

Курс: Функциональное программирование
Домашнее задание 2
Тигиной Марии 2 группа

0. Приведите пример терма(замкнутого) который бы:

a) Находился в WHNF, но не в HNF.

$\lambda x \rightarrow (\lambda y \rightarrow y y) x$

(1 балл)

b) Находился бы в HNF, но не в NF.

$\lambda x \rightarrow x((\lambda y \rightarrow y) x)$

(1 балл)

1. Напишите следующие функции над числами Чёрча:

a) Сравнения $m \leq n$:

$le = \lambda m n \rightarrow iszero (minus a b)$

(1 балл)

b) Сравнения $m \geq n$:

$ge = \lambda m n \rightarrow iszero (minus b a)$

(1 балл)

c) Сравнения $m < n$:

$lt = \lambda m n \rightarrow le (succ a) b$

(1 балл)

d) Сравнения $m > n$:

$gt = \lambda m n \rightarrow ge a (succ b)$

(1 балл)

e) Проверка на равенство $m == n$:

$equals = \lambda m n \rightarrow and (le a b) (ge a b)$

(1 балл)

f) Функцию, суммирующую числа от 0 до n(комбинатором неподвижной точки пользоваться нельзя):

$sum = \lambda n \rightarrow rec \lambda n (\lambda x y \rightarrow plus x (succ y)) \bar{I}$

(1 балл)

2. Напишите предикат `isEven`, возвращающий `tru`, если его аргумент четное число и `fls` – в противном случае.

В этом задании нельзя использовать комбинатор неподвижной точки.

$isEven = \lambda m \rightarrow rec m (\lambda x y \rightarrow not x) tru$

(2 балла)

3. Напишите следующие функции над списками. Комбинатором неподвижной точки пользоваться нельзя

a) `length` – длина списка

$length = \lambda l \rightarrow l (\lambda x \rightarrow succ) \bar{0}$

(1 балл)

b) `sum` – сумма элементов списка

$sum = \lambda l \rightarrow (\lambda x \rightarrow plus x) \bar{0}$

(1 балл)

c) применяет функцию `f` ко всем элементам списка $mapsucc[1, 2, 3] = [2, 3, 4]$

$map = \lambda f l \rightarrow (\lambda x \rightarrow cons (f x)) nil$

(1 балл)

- d) reverse – разворачивает список. $\text{reverse}[1, 2, 3] = [3, 2, 1]$
 $\text{push} = \lambda x \lambda l \rightarrow l \text{ cons } (\text{cons } x \text{ nil})$
 $\text{reverse} = \lambda l \rightarrow l \text{ push nil}$
 (2 балла)
- e) tail – хвост списка. $\text{tail}[1, 2, 3] = [2, 3]$.
 Обозначим: $\text{pair } x \ y = (x, y)$
 $\text{tail} = \lambda l \rightarrow \text{snd}(l(\lambda x \ p \rightarrow (\text{cons } x(\text{fst } p), \text{fst}(p))(\text{nil}, \text{nil})))$
 (2 балла)

4. Используя комбинатор неподвижной точки найдите терм F такой что:

- a) Для любого M было бы верно $F \ M = M \ F$
 $F \ M = (\lambda f \ x \rightarrow x \ f) F \ M$
 $F = (\lambda f \ x \rightarrow x \ f) F$
 $F = Y(\lambda f \ x \rightarrow x \ f)$
 (1 балла)
- b) Для любых M и N было бы верно $F \ M \ N = N \ F \ (M \ N \ F)$
 $F \ M \ N = (\lambda f \ x \ y \rightarrow x \ f(x \ y \ f)) F \ M \ N$
 $F = (\lambda f \ x \ y \rightarrow x \ f(x \ y \ f)) F$
 $F = Y(\lambda f \ x \ y \rightarrow x \ f(x \ y \ f))$
 (1 балла)

5. Пусть f и g определены взаимно-рекурсивно:

$f = Ffg$
 $g = Gfg$
 Используя комбинатор неподвижной точки найдите нерекурсивные определения функций f и g
 $f = (\lambda x \rightarrow F \ x \ g) f = Y(\lambda x \rightarrow F \ x \ g)$
 $g = (\lambda y \rightarrow G \ f \ y) g = (\lambda y \rightarrow G \ (Y(\lambda x \rightarrow F \ x \ y)) y) g = Y(\lambda y \rightarrow G \ (Y(\lambda x \rightarrow F \ x \ y)) y)$
 (2 балла)

6. Докажите, что ваше определение reverse является инволюцией для любого конечного списка. То есть $\text{reverse}(\text{reverse } xs) = xs$ для любого конечного списка xs.

Пусть $xs = \text{cons } a_1(\text{cons } a_2(\text{cons } a_3(\dots(\text{cons } a_n \text{ nil})\dots))$

Тогда после применения $xs \text{ push nil}$ список станет иметь вид:

$\text{reverse } xs = \text{push } a_1(\text{push } a_2(\text{push } a_3(\dots(\text{push } a_n \text{ nil})\dots))$

Докажем, что такое выражение правда переворачивает нам список

База(для одного элемента):

$\text{push } a \text{ nil}$
 $= (\lambda x \lambda l \rightarrow l \text{ cons } (\text{cons } x \text{ nil})) a \text{ nil}$
 $= \text{nil cons } (\text{cons } a \text{ nil})$
 $= \text{cons } a \text{ nil}$

Предположение:

Пусть $n - 1$ последних элементов мы удачно перевернули и получили список:

$xs' = \text{push } a_2(\text{push } a_3(\dots(\text{push } a_n \text{ nil})\dots)) = \text{cons } a_n(\text{cons } a_{n-1}(\dots(\text{cons } a_2 \text{ nil})\dots))$

Переход:

$xs = \text{push } a_1 \ xs'$
 $= (\lambda x \lambda l \rightarrow l \text{ cons } (\text{cons } x \text{ nil})) a_1 \ xs'$
 $= xs' \text{ cons } (\text{cons } a_1 \text{ nil})$
 $= \text{cons } a_n(\text{cons } a_{n-1}(\dots(\text{cons } a_1 \text{ nil})\dots))$
 (2 балла)

7. (Опциональное). Напишите терм, вычисляющий n-ное число Фибоначчи. В этом задании нельзя пользоваться комбинатором неподвижной точки.

$\text{fib} = \lambda n \rightarrow \text{snd}(\text{rec } n \ (\lambda p x \rightarrow (\text{plus } (\text{fst } p)(\text{snd } p), (\text{fst } p))))(\bar{1}, \bar{0})$
 (2 балла)