INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA II

Modelo de REDES

ALGORITMO DE DE FLUJO MÁXIMO

Ingeniería de Sistemas

Ing. Néstor Muñoz

Logro de sesión

- Al culminar la sesión, el estudiante aplica el algoritmo de de flujo máximo

ALGORITMOS DE DE FLUJO MÁXIMO

El algoritmo de flujo máximo se basa en determinar **rutas de irrupción** que tengan flujo neto *positivo* entre los nodos fuente (origen) y sumidero (destino). Cada ruta comunica parte o todas las capacidades de sus arcos al flujo total en la red.

Considérese el arco (*i*, *j*) con capacidades iniciales $(\overline{Cij}, \overline{Cji})$. A medida que partes de esas capacidades contribuyen al flujo en el arco, se actualizan los **residuales** (o capacidades remanentes). La red con los residuales actualizados se llama **red residual**. Se usará la notación (c_{ij}, c_{ji}) para representar esos residuales.

Para un nodo *j* que recibe flujo del nodo *i*, se define una etiqueta $[a_j, i]$, donde a_j es el flujo del nodo *i* al nodo *j*. Los pasos del algoritmo se resumen como sigue.

ALGORITMOS DE DE FLUJO MÁXIMO

PASOS:

Paso 1. Para todos los arcos (i, j) se iguala la capacidad residual con la capacidad inicial; esto es, $(c_{ij}, c_{ji}) = (\overline{Cij}, \overline{Cji})$. Sea $a_1 = \infty$ y se etiqueta el nodo fuente 1 con $[\infty, -]$. Se iguala $i = 1$ y se prosigue en el paso 2.

Paso 2. Determinar S_i, el conjunto de nodos j no etiquetados que se pueden alcanzar directamente desde el nodo i, con arcos con residuales *positivos* (esto es, $c_{ij} > 0$ para toda $j \in S_i$. Si $\neq \phi$, ir al paso 3. En caso contrario ir al paso 4.

Paso 3. Determinar $k \in S_i$ tal que

$$c_{ik} = \max_{j \in S_i} \{c_{ij}\}$$

Igualar $a_k = c_{ik}$ y etiquetar el nodo k con $[a_k, i]$. Si $k = n$, el nodo de sumidero se ha etiquetado, y se ha encontrado una *ruta de irrupción*; ir al paso 5. En caso contrario, igualar $i = k$ y seguir en el paso 2.

ALGORITMOS DE DE FLUJO MÁXIMO

PASOS:

Paso 4. (*Retroceso*). Si $i = 1$, no hay otras irrupciones posibles; ir al paso 6. En caso contrario, sea r el nodo que se ha etiquetado *inmediatamente* antes del nodo actual i y quitar i del conjunto de nodos adyacentes a r. Igualar $i = r$ y continuar en el paso 2.

Paso 5. (*Determinación de la red residual*). Sea N_p $(1, k_1, k_2, ..., n)$; se definen los nodos de la p-ésima ruta de irrupción del nodo fuente 1 al nodo destino n. Entonces el flujo máximo por la ruta se calcula como

$$f_p = \min\{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_n\}$$

La capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de irrupción se *disminuye* en f_p unidades en la dirección del flujo y se *aumenta* f_p unidades en la dirección contraria; esto es, para los nodos i y j en la ruta, el flujo residual se cambia del actual (c_{ij}, c_{ji}) a

a) $(C_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$ si el flujo va de i a j

b) $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$ si el flujo va de j a i

Se reinstalan todos los nodos que se hayan eliminado en el paso 4. Poner $i = 1$ y regresar al paso 2 para intentar una nueva ruta de irrupción.

ALGORITMOS DE DE FLUJO MÁXIMO
PASOS:

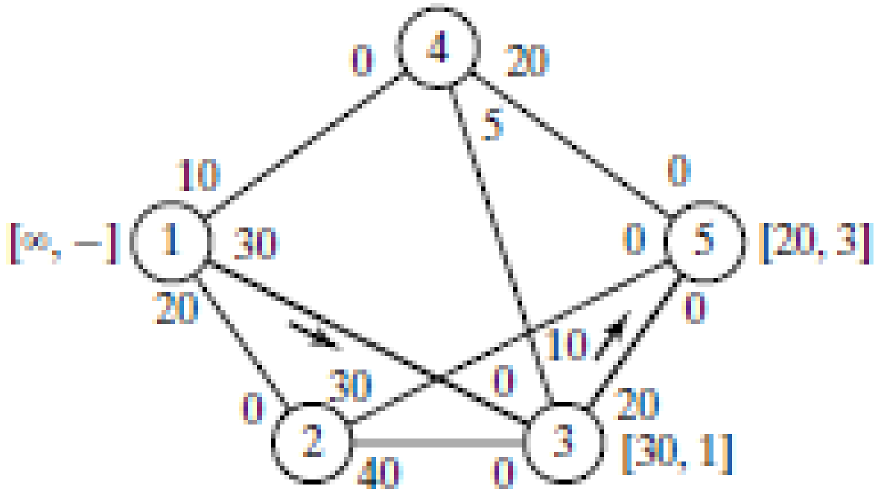
Paso 6. (*Solución*)

a) Si se han determinado *m* rutas de irrupción, el flujo máximo en la red es

$$F = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$$

Ejemplo 01:

Determinar el flujo máximo en la siguiente red.



(a) $f_1 = 20$

Iteración 1. Igualar los residuales iniciales (c_{ij}, c_{ji}) a las capacidades iniciales $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$.

Paso 1. Igualar $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 con $[\infty, —]$. Poner $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$ $(\neq \emptyset)$.

Paso 3. $k = 3$ porque $c_{13} = \text{máx}\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \text{máx}\{20, 30, 10\} = 30$. Tomar $a_3 = c_{13} = 30$ y etiquetar el nodo 3 con $[30, 1]$. Igualar $i = 3$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_3 = (4, 5)$.

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{35} = \text{máx}\{10, 20\} = 20$. Etiquetar el nodo 5 con $[20, 3]$. Se obtuvo una irrupción. Ir al paso 5.

Paso 5. La ruta de irrupción se determina con las etiquetas comenzando en el nodo 5 y terminando en el nodo 1; esto es, $(5) \rightarrow [20, 3] \rightarrow (3) \rightarrow [30, 1] \rightarrow (1)$. Así, $N_1 = \{1, 3, 5\}$ y $f_1 = \text{mín}\{a_1, a_3, a_5\} = \{\infty, 30, 20\} = 20$. Las capacidades residuales a lo largo de la ruta N_1 son

$$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)$$

$$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)$$

Ejemplo 01:

Iteración 2.

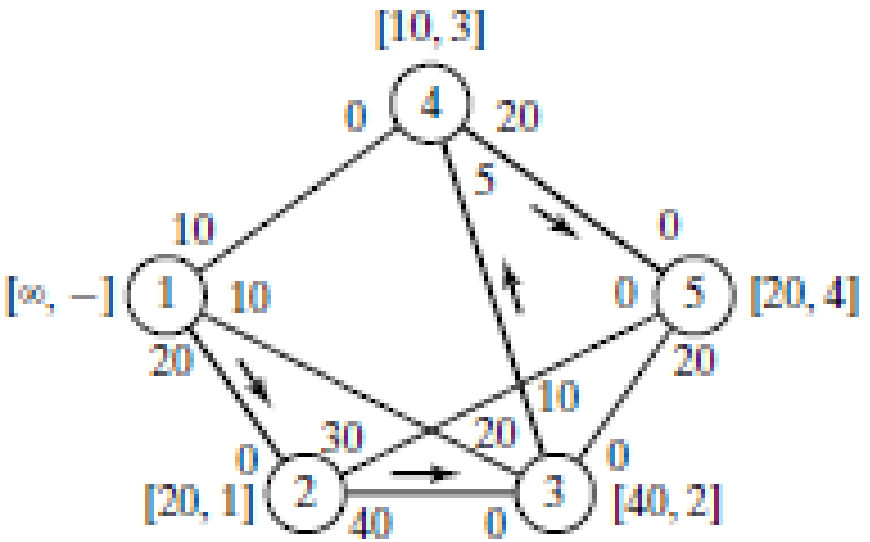
Paso 1. Poner $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 con $[\infty, —]$. Igualar $i = 1$.
Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.
Paso 3. $k = 2$ y $a_2 = c_{12} = \text{máx}\{20, 10, 10\} = 20$. Poner $i = 2$ y repetir el paso 2.
Paso 2. $S_2 = \{3, 5\}$.
Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 40$. Etiquetar el nodo 3 con $[40, 2]$. Poner $i = 3$ y repetir el paso 2.
Paso 2. $S_3 = \{4\}$ (observe que $c_{35} = 0$; en consecuencia el nodo 5 no puede incluirse en S_3).
Paso 3. $k = 4$ y $a_4 = c_{34} = 10$. Etiquetar el nodo 4 con $[10, 3]$. Igualar $i = 4$ y repetir el paso 2.
Paso 2. $S_4 = \{5\}$ (observe que los nodos 1 y 3 ya se han etiquetado y en consecuencia no se pueden incluir en S_4).
Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{45} = 20$. Etiquetar el nodo 5 con $[20, 4]$. Se ha logrado la irrupción. Ir al paso 5.
Paso 5. $N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f_2 = \text{mín}\{\ \infty\ , 20, 40, 10, 20\} = 10$. Los residuales a lo largo de la ruta de N_2 son

$$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

$$(c_{23}, c_{32}) = (40 - 10, 0 + 10) = (30, 10)$$

$$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0, 15)$$

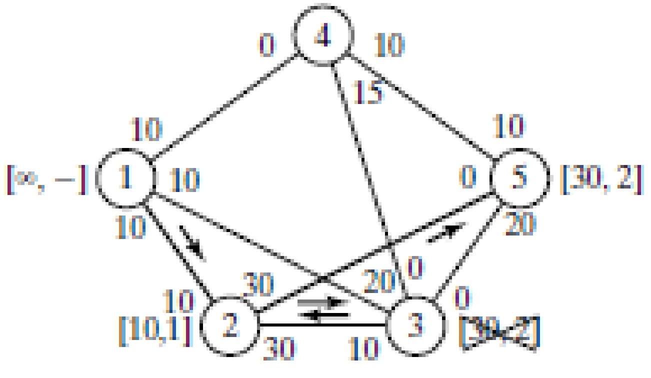
$$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$



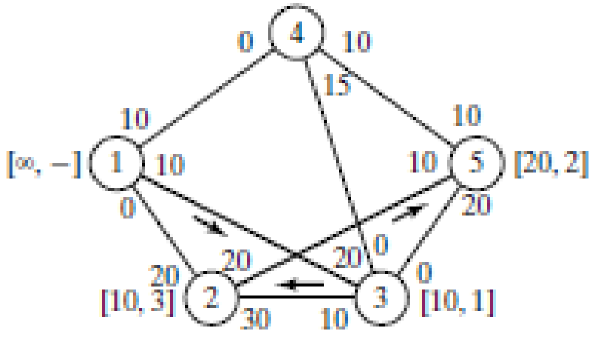
(b) $f_2 = 10$

Ejemplo 01:

Iteración 3.
Paso 1. Poner $a_1 = \alpha$ q y etiquetar el nodo 1 con [α, —]; poner i =1.
Paso 2. S_1 {2, 3, 4}.
Paso 3. k 2 y a_2 c_{12} máx{10, 10, 10} =10 (aunque los empates se rompen en forma arbitraria, los programas como TORA selecciona siempre el nodo empatado que tenga el índice menor; usaremos esta convención en el ejemplo). Etiquetar el nodo 2 con [10, 1]. Poner i = 2 y repetir el paso 2.

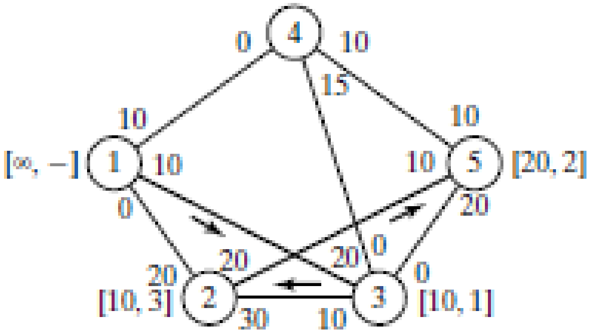


(c) $f_3 = 10$



(d) $f_4 = 10$

Ejemplo 01:



(d) $f_4 = 10$

Paso 2. $S_2 = \{3, 5\}$.

Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 30$. Etiquetar el nodo 3 con $[30, 2]$. Poner $i = 3$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_3 = \varnothing$ (porque $c_{34} = c_{35} = 0$). Ir al paso 4 para retroceder.

Paso 4. La etiqueta $[30, 2]$ en el nodo 3 da el nodo inmediato anterior $r = 2$. Sacar el nodo 3 de más consideraciones *en esta iteración*, tachándolo. Repetir el paso 2 con $i = r = 2$.

Paso 2. $S_2 = \{5\}$; nótese que el nodo 3 se ha eliminado en el paso de retroceso.

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{25} = 30$. Etiquetar el nodo 5 con $[30, 2]$. Se ha logrado la irrupción; proseguir en el paso 5.

Paso 5. $N_3 = \{1, 2, 5\}$ y $c_5 = \min\{\infty, 10, 30\} = 10$. Los residuales a lo largo de la trayectoria de N_3 son

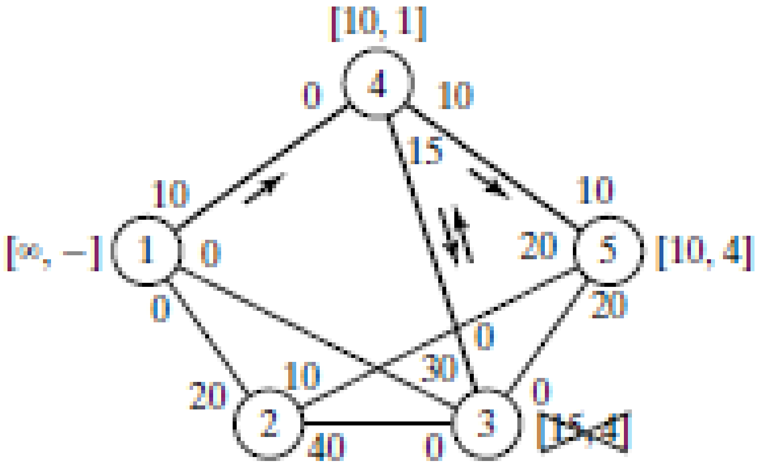
$$(c_{12}, c_{21}) = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20)$$

$$(c_{25}, c_{52}) = (30 - 10, 0 + 10) = (20, 10)$$

Iteración 4. En esta iteración se obtiene $N_4 = \{1, 3, 2, 5\}$ con $f_4 = 10$ (¡compruébelo!).

Iteración 5. En esta iteración se obtiene $N_5 = \{1, 4, 5\}$ con $f_5 = 10$ (¡compruébelo!).

Iteración 6. Todos los arcos que salen del nodo 1 tienen residuales cero. En consecuencia no hay más irrupciones posibles. Pasaremos al paso 6 para determinar la solución.

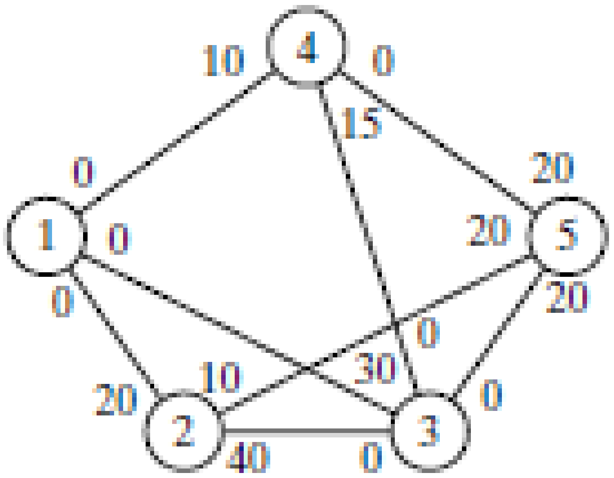


(e) $f_5 = 10$

Ejemplo 01:

Paso 6. El flujo máximo en la red es $F = f_1 + f_2 + \ldots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ unidades. El flujo en los distintos arcos se calcula restando los últimos residuales (c_{ij}, c_{ji}) en las iteraciones 6 de las capacidades iniciales $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$, como se ve en la tabla siguiente.

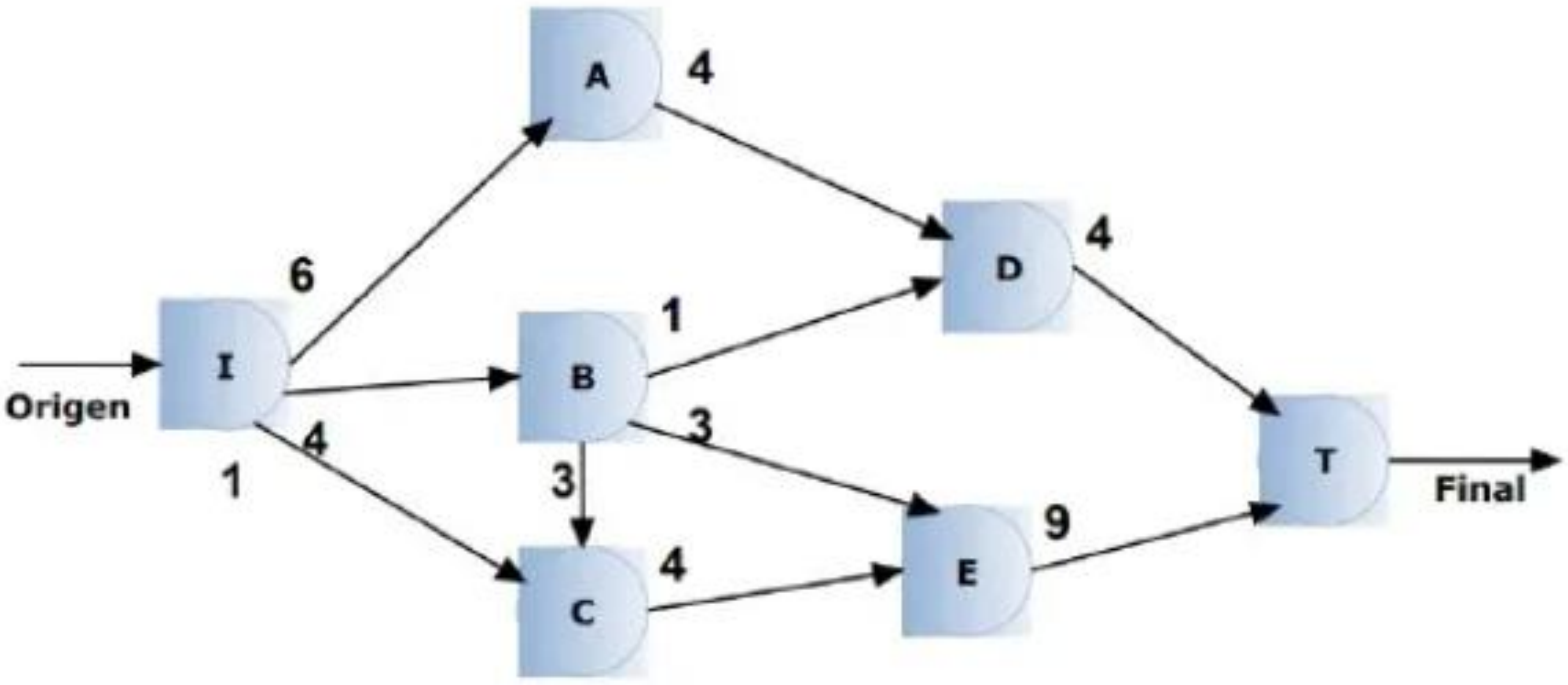
Arco	$(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji}) - (c_{ij}, c_{ji})_6$	Flujo	Dirección
(1, 2)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$1 \to 2$
(1, 3)	$(30, 0) - (0, 30) = (30, -30)$	30	$1 \to 3$
(1, 4)	$(10, 0) - (0, 10) = (10, -10)$	10	$1 \to 4$
(2, 3)	$(40, 0) - (40, 0) = (0, 0)$	0	—
(2, 5)	$(30, 0) - (10, 20) = (20, -20)$	20	$2 \to 5$
(3, 4)	$(10, 5) - (0, 15) = (10, -10)$	10	$3 \to 4$
(3, 5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$3 \to 5$
(4, 5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$4 \to 5$



(f) Sin irrupción

Practicamos:

Determinar el flujo máximo en la siguiente red.



Gracias

- Néstor Muñoz
- Docente
- nestor.munoz@unc.edu.pe

941434300