INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA II

Modelo de REDES

ALGORITMO DE EXPANSIÓN MÍNIMA

Ingeniería de Sistemas
Ing. Néstor Muñoz

Logro de sesión

- Al culminar la sesión, el estudiante aplica el algoritmo de expansión mínima en redes de casos de estudio.

MODELOS DE REDES

Hay una multitud de situaciones, en investigación de operaciones, que se pueden modelar y resolver como redes (nodos conectados por ramas).

Aplicaciones posibles

- Diseño de una red para conectar puntos (nodos).
- Determinación de la ruta más corta entre 2 puntos.
- Determinación de la capacidad máxima de una red.
- Determinación del programa de flujo con costo mínimo de una red.
- Determinación del cronograma de actividades en la ejecución de un proyecto

MODELOS DE REDES

La solución de esas situaciones y otras parecidas se logra con una variedad de algoritmos de optimización de redes:

1. Árbol de expansión mínima
2. Algoritmo de la ruta más corta
3. Algoritmo del flujo máximo
4. Algoritmo de red capacitada con costo mínimo
5. Algoritmo de la ruta crítica

Las situaciones en las que se pueden aplicar estos algoritmos también se pueden formular y resolver en forma de programas lineales explícitos. Sin embargo, los algoritmos propuestos, basados en redes, son más eficientes que el método símplex.

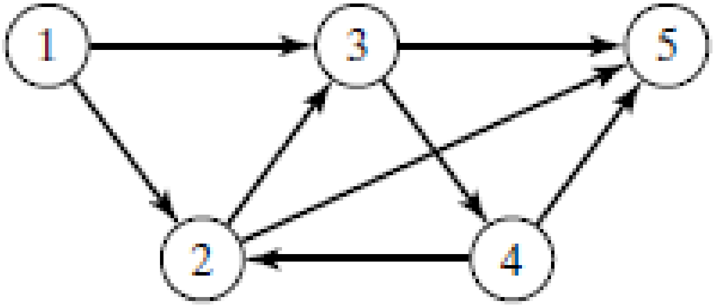
DEFINICIONES PARA REDES

Una red consiste en una serie de **nodos** enlazados con **arcos** (o **ramas**). La notación para describir una red es (N, A), donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Por ejemplo, la red de la siguiente figura_1 , se describe como sigue:

$$N = \{1,2,3,4,5\}$$

$$A = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,5),(3,4),(3,5),(4,2),(4,5)\}$$

Figuara_1:
Ejemplo de una red (N,A)



DEFINICIONES PARA REDES

Con cada red se asocia algún tipo de flujo (por ejemplo, el flujos de tráfico de automóviles en carreteras). En general, el flujo en una red está limitado por la capacidad de sus arcos, que pueden ser finitos o infinitos.

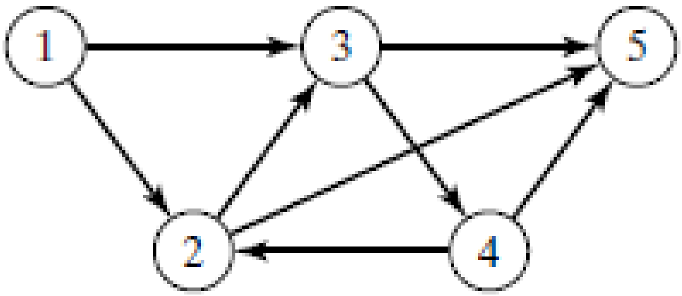
Se dice que un arco es **dirigido** u **orientado** si permite un flujo positivo en una dirección, y flujo cero en la dirección opuesta.

Una **red dirigida** tiene todos sus arcos dirigidos.

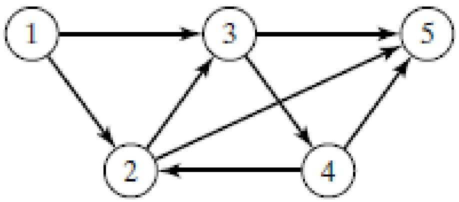
Una **ruta** es una sucesión de arcos distintos que unen dos nodos pasando por otros nodos, independientemente de la dirección de flujo en cada arco.

Una ruta forma un **ciclo** si conecta un nodo consigo mismo, pasando por otros nodos.

Un ciclo es *dirigido* si consiste en una ruta dirigida, por ejemplo (2,3), (3,4) y (4,2).



ÁRBOL DE EXPANSIÓN



Un **árbol** es una red conectada que puede consistir sólo en un *subconjunto* de todos los nodos en ella, donde ***no se permiten ciclos***, y un **árbol de expansión** es un árbol que enlaza *todos* los nodos de la red, también ***sin permitir ciclos***. En la figura _2 se ven ejemplos de un árbol y de un árbol de expansión para la red de la figura _1.

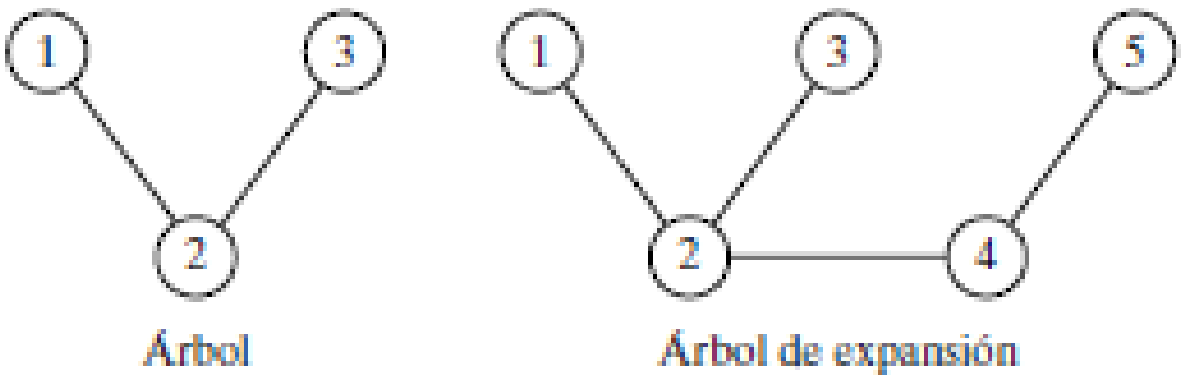


FIGURA_2
Ejemplos de un árbol y de un árbol de expansión, para la red de la figura_1

ALGORITMO DE ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

El algoritmo de árbol de expansión mínima enlaza los nodos de una red, en forma directa o indirecta, con la mínima longitud de las ramas enlazantes.

Una aplicación característica es en la construcción de carreteras pavimentadas que unen varias poblaciones.

El camino entre dos poblaciones puede pasar por uno o más poblaciones adicionales.

El diseño más económico del sistema de caminos indica que se minimice la distancia total de caminos pavimentados, resultado que se obtiene implementando el algoritmo de árbol de expansión mínima.

Los pasos del procedimiento son los siguientes.

Sea N $\{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de nodos de la red, y se definen

C_k = Conjunto de nodos que se han conectado en forma permanente en la iteración k

$\overline{C}_k$ = Conjunto de nodos que todavía se deben conectar en forma permanente

ALGORITMO DE ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

Paso 0. El conjunto $C_0 = \emptyset$ y $\overline{C}_0 = N$.

Paso 1. Comenzar con *cualquier* nodo en el conjunto $\overline{C}_0$ no conectado (o "inconexo"), e igualar $C_1 = \{i\}$, con lo que $\overline{C}_1 = N - \{i\}$. Igualar $k = 2$.

Paso general k. Seleccionar un nodo j^* en el conjunto no conectado $\overline{C}_{k-1}$ que produzca el arco más corto a un nodo, en el conjunto conectado C_{k-1}. Enlazar a j^* en forma permanente con C_{k-1} y sacarlo de $\overline{C}_{k-1}$, esto es

$$C_k = C_{k-1} + \{j^*\}, \overline{C}_k = \overline{C}_{k-1} - \{j^*\}$$

Si el conjunto $\overline{C}_k$, de nodos no conectados es vacío, detenerse. En cualquier otro caso, igualar $k = k + 1$ y repetir el paso.

Ejemplo_1:

Soluciones_NET está en el proceso de proporcionar servicio de red a cinco nuevas áreas habitacionales. La figura_3 representa los enlaces posibles de computadores entre las cinco áreas. Los metros de cable se muestran en cada arco. Determine la red de cable más económica.
El algoritmo comienza en el nodo 1 (cualquier otro nodo podría ser), con lo que se obtiene

$$C_1 = \{1\}, \overline{C}_1 = \{2,3,4,5,6\}$$

Los arcos con línea delgada son todos los enlaces posibles entre *C* y $\vec{C}$’ . Las ramas gruesas representan los enlaces permanentes entre los nodos del conjunto conectado (o “conexo”) *C*, y la rama con línea interrumpida representa el nuevo enlace (permanente) que se agrega en cada iteración. Por ejemplo, en la iteración 1, la rama (1,2) es la más corta (1 km) entre todas las ramas posibles del nodo 1 a los nodos 2, 3, 4 y 5 del conjunto no conectado . Por consiguiente, el enlace (1,2) se vuelve permanente y $j^* = 2$, con lo que se obtiene

$$C_2 = \{1,2\}, \overline{C}_2 = \{3,4,5,6\}$$

Ejemplo_1:

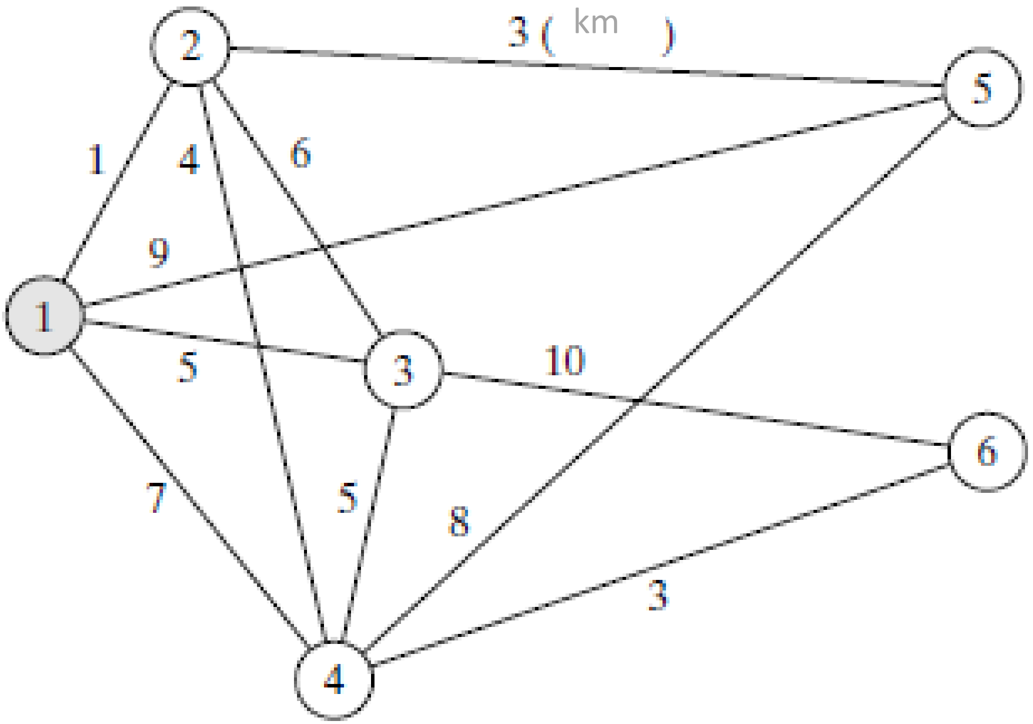
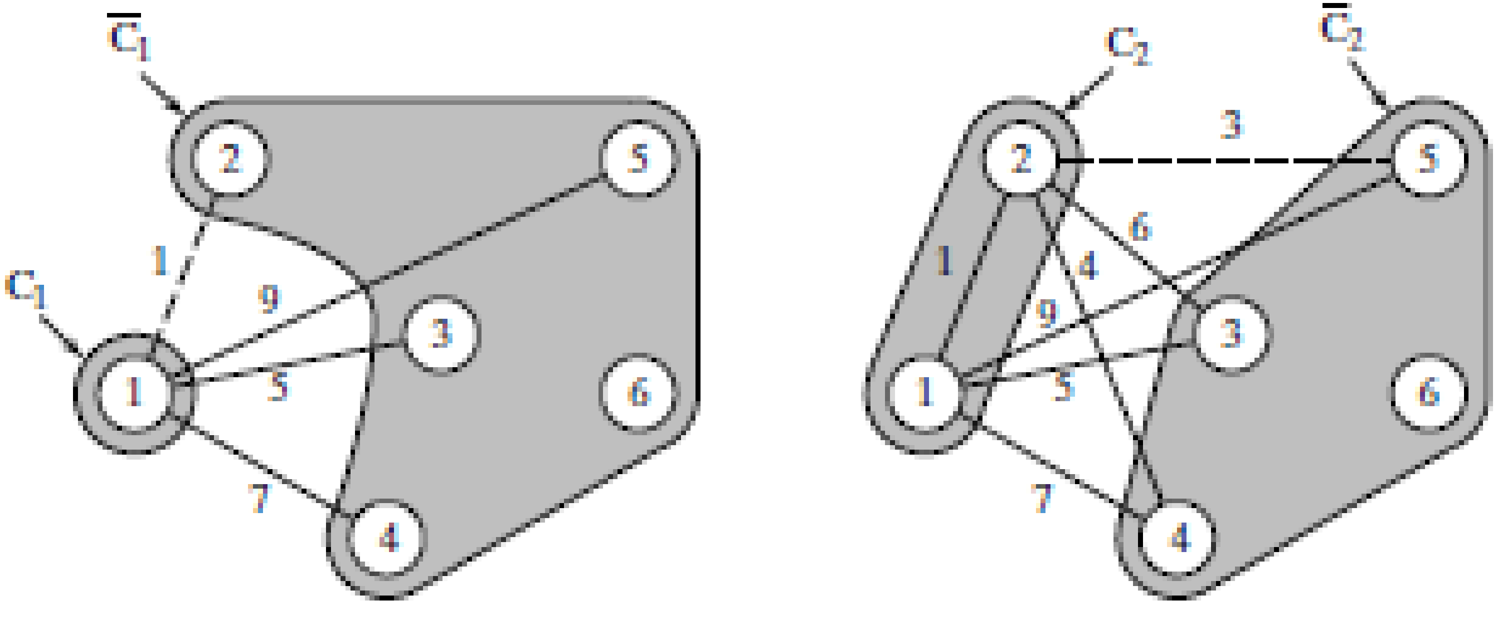


FIGURA _3

Conexiones de cable para Soluciones_NET Soluciones_NET

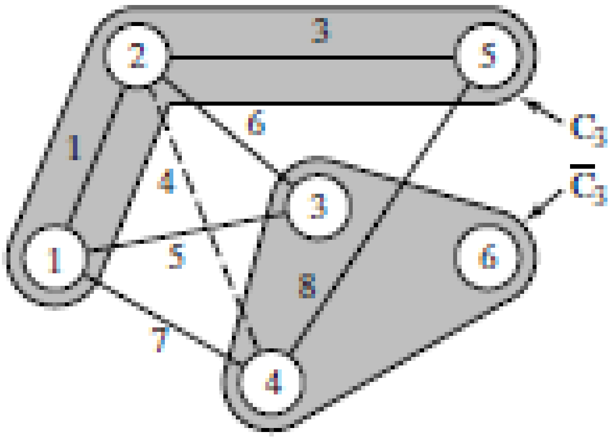
Ejemplo_1:
Iteraciones



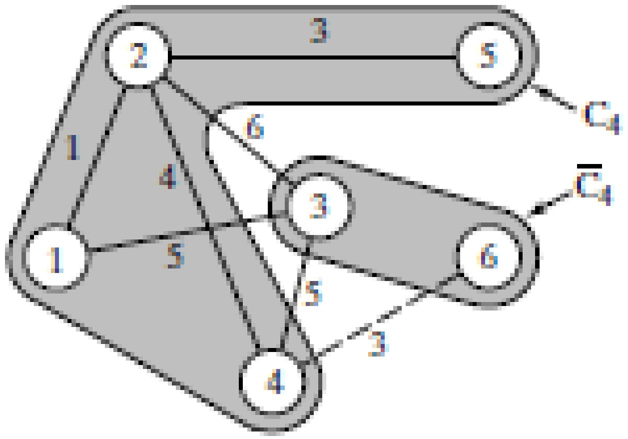
Iteración 1

Iteración 2

Ejemplo_1: Iteraciones



Iteración 3



Iteración 4

Ejemplo_1: Iteraciones

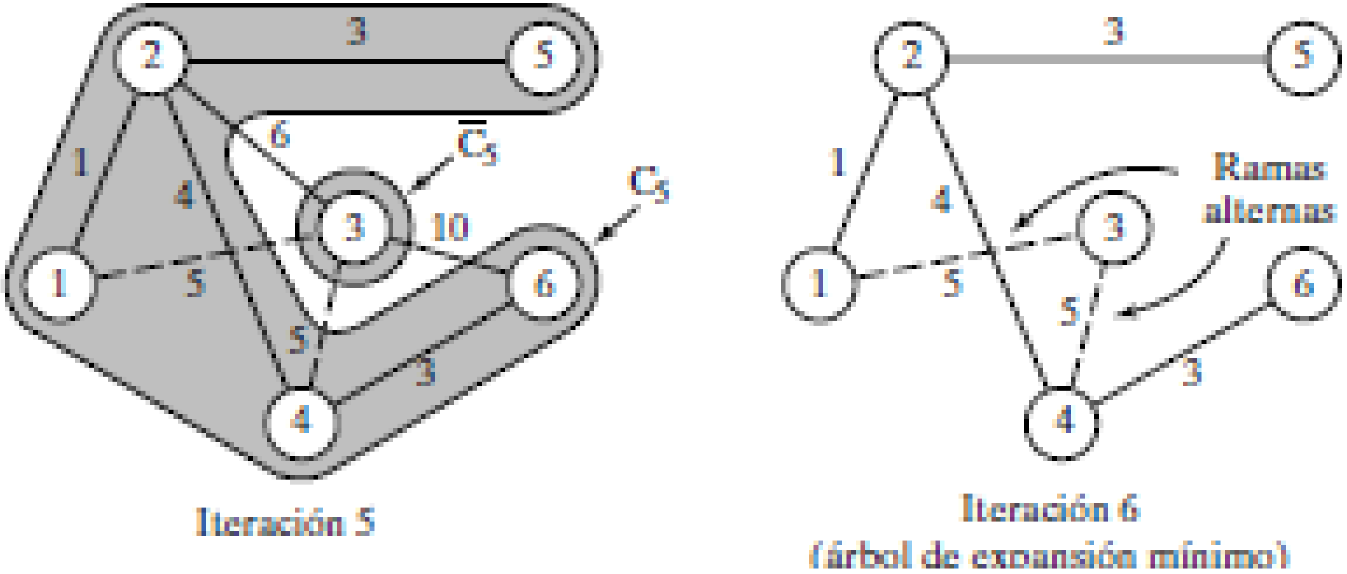


FIGURA_4
Iteraciones de la solución para Soluciones_NET

La solución se expresa con el árbol de expansión mínima que se ve en la iteración 6, de la figura_4. La cantidad mínima de km necesarias para proporcionar el servicio de cable que se desea resulta ser 1+ 3+ 4+ 3+ 5 = 16 km.

Universidad Nacional de Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Gracias

- Néstor Muñoz
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe

941434300

años 60