



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA I

Introducción a la PROGRAMACIÓN LINEAL con Modelos de 2 o más
Variables

Método simplex

Ingeniería de Sistemas

Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto



Universidad Nacional de Cajamarca



www.unc.edu.pe/



Universidad Nacional de Cajamarca



•Al término de la sesión, el estudiante encuentra la solución a modelos de programación lineal de dos o más variables, a partir del análisis de caso y utilizando el método simplex, sigue un procedimiento lógico y muestra la solución óptima.

LOGRO DE LA SESIÓN

¿Qué es el método simplex?

El **método simplex** es un procedimiento iterativo para resolver problemas de programación lineal, donde se busca obtener la solución óptima de la función objetivo que logre cumplir el conjunto de restricciones.

Este algoritmo fue desarrollado en el año 1947 por el matemático norteamericano .



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"



Pasos del Método Simplex

Los pasos a seguir en el **método simplex** son:

1. **Definir el problema en la forma estándar y generar nuestra matriz.**
2. **Determinar la solución básica inicial.**
3. **Seleccionar la variable de entrada utilizando la condición de optimalidad. Si no se puede seleccionar una variable de entrada, quiere decir que estamos en la condición óptima y finalizan las iteraciones. De otro modo se continúa con el siguiente paso.**
4. **Seleccionar la variable de salida utilizando la condición de factibilidad.**
5. **Actualizar nuestra matriz realizando las operaciones de Gauss-Jordan. Volver al paso número 3.**

1. Definir el problema en la forma estándar y generar matriz



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Un problema de programación lineal tiene la siguiente forma:

Función Objetivo:

$$(\text{Maximizar o Minimizar}) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeto a:

$$C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \dots + C_{1n}x_n (\geq, \leq, =) b_1$$

$$C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + \dots + C_{2n}x_n (\geq, \leq, =) b_2$$

...

$$C_{m1}x_1 + C_{m2}x_2 + \dots + C_{mn}x_n (\geq, \leq, =) b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Donde $x_1, x_2 \dots x_n$ son las variables del problema.

Antes de llevar nuestro modelo a la forma estándar debemos verificar que todas las restricciones tienen el lado derecho no negativo. Es decir:

$$b_1, b_2 \dots b_m \geq 0$$

¿Qué hago si el lado derecho de la restricción es negativo?

Cuando el término independiente de la restricción es negativo, se debe multiplicar por -1 a toda la restricción para convertir el valor del lado derecho en positivo. Esta multiplicación también afectará al signo de la restricción de la siguiente forma:

- Si la restricción es del tipo mayor igual (\geq), se deberá cambiar a menor igual (\leq).
- En caso la restricción sea del tipo menor igual (\leq), se deberá cambiar a mayor igual (\geq).
- Si la restricción es una igualdad, el signo se mantiene.

Un caso especial es cuando el término independiente de la restricción es 0 y el signo es mayor igual (\geq); en dicha situación, podemos multiplicar la restricción por (-1) para convertirla en menor igual (\leq). Esto nos servirá para no utilizar variables artificiales como veremos posteriormente.

Convertir restricciones en igualdades

Para convertir las restricciones en igualdades va a depender de su signo:

- Si la restricción es **menor igual** (\leq): Para este tipo de restricciones debemos introducir una variable no negativa llamada de holgura y que son auxiliares para el problema. Por ejemplo:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 15$$



$$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 15$$

Variable de Holgura



$$3x_1 + 2x_2 \geq 15$$



Variable Artificial



$$3x_1 + 2x_2 - S_1 + A_1 = 15$$

Variable de Exceso

- Cuando la restricción es **mayor igual** (\geq): En este tipo de restricciones se debe restar una variable de exceso y así mismo agregar una variable artificial. Por ejemplo:



- Si la restricción **es igual (=)**: En este tipo de restricciones debemos agregar una variable artificial de la siguiente forma:

$$3x_1 + 2x_2 = 15$$

$$3x_1 + 2x_2 + A_1 = 15$$


Variable Artificial

Generar la matriz

Aplicando lo indicado en los puntos anteriores tendríamos lo siguiente:

Función Objetivo

Maximizar: $Z = 3X_1 + 2X_2$

Sujeto a:

$$2X_1 + 5X_2 \leq 35$$

$$-3X_1 + 2X_2 \geq -18$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 26$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Función Objetivo

Maximizar: $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Sujeto a:

$$2X_1 + 5X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 35$$

$$3X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 18$$

$$2X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 26$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Una vez convertidas nuestras restricciones en ecuaciones procederemos a generar nuestra matriz:

Función Objetivo

Maximizar: $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Sujeto a:

$$2X_1 + 5X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 35$$

$$3X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 18$$

$$2X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 26$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$



Vector de Costes (Coeficientes de la Función Objetivo)

Tabla 1		C _j						
			3	2	0	0	0	
C _b	Base	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	R	
0	S ₁	2	5	1	0	0	35	
0	S ₂	3	-2	0	1	0	18	Coeficientes Restricciones
0	S ₃	2	4	0	0	1	26	
	Z	-3	-2	0	0	0	0	

Vector Solución Vector de Costes Reducidos

En nuestra matriz podemos identificar lo siguiente:

- **Vector de Costes:** Es el vector que contiene los coeficientes de todas las variables de la función objetivo.
- **Vector Solución:** En esta columna se coloca la solución básica inicial y se va actualizando conforme se realizan las iteraciones. En la columna C_b se indica el coeficiente que corresponde a cada variable en el vector de costes. Así mismo siempre se iniciará con las variables de holgura en la base cuando el problema no tenga variables artificiales.
- **Coeficientes Restricciones:** Se colocan los coeficientes de las restricciones en el mismo orden en que fueron formuladas. La columna R contiene a los términos independientes también conocido como vector de recursos.
- **Vector de costes reducidos:** También conocido como precios sombra. Este vector se calcula multiplicando el vector solución por los coeficientes de las restricciones y se resta el vector de costes. Este procedimiento lo explicaremos al detalle en nuestra entrada del método de las dos fases y de la M Grande, donde se presentan variables artificiales. En los ejercicios que veremos en esta entrada, al no existir variables artificiales, el vector de costes será igual al vector de costes multiplicado por "-1".

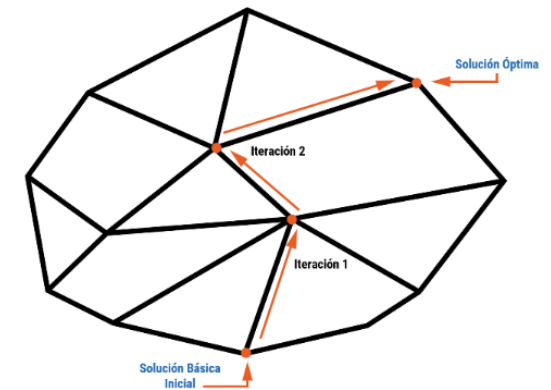
2. Determinar la solución básica inicial:

Como habíamos mencionado, el método simplex parte de un vértice de la región factible, es decir, un punto extremo. Con cada iteración avanzaremos de vértice en vértice hasta llegar a la solución óptima.

En nuestro caso, en la matriz elaborada podemos ver la solución básica inicial que sería $S_1=35$, $S_2=18$ y $S_3=26$ (cada variable del vector solución se iguala al valor que se encuentra en la columna R. Estas variables se denominan variables básicas. El valor de Z inicial también se muestra en la columna R que es 0.

Tabla 1		C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
0	S_1	2	5	1	0	0	35	
0	S_2	3	-2	0	1	0	18	
0	S_3	2	4	0	0	1	26	
	Z	-3	-2	0	0	0	0	

Las variables que no se encuentran en la base se denominan variables no básicas y en este caso serían X_1 y X_2 . Ambas tienen un valor de 0. ¿Con esta solución tenemos el mejor valor de Z ? Para saberlo debemos continuar al siguiente paso:



3. Seleccionar la variable de entrada utilizando la condición de optimalidad

Con nuestra matriz finalizada e identificada nuestra solución básica inicial revisaremos la condición de optimalidad.

Condición de Optimalidad:

La condición de optimalidad consiste en verificar si la solución actual que tenemos en nuestra matriz es la óptima o si se puede mejorar. Se verifica de la siguiente manera:

- En un problema de **maximización** si todos los coeficientes del vector de costes reducidos son mayores o iguales que cero, quiere decir que estamos en el punto óptimo y finaliza el problema.
- En un problema de **minimización** si todos los coeficientes del vector de costes reducidos son menores o iguales que cero, quiere decir que estamos en el punto óptimo y finaliza el problema.

Siguiendo con el ejemplo, siendo el problema de maximización, podemos ver que en el vector de costes reducidos existen valores negativos, lo que significa que no estamos en el óptimo. Eso quiere decir que debemos iniciar las iteraciones seleccionando la variable de entrada.

Variable de Entrada

La variable de entrada hace referencia a una de las variables no básicas que ingresará a la base y formará parte de la solución del problema.

Los criterios para seleccionar la variable de entrada depende si el problema es de maximización o minimización:

- Para problemas de **maximización**, la variable de entrada será la variable no básica con el coeficiente **más negativo** en el vector de costes reducidos.
- Para problemas de **minimización**, la variable de entrada será la variable no básica con el coeficiente **más positivo** en el vector de costes reducidos.

La columna donde está ubicada la variable se denomina columna pivote.

En el ejemplo nuestra variable de entrada sería X_1 dado que tiene el valor más negativo en el vector de costes reducidos, es decir "-3":

Tabla 1		C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
0	S_1	2	5	1	0	0	35	
0	S_2	3	-2	0	1	0	18	
0	S_3	2	4	0	0	1	26	
	Z	-3	-2	0	0	0	0	Vector de Costes Reducidos

La variable X_1 tiene el valor más negativo en el vector de costes reducidos que es "-3"

4. Seleccionar la Variable de Salida con la Condición de Factibilidad



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

A continuación explicaremos a que se refiere la condición de factibilidad:

Condición de Factibilidad

La condición de factibilidad, para cualquier problema ya sea de maximización o minimización, se verifica evaluando los valores de los coeficientes de la matriz de restricciones que se encuentran en la columna que corresponde a la variable de entrada.

Se debe verificar que al menos uno de sus valores sea mayor que 0 para obtener nuestra variable de salida. Si no se cumple esa condición significa que el problema tiene solución ilimitada no acotada.

Variable de Salida

Para determinar la variable que sale de la base se debe dividir el valor correspondiente a la columna R con su respectivo coeficiente en la columna de la variable de entrada (siempre y cuando este coeficiente sea estrictamente positivo).

De los resultados obtenidos, el menor valor corresponde a la fila que contiene a la variable de salida. Esta fila la llamaremos fila pivote

Ejemplo:



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Tabla 1		C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
0	S_1	2	5	1	0	0	35	$35/2 = 17.5$
0	S_2	3	-2	0	1	0	18	$18/3 = 6$
0	S_3	2	4	0	0	1	26	$26/2 = 13$
	Z	-3	-2	0	0	0	0	

El menor valor es 6 por lo que la variable que saldrá de la base es S_2

La variable de salida sería S_2 . El número que se encuentra al cruzar la fila pivote y la columna pivote el **elemento pivote**; en nuestro caso sería **3**:

Tabla 1		C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
0	S_1	2	5	1	0	0	35	
0	S_2	3	-2	0	1	0	18	
0	S_3	2	4	0	0	1	26	
	Z	-3	-2	0	0	0	0	

La variable S_2 saldrá de la base y entrará X_1 acompañado de su coeficiente (3)

Elemento Pivote

5. Actualizar la Matriz

Una vez determinado nuestro elemento pivote, realizaremos las operaciones de Gauss-Jordan para formar nuestra **matriz identidad**. El nuevo valor de cada fila se calculará de la siguiente manera:

- **Para la fila pivote:** El nuevo valor se obtendrá dividiendo el valor actual entre el elemento pivote.

Nuevo Valor Fila Pivote = Valor Actual Fila Pivote / Elemento Pivote

- **Para las otras filas:** El nuevo valor se calcula restando del valor actual, la multiplicación del elemento de la fila que se encuentra en la columna pivote por el nuevo valor calculado en la fila pivote.

Nuevo Valor = Valor Actual – (Elemento Fila Columna Pivote * Nuevo Valor Fila Pivote).

Para entenderlo mejor, continuaremos resolviendo el ejemplo. Iniciaremos con la fila pivote:

El nuevo valor de la fila pivote

Tabla 1		C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
0	S_1	2	5	1	0	0	35	
3	X_1	3	-2	0	1	0	18	
0	S_3	2	4	0	0	1	26	
	Z	-3	-2	0	0	0	0	

→

Tabla 1		C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
0	S_1	2	5	1	0	0	35	
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6	
0	S_3	2	4	0	0	1	26	
	Z	-3	-2	0	0	0	0	

Fila Pivote

Elemento Pivote

Nueva Fila Pivote

Se divide cada valor entre el elemento pivote (3)

El nuevo valor para las otras filas:

En las otras filas realizaremos los cálculos de forma diferente. Iniciaremos con la fila de S_1 :

Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	2	5	1	0	0	35
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6
0	S_3	2	4	0	0	1	26
	Z	-3	-2	0	0	0	0



Nuevo Valor = Valor Actual - (Elemento Fila Columna Pivote * Nuevo Valor Fila Pivote)			
Valor Actual	Elemento Fila Columna Pivote	Nuevo Valor Fila Pivote	Nuevo Valor
2	2	1	$2 - (2 \times 1) = 0$
5	2	-2/3	$5 - (2 \times -2/3) = 19/3$
1	2	0	$1 - (2 \times 0) = 1$
0	2	1/3	$0 - (2 \times 1/3) = -2/3$
0	2	0	$0 - (2 \times 0) = 0$
35	2	6	$35 - (2 \times 6) = 23$

Elemento Fila Columna Pivote = Es el elemento de toda la fila que se encuentra en la columna Pivote

Nueva Fila Pivote = Estos nuevos valores se utilizan para realizar los cálculos

Actualizamos la tabla:



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	2	5	1	0	0	35
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6
0	S_3	2	4	0	0	1	26
	Z	-3	-2	0	0	0	0



Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	19/3	1	-2/3	0	23
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6
0	S_3	2	4	0	0	1	26
	Z	-3	-2	0	0	0	0

Para la fila S_3 tenemos:

Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	19/3	1	-2/3	0	23
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6
0	S_3	2	4	0	0	1	26
	Z	-3	-2	0	0	0	0



Nuevo Valor = Valor Actual - (Elemento Fila Columna Pivote * Nuevo Valor Fila Pivote)

Valor Actual	Elemento Fila Columna Pivote	Nuevo Valor Fila Pivote	Nuevo Valor
2	2	1	$2 - (2 \times 1) = 0$
4	2	-2/3	$4 - (2 \times -2/3) = 16/3$
0	2	0	$0 - (2 \times 0) = 0$
0	2	1/3	$0 - (2 \times 1/3) = -2/3$
1	2	0	$1 - (2 \times 0) = 1$
26	2	6	$26 - (2 \times 6) = 14$

Elemento Fila Columna Pivote = Es el elemento de toda la fila que se encuentra en la columna Pivote

Nueva Fila Pivote = Estos nuevos valores se utilizan para realizar los cálculos

Actualizamos la tabla:

Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	19/3	1	-2/3	0	23
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6
0	S_3	2	4	0	0	1	26
	Z	-3	-2	0	0	0	0



Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	19/3	1	-2/3	0	23
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6
0	S_3	0	16/3	0	-2/3	1	14
	Z	-3	-2	0	0	0	0

Finalmente en la fila Z tenemos:

Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	19/3	1	-2/3	0	23
3	X_1	1	-2/3	0	1/3	0	6
0	S_3	0	16/3	0	-2/3	1	14
	Z	-3	-2	0	0	0	0

Elemento Fila Columna Pivote = Es el elemento de toda la fila que se encuentra en la columna Pivote

Nueva Fila Pivote = Estos nuevos valores se utilizan para realizar los cálculos

Nuevo Valor = Valor Actual - (Elemento Fila Columna Pivote * Nuevo Valor Fila Pivote)

Valor Actual	Elemento Fila Columna Pivote	Nuevo Valor Fila Pivote	Nuevo Valor
-3	-3	1	$-3 - (-3 \times 1) = 0$
-2	-3	-2/3	$-2 - (-3 \times -2/3) = -4$
0	-3	0	$0 - (-3 \times 0) = 0$
0	-3	1/3	$0 - (-3 \times 1/3) = 1$
0	-3	0	$0 - (-3 \times 0) = 0$
0	-3	6	$0 - (-3 \times 6) = 18$



Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	$19/3$	1	$-2/3$	0	23
3	X_1	1	$-2/3$	0	$1/3$	0	6
0	S_3	0	$16/3$	0	$-2/3$	1	14
	Z	-3	-2	0	0	0	0



Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	$19/3$	1	$-2/3$	0	23
3	X_1	1	$-2/3$	0	$1/3$	0	6
0	S_3	0	$16/3$	0	$-2/3$	1	14
	Z	0	-4	0	1	0	18

La matriz resultante sería:

Tabla 1	C_j	3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	$19/3$	1	$-2/3$	0	23
3	X_1	1	$-2/3$	0	$1/3$	0	6
0	S_3	0	$16/3$	0	$-2/3$	1	14
	Z	0	-4	0	1	0	18

Continuamos:

Cómo puedes ver la posición donde se encontraba nuestro elemento pivote ahora es 1 y los elementos que lo acompañan en la columna se convierten en 0. Es así que empezamos a formar nuestra matriz identidad.

Volver al paso número 3

Con este último resultado, volveremos al paso 3 y repetiremos el proceso. Cómo existen valores negativos en el vector de costes reducidos, podemos seguir optimizando.

El único valor negativo es -4, por lo que la variable que ingresará es X_2 .

Para elegir la variable que va a salir, dividimos cada valor de la columna R por su contraparte de la columna X_2 (este último valor debe ser positivo)

- $23/(19/3) = 69/19 = 3.632$
- El valor en la columna X_2 es negativo por lo que no se toma en cuenta.
- $14/(16/3) = 21/8 = 2.625$

El menor valor se encuentra en la fila de S_3 , por lo que es la variable que saldrá de la base. El elemento pivote es $16/3$. Realizamos nuevamente las iteraciones obteniendo el siguiente resultado:

C_j		3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	$16/3$	1	$-2/3$	0	23
3	X_1	1	$-2/3$	0	$1/3$	0	6
0	S_3	0	$16/3$	0	$-2/3$	1	14
	Z	0	-4	0	1	0	18



C_j		3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	0	1	$1/8$	$-19/16$	$51/8$
3	X_1	1	0	0	$1/4$	$1/8$	$31/4$
2	X_2	0	1	0	$-1/8$	$3/16$	$21/8$
	Z	0	0	0	$1/2$	$3/4$	$57/2$

En esta última matriz vemos que el vector de costes reducidos ya no tiene ningún valor negativo, lo que quiere decir que nos encontramos en el valor óptimo. Obtendremos los valores de las variables básicas y de Z de la siguiente forma:
Las variables que no se encuentran en la base tendrán valor de 0.
Solución: $X_1 = 31/4$, $X_2 = 21/8$, $S_1 = 51/8$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $Z = 57/2$

C_j		3	2	0	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	0	0	1	$1/8$	$-19/16$	$51/8$
3	X_1	1	0	0	$1/4$	$1/8$	$31/4$
2	X_2	0	1	0	$-1/8$	$3/16$	$21/8$
	Z	0	0	0	$1/2$	$3/4$	$57/2$

Variables Básicas

Actividad



Ejemplo 1 – Maximizar:

A continuación se presenta un nuevo problema de maximización:

Función Objetivo

Maximizar: $Z = 2X_1 + 5X_2$

Sujeto a:

$$X_1 + 6X_2 \leq 20$$

$$X_1 + X_2 \leq 60$$

$$X_1 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Desarrollar los ejercicios vistos en clase de manera individual, y subir al SIA en la actividad semana correspondiente:

Gracias



Néstor Muñoz

Docente



nestor.munoz@unc.edu.pe



941434300



Universidad
Nacional de
Cajamarca

"Norte de la Universidad Peruana"



Universidad Nacional de Cajamarca



www.unc.edu.pe/



Universidad Nacional de Cajamarca