Курс: Дискретная математика
Домашнее задание 6
Тигиной Марии

1. **(1,5 балла)** Доказать, что для любого графа G без изолированных вершин (то есть для любого графа G с $\delta(G) > 0$) справедливо неравенство

$$\alpha(G) \cdot \delta(G) \leqslant m,$$

где m — количество ребер в графе G.
Решение:
$\alpha(G) \cdot \delta(G)$ - минимальное число исходящих из IS ребер. Каждое ребро посчитано один раз(ребер между вершинами IS нет).
При этом в $G \backslash IS$ могут быть еще ребра $\Rightarrow \alpha(G) \cdot \delta(G) \leqslant m$

2. **(1,5 балла)** Доказать, что для любого простого нетривиального графа G справедливо неравенство

$$\alpha(G) \leqslant n - m/\triangle(G),$$

где n — количество вершин, а m — количество ребер в графе G. Показать, что в случае регулярного графа отсюда следует, что $\alpha(G) \leqslant n/2$.
Решение:
Перепишем неравенство:
$m \leqslant \triangle(G)(n - \alpha(G))$
$n - \alpha(G) = \beta(G)$
Вершины из VC покрывают все ребра графа(может некоторые по два раза):
$m < 2m \leqslant \sum\limits_{v \in VC} deg(v) \leqslant \triangle(G) \cdot \beta(G) = \triangle(G)(n - \alpha(G))$
В k-регулярном графе $\forall v \; deg(v) = \triangle(G) = k$, тогда $2m = \triangle(G)n$
Тогда $\alpha(G) \leqslant n - m/\triangle(G) = n - n/2 = n/2$

3. **(1,5 балла)** Показать, что для любого двудольного графа $G[X, Y]$ произведение

$$\alpha(G) \cdot \beta(G) \geqslant |E(G)|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда граф является полным двудольным графом $K_{n,m}$.
Решение:
Из прошлой задачи знаем, что $m \leqslant \triangle(G)(n - \alpha(G))$
$n - \alpha(G) = \beta(G)$
А также посмотрим на вершину максимальной степени в двудольном графе. Все её соседи - независимые $\Rightarrow \triangle(G) \leqslant \alpha(G)$
Собрав все вместе : $m \leqslant \alpha(G) \cdot \beta(G)$

Покажем, что равенство достигается только тогда, когда $G = K_{n,m}$ $n \leqslant m$
$\Leftarrow$
$\beta(G) = n$
$\alpha(G) = m$
$E(G) = n \cdot m$
$\Rightarrow$
Пусть G - двудольный граф, певая доля имеет размер n, вторая m и $n \leqslant m$ для которого выполнилось $\alpha(G) \cdot \beta(G) = |E(G)|$, но G не полный.
Тогда $\alpha(G) > m$ и $\beta(G) < n$
VC должен покрыть все ребра графа, но максимально может покрыть:
$E \leqslant m \cdot \beta(G) < \alpha(G) \cdot \beta(G) = E$ - противоречие

4. **(2 балла)** Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание. Доказать, что количество рёбер в $G[X, Y]$, которые не принадлежат ни одному X-насыщенному паросочетанию, не превосходит $\binom{|X|}{2}$. Показать, что эта оценка достигается при любом значении $|X|$.
Решение:

5. **(1,5 балла)** Предположим, что размер максимального паросочетания в простом двудольном графе G меньше заданного числа k. Известно также, что в таком графе отсутствует звезда, построенная на l ребрах. Получить верхнюю оценку на количество $|E(G)|$ ребер в этом графе через числа k и l.
Решение:
Отсутствие звезды $\Leftrightarrow \triangle(G) < l$
$k > max|M| = min|VC| = \beta(G)$
Так как VC покрывает все ребра:
$|E(G)| < \beta(G) \cdot \triangle(G) < kl$

6. **(2,5 балла)** Цепью в частично упорядоченном множестве P называется такое подмножество P_1 множества P , любые два элемента которого сравнимы между собой, а антицепью – подмножество $A \subset P$, любые два элемента которого не сравнимы между собой. С помощью теоремы Кёнига-Эгервари доказать теорему Дилуорса, утверждающую, что в любом конечном частично упорядоченном множестве P минимальное количество k попарно непересекающихся цепей $P_i, i = 1, ..., k$, покрывающих все элементы множества P , равно количеству a элементов в максимальной антицепи A.
Решение:
Представим отношение частичного порядка как граф : вершины - элементы P и v $\rightarrow$ u есть ребро, если $u < v$.
Транзитивно замкнем граф.
Сделаем две копии вершин графа $V = V_R = V_L$ - две доли графа, ребра направленны из $L \rightarrow R$
В этом двудольном графе найдем максимальное паросочетание M и минимальное вершинное покрытие VC.
Пусть A' - вершины, копии которых в обеих долях не входят в VC.

Покажем, что это антицепь:
Пусть нет, тогда возьмем два сравнимых элемента. Между ними есть ребро $\Rightarrow$ одни из них точно входит в VC
Покажем, что мы получили максимальную антицепь:
Также заметим, что размер $|A'| = \geqslant n-k$, где $|M| = |VC| = k$ по теореме Кёнига-Эгервари.
Покажем, что $max|A| = min$ кол-ву попарно непересекающихся цепей $= min|C|$
$max|A| \leqslant min$ кол-ва попарно непересекающихся цепей
- так как из каждой цепи в антицепь войдет не более одной вершины.
$max|A| \geqslant min$ кол-ва попарно непересекающихся цепей
так как по теореме Кёнига-Эгервари $|M| = |VC| = k$. Тогда в одной доле есть ровно $n-k$ вершинок не покрытые ребрами паросочетания - концы вершинно непересекающихся цепей $=$ ДПЧ. Это кол-во ровно $min|C|$, иначе противоречие с максимальностью M.
При этом мы нашли антицепь A' размера $\geqslant n-k \Rightarrow max|A| \geqslant |A'| \geqslant n-k = min|C|$.
Тогда $max|A| = min|C|$

7. **(1,5 балла)** Доказать теорему Кёнига-Эгервари с помощью сформулированной в предыдущем упражнении теоремы Дилуорса.
Решение:
Рассмотрим двудольный граф $G(V_L, V_R)$. Введем на его вершинах отношение порядка:
$v \in V_L < u \in V_R$, если между v и u есть ребро.
В этом частично упорядоченном множестве есть $max|A| = min|C| = k$
Заметим, что все непересекающиеся цепи имеют длинну $\leqslant 2$, причем цепи длинны 2 - максимальное паросочетание M (так как мы минимизировали кол-во мы брали как можно больше цепей длинны 2).
Обозначим цепи длинны 1 как c_1
$c_1 + max|M| = k$
$c_1 + 2max|M| = n$ - суммарное число вершин.
Также рассмотрим $max|A|$, это $max|IS|$ в нашем графе, тогда
$min|VC| = n - max|IS| = n - k$
$min|VC| = n - k = c_1 + 2max|M| - (c_1 + max|M|) = max|M|$

8. **(1,5 балла)** Пусть P есть частично упорядоченное множество, в котором самая длинная цепь имеет длину, равную m. Доказать теорему Мирского, утверждающую, что все P можно представить в виде объединения m попарно не пересекающихся между собой антицепей. Иными словами, доказать, что наибольшее количество m элементов в цепи совпадает с минимальным количеством антицепей, покрывающих все элементы множества P .
Решение:
$maxC$ - наибольшее количество элементов в цепи.
$minK$ - минимальным количеством антицепей.
Скажем, что элемент x живет на -том уровне, если - максимальное кол-во элементов в цепи, где x - наибольший.
Тогда $\max\limits_{x \in P}$ - и есть $maxC$.
Каждый уровень от $c = [0 \text{ ... } maxC]$ не пуст (как минимум в каждом элемент $maxC$), и каждый элемент из P принадлежит какому-то из c-уровню.

Также каждый c-тый уровень - антицепь(два сравнимых не могут иметь одинаковую max длинну цепи)
Итого получили разбиение на $K = maxC$ антицепей.

Покажем, что разбиение таким образом на антицепи минимально.
$minK \leqslant K = maxC$
$minK \geqslant maxC$ - так как в цепь не может входить больше одного элемента из одной антицепи.
$minK = maxC$

9. **(1 балл)** Пусть $D_n = a_1, ..., a_n$ есть множество натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Доказать, что эти числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось бы на другое. Обобщить данный результат на случай, когда среди любых m чисел можно выбрать ровно два числа, одно из которых делилось бы на другое.
Решение:
Размер максимальной антицепи в таком множестве равен 2. Тогда по теореме Дилуорса элементы можно разбить на 2 цепи $\Leftrightarrow$ покрасить в два цвета.

Во втором случае размер максимальной антицепи равен $m - 1$. Тогда по теореме Дилуорса элементы можно разбить на $m - 1$ цепь.