Introducción a la programación lineal

La programación lineal se aplica a modelos de optimización en los que las funciones objetivo y restricción son estrictamente lineales. La técnica se aplica en una amplia variedad de casos, en los campos de agricultura, industria, transporte, economía, salud, ciencias sociales y de la conducta, y militar. También produce algoritmos eficientes de cómputo para problemas con miles de restricciones y variables.

Investigación de Operaciones

Implementación: Las fases principales de la implementación de la investigación de operaciones en la práctica comprenden:

1. La definición del problema.

2. La construcción del modelo.

3. La solución del modelo.

4. La validación del modelo.

5. La implementación de la solución.

La **definición del problema**

Implica definir el alcance del problema que se investiga. Es una función que se debe hacer entre todo el equipo de investigación de operaciones. Su resultado final será identificar tres elementos principales del problema de decisión, que son:

1) La descripción de las alternativas de decisión;

2) La determinación del objetivo del estudio, y

3) La especificación de las limitaciones bajo las cuales funciona el sistema modelado.

La **construcción del modelo**

Implica traducir la definición del problema a relaciones matemáticas. Si el modelo que resulte se ajusta a uno de los modelos matemáticos normales, como puede ser la programación lineal, se puede llegar a una solución empleando los algoritmos disponibles. En forma alternativa, si las relaciones matemáticas son demasiado complejas como para permitir el cálculo de una solución analítica, puede ser que el equipo de investigación de operaciones opte por simplificar el modelo y usar un método heurístico, o que el equipo pueda recurrir al uso de una simulación, si es aproximada. En algunos casos se podrá necesitar una combinación de modelos matemáticos, de simulación y heurísticos para resolver el problema de decisiones.

La **solución del modelo**

Es, con mucho, la fase más sencilla de todas las de la investigación de operaciones, porque supone el uso de algoritmos bien definidos de optimización. Un aspecto importante de la fase de solución del modelo es el *análisis de sensibilidad*. Tiene que ver con la obtención de información adicional sobre el comportamiento de la solución óptima cuando el modelo sufre ciertos cambios de parámetros. Se necesita en especial el análisis de sensibilidad cuando no se pueden estimar con exactitud los parámetros del modelo. En esos casos es importante estudiar el comportamiento de la solución óptima en las proximidades de los parámetros estimados.

La **validación del modelo**

Comprueba si el modelo propuesto hace lo que se quiere que haga, esto es, ¿predice el modelo en forma adecuada el comportamiento del sistema que se estudia?. El modelo es válido si, bajo condiciones de datos semejantes, reproduce el funcionamiento en el pasado.

Sin embargo, en general no hay seguridad de que el funcionamiento en el futuro continúe reproduciendo los datos del pasado. También, como el modelo se suele basar en un examen cuidadoso de los datos históricos, la comparación propuesta debería ser favorable. Si el modelo propuesto representa un sistema nuevo, no existente, no habrá datos históricos para las comparaciones.

En esos casos se podrá recurrir a una simulación, como herramienta independiente para verificar los resultados del modelo matemático.

La implementación de la solución

Implica la traducción de los resultados a instrucciones de operación, emitidas en forma comprensible para las personas que administrarán al sistema recomendado. La carga de esta tarea la lleva principalmente el equipo de investigación de operaciones.

Aplicaciones de la PL

Ll tipo más común de aplicación abarca el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible (es decir, en forma óptima). Este problema de asignación puede surgir cuando deba elegirse el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos para realizarlas. La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande, y va desde la asignación de instalaciones productivas a los productos, hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la planeación agrícola, hasta el diseño de una terapia de radiación; etc. No obstante, el ingrediente común de todas estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades.

Con frecuencia, seleccionar una alternativa incluye satisfacer varios criterios al mismo tiempo. Por ejemplo, cuando se compra pan se tiene el criterio de frescura, tamaño, tipo (blanco, integral u otro), costo y rebanado o sin rebanar. Se puede ir un paso más adelante y dividir estos criterios en dos categorías: restricciones y el objetivo.

Las restricciones son las condiciones que debe satisfacer una solución que está bajo consideración. Si más de una alternativa satisfacen todas las restricciones, ***el objetivo*** se usa para seleccionar entre todas las alternativas factibles. Cuando se elige pan, pueden quererse 100 gr. de pan blanco rebanado y hecho no antes de ayer. Si varias marcas satisfacen estas restricciones, puede aplicarse el objetivo de un costo mínimo y escoger las más barata.

Aplicaciones de la PL

La PL es una técnica determinista, no incluye probabilidades y utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación no se refiere a programación en computadoras; en esencia es un sinónimo de *planeación*. Así, la PL trata la *planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo) entre todas las opciones de solución*. Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la PL tiene muchas otras posibilidades. De hecho, cualquier problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de PL es un problema de PL.

Modelos de 2 o más Variables

Ejemplo 01: Confeccionista de ternos

Una sastrería confecciona dos nuevos tipos de ternos: elegante profesional y noche de gala. Los tiempos empleados en el áreas de corte y confección para cada tipo de terno se presentan en la siguiente tabla:

	Corte	Confección
Elegante profesional	3	2
Noche de gala	4	7

Las horas disponibles empleadas por semana para el área de corte son 23 horas y para el área de confección son 24 horas. Las utilidades de cada tipo son \$5 y \$8, respectivamente.

¿Cuántos ternos de cada tipo deben producir por semana el fabricante con el fin de maximizar la utilidad?

Ejemplo 01: Confeccionista de ternos

Solución

Objetivo

Maximizar la utilidad en función de la cantidad a producirse por semana.

Variables

$$\boldsymbol{x_e} = número\ de\ ternos\ de\ tipo\ elegante\ profesional$$

$$\boldsymbol{x_n} = número\ de\ ternos\ de\ tipo\ noche\ de\ gala$$

Función objetivo

- Magnitud a optimizar: **Utilidad**
- Utilidad de terno elegante = $5x_e$

Utilidad por terno: 5

N° de ternos: $\boldsymbol{x_e}$

Modelos de 2 o más Variables

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Ejemplo 01: Confeccionista de ternos

- Utilidad noche de gala= $8x_n$
  - Utilidad por terno: 8
  - N° de ternos: $\boldsymbol{x_n}$

- **Utilidad total:** $\boldsymbol{U = 5x_e + 8x_n}$

- El objetivo es maximizar: $\boldsymbol{max. U = 5x_e + 8x_n}$

Restricciones

- Factor a considerar: **horas por área**

- Área de corte (max 23)
  - Horas/terno Elegante: 3 horas
  - Ternos elegantes: $3x_e$
  - Horas/terno noche: 4 horas
  - Ternos noche: $4x_n$

Tiempo total en corte

$$\boldsymbol{3x_e + 4x_n \leq 23}$$

Modelos de 2 o más Variables

Ejemplo 01: **Confeccionista de ternos**

- Área de confección (max 24)
  - Horas/terno Elegante: 2 horas
  - Ternos elegantes: $2x_e$
  - Horas/terno noche: 7 horas
  - Ternos noche: $7x_n$

Tiempo total en confección

$$2x_e + 7x_n \leq 24$$

Modelo completo PL

$$maximizar\ Z = 5x_e + 8x_n$$

Sujeto a:

$$3x_e + 4x_n \leq 23$$

$$2x_e + 7x_n \leq 24$$

$$x_e, x_n \geq 0$$

Modelos de 2 o más Variables

Ejemplo 02: **Compañía de muebles**

Una fábrica de muebles elabora y vende tres tipos de camas: personal, matrimonial y real. El requerimiento de cada cama para su elaboración se muestra a continuación:

	Pegamento (frascos)	Madera (listones)	Clavos (docenas)
Personal	2	2	3
Matrimonial	1	2	4
Real	1	3	6

La fábrica dispone de la siguiente cantidad de insumos para la elaboración de las camas: 500 frascos de pegamento, 650 listones de madera y 2000 docenas de clavos.

Asimismo, las camas de tipo personal, matrimonial y real se venden en $700, $900 y $1600, respectivamente. Las ventas se han caracterizado por la emisión total de la producción.

¿Cuántas camas se deben producir y vender de cada tipo para que el ingreso sea máximo?

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Ejemplo 02: Compañía de muebles

Solución

Objetivo

Maximizar el ingreso en función de las cantidades de cada tipo de cama que es vendida.

Variables

$$\boldsymbol{x_1} = número\ de\ camas\ de\ tipo\ personal$$
$$\boldsymbol{x_2} = número\ de\ camas\ de\ tipo\ matrimonial$$
$$\boldsymbol{x_3} = número\ de\ camas\ de\ tipo\ real$$

Función objetivo

- Magnitud a optimizar: **ingresos**
- Ingreso / c. personal = $700x_1$ ⟹ Ingreso c/u: 700
- Ingreso / c. matrimonial = $900x_1$ ⟹ Ingreso c/u: 900

Modelos de 2 o más Variables

Ejemplo 02: Compañía de muebles

- Ingreso / c. real= $1600x_1$ ⟹ Ingreso c/u: 1600
- **Ingreso total: I =** $\mathbf{700x_1 + 900x_2 + 1600x_3}$
- El objetivo es maximizar: $\boldsymbol{max. I = 700x_1 + 900x_2 + 1600x_3}$

Restricciones

- Factor a considerar: **materiales**
- Pegamento (max 500)
  - Para todas las C. personales: $\mathbf{2x_1}$
  - Para todas las C. matrimoniales: $\mathbf{1x_2}$
  - Para todas las C. reales: $\mathbf{1x_3}$

$$\mathbf{2x_1 + x_2 + x_3 \leq 500}$$

Modelos de 2 o más Variables

Ejemplo 02: **Compañía de muebles**

- Madera (max 650)

Para todas las C. personales: $\mathbf{2x_1}$

Para todas las C. matrimoniales: $\mathbf{2x_2}$

Para todas las C. reales: $\mathbf{3x_3}$

$$\mathbf{2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 650}$$

- Clavos (max 2000)

Para todas las C. personales: $3\mathbf{x_1}$

Para todas las C. matrimoniales: $\mathbf{4x_2}$

Para todas las C. reales: $\mathbf{6x_3}$

$$\mathbf{3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 2000}$$

Modelos de 2 o más Variables

Ejemplo 02: Compañía de muebles

Modelo completo PL

$$\boldsymbol{maximizar\ Z = 700x_1 + 900x_2 + 1600x_3}$$

Sujeto a:

$$\boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_3 \leq 500}$$

$$\boldsymbol{2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 650}$$

$$\boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 2000}$$

$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \geq 0}$ y enteros

Modelos de 2 o más Variables

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Ejemplo 03: (La compañía Reddy Mikks)

Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores, $M1$ y $M2$. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Ton de materia prima de		
	Pinturas para exteriores	*Pinturas para interiores*	*Disponibilidad diaria máxima (ton)*
Materia prima, $M1$	6	4	24
Materia prima, $M2$	1	2	6
Utilidad por ton (miles de $)	5	4	

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que 1 tonelada más que la de pintura para exteriores. También, que la demanda máxima diaria de pintura para interiores es de 2 toneladas.

Reddy Mikks desea determinar la mezcla óptima (la mejor) de productos para exteriores y para interiores que maximice la utilidad diaria total.

El modelo de programación lineal, como en cualquier modelo de investigación de operaciones, tiene tres componentes básicos.

Actividad

Desarrollar los ejercicios vistos en clase de manera individual, y subir al SIA en la actividad de nuestra segunda sesión.

Maximizar la función objetivo $F(x,y) = 40x + 50y$, bajo las restricciones:

$x + 2y \leq 60$
$4x + 2y \leq 120$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Gracias

Néstor Muñoz

Docente

nestor.munoz@unc.edu.pe

941434300

Universidad Nacional de Cajamarca

"Norte de la Universidad Peruana"

60 años