



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN INGENIERÍA I

Variables
Método simplex - Penalización

Ingeniería de Sistemas
Docente: Ing. Néstor Muñoz Abanto



Universidad Nacional de Cajamarca



www.unc.edu.pe/



Universidad Nacional de Cajamarca



- Al término de la sesión, el estudiante analiza otras formas de modelos de Programación Lineal, a partir del análisis de casos, utilizando Método de la "M" o de Penalización y el método simplex, siguiendo un procedimiento lógico y muestra la solución óptima.

LOGRO DE LA SESIÓN



Método de la "M" grande o de Penalización.

Hasta este momento se han presentado los detalles del método símplex con la suposición de que el problema se encuentra en nuestra **forma estándar (maximizar Z sujeta a las restricciones funcionales de la forma \leq y restricciones de no negatividad sobre todas las variables)** con $b_i \geq 0$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$.

En esta sesión se establecerá cómo hacer los ajustes requeridos a otras formas legítimas de modelos de Programación Lineal. Se verá que todos estos ajustes se pueden hacer en el paso inicial, de manera que el resto del método simplex se aplica justo como se aprendió.

Variables artificiales

- Se construye un *problema artificial* más conveniente introduciendo una variable ficticia (llamada *variable artificial*) en cada restricción que lo requiera.
- Esta nueva variable se introduce sólo con el fin de que sea la variable básica inicial para esa ecuación.
- Las restricciones usuales de no negatividad también se aplican sobre estas variables y la función objetivo se modifica para que imponga una **penalización** exorbitante en el caso de que adquieran valores mayores que cero.
- Las iteraciones del método símplex automáticamente fuerzan a las variables artificiales a desaparecer (a volverse cero) una a una, hasta que todas quedan fuera de la solución; después de esto se resuelve el problema *real*.

Restricciones funcionales de la forma: $=$

Suponga que se modifica el problema del ejemplo presentado y resuelto en la sesión anterior. Considere el siguiente cambio: la tercera restricción,

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

se convierte en una restricción de igualdad:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

Aplicando la técnica de las variables artificiales se introduce una variable artificial no negativa (denotada por A_1) en la última ecuación, como si fuera una variable de holgura:

$$3x_1 + 2x_2 + A_1 = 18$$

En resumen si tenemos una restricción funcional en forma de igualdad y deseamos "pasarla a su forma de igualdad", únicamente debemos sumar una variable artificial.



Restricciones funcionales de la forma: \geq

Para ilustrar la manera en que la técnica de las variables artificiales maneja las restricciones de la forma \geq usaremos el siguiente restricción:

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

Notemos que la restricción es del tipo \geq , por lo que para cambiarla a su forma de igualdad tendríamos que restar una variable de superávit (o de excedente), quedando de la siguiente manera:

$$0.6x_1 + 0.4x_2 - E_1 = 6$$

Se ha *restado* la *variable de excedente* E_1 de $0.6x_1 + 0.4x_2$, o sea, lo que se pasa de 6.

No obstante en este caso debe agregarse otra variable.

Esta variable extra, llamada *variable artificial* se aumenta como sigue:

$$0.6x_1 + 0.4x_2 - E_1 + A_1 = 6$$

La razón de esto es que, si no se agrega la variable artificial, no se estarían cumpliendo las restricciones de no negatividad.



Restricciones funcionales de la forma \geq

El método símplex comienza por hacer todas las variables reales (originales) iguales a cero.

Entonces:

Sea $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, entonces:

$$-E_1 = 6$$

ó

$E_1 = -6$ (que no cumple la restricción de no negatividad)



En resumen, una restricción de la forma \geq se convierte a su forma de igualdad restando una variable de excedente (E_i) y sumando una variable artificial (A_i).

Cambia la función objetivo

Se asigna una *penalización enorme* al hecho de tener $A1 > 0$, cambiando la función objetivo

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \text{ a:}$$

$$Z = 3x_1 + 5x_2 - MA_1,$$

donde **M** simbólicamente representa un número positivo *muy grande*.

Este método que fuerza a **A1** hasta el nivel de **A1** = 0 en la solución óptima se llama **método de la M**.

Nota: Para el caso de minimización, penalizamos a la variable artificial, haciéndola aparecer en la función objetivo con un coeficiente de +M.

Consideremos el siguiente problema:

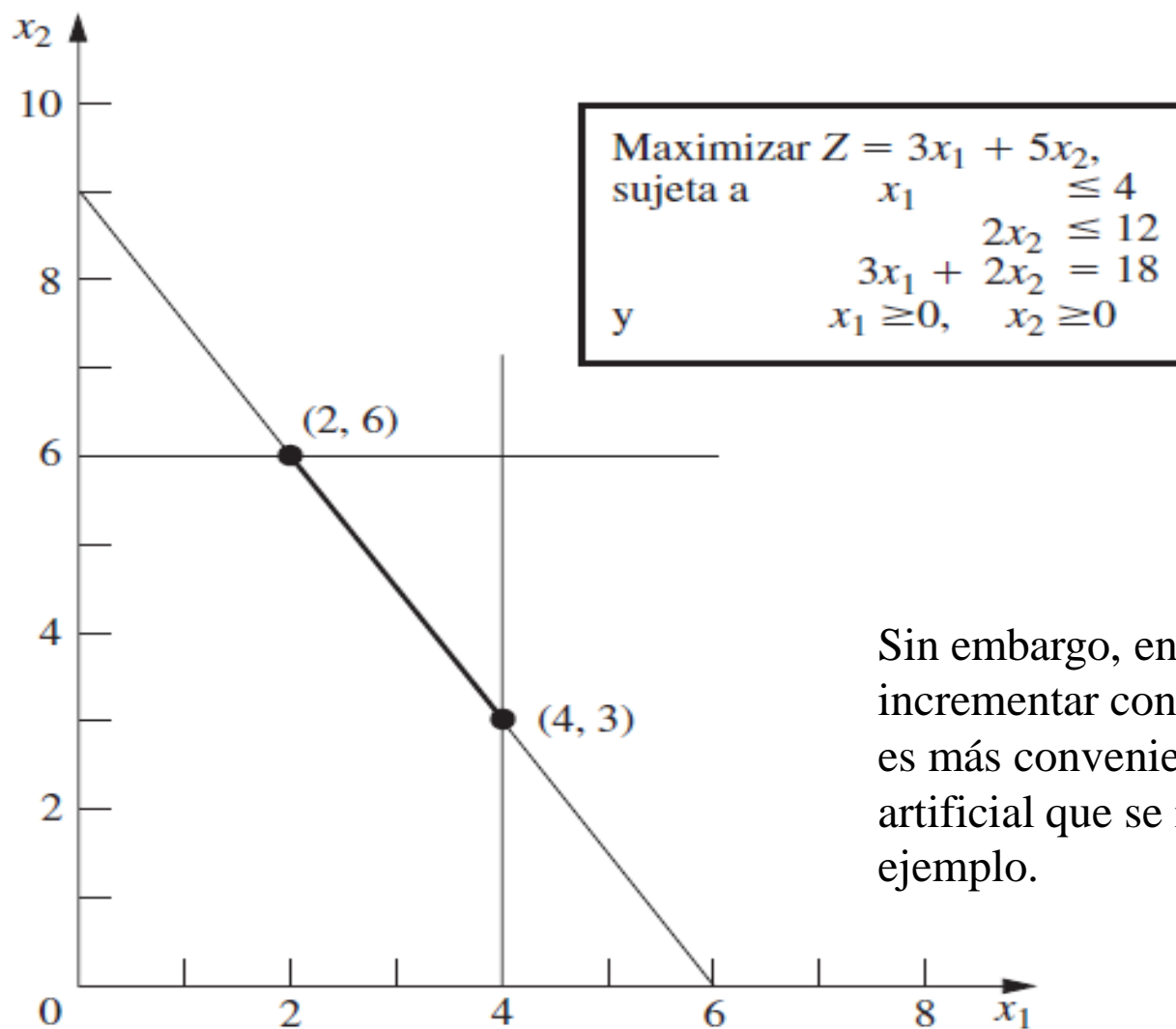
$$\begin{array}{llllll} \text{Maximizar} & Z & = & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{sujeta a} & & & x_1 & & \leq 4 \\ & & & & & 2x_2 \leq 12 \\ & & & 3x_1 & + & 2x_2 = 18 \\ & & & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Como explicamos anteriormente, para resolver este problema, debemos construir un **problema artificial** que tiene la misma solución óptima que el problema real, haciendo dos modificaciones a este problema real.

Consideremos el siguiente problema:



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"



Sin embargo, en lugar de hacer esta sustitución e incrementar con ello el número de restricciones, es más conveniente utilizar la técnica de la variable artificial que se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Introducir variables de holgura

Después de introducir al sistema de ecuaciones las variables de holgura que todavía se necesitan para las restricciones de desigualdad, la forma aumentada del problema

$$\begin{array}{llllll} \text{Maximizar} & Z & = & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{sujeta a} & & & x_1 & & \leq 4 \\ & & & & 2x_2 & \leq 12 \\ & & & 3x_1 & + & 2x_2 = 18 \\ & & & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} (0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & & + M\bar{x}_5 & = & 0 \\ (1) & x_1 & + & x_3 & = & 4 \\ (2) & & 2x_2 & + & x_4 & = 12 \\ (3) & 3x_1 + 2x_2 & & + & \bar{x}_5 & = 18 \end{array}$$

Obtención de una solución ***Básica Factible BF inicial***: El procedimiento es construir un **problema artificial** que tenga la misma solución óptima que el problema real, pero a este último se le deben hacer dos modificaciones.

1. Se aplica la **técnica de la variable artificial(*)** mediante la introducción de una **variable artificial no negativa** (denotada por \bar{x}_5 en la ecuación (3), como si fuera una variable de holgura

$$(3) \quad + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$$

2. Se asigna una *penalización enorme* al hecho de tener $\bar{x}_5 > 0$ para cambiar la función objetivo

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \text{ a}$$

$$Z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5, \quad \text{donde } M \text{ representa en forma simbólica un número positivo muy grande.}$$

(Este método que fuerza a \bar{x}_5 hasta llegar a $\bar{x}_5 = 0$ en la solución óptima se llama **método de la gran M**.

(*) Se distinguirán siempre las variables artificiales mediante una barra sobre ellas



Pasamos los coeficientes a la tabla símplex

Realizando el procedimiento anterior, la tabla símplex queda de la siguiente manera:



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Variable básica	Coeficientes de:							
	Z	x1	x2	x3	x4	$\overline{x5}$		Lado derecho
Z	1	-3	-5	0	0	M		0
x3	0	1	0	1	0	0		4
x4	0	0	2	0	1	0		12
$\overline{x5}$	0	3	2	0	0	1		18

Para hacer cero el coeficiente M, utilizamos el renglón de $\overline{x5}$ como renglón pivote multiplicándolo por $-M$ y sumando el resultado al renglón de Z

Variable básica	Coeficientes de:							
	Z	x1	x2	x3	x4	$\overline{x5}$		Lado derecho
Z	1	$-3M-3$	$-2M-5$	0	0	0		$-18M$

Esta tabla todavía no está en la forma apropiada porque el coeficiente de $\overline{x5}$ es diferente de cero en la ecuación de Z (es M). Por lo tanto, antes de que el método símplex pueda aplicar la prueba de optimalidad y encontrar la variable básica entrante, debe pasarse esta tabla a la forma apropiada para que cumpla la **condición símplex**.

Esta condición que debe cumplir toda tabla del método símplex para que pueda reportarnos la siguiente solución básica factible dice que: "Toda variable básica debe tener un 1 en la intersección de su renglón y columna correspondiente y cero en los demás renglones incluido el renglón de Z", en otras palabras, que toda variable que sea básica solamente debe aparecer en el renglón de la restricción que representa.

Pasamos los coeficientes a la tabla símplex

En este momento estamos preparados para pasar los coeficientes a la tabla símplex:.

Variable básica	Coeficientes de:						Lado derecho
Z	x1	x2	x3	x4	\bar{x}_5		
Z	1	-3M-3	-2M-5	0	0		-18M
x3	0	1	0	1	0	0	4
x4	0	0	2	0	1	0	12
\bar{x}_5	0	3	2	0	0	1	18

Variable básica	Coeficientes de:						Lado derecho		
Z	x1	x2	x3	x4	\bar{x}_5				
Z	1	-3M-3	-2M-5	0	0		-18M		
x3	0	1	0	1	0	0	4	4/1	4
x4	0	0	2	0	1	0	12		
\bar{x}_5	0	3	2	0	0	1	18	18/3	6

Podemos observar que la tabla anterior ya se encuentra en la forma apropiada y podemos leer la solución básica factible actual, que es (0, 0, 4, 12, 18), la cual aplicando la prueba de optimalidad vemos que no es óptima ya que todavía tenemos coeficientes negativos en el renglón de Z (los correspondientes a x_1 y x_2).

Aplicando el método símplex a la tabla anterior tenemos: el coeficiente negativo con el mayor valor absoluto corresponde a x_1 ($-3M-3$), recordemos que M es un número *muy grande positivo*, por lo tanto, x_1 se convierte en la variable básica entrante, realizando los cocientes correspondientes, vemos que x_3 se convierte en la variable básica saliente

Conjunto completo de tablas simplex



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de:					Lado derecho
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{x}_5
0	Z	(0)	1	$-3M - 3$	$-2M - 5$	0	0	$-18M$
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	12
	\bar{x}_5	(3)	0	0	2	0	0	18
1	Z	(0)	1	0	$-2M - 5$	$3M + 3$	0	$-6M + 12$
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	12
	\bar{x}_5	(3)	0	0	2	-3	0	6
2	Z	(0)	1	0	0	$-\frac{9}{2}$	0	$M + \frac{5}{2}$
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	4
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
3	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$M + 1$
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0

Actividad



Universidad
Nacional de
Cajamarca
"Norte de la Universidad Peruana"

Determine la solución **Básica Factible BF inicial** para el siguiente ejercicio.



$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Considere que el coeficiente de la variable artificial es:

-M, en problemas de maximización

+M, en problemas de minimización



Desarrollar los ejercicios vistos en clase de manera individual, y subir al SIA en la actividad de nuestra cuarta sesión.

Gracias



Néstor Muñoz

Docente



nestor.munoz@unc.edu.pe



941434300



Universidad
Nacional de
Cajamarca

"Norte de la Universidad Peruana"



Universidad Nacional de Cajamarca



www.unc.edu.pe/



Universidad Nacional de Cajamarca