Programación Lineal Entera

Método Aditivo de Egon Balas para problemas binarios (0,1)

Dr. Ing. Marisol Tapia R.

Método Aditivo de Egon Balas

El **Método de Balas** (o método de enumeración implícita de Egon Balas) es un método específico para resolver problemas de **programación entera** donde las variables de decisión son enteras. Este método se utiliza, sobre todo, en problemas de tipo **knapsack** o de combinaciones binarias. Su enfoque es similar al de **ramificación y acotamiento** pero adaptado para mejorar la eficiencia en problemas con restricciones específicas.

Concepto del Método de Balas

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

El método de Egon Balas es una técnica de **programación entera disyuntiva**. El objetivo es evitar evaluar todas las combinaciones posibles de variables enteras al dividir el espacio de soluciones en subconjuntos y acotar las soluciones no factibles o no óptimas.

La filosofía del método se basa en pensar que si se tiene una función objetiva minimizando y todos sus términos son positivos, entonces, entre menos variables tomen el valor de uno (1), la función objetiva será mínima.

Algoritmo

1. La función objetivo se minimiza, en caso de maximización, use la regla de equivalencia: Maximizar (Z) = Minimizar (-Z).
2. Se requiere que $C_j > 0$, para todo j. En caso de que $C_j < 0$, entonces
   X_j se sustituye por: $1 - X'_J$, es decir: $X_j = 1 - X'_J$

   Ejemplo: Min $Z = 3X_1 - 2X_2 \Rightarrow X_2 = 1 - X'_2$
   Remplazando $Z = 3X_1 - 2(1 - X'_2) = 3X_1 - 2 + 2X'_2$

Min $Z = 3X_1 + 2X'_2 - 2$, que para el caso queda: Min $Z = 3X_1 + 2X'_2$

Nota: El cambio de variable, también se debe aplicar a todas las restricciones.

Ejemplo 1

Para apreciar la utilidad del método, resolveremos el siguiente ejemplo, primero, contemplando todas las posibles soluciones y a continuación aplicando el método aditivo de Egon Balas, que reduce el número de soluciones posibles a contemplar.

Minimice:

$$Z = 8X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 5X_4 + X_5$$

s.a.

$$-6X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 < -3$$

$$-4X_1 - 5X_2 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 < -7$$

$$Xj = 0,1 \; ; \; j = 1,2,3,4,5$$

El número posible de soluciones es de 2n , en donde n es el número de variables. En el ejemplo, el número posible de soluciones es $2^5 = 32$

En el siguiente diagrama se muestran todas las 32 posibles soluciones.

	32 POSIBLES SOLUCIONES																															
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X_3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X_5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Algunas de éstas soluciones no son factibles, ya que no satisfacen las restricciones. Aquellas que satisfagan las restricciones, deberán ser remplazadas en la función objetivo y la que la haga más pequeña, será la solución óptima. Éste procedimiento es dispendioso, tanto en la consecución de todas las soluciones como en su evaluación para todas las restricciones y en su evaluación final sobre la función objetiva.

Aplicación del Método de Egon Balas

Evaluamos cada restricción, primeramente suponiendo que todas las variables valgan cero, y después, alternativamente a cada variable le asignamos el valor de uno (1) y al resto de variables el valor de cero (0). Cada vez que una solución no satisfaga una restricción, el que tan lejos está de satisfacerla, lo llamamos infactibilidad.

Ejemplo: Si $X_1 = 1$ y $X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$

Remplazando en la restricción uno (1), establecemos que: $-3 < 0$, luego aquí la infactibilidad es cero (0), ya que la solución evaluada, satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación ***verdadera***.

(1) $-6X1 - 3X2 + 2X3 - 4X4 - X5 < -3$

Aplicación del Método de Egon Balas

Remplazando en la restricción dos (2), establecemos que: $3 < 0$, luego aquí la infactibilidad es tres (3), ya que la solución evaluada, no satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación ***falsa***. El que tan lejos está de ser una verdad, es lo que llamamos infactibilidad.

En total, la solución evaluada tiene una infactibilidad de $0 + 3 = 3$

Si en ésta primera iteración, encontramos una solución cuya infactibilidad sea cero (0), hemos encontrado la solución factible y óptima. Si encontramos que varias soluciones tienen la infactibilidad igual a cero (0), remplazamos todas éstas soluciones en la función objetivo y la solución óptima será aquella que haga que Z sea mínima.

$$(2) \qquad -4X1 - 5X2 - 4X3 - 3X4 + 3X5 < -7$$

Aplicación del Método de Egon Balas

Si no hay ninguna solución con su infactibilidad igual a cero (0), Escogemos la solución que menor infactibilidad tenga y de ella la variable que esté valiendo uno (1).

Remplazamos en las restricciones dicha variable y sobre dichas restricciones iniciamos la segunda iteración. Éste procedimiento se repite hasta encontrar la solución óptima factible.

Ejemplo 1 :

Minimice:

$$Z = 8X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 5X_4 + X_5$$

s.a.

$$-6X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 < -3$$

$$-4X_1 - 5X_2 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 < -7$$

$$Xj = 0,1 \ ; \ j = 1,2,3,4,5$$

PRIMERA ITERACIÓN

$-6X1 - 3X2 + 2X3 - 4X4 - X5 + 3 < 0$

$-4X1 - 5X2 - 4X3 - 3X4 + 3X5 + 7 < 0$

$X1 = X2 = X3 = X4 = X5 = 0$

$3 < 0$

$7 < 0$

Infactibilidad = 10

$X1 = 1$; $X2 = X3 = X4 = X5 = 0$

$-3 < 0$

$3 < 0$

Infactibilidad = 3

$X2 = 1$; $X1 = X3 = X4 = X5 = 0$

$0 < 0$

$2 < 0$

Infactibilidad = 2 ;

LA MENOR

$X3 = 1$; $X1 = X2 = X4 = X5 = 0$

$5 < 0$

$3 < 0$

Infactibilidad = 8

$X4 = 1$; $X1 = X2 = X3 = X5 = 0$

$-1 < 0$

$4 < 0$

Infactibilidad = 4

$X5 = 1$; $X1 = X2 = X3 = X4 = 0$

$2 < 0$

$10 < 0$

Infactibilidad = 12

SEGUNDA ITERACIÓN (X2 = 1)

$-6X1 + 2X3 - 4X4 - X5 < 0$

$-4X1 - 4X3 - 3X4 + 3X5 + 2 < 0$

X1 = 1 ; X3 = X4 = X5 = 0

-6 < 0

-2 < 0

Infactibilidad = 0 ;

X3 = 1 ; X1 = X4 = X5 = 0

2 < 0

-2 < 0

Infactibilidad = 2

X4 = 1 ; X1 = X3 = X5 = 0

-4 < 0

-1 < 0

Infactibilidad = 0

X5 = 1 ; X1 = X3 = X4 = 0

-1 < 0

5 < 0

Infactibilidad = 5

En ésta iteración hay dos soluciones con infactibilidad igual a cero (0), evaluado la función objetivo con ambas soluciones, encontramos la solución óptima con **Z = 12**

Minimice:

$$Z = 8X1 + 7X2 + 6X3 + 5X4 + X5$$

s.a.

$$-6X1 - 3X2 + 2X3 - 4X4 - X5 < -3$$

$$-4X1 - 5X2 - 4X3 - 3X4 + 3X5 < -7$$

$$Xj = 0,1 \; ; \; j = 1,2,3,4,5$$

(X1 = 1 y X2 =1)

X1 = 1 ; X3 = X4 = X5 = 0

-6 < 0

-2 < 0

Infactibilidad = 0 ; Z=15

(X2 = 1 y X4 =1)

X4 = 1 ; X1 = X3 = X5 = 0

-4 < 0

-1 < 0

Infactibilidad = 0 Z=12

En ésta iteración hay dos soluciones con infactibilidad igual a cero (0), evaluado la función objetivo con ambas soluciones, encontramos la solución óptima con **Z = 12**

Resultado:

Solución:

X1* = 0 ;

X2* = 1 ;

X3* = 0 ;

X4* = 1;

X5* = 0 ;

Z* = 12

Solamente se hizo necesario escudriñar 10 de las 32 soluciones posibles.

Podemos asegurar que el método hace una búsqueda sistemática que evita probar todas las combinaciones posibles.

Analicemos el siguiente ejercicio:

$$Max\ Z = 3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - 2y_4 + 3y_5$$

$$s.a: \quad y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \leq 4$$

$$7\, y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \leq 8$$

$$11y_1 - 6y_2 + 3y_4 - 3y_5 \geq 3$$

$$x_{ij} = 0{,}1\ (binarias)$$

1. La función objetivo se minimiza, en caso de maximización, use la regla de equivalencia:

Maximizar (Z) = Minimizar (-Z).

$$Min\ W = -3y_1 - 2y_2 + 5y_3 + 2y_4 - 3y_5$$

$$s.a: \quad y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \leq 4$$

$$7\,y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \leq 8$$

$$-11y_1 + 6y_2 - 3y_4 + 3y_5 \leq -3$$

$$x_{ij} = 0{,}1\ (binarias)$$

Ajustando el modelo:

$$Min\ W = -3y_1 - 2y_2 + 5y_3 + 2y_4 - 3y_5$$

$$s.a: \quad y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \leq 4$$

$$7\,y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \leq 8$$

$$-11y_1 + 6y_2 - 3y_4 + 3y_5 \leq -3$$

$$x_{ij} = 0{,}1\ (binarias)$$

Ajustando el modelo:

2. Se requiere que Cj > 0 , para todo j. En caso de que Cj < 0 , entonces Xj se sustituye por: 1 - X'J , es decir: Xj = 1 - X'J

$$y_1 = 1 - x_1, \quad y_2 = 1 - x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4, \quad y_5 = 1 - x_5$$

$$\begin{aligned}
Min\ W' &= -3(1 - x_1) - 2(1 - x_2) + 5(x_3) + 2(x_4) - 3(1 - x_5) \\
s.a: \quad & (1 - x_1) + (1 - x_2) + (x_3) + 2(x_4) + (1 - x_5) \leq 4 \\
& 7\,(1 - x_1) + 3(x_3) - 4(x_4) + 3(1 - x_5) \leq 8 \\
& -11(1 - x_1) + 6(1 - x_2) - 3(x_4) + 3(1 - x_5) \leq -3 \\
& x_{ij} = 0{,}1\ (binarias)
\end{aligned}$$

NOTA: El cambio de variable, también se debe aplicar a todas las restricciones.

Reemplazamos las variables

En lugar de analizar las 2^n en este ejemplo $2^5=32$ opciones de 0,1 para las variables como en el método de enumeración implícita, en el método aditivo sólo analizaremos algunas de ellas, comenzando con todas las variables igual a 0.

- $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$-(0) - (0) + (0) + 2(0) - (0) - 1 \leq 0 \qquad -1 \leq 0$

$-7(0) + 3(0) - 4(0) - 3(0) + 2 \leq 0 \qquad 2 \leq 0$

$11(0) - 6(0) - 3(0) - 3(0) + 1 \leq 0 \qquad 1 \leq 0$

Infactibilidad=3

PRIMERA ITERACIÓN

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

$X_1=1$

- $x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$-(1) - (0) + (0) + 2(0) - (0) - 1 \leq 0$	$-2 \leq 0$	
$-7(1) + 3(0) - 4(0) - 3(0) + 2 \leq 0$	$-5 \leq 0$	
$11(1) - 6(0) - 3(0) - 3(0) + 1 \leq 0$	$12 \leq 0$	Infactibilidad=12

$X_2=1$

- $x_2 = 1, \quad x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$-(0) - (1) + (0) + 2(0) - (0) - 1 \leq 0$	$-2 \leq 0$	
$-7(0) + 3(0) - 4(0) - 3(0) + 2 \leq 0$	$2 \leq 0$	
$11(0) - 6(1) - 3(0) - 3(0) + 1 \leq 0$	$-5 \leq 0$	Infactibilidad=2

PRIMERA ITERACIÓN

X_3=1

- $x_3 = 1, \quad x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$

$-(0) - (0) + (1) + 2(0) - (0) - 1 \leq 0$	$0 \leq 0$	
$-7(0) + 3(1) - 4(0) - 3(0) + 2 \leq 0$	$5 \leq 0$	
$11(0) - 6(0) - 3(0) - 3(0) + 1 \leq 0$	$1 \leq 0$	Infactibilidad=6

X_4=1

- $x_4 = 1, \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$

$-(0) - (0) + (0) + 2(1) - (0) - 1 \leq 0$	$1 \leq 0$	
$-7(0) + 3(0) - 4(1) - 3(0) + 2 \leq 0$	$-2 \leq 0$	
$11(0) - 6(0) - 3(1) - 3(0) + 1 \leq 0$	$-2 \leq 0$	Infactibilidad=1

PRIMERA ITERACIÓN

X_5=1

- $x_5 = 1, \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$-(0) - (0) + (0) + 2(0) - (1) - 1 \leq 0 \qquad -2 \leq 0$

$-7(0) + 3(0) - 4(0) - 3(1) + 2 \leq 0 \qquad -1 \leq 0$

$11(0) - 6(0) - 3(0) - 3(1) + 1 \leq 0 \qquad -2 \leq 0$

Infactibilidad=0

SOLUCIÓN:

Tomamos el caso en el que la Infactibilidad=0

$x_5 = 1, \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

W=3(0)+2(0)+5(0)+2(0)+3(1)=3

Ahora sustituimos el resultado en el cambio de variable que hicimos, es decir:

$$y_1 = 1 - (0) = 1, \quad y_2 = 1 - (0) = 1, \quad y_3 = (0) = 0, \quad y_4 = (0) = 0, \quad y_5 = 1 - (1) = 0$$

Sustituyendo esto en la función objetivo del problema original tenemos:

Z=3(1)+2(1)-5(0)-2(0)+3(0)=5

La solución es $y_1 = y_2 = 1, \; y_3 = y_4 = y_5 = 0$ con Z=5

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Actividad:

De manera individual comparta por el SIA la solución al siguiente planteamiento utilizando **Método Aditivo de Egon Balas**

$$\text{Min } Z = X'_1 + 1{,}8X'_2 + 1{,}6X'_3 + 0{,}8X'_4 + 1{,}4X'_5$$
$$\text{C.S.R.} \quad -6X_1' - 12X_2' - 10X_3' - 4X_4' - 8X_5' + 20 \leq 0$$

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

GRACIAS

- **Néstor Muñoz**
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe
- 941434300