



RELACIONES EN

$$\mathfrak{R}^2$$

DEFINICIONES PREVIAS

PAR ORDENADO: Es un conjunto de dos elementos en el cual, cada elemento tiene un lugar fijo.

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

PROPIEDAD:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

RELACIÓN BINARIA

Se denomina Relación Binaria entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B a todo subconjunto R del producto cartesiano A X B, esto es , una relación binaria R consiste en:

- Un conjunto A (Conjunto de Partida)
- Un conjunto B (Conjunto de Llegada)
- Un enunciado abierto

RELACION BINARIA

Se denomina Relación Binaria entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$, esto es, una relación binaria R consiste en:

Un conjunto A (Conjunto de Partida)

Un conjunto B (Conjunto de Llegada)

Un enunciado abierto

$$R = \{(x, y) \in A \times B / P(x, y) \subset A \times B\}$$

$$R : A \rightarrow B \leftrightarrow R \subset A \times B$$

RELACION BINARIA

DOMINIO DE UNA RELACIÓN: Se denomina dominio de una Relación “R” de A en B al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación.

$$Dom(R) = \{x \in A / \exists y \in B / (x, y) \in \mathfrak{R}\}$$

$$x \in Dom(R) \leftrightarrow \exists y \in B / (x, y) \in \mathfrak{R}$$

RANGO DE UNA RELACIÓN: Se denomina rango de una relación R de A en B al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de la relación.

$$Ran(R) = \{y \in B / \exists x \in A / (x, y) \in \mathfrak{R}\}$$

$$y \in Ran(R) \leftrightarrow \exists x \in A / (x, y) \in \mathfrak{R}$$

GRÁFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS POR ECUACIONES

A) RELACIONES DE LA FORMA:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c = 0\}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax^2 + bx + c\}$$

Tienen por gráficas una línea recta y una Parábola respectivamente.

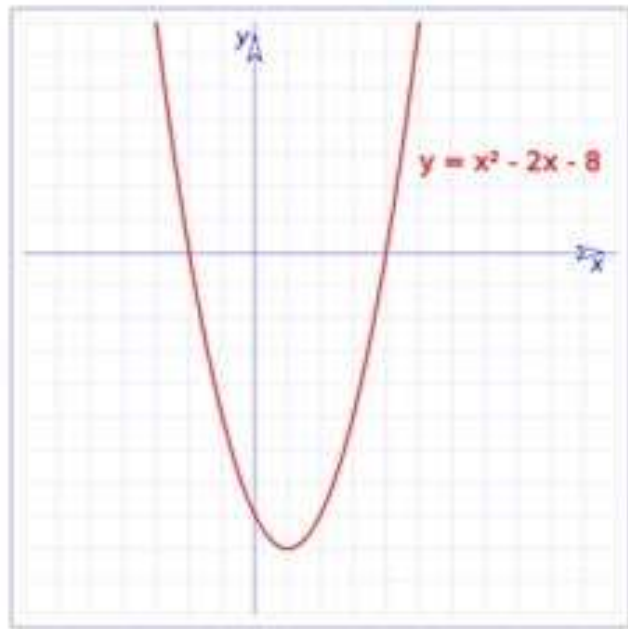
CARACTERÍSTICAS DE UNA PARÁBOLA

SIMETRÍA: cada parábola es simétrica con respecto a una línea vertical llamada eje de simetría.

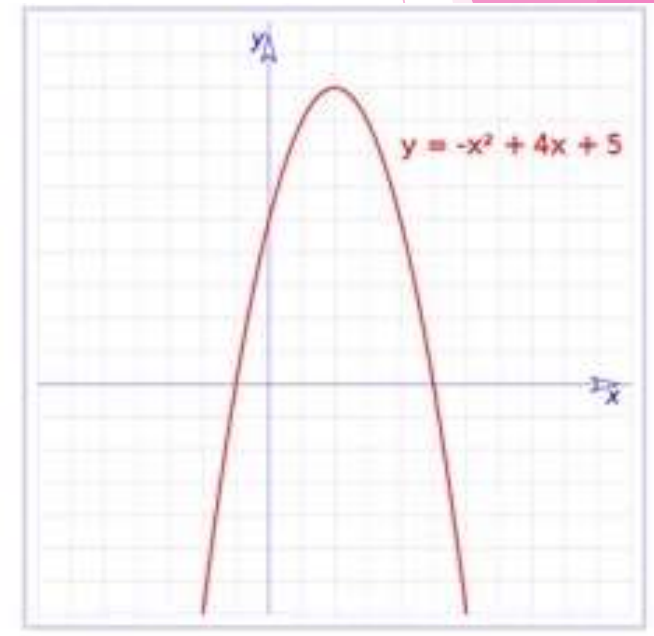
VÉRTICE: es el punto donde la parábola interfecta al eje de simetría.

La expresión $y = ax^2 + bx + c$ se puede expresar como $y = a(x - h)^2 + k$

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.



Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



LAS RELACIONES DE LA FORMA

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x = ay^2 + by + c\}$$

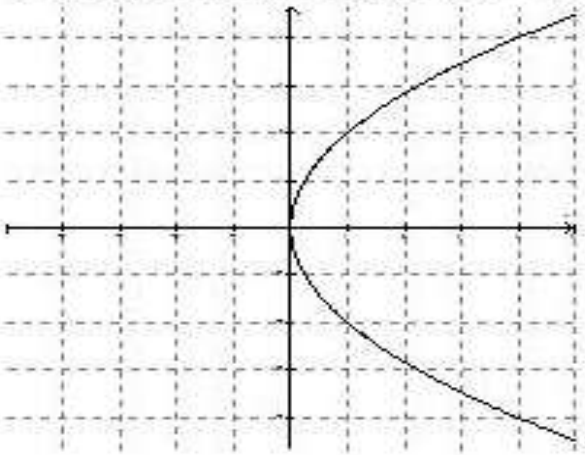
$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x = a(y - k)^2 + h\}$$

Tienen por gráfico una parábola de eje horizontal.

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia la derecha.

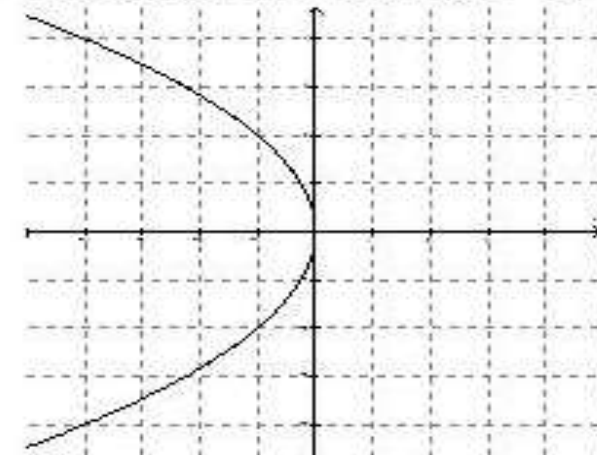
Si $a < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Parámetro positivo ($a > 0$)



La parábola abre hacia la derecha

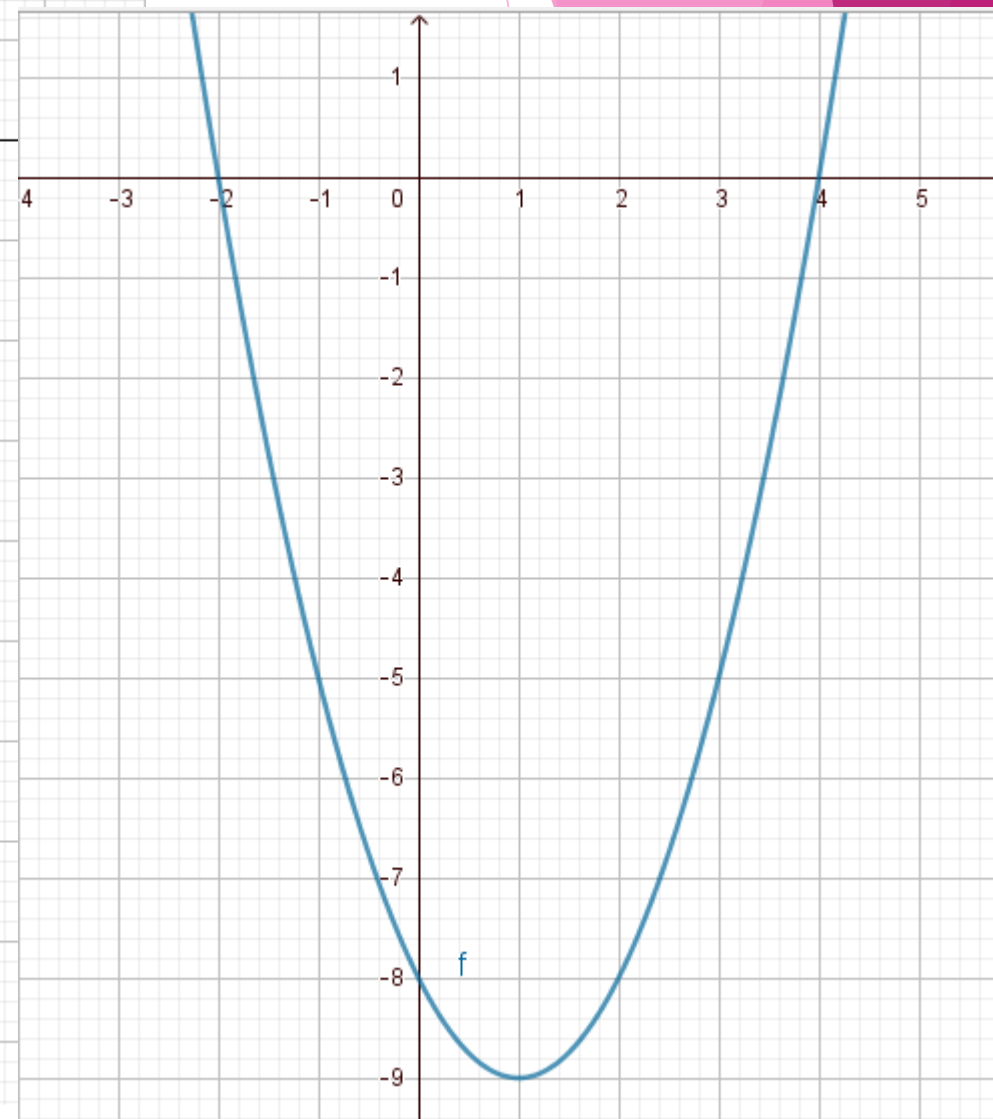
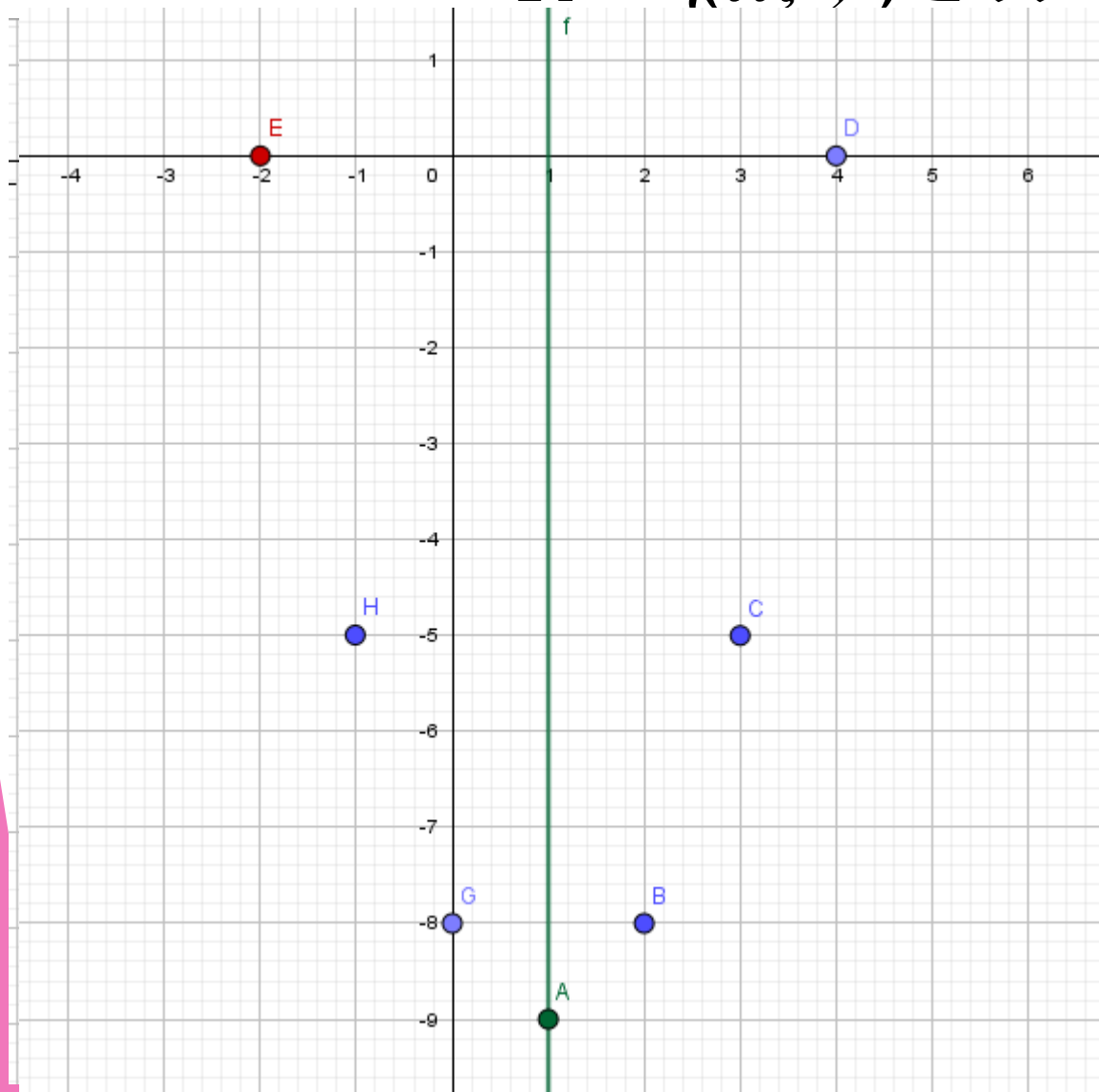
Parámetro positivo ($a > 0$)



La parábola abre hacia la izquierda

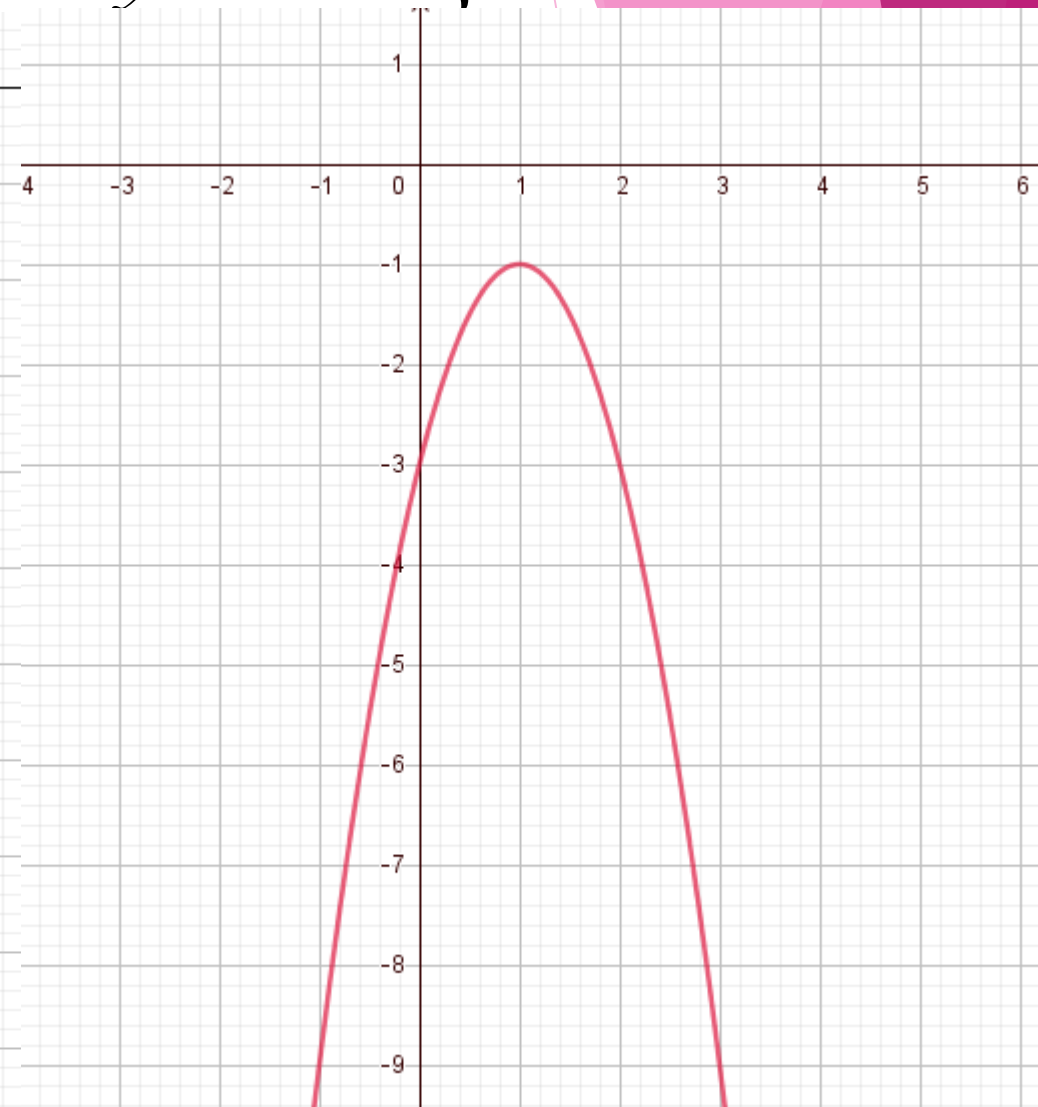
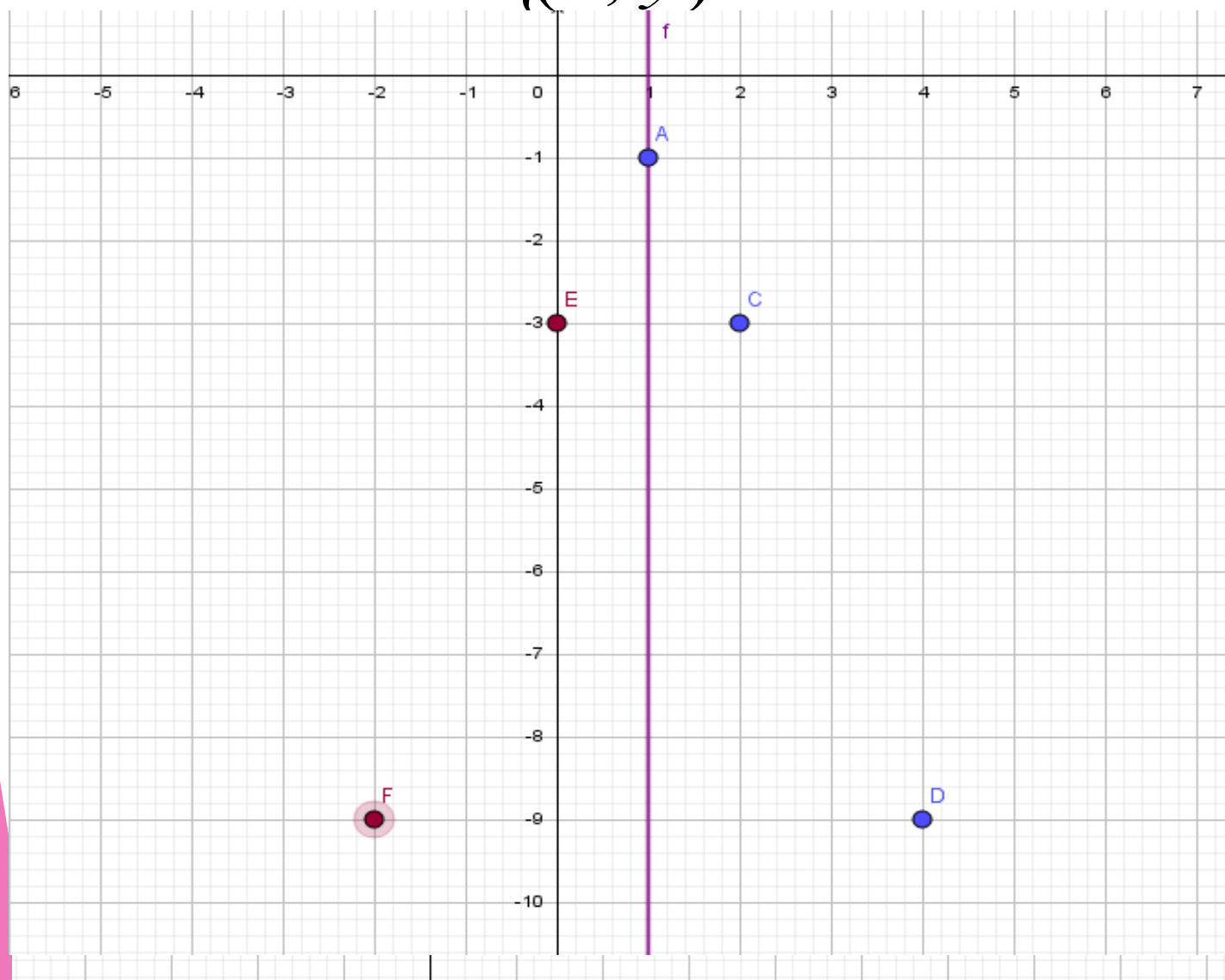
Ejercicio 01: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2 - 2x - 8\}$$



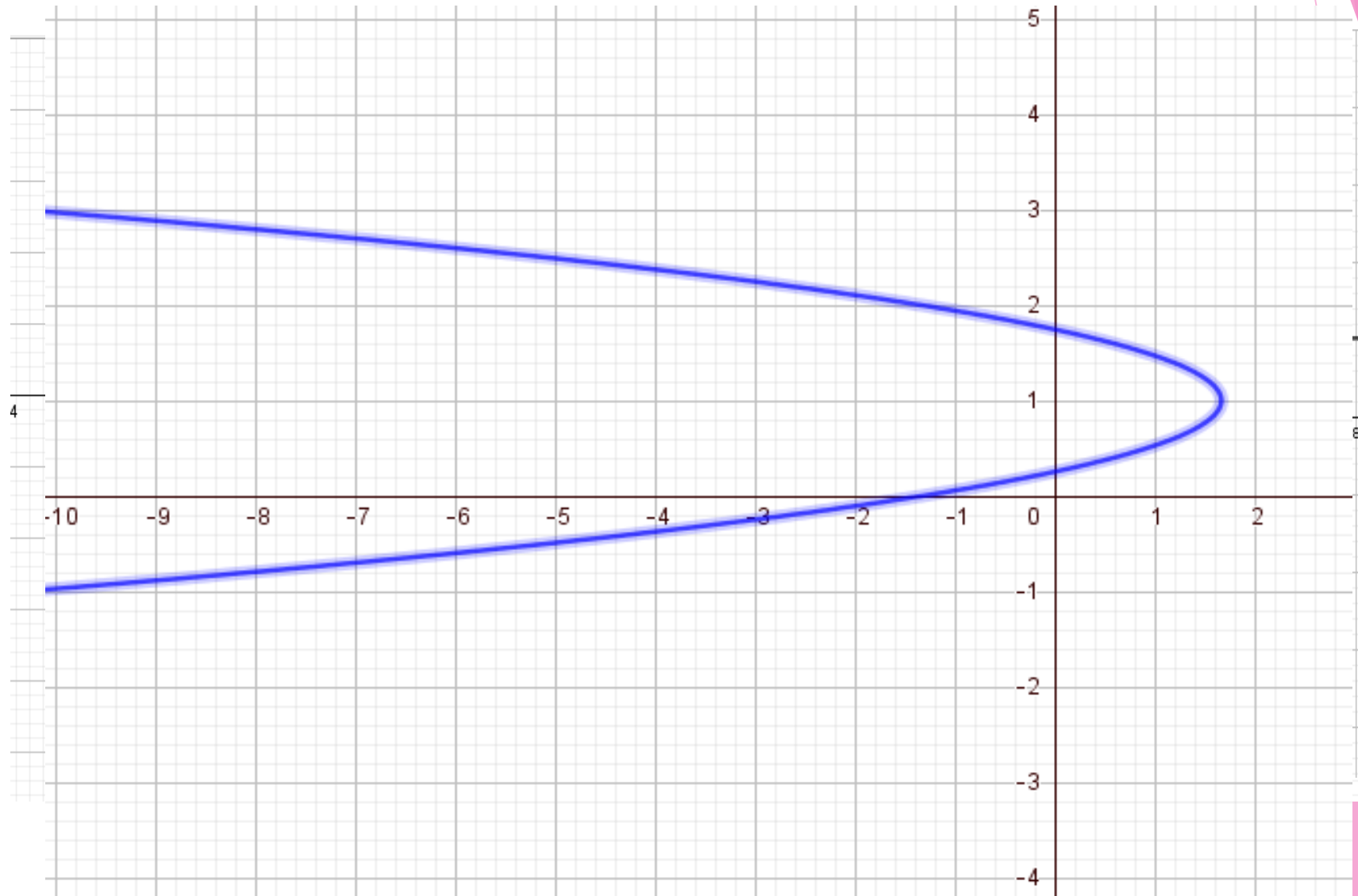
Ejercicio 02: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 - 4x + y + 3 = 0\}$$



Ejercicio 03: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 3x + 9y^2 - 18y + 4 = 0\}$$



Ejercicio 03: Trazar el grafico de la relación

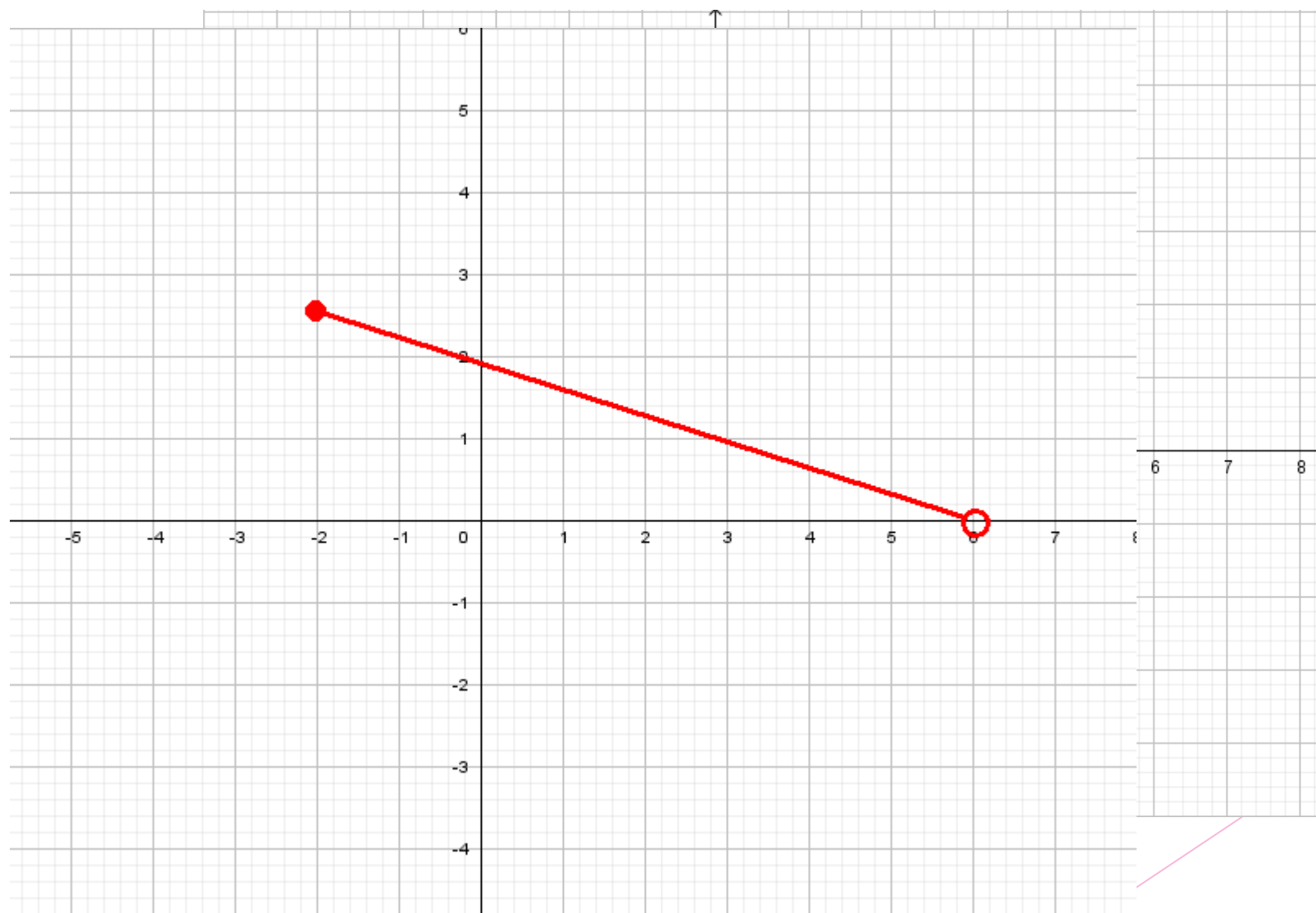
$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 3x + 9y^2 - 18y + 4 > 0\}$$

Ejercicio 04: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x = y^2 - 6y + 5\}$$

Ejercicio 05: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x + 3y - 6 = 0, x \in [-2, 6)\}$$



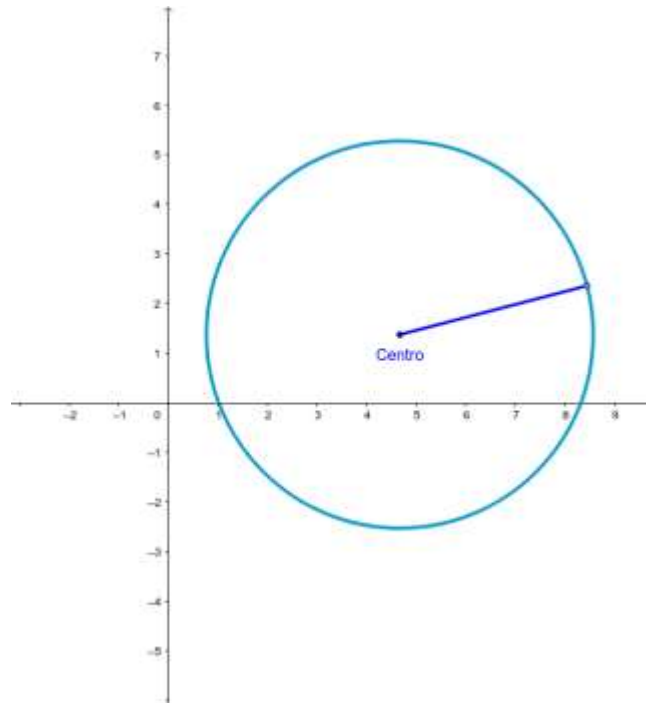
Ejercicio 06: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 2x - 3y + 8 = 0, y \in \langle -2, 6] \}$$

B) RELACIONES DE LA FORMA:

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\}$$

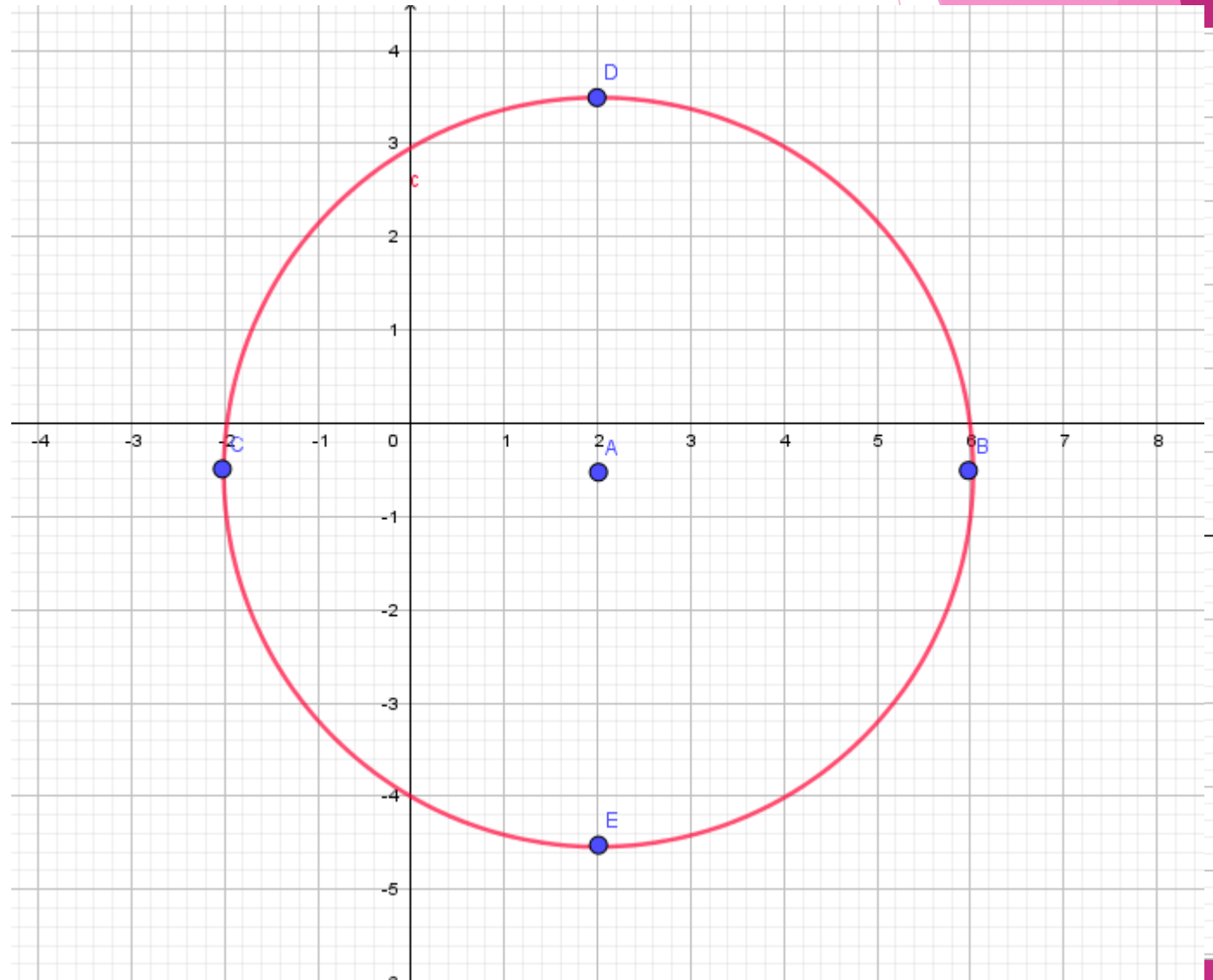
se puede escribir como $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
que tienen por gráfica una circunferencia de radio $r > 0$ y centro (h, k)



Ejercicio 01: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 4x^2 + 4y^2 - 16x + 4y - 47 = 0\}$$

$$4x^2 + 4y^2 - 16x + 4y - 47 = 0$$



Ejercicio 02: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 9 = 0\}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 9 > 0\}$$

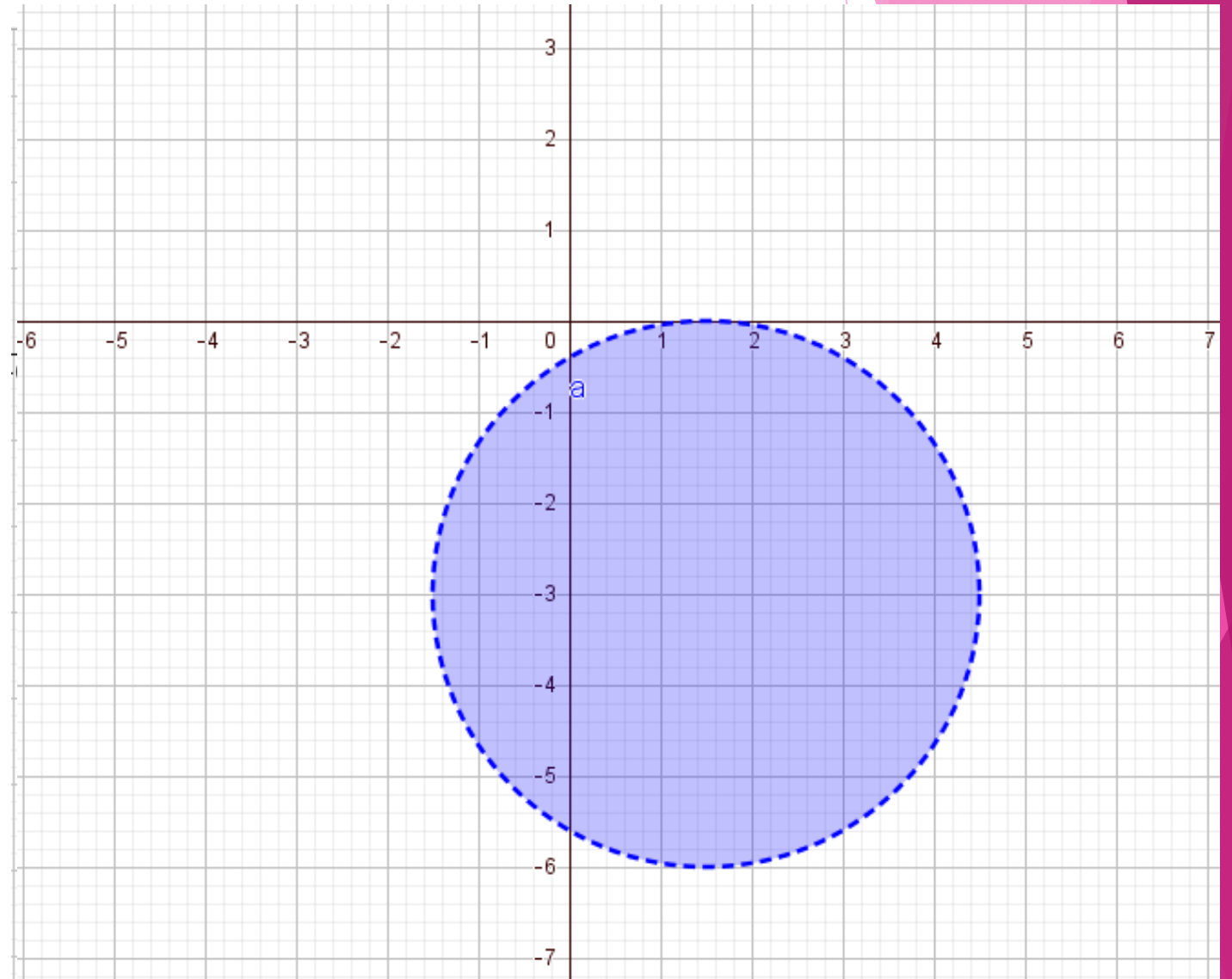
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y - 1)^2 < 36 \wedge x^2 > y + 9 \}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 9 < 0 \}$$

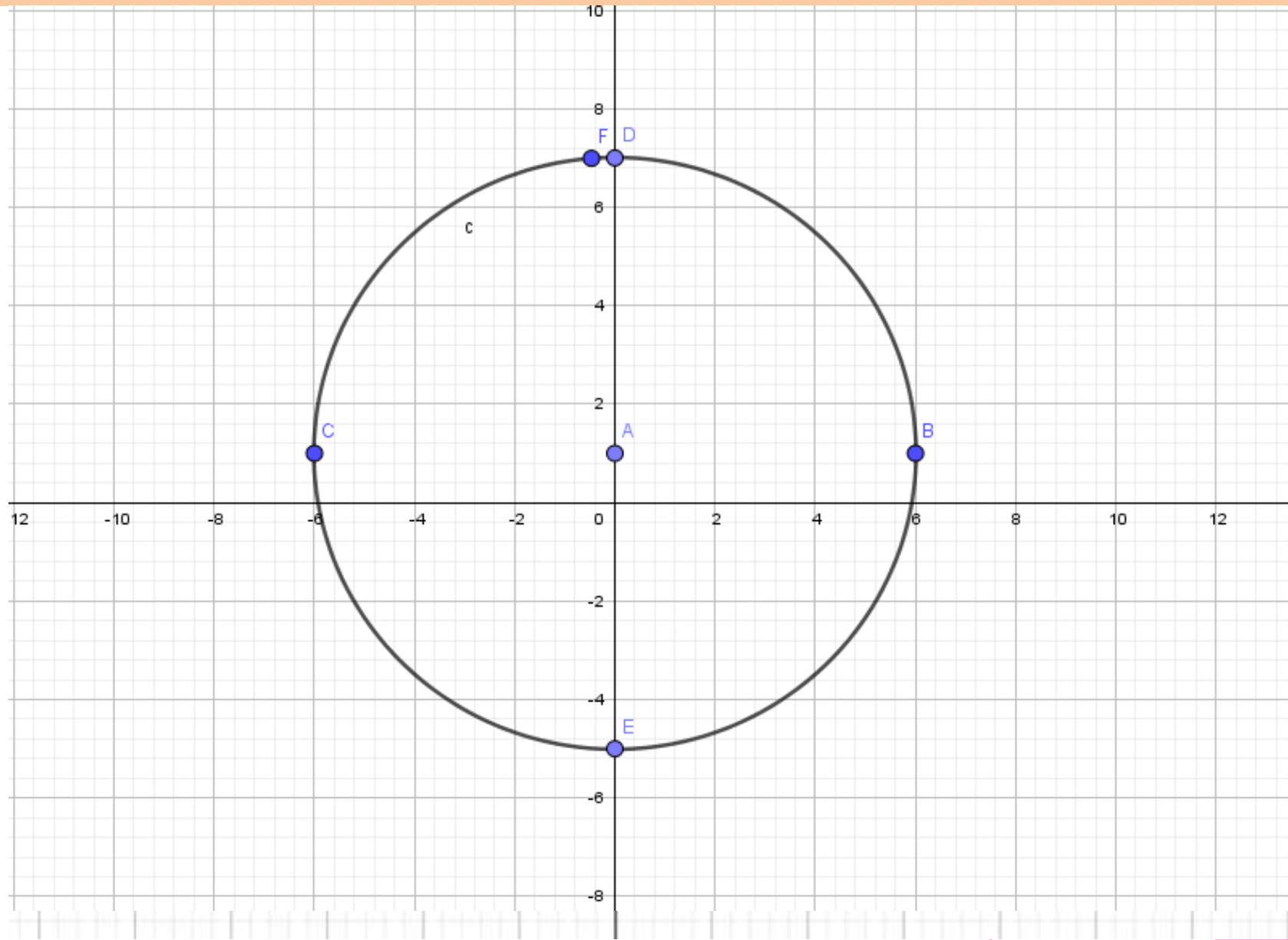
1º) Graficar la igualdad

$$4x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 9 = 0$$

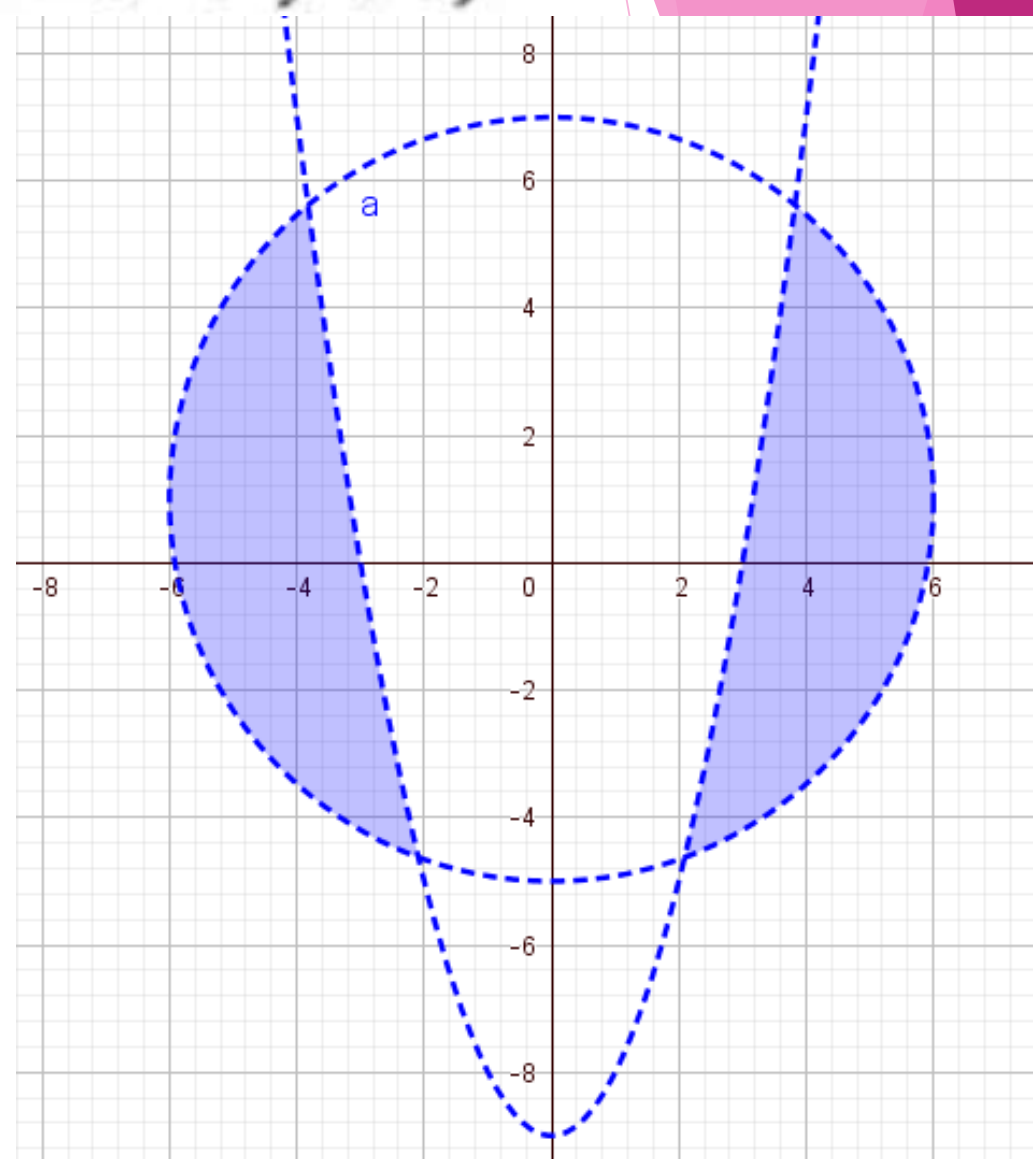
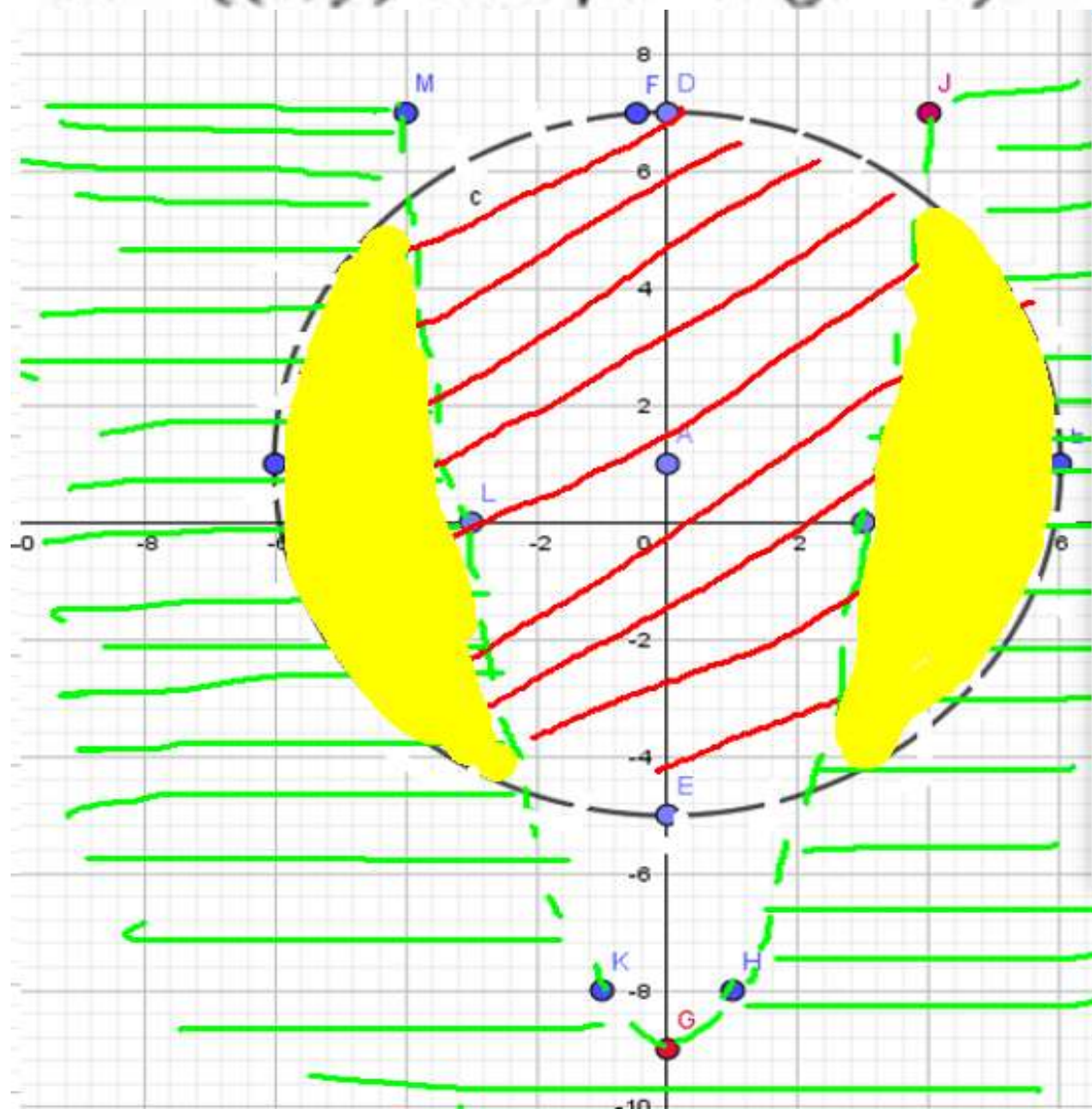
2º) analizamos la desigualdad



$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y - 1)^2 < 36 \wedge x^2 > y + 9 \}$$



$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y - 1)^2 < 36 \wedge x^2 > y + 9\}$$



$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 \leq 0, x + y + 2 \leq 0\}$$

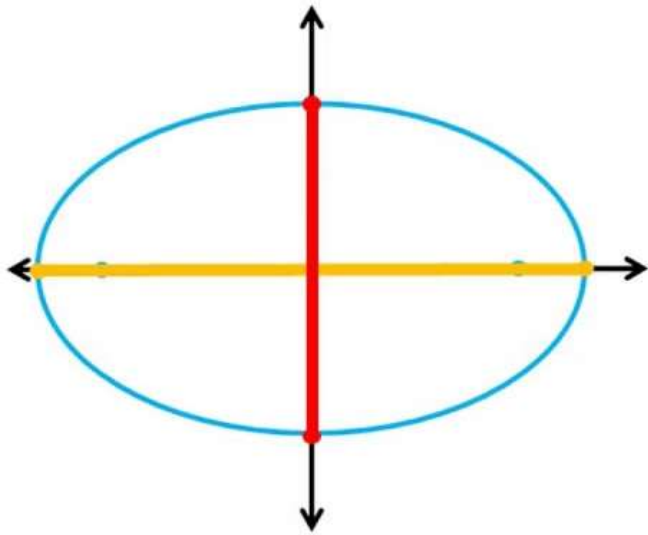
practica : ejercicio 04

B) RELACIONES DE LA FORMA:

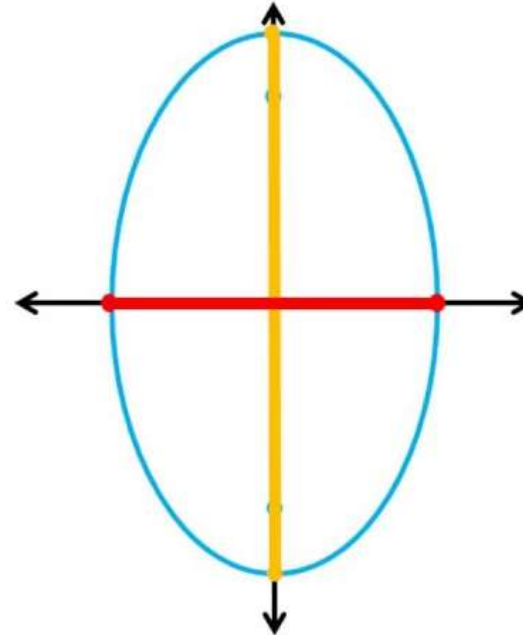
$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}$$

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Tienen por gráfico una elipse, donde “a” es el semieje mayor, “b” es el semieje menor y (h,k) es el centro de la elipse.

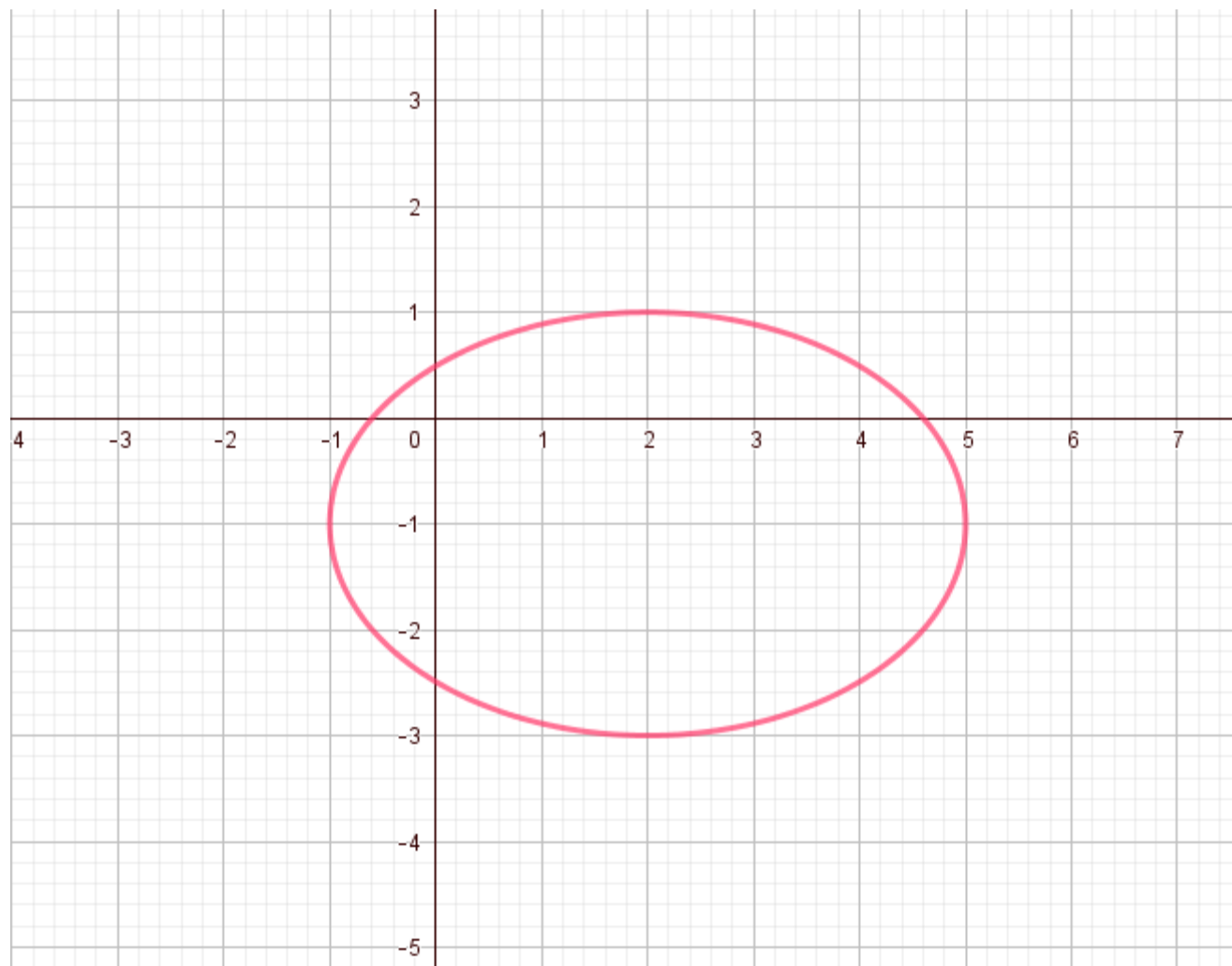


$4x^2$



Ejercicio 01: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11\}$$



Ejercicio 02: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2 + 4y^2 + 18x - 32y \leq -37\}$$

practica : ejercicio 05

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 + 4y^2 \geq 12\}$$

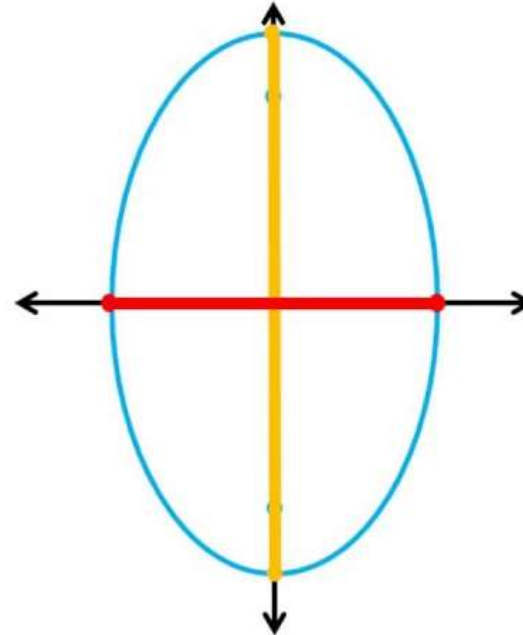
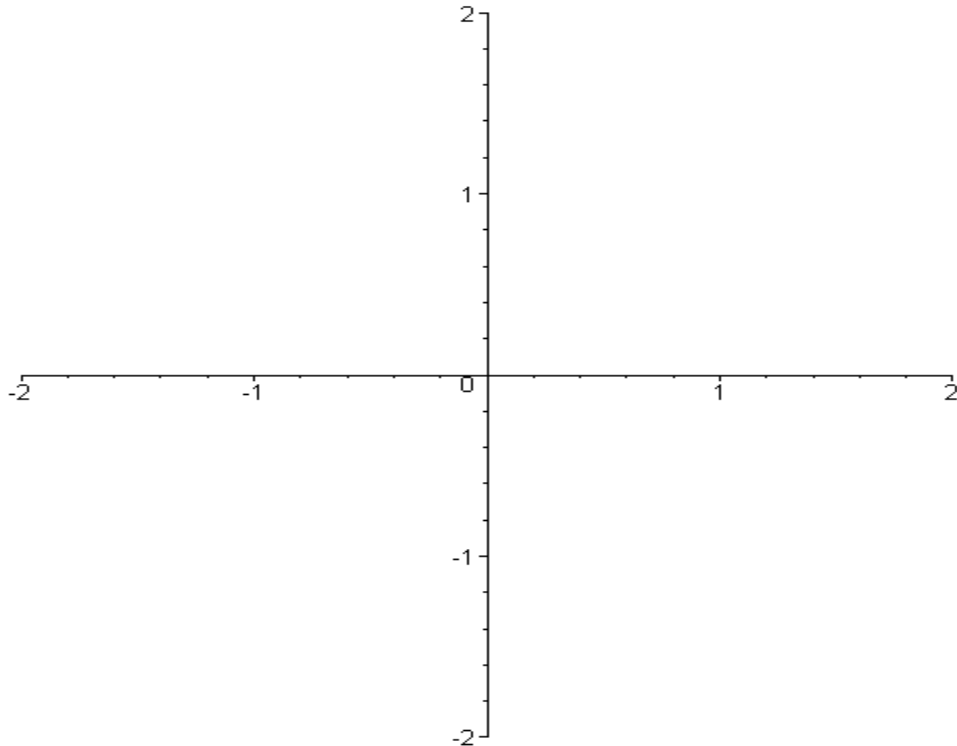
practica : ejercicio 06

B) RELACIONES DE LA FORMA:

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}$$

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Tienen por gráfico una elipse, donde “a” es el semieje mayor, “b” es el semieje menor y (h,k) es el centro de la elipse.



Ejercicio 01: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11\}$$

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$$

$$(4x^2 - 16x) + (9y^2 + 18y) = 11$$

$$4(x^2 - 4x + 4 - 4) + 9(y^2 + 2y + 1 - 1) = 11$$

$$4(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 36$$

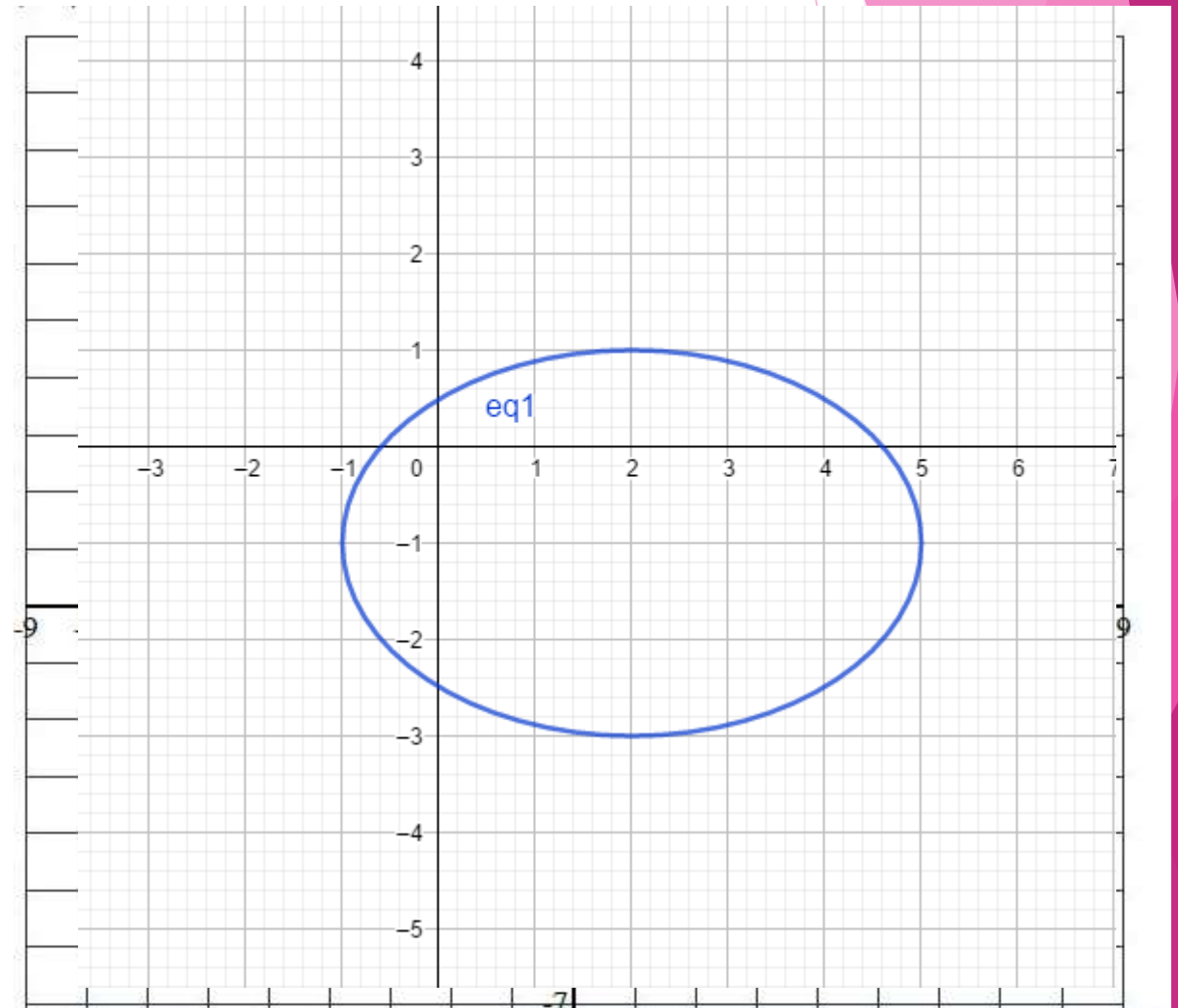
$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

Elipse

Centro $C(h,k) = (2, -1)$

semi eje mayor $a=3$

Semi eje menor $b=2$



Ejercicio 02: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2 + 4y^2 + 18x - 32y \leq -37\}$$

1º) Graficamos la ecuacion

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 32y = -37$$

$$(9x^2 + 18x) + (4y^2 - 32y) = -37$$

$$9(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 8y + 16 - 16) = -37$$

$$9(x+1)^2 + 4(y-4)^2 = 36$$

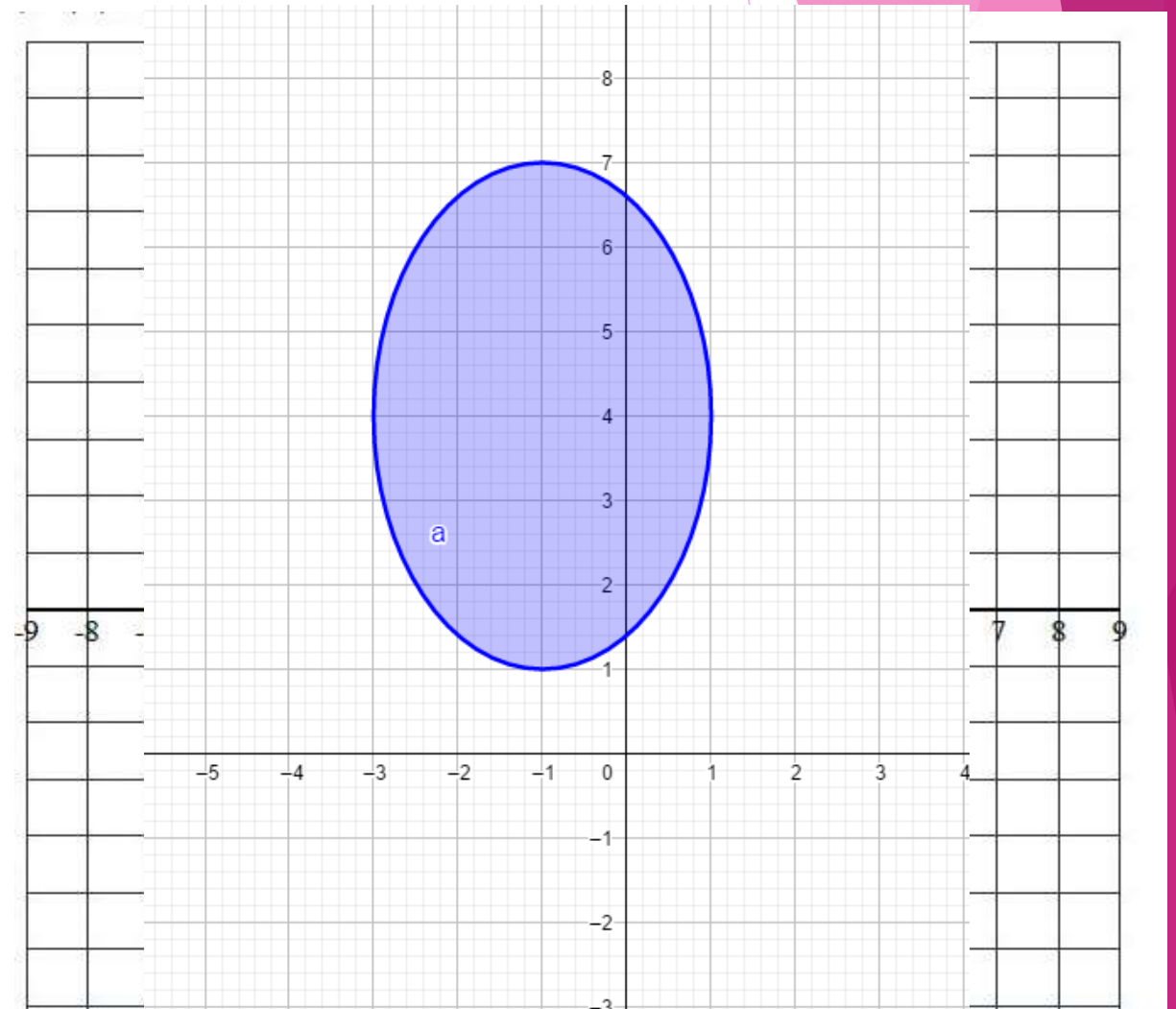
$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(y-4)^2}{9} + \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

2º) Desigualdad

$$P(0,0) \longrightarrow 0 \leq -37$$

V



Ejercicio 06: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 + 4y^2 \geq 12\}$$

1º) Graficamos la ecuacion

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Elipse

Centro (0,0)

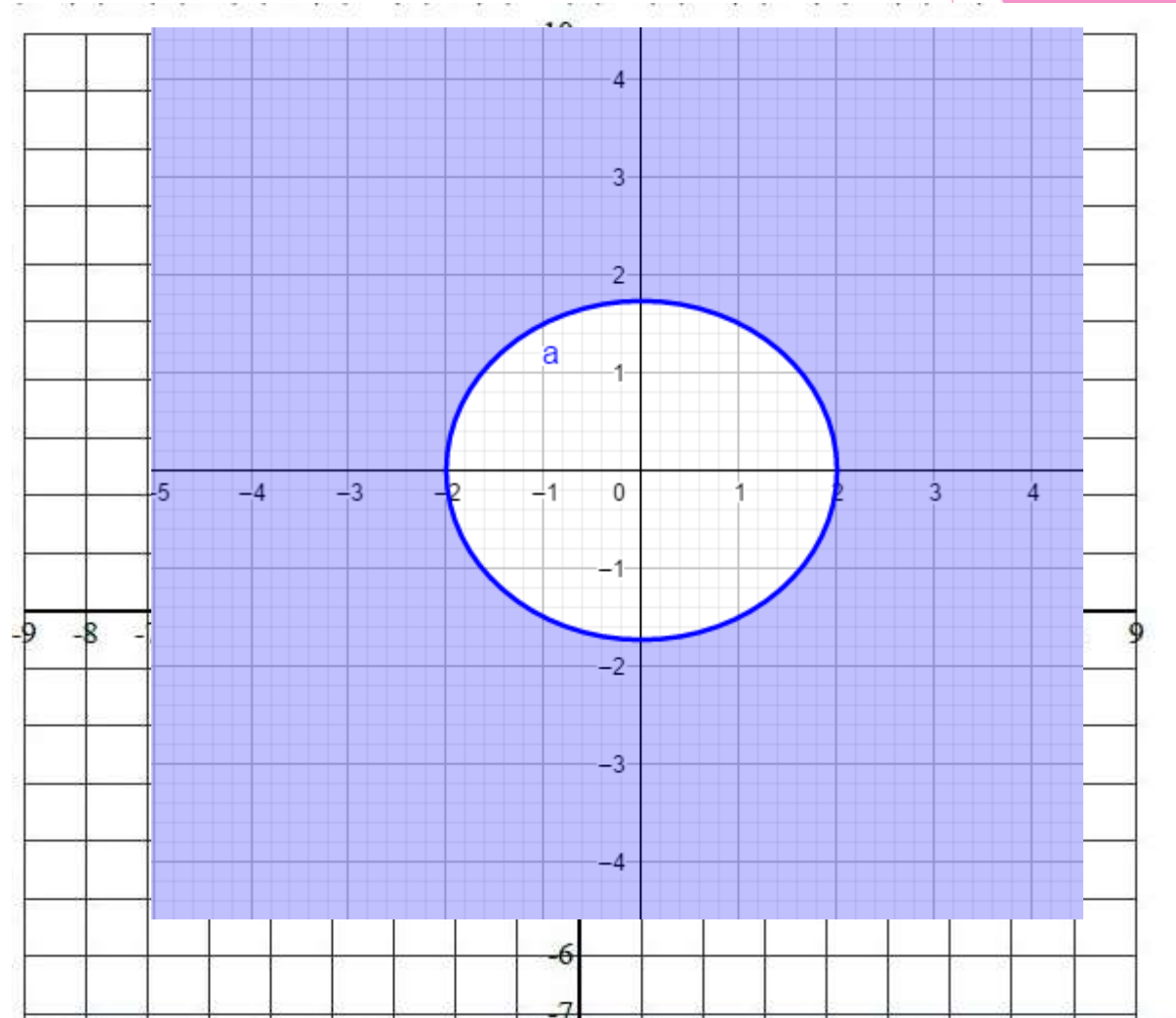
semi eje mayor $a = 2$

Semi eje menor $b = \sqrt{3}$

2º) desigualdad

$$P(0,0) \longrightarrow 0 \geq 12$$

F



Ejercicio 06: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 + 4y^2 \geq 12\}$$

1º) Graficamos la ecuacion

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Elipse

Centro (0,0)

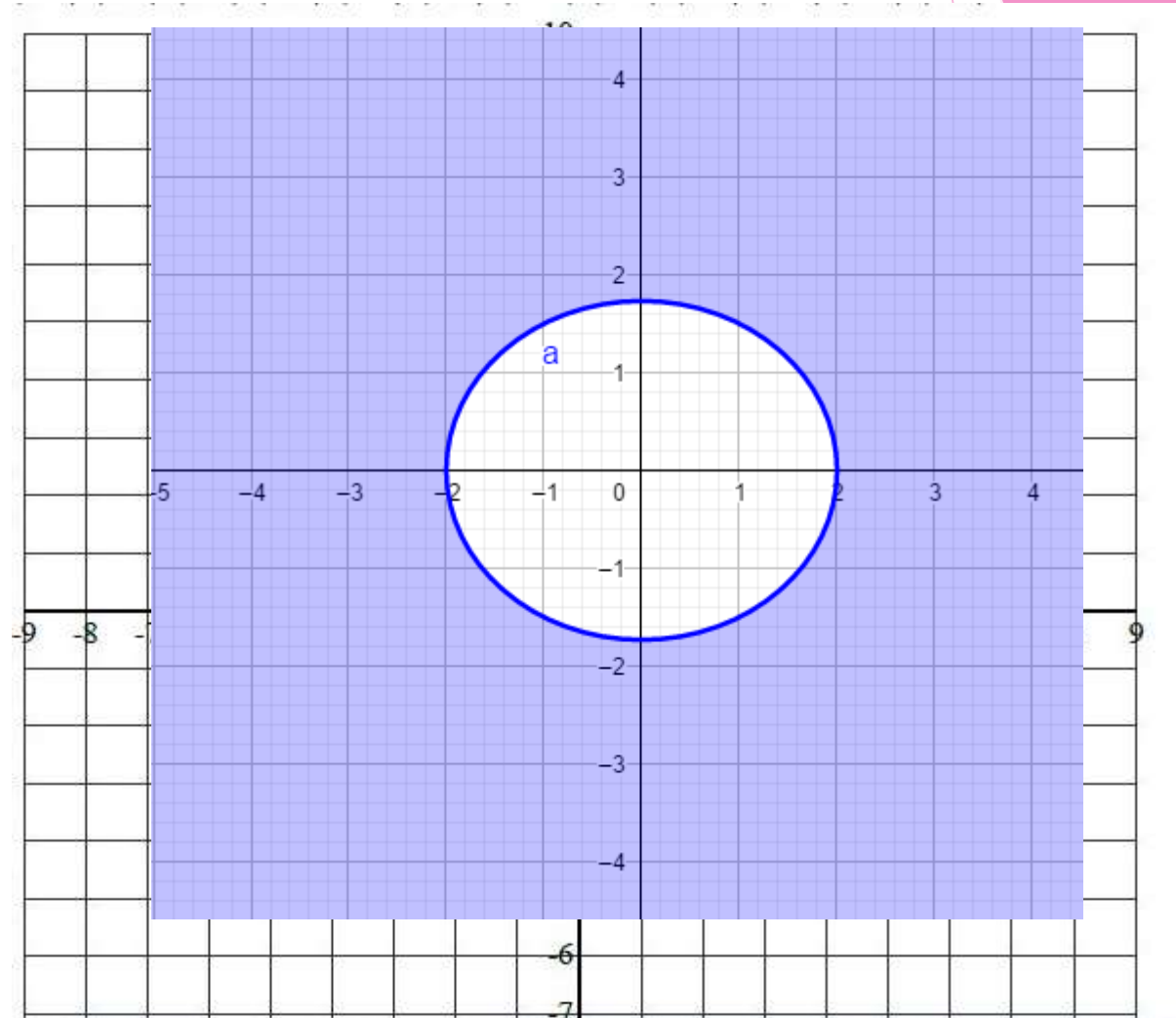
semi eje mayor $a = 2$

Semi eje menor $b = \sqrt{3}$

2º) desigualdad

$$P(0,0) \longrightarrow 0 \geq 12$$

F



B) RELACIONES DE LA FORMA:

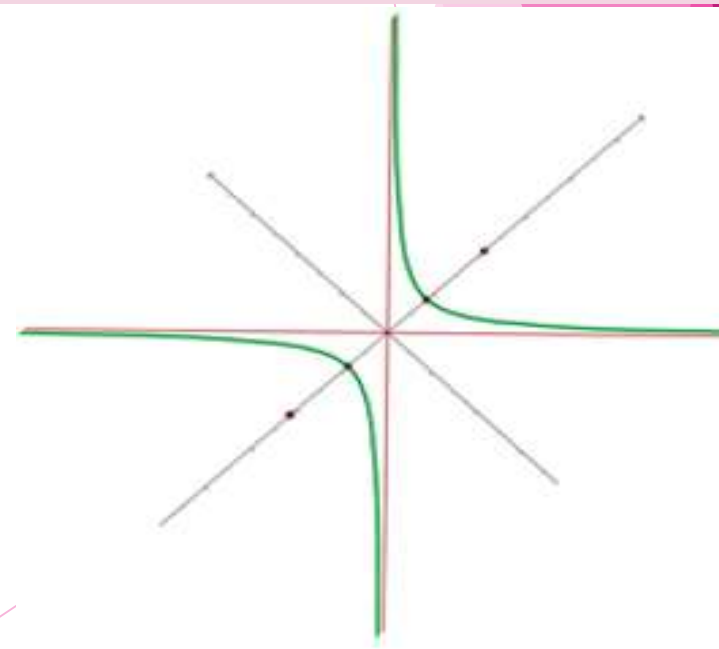
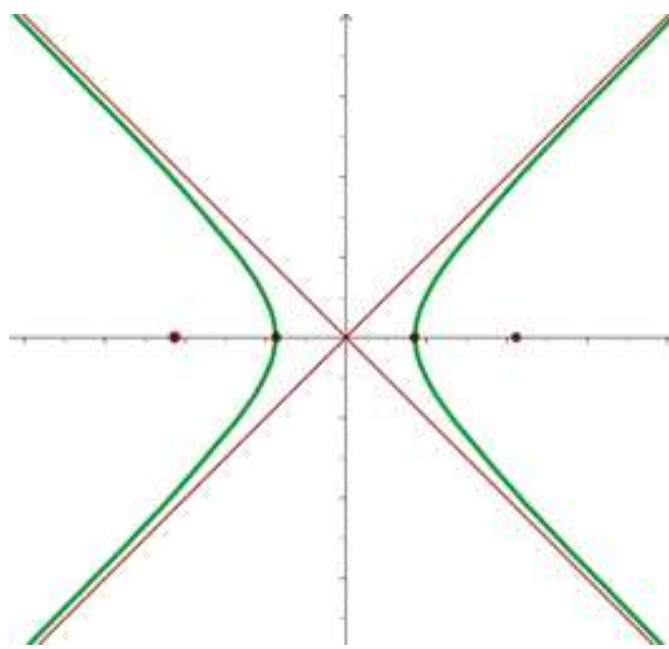
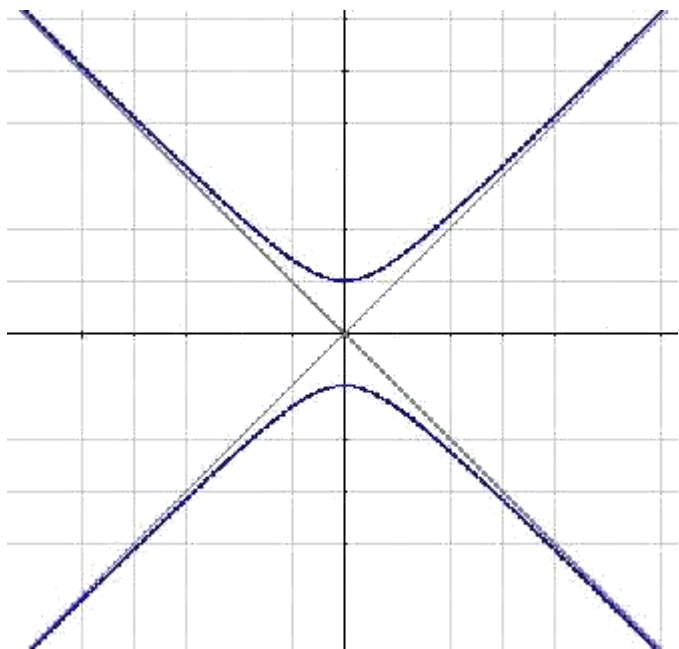
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\}$$

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / xy = \pm \frac{a^2}{2} \right\}$$

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / (x-h)(y-k) = \pm \frac{a^2}{2} \right\}$$

Tienen por gráfico una hipérbola donde “a” es el semieje transverso o real, “b” el semieje conjugado o imaginario y (h,k) el centro de la hipérbola.



Ejercicio 01: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 51 = 0\}$$

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - (4y^2 - 24y) = 51$$

$$(x + 1)^2 - 4(y^2 - 6y + 9 - 9) = 51$$

$$(x + 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 16$$

$$\frac{(x + 1)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$$

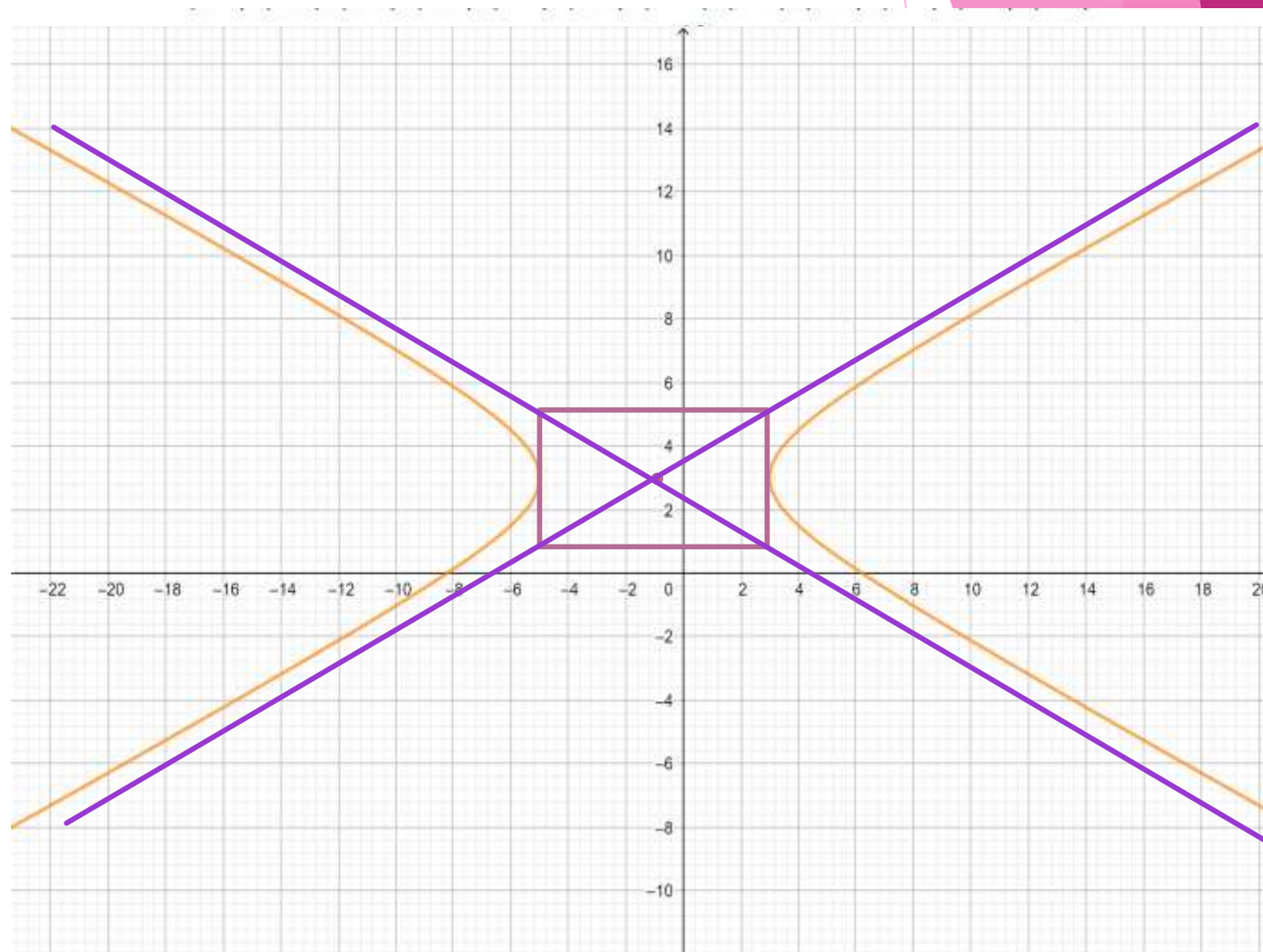
Hiperbola C (-1, 3)

Semi eje real: a = 4

Semi eje imag b= 2

$$\text{Dom}(R) = \langle -\infty, -5] \cup [3, \infty \rangle$$

$$\text{Rang}(R) = R$$



Ejercicio 07: Trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 > 9\}$$

1º) Graficamos la ecuacion

$$x^2 - y^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Hiperbola

Centro C(0,0)

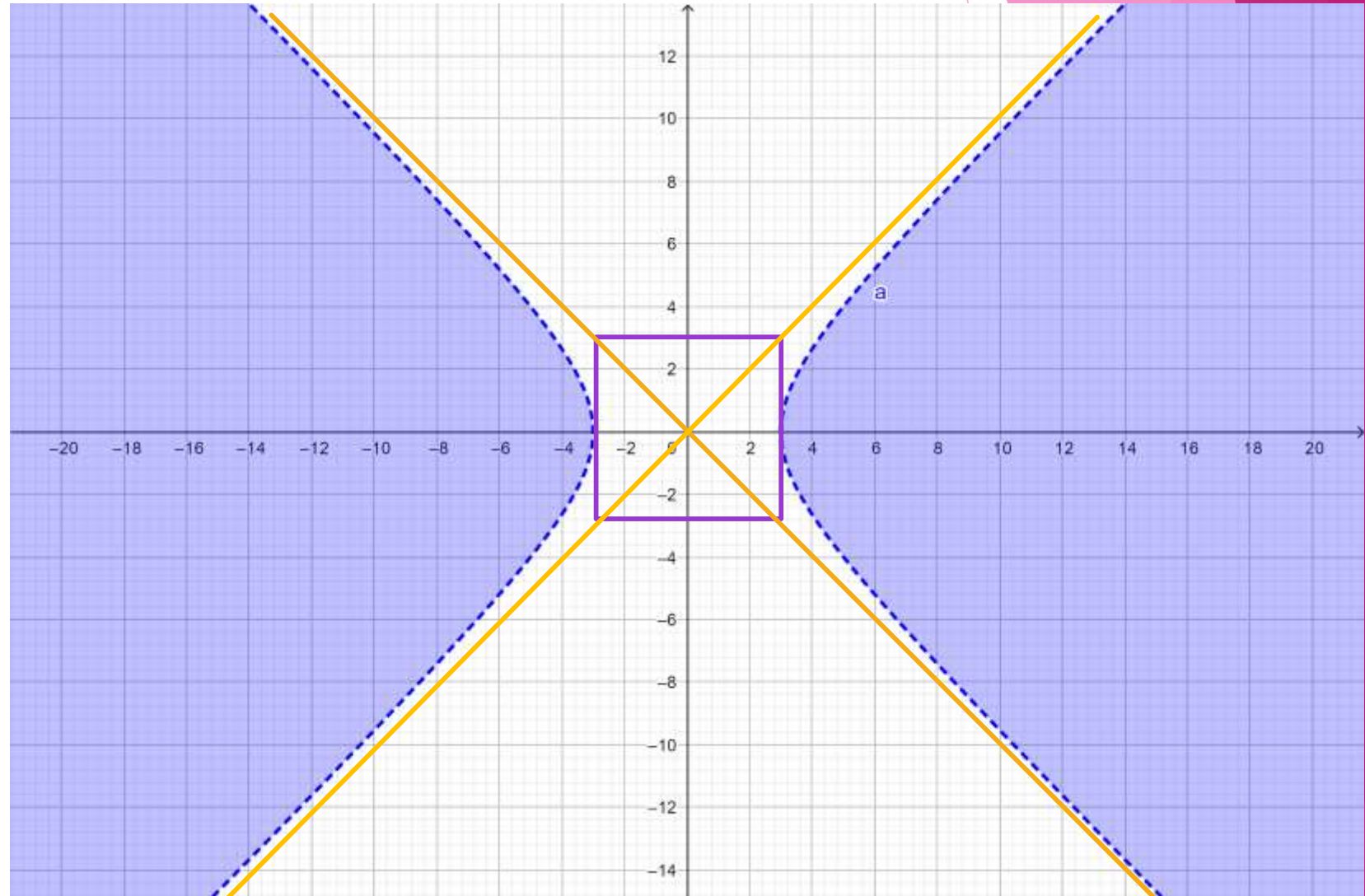
Semi eje real a = 3

Semi eje imag. b = 3

2º) desigualdad

$$P(0,0) \longrightarrow 0 > 9$$

F



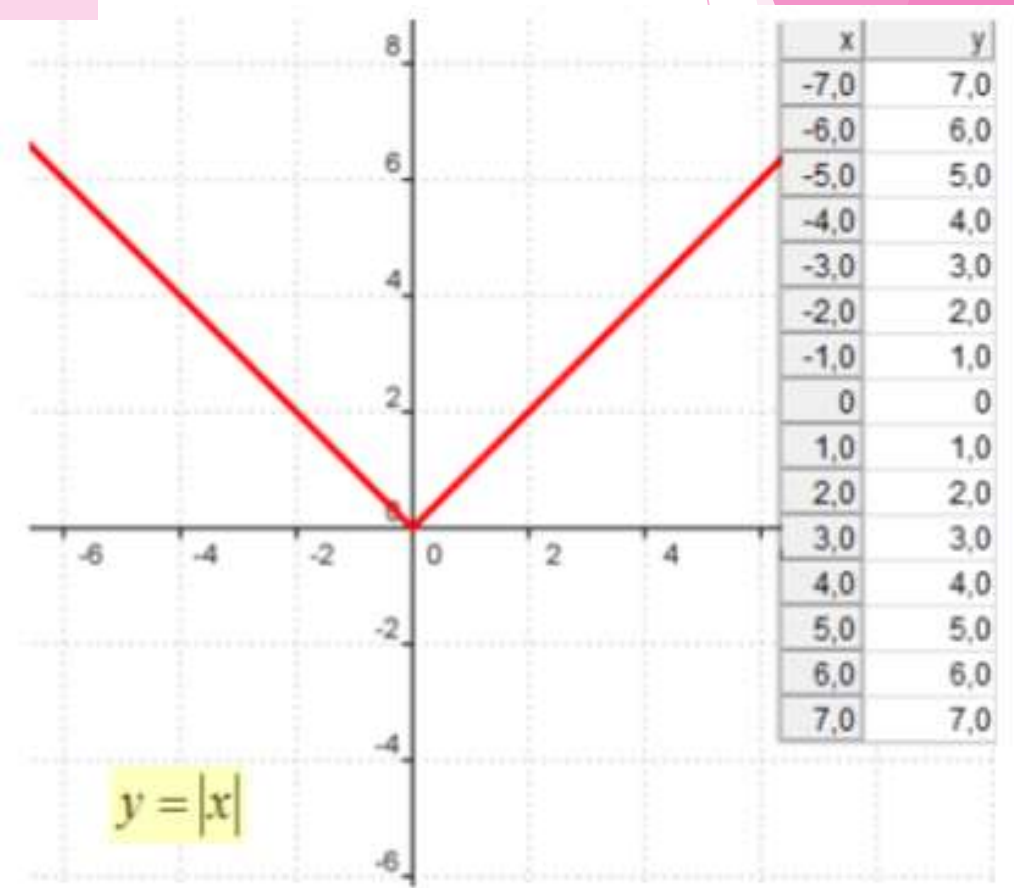
GRAFICAS DE RELACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = |x| \leftrightarrow y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \right\}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

Cuyo gráfico es la unión de dos rectas $y=x$, $y=-x$



Ejercicio 01: trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / y = |x - 1| + x\}$$

Por definicion

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

Para $x \geq 1$

$$y = x-1 + x$$

$$y = 2x - 1$$

Linea Recta

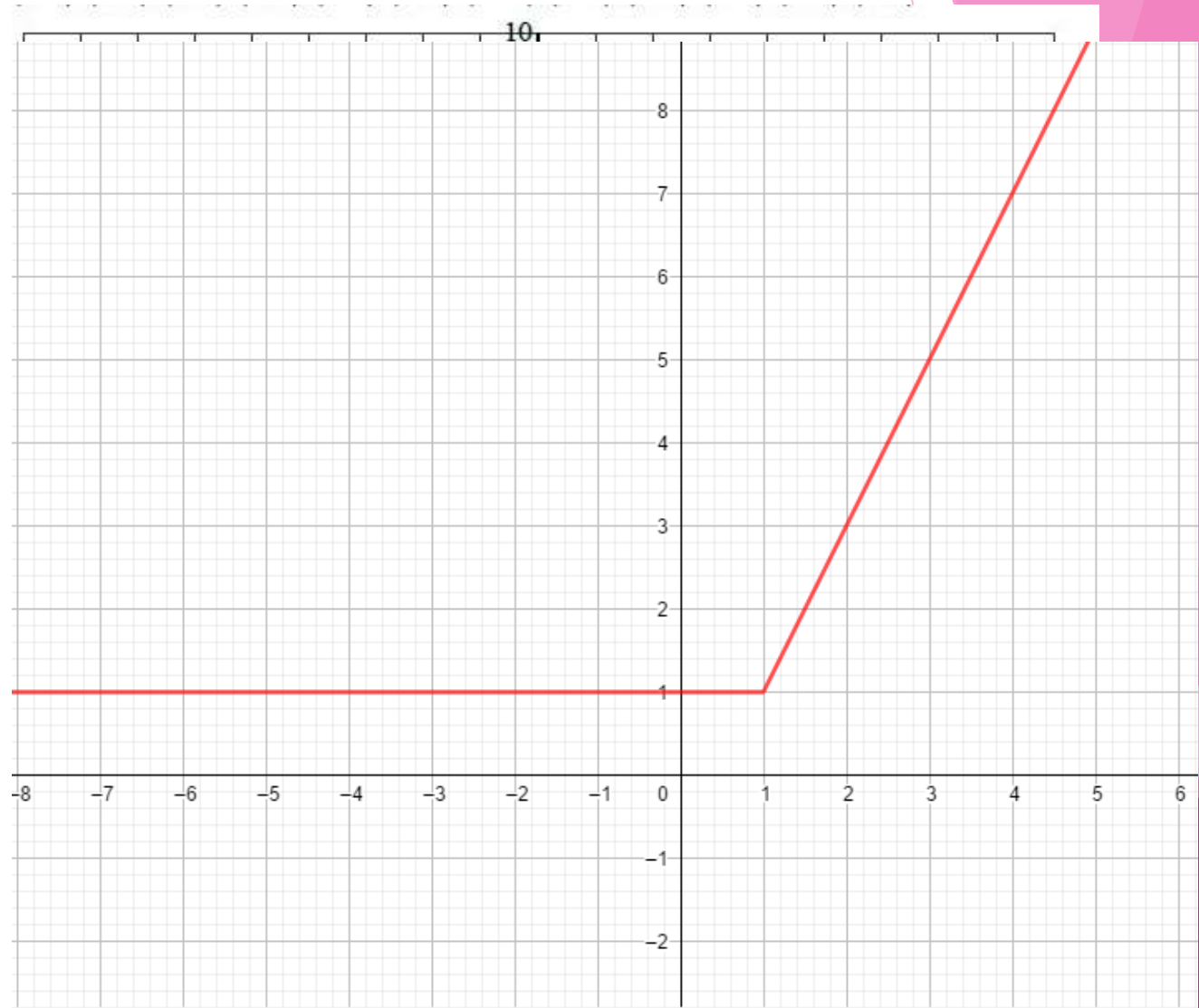
| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | 3 |
| y | | |

Para $x < 1$

$$y = 1-x+x$$

$$y = 1$$

Linea recta horizontal



Ejercicio 02: trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = |x| + |3 - x|\}$$

Puntos criticos: $x=0$, $x=3$

| | $<-\infty, 0>$ | $[0, 3>$ | $[3, +\infty>$ |
|-----------|----------------|----------|----------------|
| $ x =$ | $-x$ | x | x |
| $ 3-x =$ | $3-x$ | $3-x$ | $x-3$ |
| $ x-3 $ | | | |

Para $<-\infty, 0>$
 $y = -x + 3 - x$

$$y = -2x + 3$$

Recta

| | | |
|---|---|----|
| x | 0 | -2 |
| y | | |

Para $[0, 3>$

$$y = x + 3 - x$$

$$y = 3$$

Constante

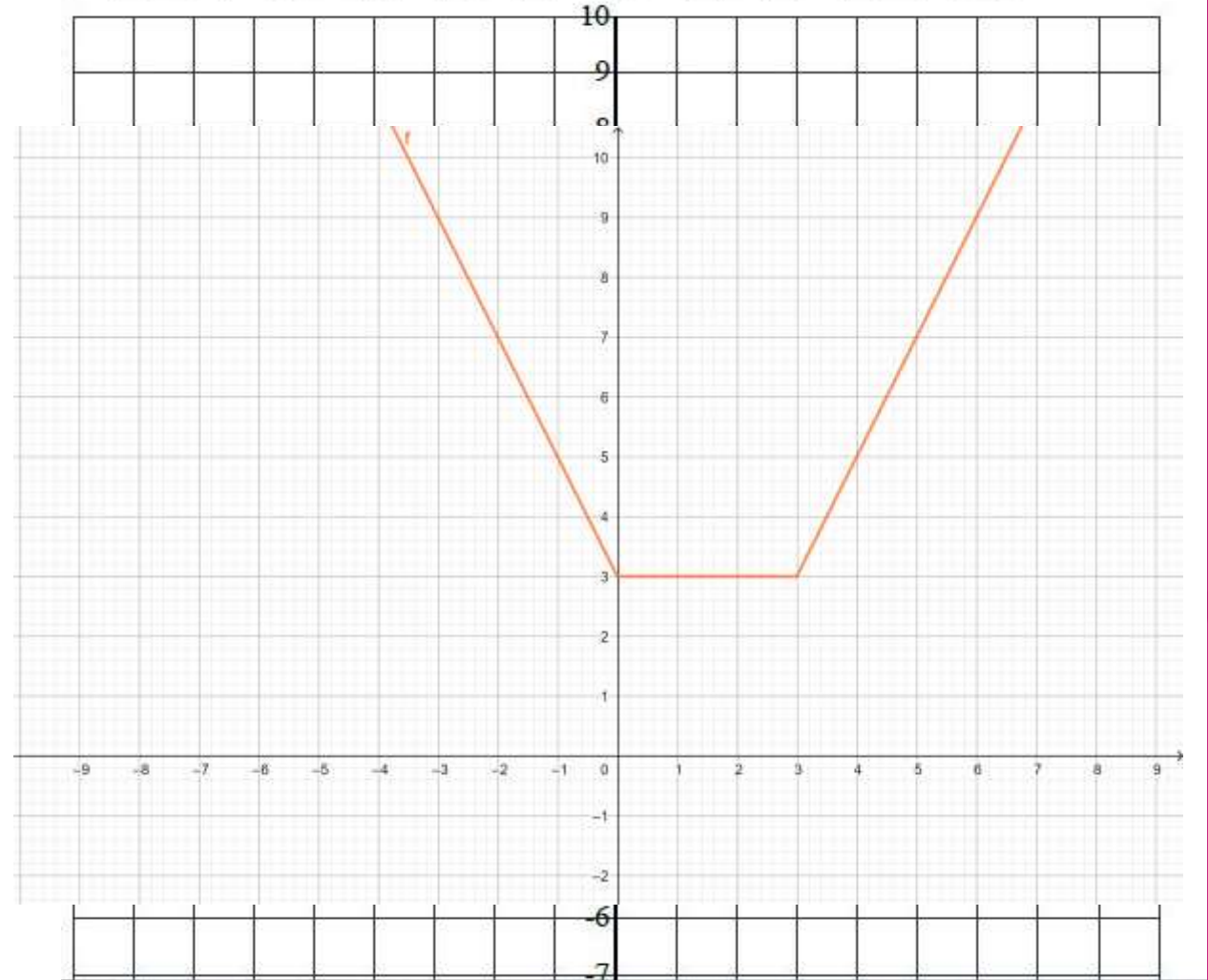
Para $[3, +\infty>$

$$y = x + x - 3$$

$$y = 2x - 3$$

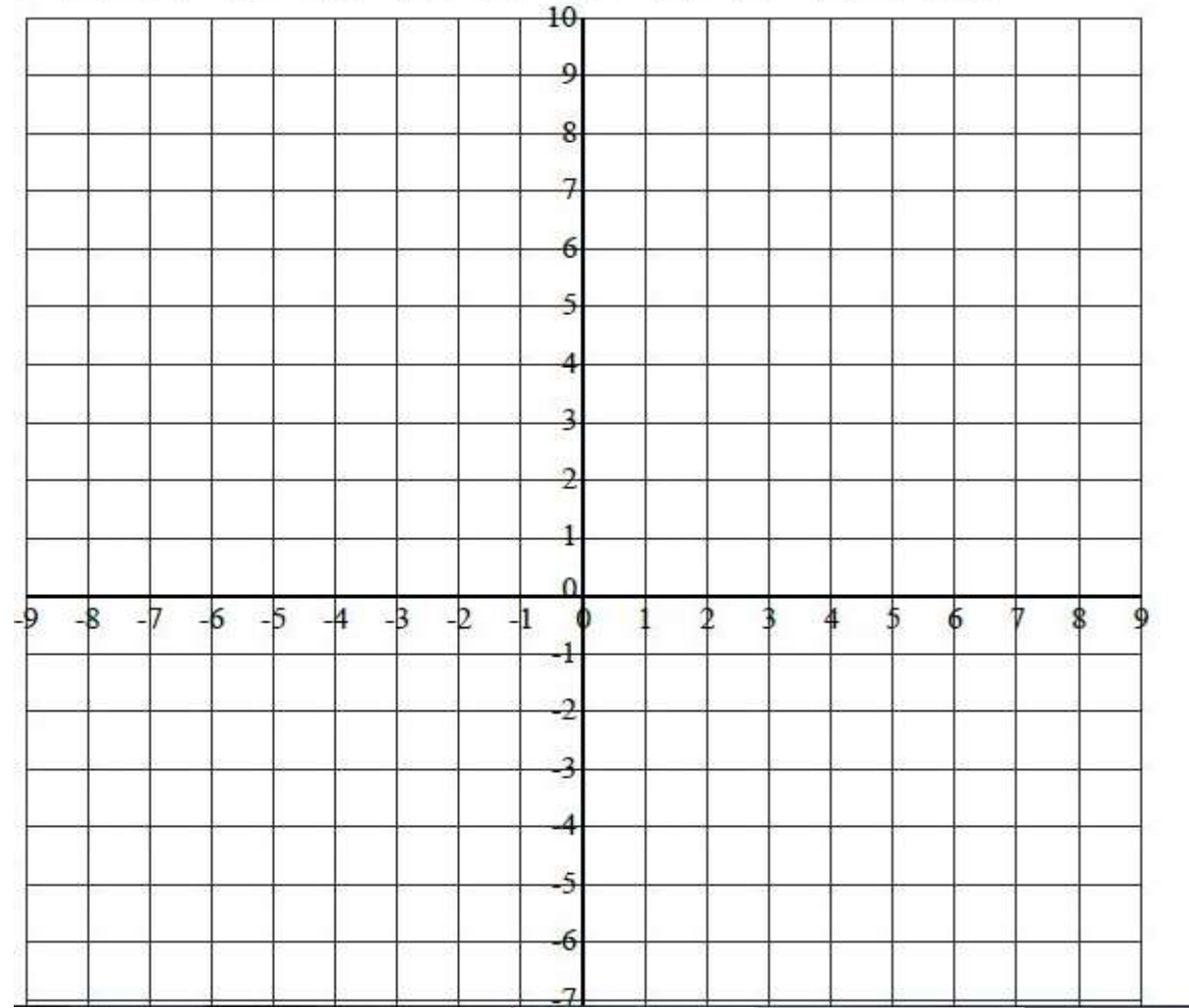
Recta

| | | |
|---|---|---|
| x | 3 | 5 |
| y | | |



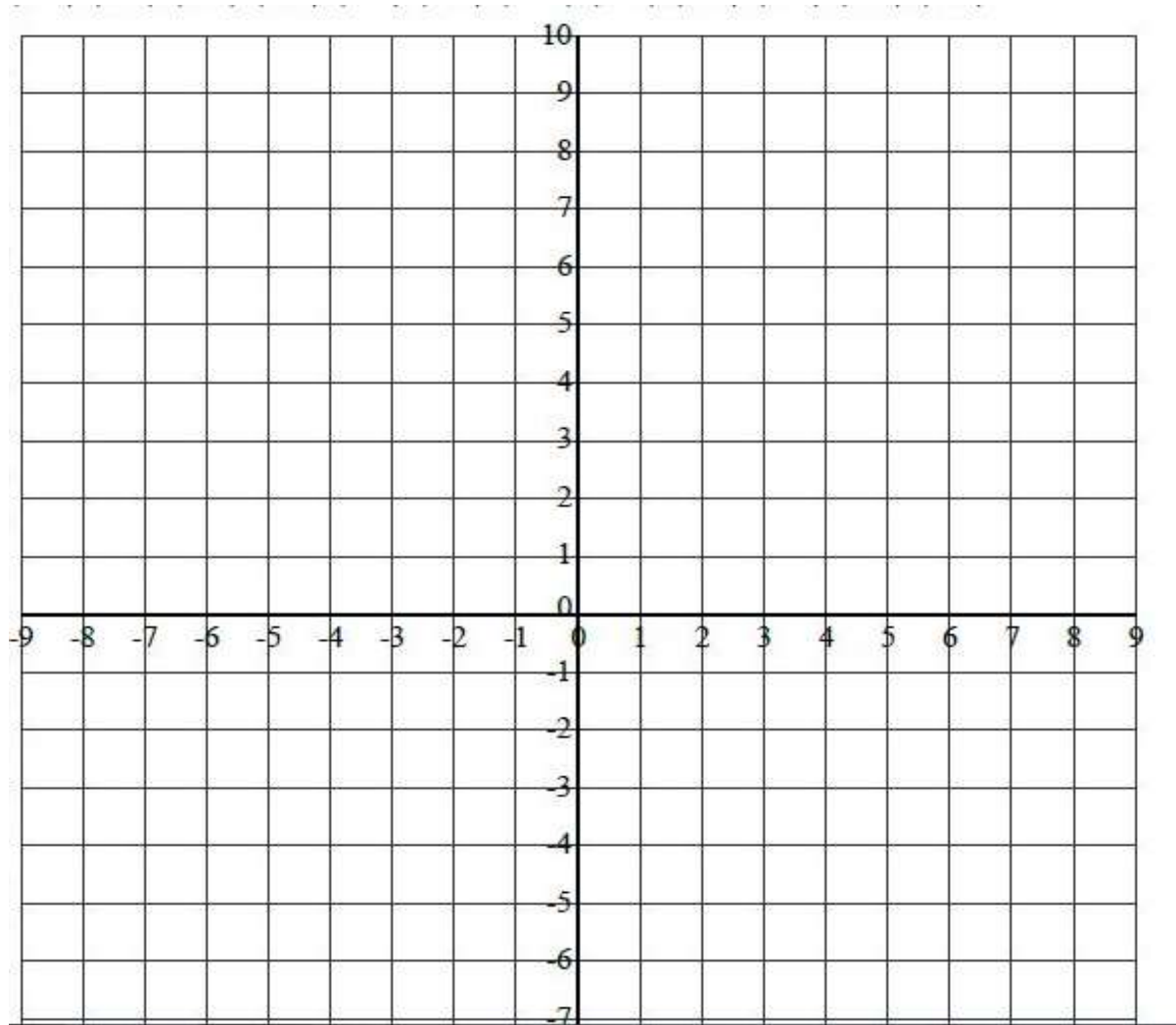
Ejercicio 03: trazar el grafico de la relación

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = |x^2 - 4|\}$$



Ejercicio 04: trazar el grafico de la relación

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / y = \frac{|x - 3|}{3 - x} \right\}$$



Ejercicio 03: trazar el grafico de la relación

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / y = \frac{(x-2) + |x-1|}{|x-2| + (x-1)} \right\}$$

