Ingeniería de Sistemas
Universidad Nacional de Cajamarca

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA II

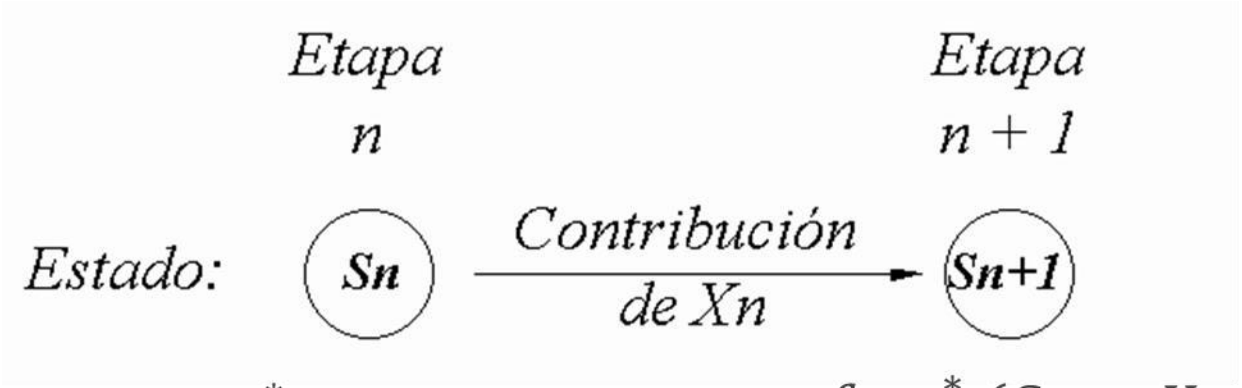
Programación Dinámica:
Determinística
Probabilística

Ingeniería de Sistemas
Ing. Néstor Muñoz

Logro de sesión

Al culminar la sesión, aplica programación dinámica a través de ejercicios.

INTRODUCCIÓN



$$f_n^{\,*}\,(S_n, X_n) \longrightarrow f_{n+1}^{\,*}\,(S_{n+1}, X_{n+1})$$

La programación dinámica se utiliza para resolver problemas donde se debe tomar decisiones interrelacionadas.

La formulación matemática de la programación dinámica no es estándar, ya que las ecuaciones se derivan de las condiciones individuales de los problemas.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Sean x_n (n = 1, 2, 3…p) las variables de decisión que representan el destino inmediato de la etapa n, tal que la ruta seleccionada sea

$A \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \ldots \rightarrow X_p$, donde X_p será el destino J.

Sea $f_n(s, x_n)$ el costo total de la mejor política global para las etapas restantes, dado que el viajero se encuentra en el estado S, listo para iniciar la etapa N y se dirige a X_n como destino inmediato.

Dados S y n, sea x_n* (no necesariamente único) que minimiza $f_n(S, x_n)$ y sea f_n* el valor mínimo de $f_n(S, x_n)$ entonces:

$$f_n^*(S) = \min_{x_n} f_n(S, x_n) = f_n(S, x_n^*)$$

…FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

$$f_{\mathbf{n}}{}^{*}(S) = \min_{x_n} f_n(S, x_n) = f_n(S, x_n{}^{*})$$

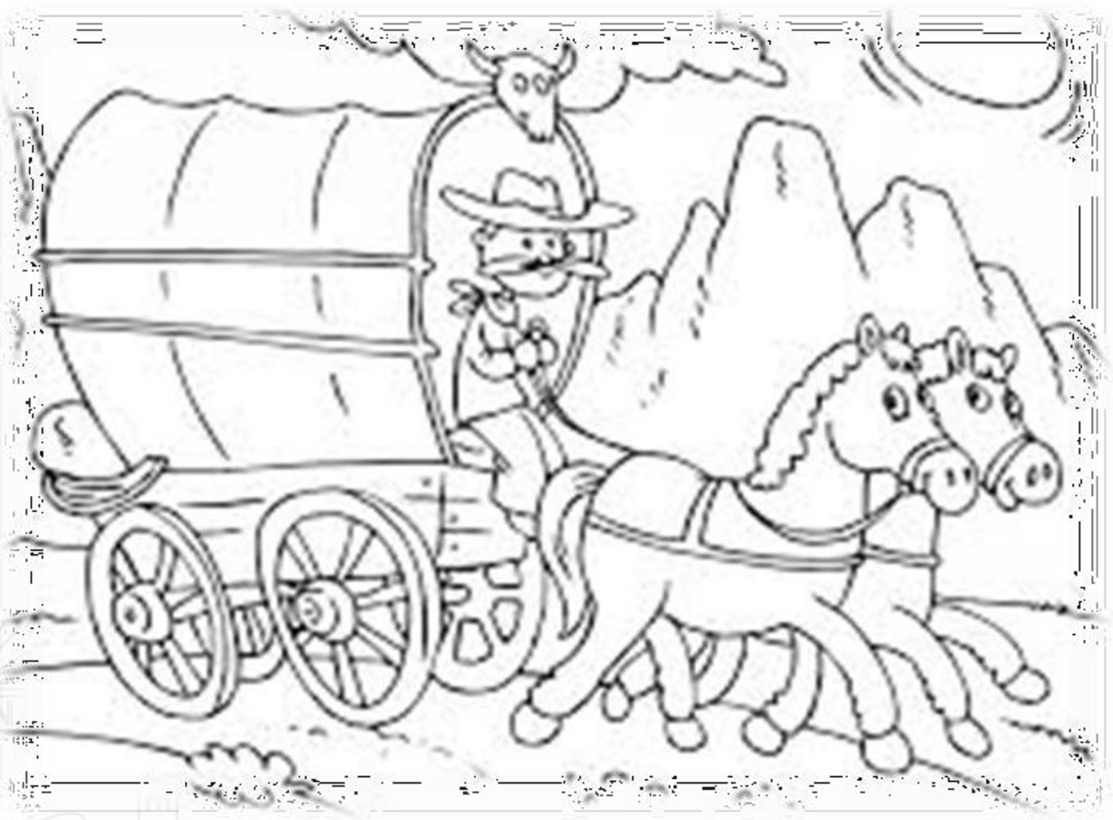
$f_n(S, x_n) =$ costo inmediato(etapa n) **+** mínimo costo futuro (etapas n+1 en adelante),

$$f_n(s, x_n) = C_{\mathbf{S,\ xn}} + f_{n+1}{}^{*}(x_n)$$

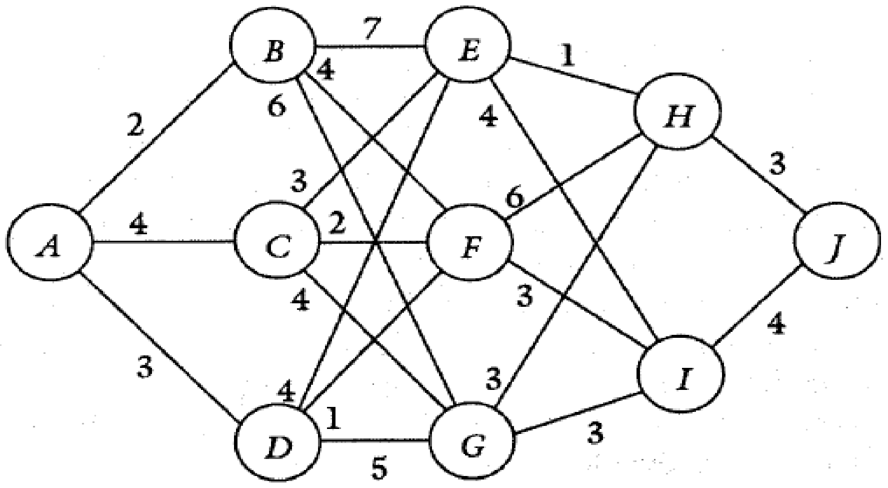
Costo de ir de la ciudad i a la ciudad j

Costo óptimo acumulado

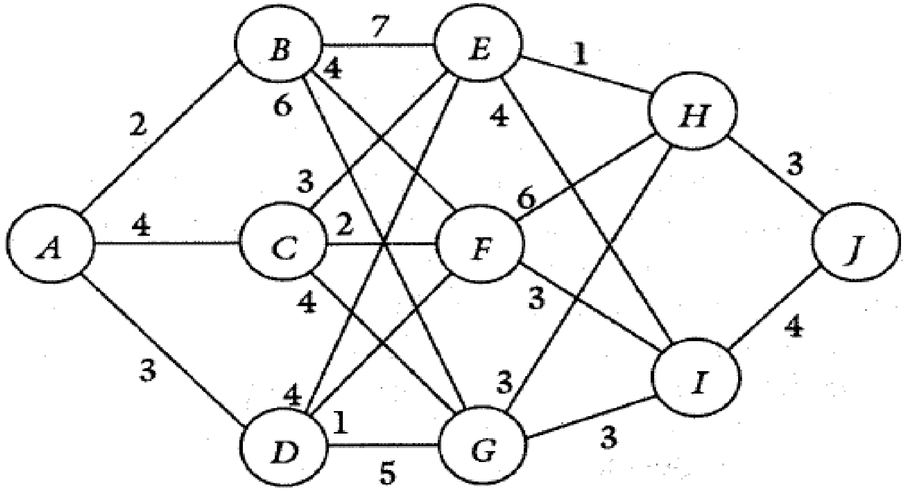
EL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA



Un cazafortunas decide ir de Missouri (A) a California (J), Tiene que hacer el viaje en diligencia a través de territorios. Como se puede observar, se requieren cuatro etapas —jornadas en diligencia— para viajar desde Missouri a California a un costo mínimo total ($)

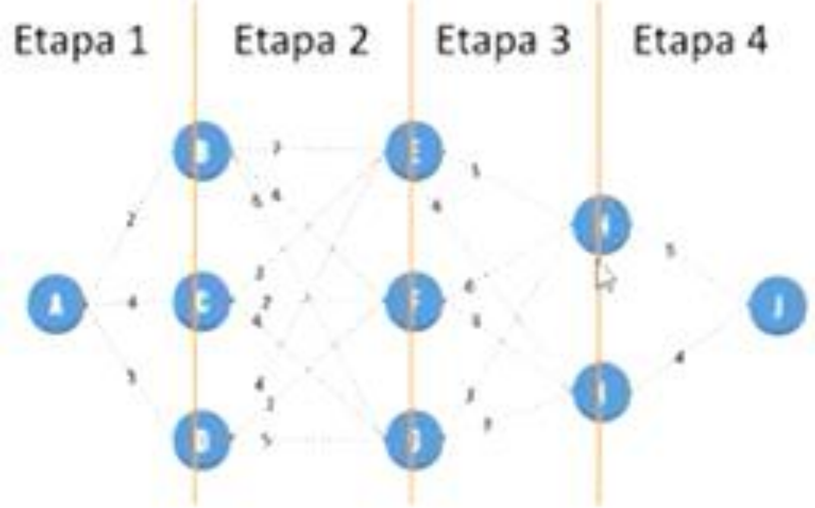


EL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA



$$\boxed{f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}.}$$

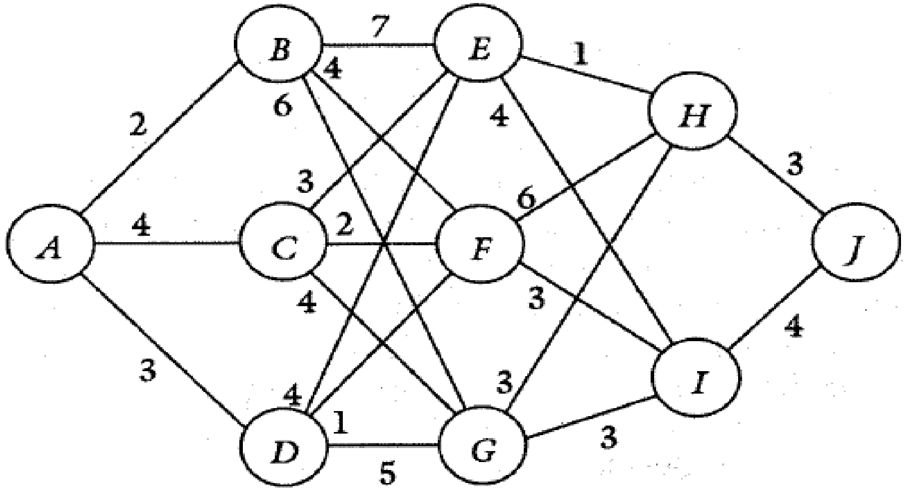
donde: $f_n(s_n, x_n) = x_n + f_{n+1}^*(s_{n+1})_{x_n}$



Para la Etapa 4:

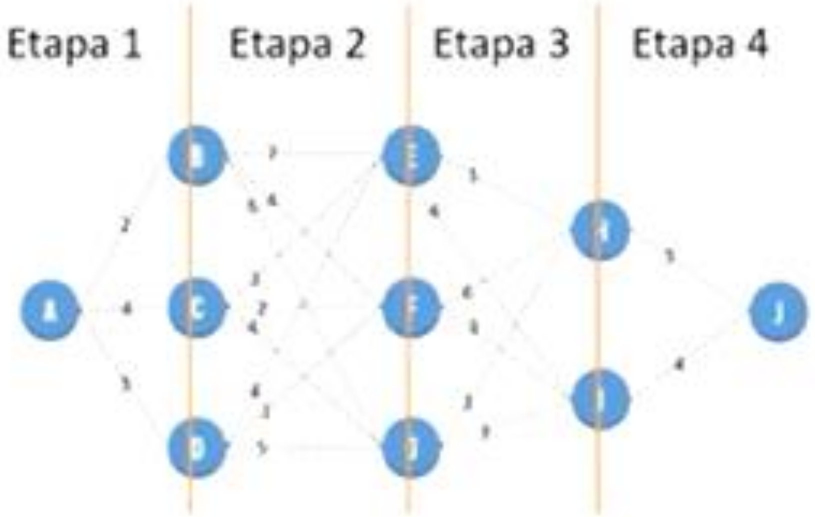
S_4 \ X_4	$f_4(s_4,x_4)$ J	$f^*_4(s_4)$	x^*_4
H	3	3	J
I	4	4	J
Estados posibles	Costos posibles	Costo óptimo	Decisión óptima

EL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA



$$\boxed{f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}.}$$

donde: $f_n(s_n, x_n) = x_n + f^*_{n+1}(s_{n+1})_{x_n}$



Para la Etapa 3:

S_3 \ X_3	$f_3(s_3,x_3)=X_3+f^*_4(s_4)$ H	I	$f^*_3(s_3)$	x^*_3
E	1+3	4+4	4	H
F	6+3	3+4	7	I
G	3+3	3+4	6	H

Se seleccionan las mejores opciones

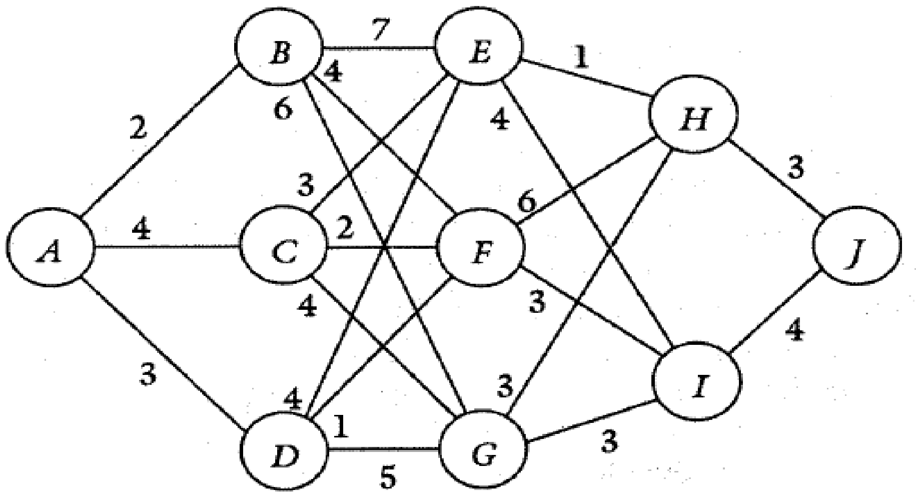
Para la Etapa 4:

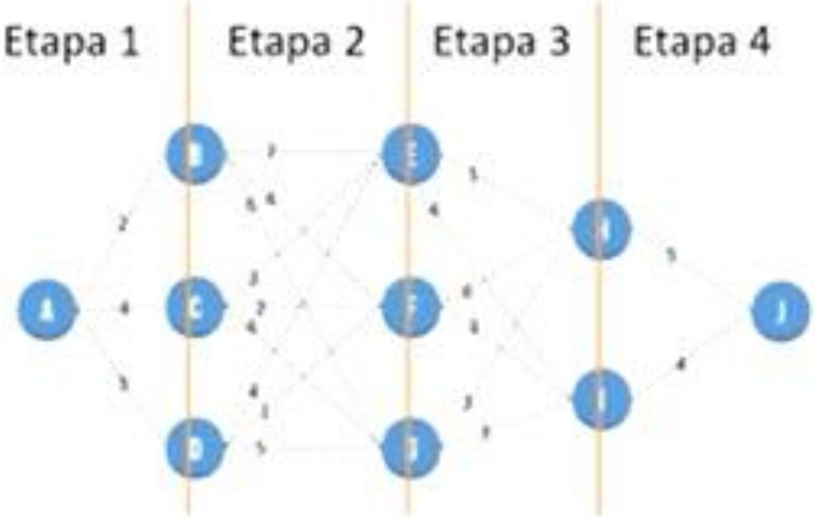
S_4 \ X_4	$f_4(s_4,x_4)$ J	$f^*_4(s_4)$	x^*_4
H	3	3	J
I	4	4	J

EL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA

$$\boxed{f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}.}$$

donde: $f_n(s_n, x_n) = x_n + f^*_{n+1}(s_{n+1})_{x_n}$





Para la Etapa 2:

S_2 \ X_2	$f_2(s_2,x_2) = X_2+f^*_3(s_3)$			$f^*_2(s_2)$	x^*_2
	E	F	G		
B	7+4	4+7	6+6	11	E o F
C	3+4	2+7	4+6	7	E
D	4+4	1+7	5+6	8	E o F

Se seleccionan las mejores opciones

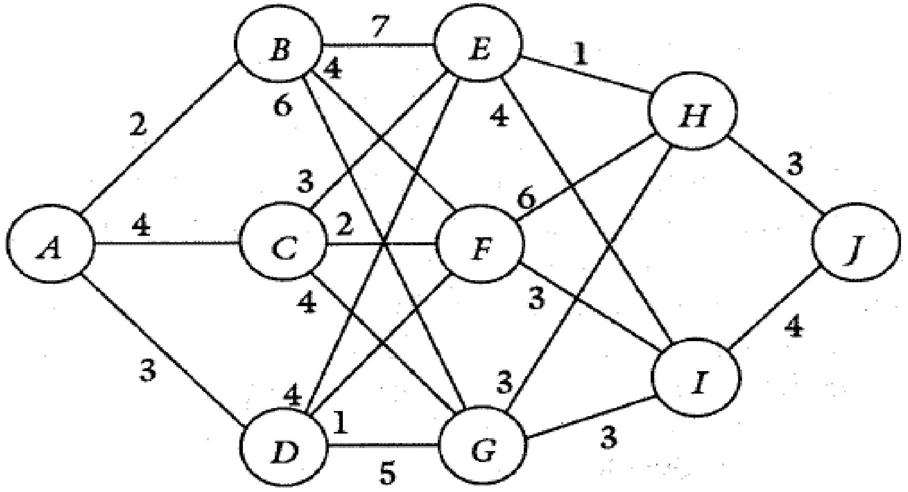
Costo óptimo

Decisión óptima

Para la Etapa 3:

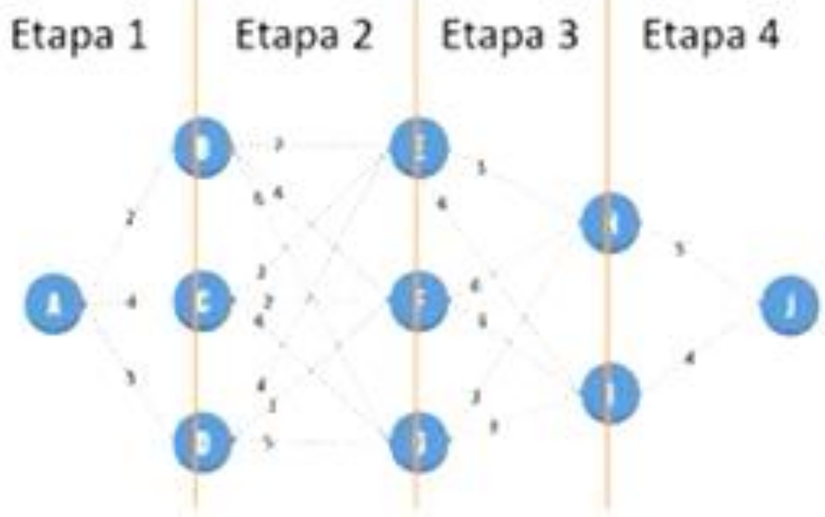
S_3 \ X_3	$f_3(s_3,x_3) = X_3+f^*_4(s_4)$		$f^*_3(s_3)$	x^*_3
	H	I		
E	1+3	4+4	4	H
F	6+3	3+4	7	I
G	3+3	3+4	6	H

EL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA



$$\boxed{f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}.}$$

donde: $f_n(s_n, x_n) = x_n + f_{n+1}^*(s_{n+1})_{x_n}$



Para la Etapa 1:

$S_1 \backslash X_1$	$f_1(s_1,x_1) = X_1 + f^*_2(s_2)$			$f^*_1(s_1)$	x^*_1
	B	C	D		
A	2+11	4+7	3+8	11	C o D

Se seleccionan las mejores opciones — Costo óptimo — Decisión óptima

Para la Etapa 2:

$S_2 \backslash X_2$	$f_2(s_2,x_2) = X_2 + f^*_3(s_3)$			$f^*_2(s_2)$	x^*_2
	E	F	G		
B	7+4	4+7	6+6	11	E o F
C	3+4	2+7	4+6	7	E
D	4+4	1+7	5+6	8	E o F

EL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA

Para la Etapa 4:

S_4 \ X_4	$f_4(s_4,x_4)$	$f^*_4(s_4)$	x^*_4
	J		
H	3	3	J
I	4	4	J

Para la Etapa 3:

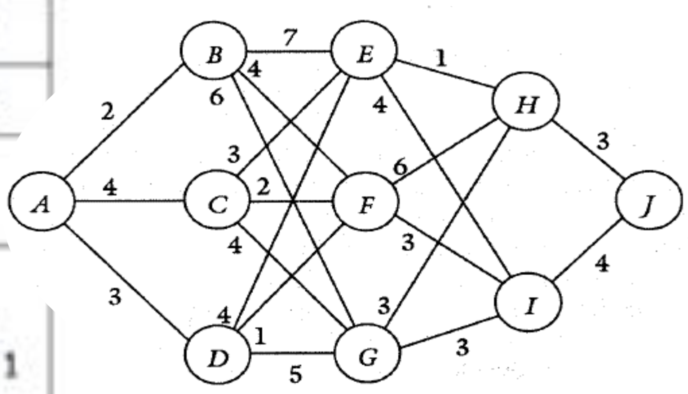
S_3 \ X_3	$f_3(s_3,x_3)= X_3+f^*_4(s_4)$		$f^*_3(s_3)$	x^*_3
	H	I		
E	1+3	4+4	4	H
F	6+3	3+4	7	I
G	3+3	3+4	6	H

Para la Etapa 2:

S_2 \ X_2	$f_2(s_2,x_2)= X_2+f^*_3(s_3)$			$f^*_2(s_2)$	x^*_2
	E	F	G		
B	7+4	4+7	6+6	11	E o F
C	3+4	2+7	4+6	7	E
D	4+4	1+7	5+6	8	E o F

Para la Etapa 1:

S_1 \ X_1	$f_1(s_1,x_1)= X_1+f^*_2(s_2)$			$f^*_1(s_1)$	x^*_1
	B	C	D		
A	2+11	4+7	3+8	11	C o D

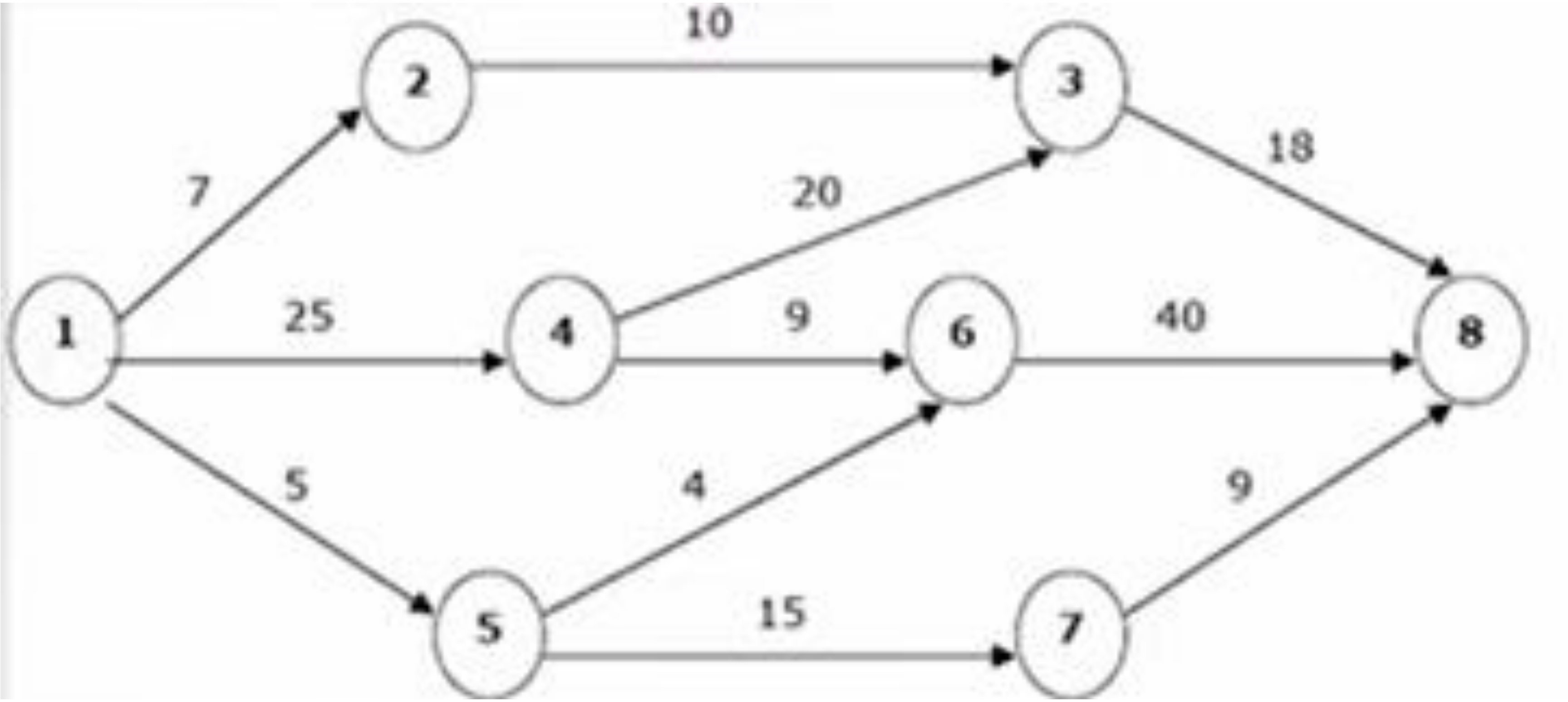


Costo óptimo: 11

Trayectoria(s):
A → C → E → H → J
A → D → E → H → J
A → D → F → I → J

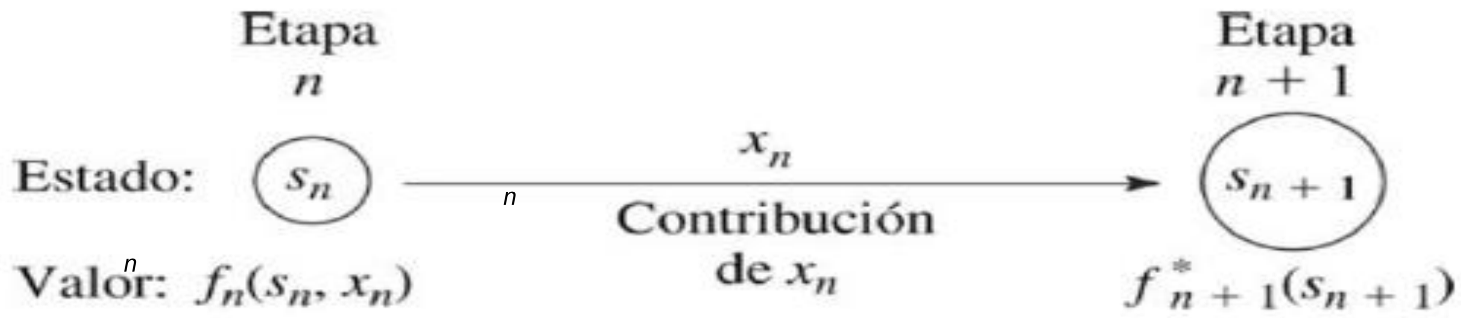
Practicamos:

Considere el planteamiento y solución del problema de la DILIGENCIA



Programación Determinística

En la programación dinámica determinista, el estado de la siguiente etapa está determinado por completo por el estado y la política de decisión de la etapa actual



N = número de etapas.

$n =$ etapa actual ($n = 1, 2, \dots, N$).

sn = estado actual de la etapa *n*. (cantidad de recursos todavía disponibles para asignarse a las actividades restantes (n, …., N))

xn = variable de decisión de la etapa *n*. (cantidad de recursos asignados a la etapa n)

*Xn** = valor óptimo de *x* (dado *sn*)

Ejemplo 1:

El administrador de ventas de la empresa "Computer SAC" dispone de **6 vendedores** para asignar a 3 Regiones distintas del País; luego de un análisis determina que ***a cada Región debe ir por lo menos un vendedor.*** Desea determinar cuántos vendedores debe enviar a cada Región a fin **de maximizar las ventas**.

En la tabla siguiente se detalla el monto de ventas producto de enviar un determinado nro. de vendedores a cada región (ventas en miles de soles)

Nro de vendedores	**Total de Ventas**		
	Región		
	1	**2**	**3**
1	40	24	32
2	54	47	46
3	78	63	70
4	99	78	84

Región:

1: Cajamarca

2: Arequipa

3: La Libertad

Para el ejemplo:

- Sea Pi (Xi) la medida del desempeño por asignar Xi

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{3} Pi(Xi)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{3} Xi \ = 6$$

Xi son enteros no negativos

- Teniendo en cuenta la ecuación genérica de programación dinámica

$$f_n\,(s, x_n) = C_{s,\,xn} + f_{n+1}{}^{*}(x_n)$$

Luego la relación recursiva :

$$f_n\,(s, x_n) = P_n(Xn) + f_{n+1}{}^{*}(S_n - X_n)$$

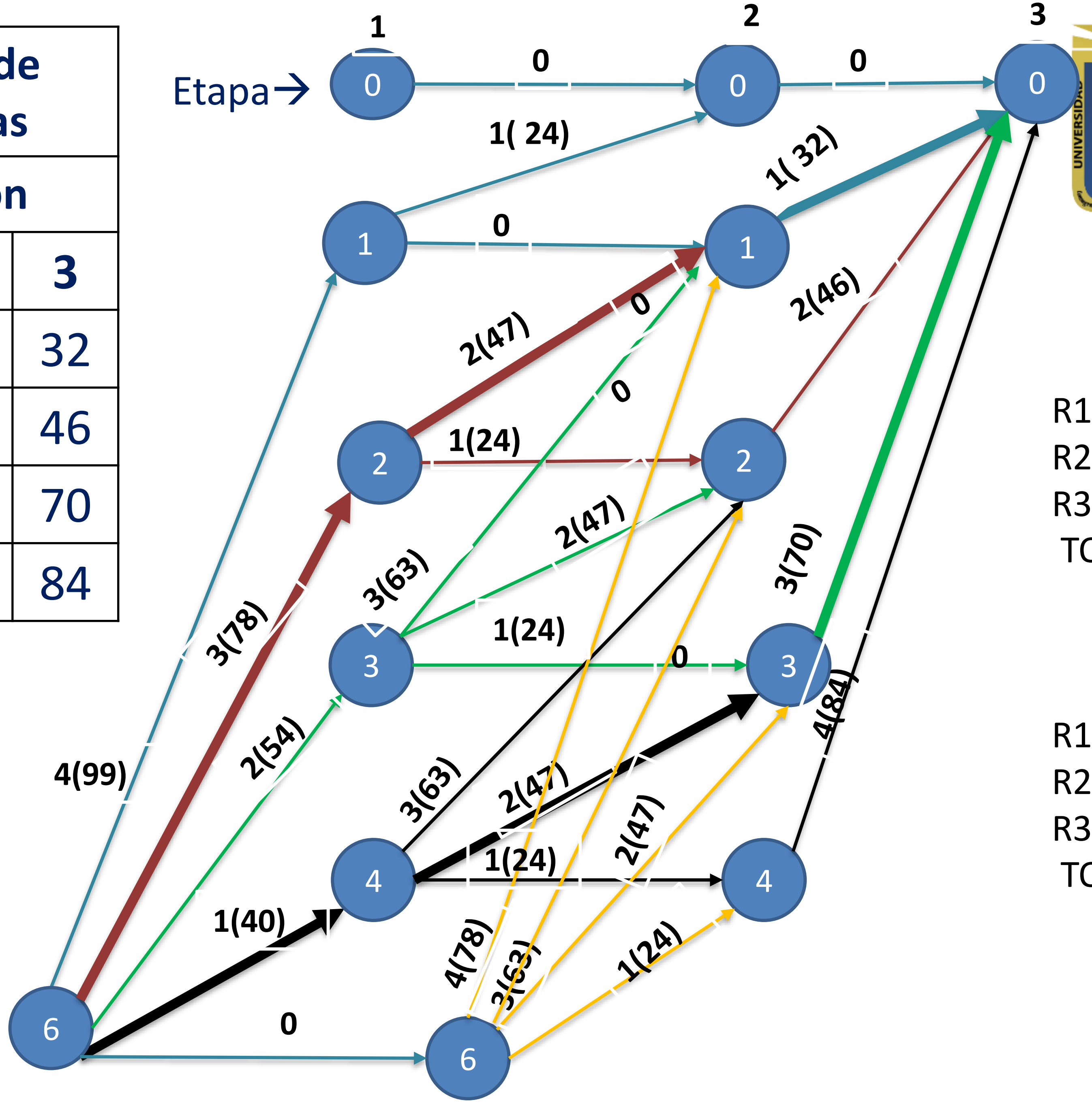
Nro de vendedores	Total de Ventas		
	Región		
	1	2	3
1	40	24	32
2	54	47	46
3	78	63	70
4	99	78	84

Región:

1: Cajamarca

2: Arequipa

3: La Libertad



Universidad Nacional de Cajamarca

"Norte de la Universidad Peruana"

R1→3 →78

R2→2→ 47

R3→1 →32

TOTAL 157

R1→1 →40

R2→2→ 47

R3→3 →70

TOTAL 157

Solución utilizando la función de recursividad

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Etapa n=3 Región 3, recordamos $f_4^*(S_3 - X_3) = 0$

nro vendedores	$f_3(s, x_3) = P_3(X3) + f_4^*(S_3 - X_3)$				$f_3^*(S_3)$	X_3^*
	32	46	70	84		
	1	**2**	**3**	**4**		
min=1	32+0=32				32	1
2	32+0=32	46+0=46			46	2
3	32+0=32	46+0=46	70+0=70		70	3
max=4	32+0=32	46+0=46	70+0=70	84+0=84	84	4

Nro de vendedores	Total de Ventas		
	Región		
	1	**2**	**3**
1	40	24	32
2	54	47	46
3	78	63	70
4	99	78	84

Etapa n=2 Región 2

nro vendedores	$f_2(s, x_2) = P_2(X2) + f_3^*(S_2 - X_2)$				$f_2^*(S_2)$	X_2^*
	24	47	63	78		
	1	2	3	4		
min=2	2-1=1 24+32=56				56	1
3	3-1=2 24+46=70	3-2=1 47+32=79			79	2
4	4-1=3 24+70=94	4-2=2 47+46=93	4-3=1 63+32=95		95	3
max=5	5-1=4 24+84=108	5-2=3 47+70=117	5-3=2 63+46=109	5-4=1 78+32=110	117	2

Nro de vendedores	Total de Ventas		
	Región		
	1	2	3
1	40	24	32
2	54	47	46
3	78	63	70
4	99	78	84

Etapa n=1 Región 1

nro vendedores	$f_1(s, x_1) = P_1(X1) + f_2^*(S_1 - X_1)$				$f_1^*(S_1)$	X_1^*
	40	54	78	99		
	1	2	3	4		
6	*6-1=5*	*6-2=4*	*6-3=3*	*6-4=2*	157	1 ó 3
	40+117=157	54+95=149	78+79=153	99+56=155		

RESPUESTA 1

Etapa	Total vendedores	Nro vendedores (Xi)		$f_i^*(Si)$
1	6	1	=5	40
2	5	2	=3	47
3	3	3	=0	70
			Total =	157

Enviar 1 vendedor a la Región 1 (Cajamarca) llegando como máximo en ventas a S/. 40 000
Enviar 2 vendedores a la Región 2 (Arequipa) llegando como máximo en ventas a S/. 47 000
Enviar 3 vendedor a la Región 3 (La Libertad) llegando como máximo en ventas a S/.70 000 y
El total de ventas con estas distribución es S/. 157 000

Nro de vendedores	Total de Ventas		
	Región		
	1	2	3
1	40	24	32
2	54	47	46
3	78	63	70
4	99	78	84

RESPUESTA 2

Etapa	Total vendedores	Nro vendedores (Xi)		f_i*(Si)
1	6	3	3	78
2	3	2	1	47
3	1	1	0	32
			Total =	157

Enviar 3 vendedores a la Región 1 (Cajamarca) llegando como máximo en ventas a S/.78 000
Enviar 2 vendedores a la Región 2 (Arequipa) llegando como máximo en ventas a S/. 47 000
Enviar 1 vendedores a la Región 3 (La Libertad) llegando como máximo en ventas a S/. 32 000
El total de ventas con estas distribución es S/. 157000

Programación Dinámica Probabilística

Considere un sistema con cuatro componentes, cada uno de los cuales debe trabajar para que el sistema funcione. La confiabilidad del sistema se puede mejorar si se instalan varias unidades paralelas en uno o más de los componentes. La siguiente tabla muestra la probabilidad de que los respectivos componentes funcionen si constan de una , dos o tres unidades paralelas.

Unidades paralelas	Probabilidad de funcionamiento			
	Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4
1	0.5	0.6	0.7	0.5
2	0.6	0.7	0.8	0.7
3	0.8	0.8	0.9	0.9

La probabilidad de que el sistema funcione es el producto de las probabilidades de que los componentes respectivos funcionen

Programación Determinística

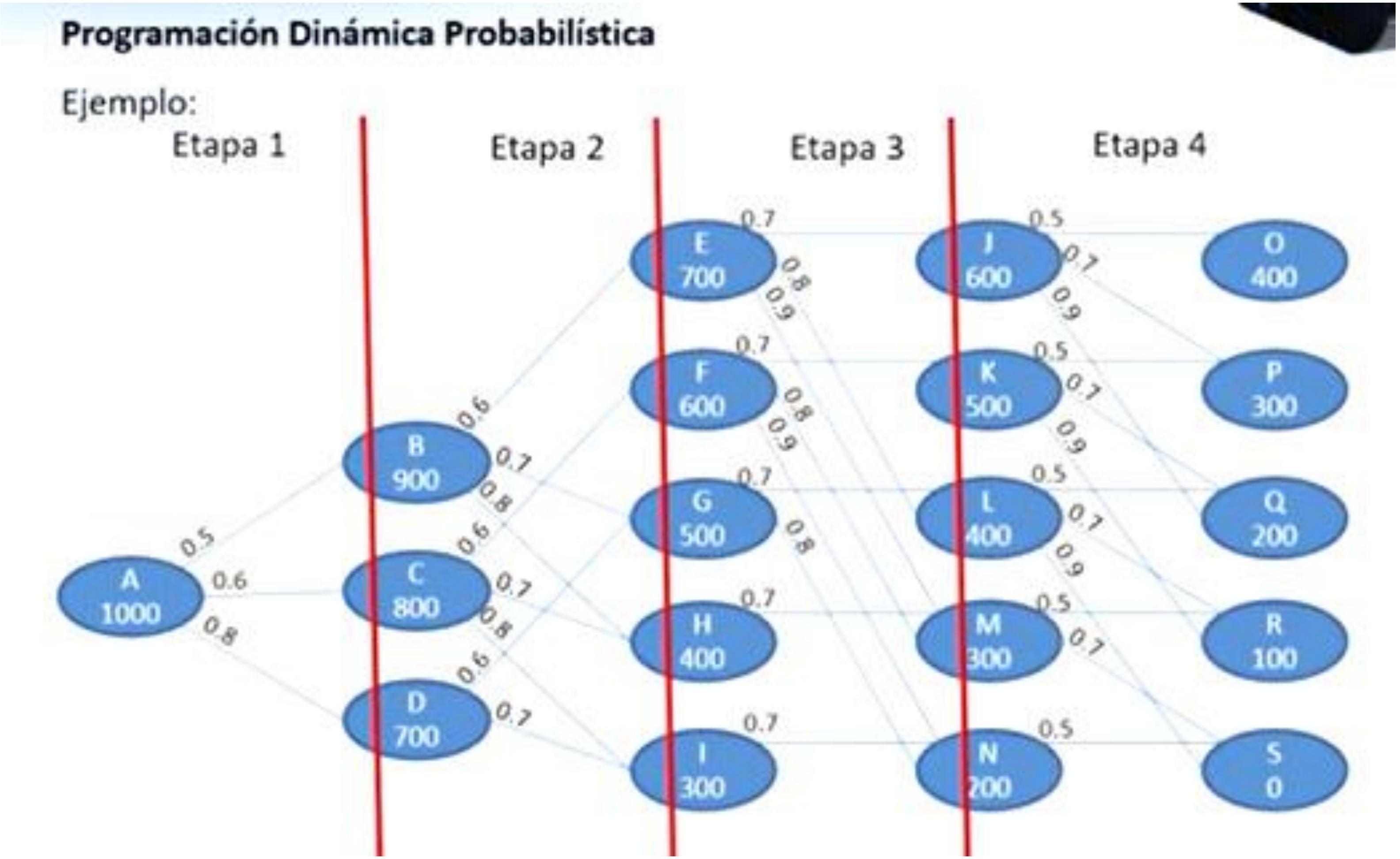
Considere la siguiente tabla en la que se encuentra el costo (en miles de dólares) de instalar una. Dos o tres unidades paralelas en los componentes respectivos

Unidades paralelas	Costo			
	Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4
1	1	2	1	2
2	2	4	3	3
3	3	5	4	4

Dadas las limitaciones de presupuesto, se puede gastar un máximo de $1000

Use programación dinámica para determinar cuantas unidades paralelas instalar en cada uno de los cuatro componentes para maximizar la productividad de que el sistema funcione

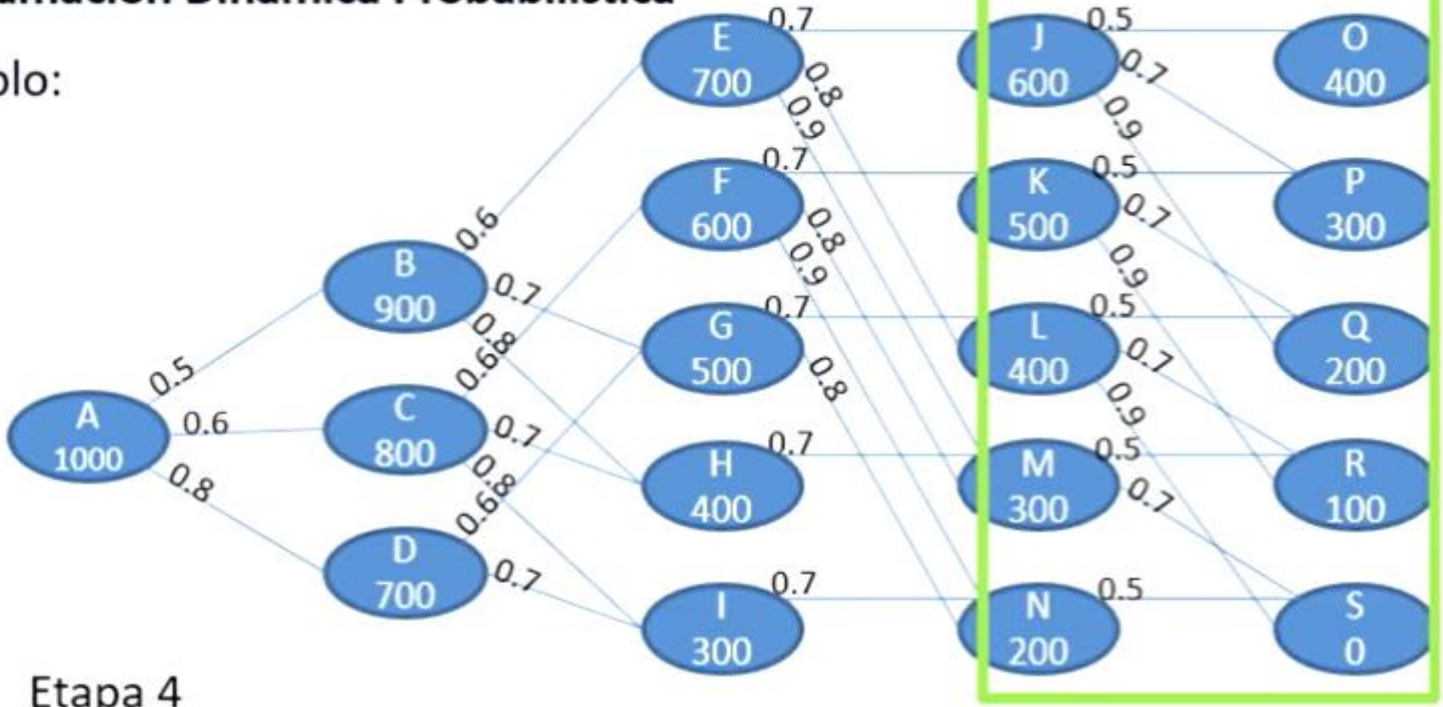
Programación Determinística



Programación Determinística

Programación Dinámica Probabilística

Ejemplo:



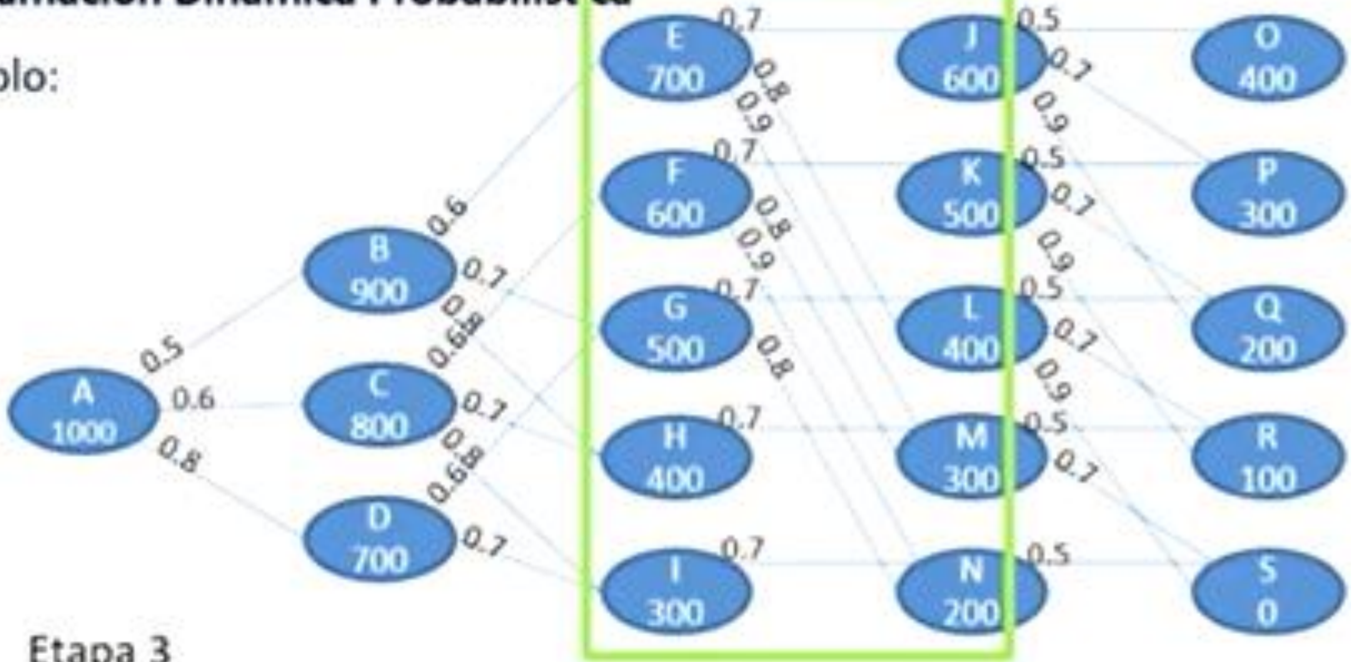
Etapa 4

S_4 \ X_4	$f_4(s_4,x_4)= X_4$					$f_4^*(s_4)$	x_4^*
	O	P	Q	R	S		
J	0.5	0.7	0.9			0.9	Q
K		0.5	0.7	0.9		0.9	R
L			0.5	0.7	0.9	0.9	S
M				0.5	0.7	0.7	S
N					0.5	0.5	S

Programación Determinística

Programación Dinámica Probabilíst ca

Ejemplo:



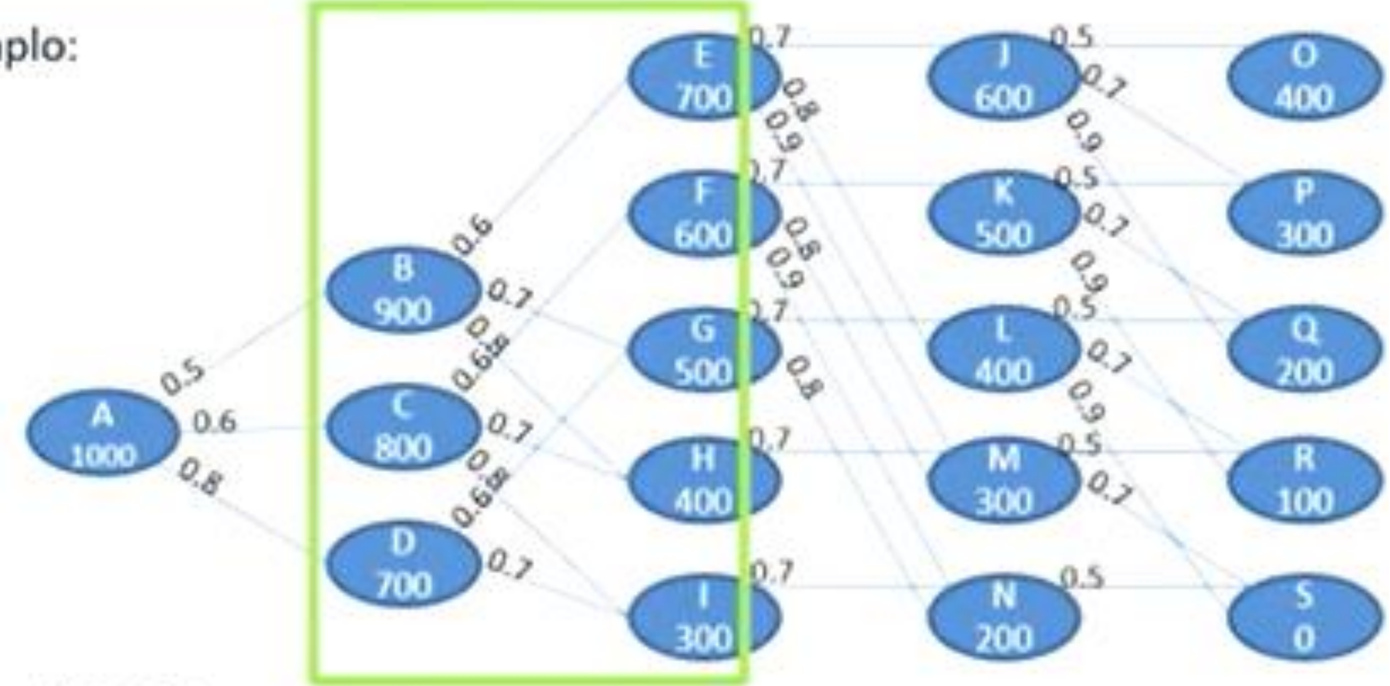
Etapa 3

S_3 \ X_3	$f_3(s_3, x_3) = (X_3)(f_4^*(s_4))$					$f_3^*(s_3)$	x_3^*
	J	K	L	M	N		
E	0.7*0.9		0.8*0.9	0.9*0.7		0.72	L
F		0.7*0.9		0.8*0.7	0.9*0.5	0.63	K
G			0.7*0.9		0.8*0.5	0.63	L
H				0.7*0.7		0.49	M
I					0.7*0.5	0.35	N

Programación Determinística

Programación Dinámica Probabilística

Ejemplo:



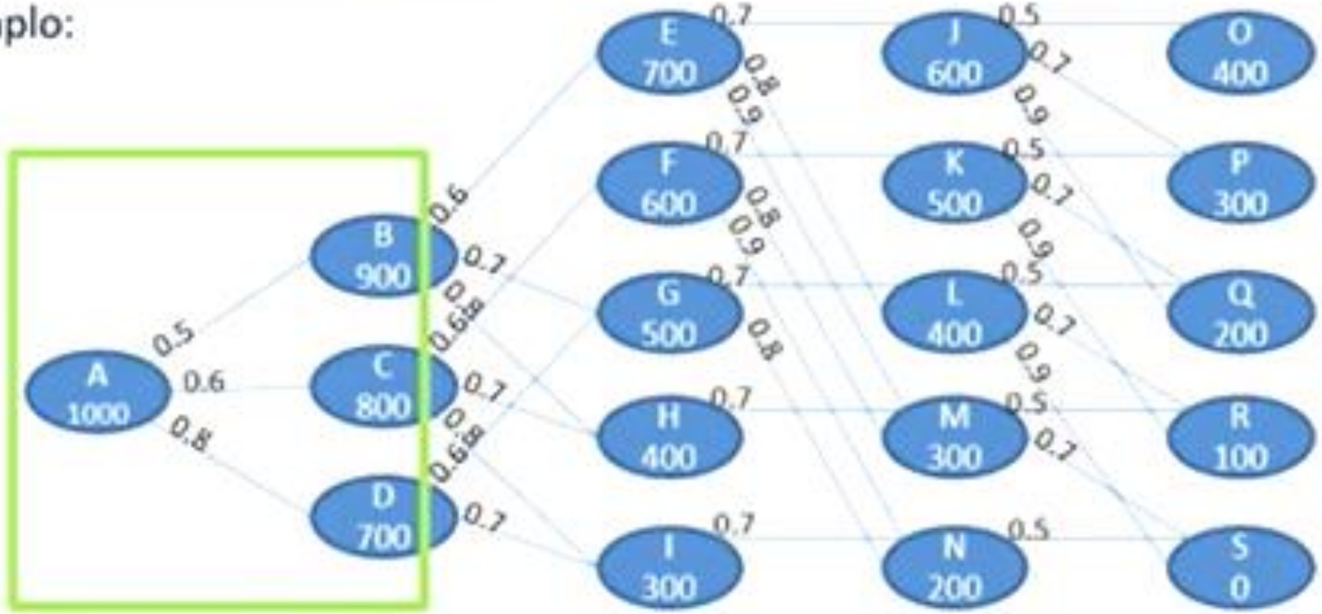
Etapa 2

S_2 \ X_2	$f_2(s_2,x_2)=(X_2)(f_3^*(s_3))$ E	F	G	H	I	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
B	0.6*0.72		0.7*0.63	0.8*0.49		0.441	G
C		0.6*0.63		0.7*0.49	0.8*0.35	0.378	F
D			0.6*0.63		0.7*0.35	0.378	G

Programación Determinística

Programación Dinámica Probabilística

Ejemplo:



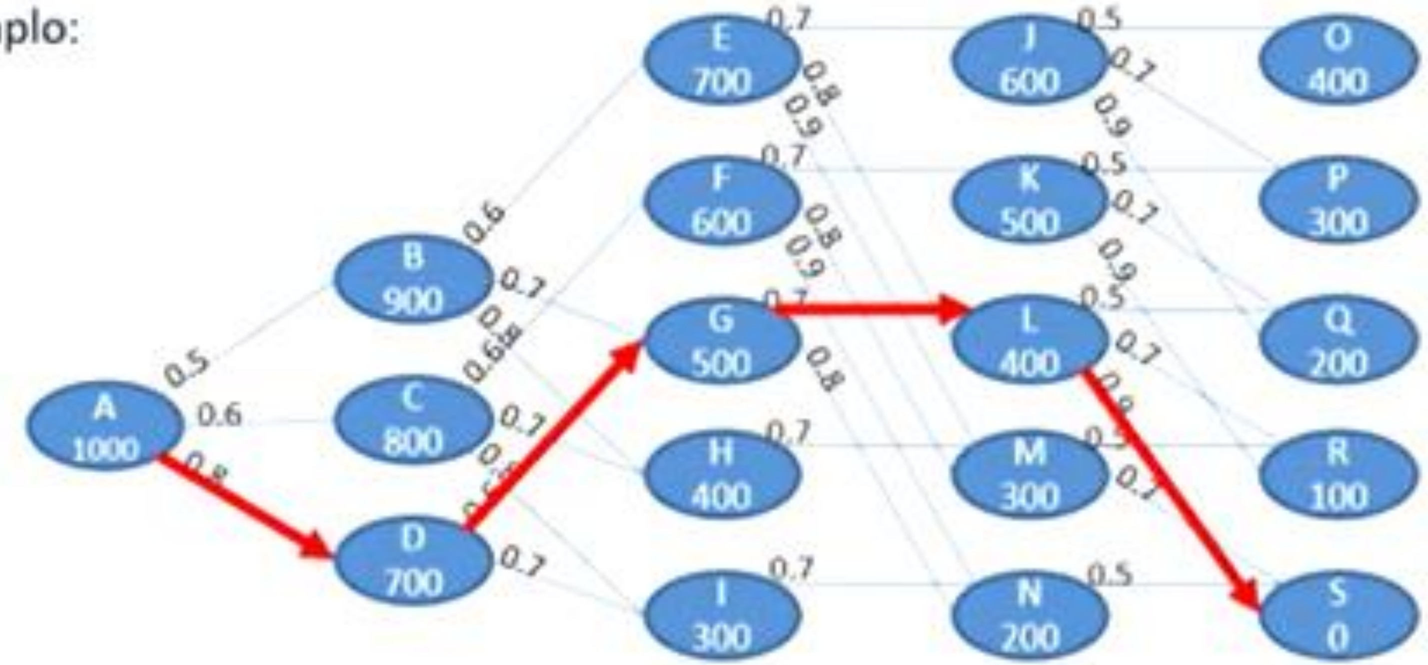
Etapa 1

S_1 \ X_1	$f_1(s_1,x_1)=(X_1)(f_2^*(s_2))$			$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	B	C	D		
A	0.5*0.441	0.6*0.378	0.8*0.378	0.3024	D

30.24% DE PROBABILIDAD MÁXIMA DE QUE EL SISTEMA FUNCIONE

Análisis de la solución

Ejemplo:



Solución: **30.24%** de probabilidad máxima de que el sistema funcione, colocando 3 piezas del componente 1, 1 pieza del componente 2, 1 pieza del componente 3 y 3 piezas del componente 4.

Trayectoria: A→D→G→L→O   Análisis adicional: Se gastó el total del presupuesto (S=$0)

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Gracias

- Néstor Muñoz
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe

941434300

60 años