Глава 4

Векторные пространства

§ 4.1 Определения и конструкции, связанные с векторными пространствами

Далее K — поле.

• Векторное пространство V над K — абелева группа (относит. $+$, 0, $-$) с «правильным» умножением на скаляры из K ($\cdot\colon K \times V \to V$). Свойства операций в вект. пространствах.

Условия на операцию умножения скаляров из K и векторов из V: $\forall\, c, c' \in K, v \in V$ $\big((c+c')v = cv + c'v \wedge (cc')v = c(c'v) \wedge 1v = v\big)$ и $\forall\, c \in K, v, v' \in V$ $\big(c(v+v') = cv + cv'\big)$ (это эквив.-но тому, что отобр. $\begin{pmatrix} K \to \mathrm{End}(V^+) \\ c \mapsto (v \mapsto cv) \end{pmatrix}$, где $\mathrm{End}(V^+)$ — кольцо эндоморфизмов абелевой группы V^+, определено корректно и является гомоморфизмом колец).

Легко видеть, что для любых $v \in V$ и $c \in K$ выполнено $0v = c0 = 0$ и $(-c)v = c(-v) = -cv$, а также $cv = 0 \Rightarrow c = 0 \vee v = 0$ (так как $c \neq 0 \Rightarrow v = 1v = \frac{1}{c}(cv) = 0$).

• Примеры: простр.-ва столбцов K^n и строк K_n ($n \in \mathbb{N}_0$), простр.-ва матриц $\mathrm{Mat}(p, n, K)$ ($n, p \in \mathbb{N}_0$), пространства многочленов $K[x]$, пространства функций и финитных функций.

Примеры вект. простр.-в, состоящих из функций, действующих из мн.-ва X в поле K:
$\star$ $\mathrm{Func}(X, K)$; структура вект. пр.-ва на $\mathrm{Func}(X, K)$: $\forall\, f, f' \in \mathrm{Func}(X, K), c, c' \in K, x \in X$ $\big((cf + c'f')(x) = cf(x) + c'f'(x)\big)$ (поточечные сложение и умножение на скаляры);
$\star$ $\mathrm{FinFunc}(X, K) = \{f \in \mathrm{Func}(X, K) \mid |\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}| < \infty\}$ — простр.-во финитных функций ($\forall\, f, f' \in \mathrm{FinFunc}(X, K), c, c' \in K$ $\big(cf + c'f' \in \mathrm{FinFunc}(X, K)\big)$); для любых $x \in X$ обозначим $\delta_x = \big(y \mapsto \delta_{x,y}\big)$; тогда $\forall\, f \in \mathrm{FinFunc}(X, K)$ $\big(f = \sum_{x \in X} f(x)\delta_x\big)$.

Далее V, Y — векторные пространства над K и $D \subseteq V$.

• Множ.-во линейных операторов (гомоморфизмов векторных пространств): $\mathrm{Hom}(V, Y)$ — векторное простр.-во. Кольцо $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$, группа $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V) = \mathrm{End}(V)^{\times}$.

$\mathrm{Hom}(V,Y)=\{a\in\mathrm{Map}(V,Y)\mid\forall\,v,v'\in V,c,c'\in K\,\big(a(cv+c'v')=ca(v)+c'a(v')\big)\}$; структура вект. пр.-ва на $\mathrm{Hom}(V,Y)$: $\forall\,a,a'\in\mathrm{Hom}(V,Y),c,c'\in K,v\in V\,\big((ca+c'a')(v)=$ $=ca(v)+c'a'(v)\big)$; легко видеть, что опред.-е корректно и $\mathrm{Hom}(V,Y)$ — вект. простр.-во.

Примеры линейн. операт.: $\begin{pmatrix}K^n\to K\\ v\mapsto v^i\end{pmatrix}$ $(i\in\{1,\ldots,n\})$, $\begin{pmatrix}K^n\to K^p\\ v\mapsto a\cdot v\end{pmatrix}$ $(a\in\mathrm{Mat}(p,n,K))$, $\begin{pmatrix}\mathrm{Mat}(p,n,K)\to\mathrm{Mat}(n,p,K)\\ a\mapsto a^{\mathsf T}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{Mat}(n,K)\to K\\ a\mapsto\mathrm{tr}\,a\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{Func}(X,K)\to K\\ f\mapsto f(x)\end{pmatrix}$ $(x\in X)$.

Мн.-во изоморфизмов: $\mathrm{Iso}(V,Y)=\mathrm{Hom}(V,Y)\cap\mathrm{Bij}(V,Y)$. Изоморфные вект. простр.-ва: $V\cong Y\Leftrightarrow\mathrm{Iso}(V,Y)\neq\varnothing$; примеры: $K^n\cong K_n$, $\mathrm{Mat}(p,n,K)\cong K^{np}$, $K[x]\cong\mathrm{FinFunc}(\mathbb N,K)$.

$\mathrm{End}(V)$ — кольцо относ. $+$, 0, $-$, $\circ$, id_V (дистрибутивность: $\forall\,a,a',b,b'\in\mathrm{End}(V),v\in V$ $\Big(\big((a+a')\circ b\big)(v)=(a\circ b+a'\circ b)(v)\wedge\big(a\circ(b+b')\big)(v)=a(b(v)+b'(v))=(a\circ b+a\circ b')(v)\Big)\Big)$.

• Подпространство $(U\subseteq V)$: $U\le V\Leftrightarrow U+U\subseteq U\wedge 0\in U\wedge KU\subseteq U$. Подпространство, порожденное мн.-вом D: $\langle D\rangle$ — наименьшее относит.-но $\subseteq$ подпр.-во в V, содержащее D.

Легко видеть, что $U\le V\Leftrightarrow\forall\,u,u'\in U,c,c'\in K\,\big(cu+c'u'\in U\big)\wedge U\neq\varnothing$.

Пример из математическ. анализа: для любых $k\in\mathbb N_0$ и таких $\alpha,\beta\in\mathbb R\cup\{-\infty,\infty\}$, что $\alpha<\beta$, обозначим $\mathrm C^k((\alpha;\beta),\mathbb R)=\{f\in\mathrm{Func}((\alpha;\beta),\mathbb R)\mid f^{(k)}$ существует и непрерывна$\}$ и $\mathrm C^\infty((\alpha;\beta),\mathbb R)=\bigcap_{k\in\mathbb N}\mathrm C^k((\alpha;\beta),\mathbb R)$; тогда $\mathrm C^0((\alpha;\beta),\mathbb R)>\mathrm C^1((\alpha;\beta),\mathbb R)>\ldots>\mathrm C^\infty((\alpha;\beta),\mathbb R)$.

$\langle D\rangle$ — наименьший элемент мн.-ва $\{U\le V\mid D\subseteq U\}$, поэтому $\langle D\rangle$ определ. однозначно.

• Линейн. комбинация эл.-в мн.-ва D $(f_1,\ldots,f_m\in K)$: $f_1d_1+\ldots+f_md_m=\sum_{d\in D}f(d)d$ (где $f\in\mathrm{FinFunc}(D,K)$). Утверждение: $\langle D\rangle=\big\{\sum_{d\in D}f(d)d\mid f\in\mathrm{FinFunc}(D,K)\big\}$.

⋆ Пусть $L=\big\{\sum_{d\in D}f(d)d\mid f\in\mathrm{FinFunc}(D,K)\big\}$; тогда $L\le V$ $(\Leftarrow\forall\,f,f'\in\mathrm{FinFunc}(D,K)$, $c,c'\in K\,\big(c\sum_{d\in D}f(d)d+c'\sum_{d\in D}f'(d)d=\sum_{d\in D}(cf+c'f')(d)d\big)\big)$, $D\subseteq L$ $(\Leftarrow\forall\,d\in D$ $\big(d=\sum_{t\in D}\delta_d(t)t\big)\big)$ и легко видеть, что $\forall\,U\le V\,\big(D\subseteq U\Rightarrow L\subseteq U\big)$, поэтому $L=\langle D\rangle$.

• Ядро и образ линейн. оператора a ($a \in \mathrm{Hom}(V,Y)$): $\mathrm{Ker}\, a = a^{-1}(0)$ и $\mathrm{Im}\, a$; $0_V \in \mathrm{Ker}\, a$ и $0_Y \in \mathrm{Im}\, a$. Утверждение: $\mathrm{Ker}\, a \le V$ и $\mathrm{Im}\, a \le Y$. Теорема о слоях и ядре линейного оператора.

$\star$ $u, u' \in \mathrm{Ker}\, a \wedge c, c' \in K \Rightarrow a(cu + c'u') = ca(u) + c'a(u') = 0 \Rightarrow cu + c'u' \in \mathrm{Ker}\, a$ и $x = a(v), x' = a(v') \in \mathrm{Im}\, a \wedge c, c' \in K \Rightarrow cx + c'x' = ca(v) + c'a(v') = a(cv + c'v') \in \mathrm{Im}\, a$.

Теорема о слоях и ядре линейного оператора. Пусть K — поле, V, Y — вект. пространства над K и $a \in \mathrm{Hom}(V,Y)$; тогда
(1) для любых $y \in Y$ и $v_0 \in a^{-1}(y)$ выполнено $a^{-1}(y) = v_0 + \mathrm{Ker}\, a$;
(2) a — инъекция, если и только если $\mathrm{Ker}\, a = \{0\}$.

Доказательство.
(1) Для любых $v \in V$ имеем $v \in a^{-1}(y) \Leftrightarrow a(v) = y = a(v_0) \Leftrightarrow a(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow v \in v_0 + \mathrm{Ker}\, a$.
(2) $a \in \mathrm{Inj}(V,Y) \Leftrightarrow \forall\, v \in V\ \big(a^{-1}(a(v)) = \{v\}\big) \Leftrightarrow \forall\, v \in V\ \big(v + \mathrm{Ker}\, a = \{v\}\big) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, a = \{0\}$.

• Система из p линейных уравнений от n переменных ($a \in \mathrm{Mat}(p,n,K)$, $v \in K^n$, $y \in K^p$):

$$\begin{cases} a^1_1 v^1 + \ldots + a^1_n v^n = y^1 \\ \vdots \\ a^p_1 v^1 + \ldots + a^p_n v^n = y^p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^p_1 & \ldots & a^p_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^p \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \cdot v = y.$$ Однородная система: $a \cdot v = 0$.

Пусть $a \cdot v_0 = y$; тогда по теор. о слоях и ядре лин. операт. имеем $\{v \in K^n \mid a \cdot v = y\} = \{v \in K^n \mid \mathrm{lm}_a(v) = y\} = \mathrm{lm}_a^{-1}(y) = v_0 + \mathrm{Ker}\,\mathrm{lm}_a = v_0 + \{w \in K^n \mid a \cdot w = 0\}$.

• Аффинные операторы: $v \mapsto a(v) + z$, где $a \in \mathrm{Hom}(V,Y)$. Аффинные подпр.-ва: $v + U$, где $U \le V$; U — направляющее подпр. для $S = v + U$ ($\forall\, s \in S\ \big(S - s = U\big)$ и $S - S = U$).

Обозначим $G = \mathrm{AGL}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} V \to V \\ v \mapsto a(v) + z \end{pmatrix} \mid a \in \mathrm{GL}(V), z \in V \right\}$ — аффинная группа простр.-ва V, $F = \{(v \mapsto v + z) \mid z \in V\}$ и $H = \mathrm{GL}(V)$; тогда $F, H \le G$, $F \cap H = \{\mathrm{id}_V\}$, $G = F \circ H$, $\forall\, h \in H\ \big(h \circ F \circ h^{-1} \subseteq F\big)$ и $F \cong V^+$, поэтому $G \cong F \rtimes H \cong V^+ \rtimes \mathrm{GL}(V)$.

§ 4.2 Независимые множества, порождающие множества, базисы

Далее K *— поле,* V *— векторное пространство над* K *и* $B, C, D \subseteq V$*.*

• C — независимое множество: $\forall\, f \in \mathrm{FinFunc}(C, K)\ \bigl(\sum_{c \in C} f(c)c = 0 \Rightarrow f = 0\bigr)$.
D — порождающее множество: $V = \langle D \rangle$. Базис — независимое и порождающее множ.-во.

Примеры: $\varnothing$ и $\{v\}$, где $v \in V \setminus \{0\}$, — независимые мн.-ва, и V — порождающее мн.-во.
$(C$ — независ. мн.-во$) \Leftrightarrow \forall\, m \in \mathbb{N}_0, c_1, \dots, c_m \in C, f_1, \dots, f_m \in K\ \bigl((c_1, \dots, c_m$ попарно различны $\wedge\ f_1 c_1 + \ldots + f_m c_m = 0) \Rightarrow f_1 = \ldots = f_m = 0\bigr)$, а также $\bigl(D$ — порождающее множество$\bigr) \Leftrightarrow \forall\, v \in V\ \exists\, m \in \mathbb{N}_0, d_1, \dots, d_m \in D, f_1, \dots, f_m \in K\ \bigl(v = f_1 d_1 + \ldots + f_m d_m\bigr)$.
Упрощение в случае конечных множеств ($n \in \mathbb{N}_0$ и $e_1, \dots, e_n \in V$): $\bigl($набор $e_1, \dots, e_n$ независим (то есть $e_1, \dots, e_n$ попарно различны и $\{e_1, \dots, e_n\}$ — независимое мн.-во)$\bigr) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall\, f_1, \dots, f_n \in K\ \bigl(f_1 e_1 + \ldots + f_n e_n = 0 \Rightarrow f_1 = \ldots = f_n = 0\bigr)$, а также $\bigl(\{e_1, \dots, e_n\}$ — порождающее множество$\bigr) \Leftrightarrow \forall\, v \in V\ \exists\, f_1, \dots, f_n \in K\ \bigl(v = f_1 e_1 + \ldots + f_n e_n\bigr)$.

• Стандартные базисы пространств K^n, K_n и $\mathrm{Mat}(p, n, K)$: $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{e}_1^1, \dots, \mathbf{e}_1^n, \dots, \mathbf{e}_p^1, \dots, \mathbf{e}_p^n\}$. Утверждение: $\bigl(B$ — завис. мн.-во$\bigr) \Leftrightarrow \exists\, b \in B\ \bigl(b \in \langle B \setminus \{b\} \rangle\bigr)$.

Примеры: $\{1, x, x^2, \dots\}$ — базис пр.-ва $K[x]$, $\{\delta_b \mid b \in B\}$ — базис пр.-ва $\mathrm{FinFunc}(B, K)$.
$\star$ $\bigl(B$ — зависимое мн.-во$\bigr) \Leftrightarrow \exists\, f \in \mathrm{FinFunc}(B, K), b \in B\ \bigl(\sum_{c \in B} f(c)c = 0 \wedge f(b) \neq 0\bigr) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, f \in \mathrm{FinFunc}(B, K), b \in B\ \Bigl(\sum_{c \in B \setminus \{b\}} \frac{f(c)}{f(b)}\, c + b = 0 \wedge f(b) \neq 0\Bigr) \Leftrightarrow \exists\, b \in B\ \bigl(b \in \langle B \setminus \{b\} \rangle\bigr)$.

• Теорема о свойствах базиса. В сделанных выше предположен. след. утв.-я эквивалентны:
(у1) B — базис пространства V;
(у2) отображение $\begin{pmatrix} \mathrm{FinFunc}(B, K) \to V \\ f \mapsto \sum_{b \in B} f(b)b \end{pmatrix}$ — изоморфизм векторн. пространств;
(у3) для любых $v \in V$ существует единств. такая $f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)$, что $v = \sum_{b \in B} f(b)b$;

(у4) B — максимальное независимое множество (то есть B — независимое множество и для любых $v \in V \setminus B$ множество $B \cup \{v\}$ не является независимым);
(у5) B — минимальное порождающее множество (то есть B — порождающее множество и для любых $b \in B$ множество $B \setminus \{b\}$ не является порождающим).

Доказательство.
Пусть φ — отображение из (у2); легко видеть, что φ — линейный оператор.
(у1) $\Leftrightarrow$ (у2) $\Leftrightarrow$ (у3). $\big(B$ — базис$\big) \Leftrightarrow \{f \in \mathrm{FinFunc}(B, K) \mid \sum_{b \in B} f(b)b = 0\} = \{0\} \wedge$
$\wedge \big\{\sum_{b \in B} f(b)b \mid f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)\big\} = V \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\} \wedge \operatorname{Im} \varphi = V \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(\varphi$ — изоморфизм$\big) \Leftrightarrow \big(\varphi$ — биекция$\big) \Leftrightarrow \forall v \in V\ \exists! f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)\ \big(v = \sum_{b \in B} f(b)b\big)$.
(у1) $\Leftrightarrow$ (у4). Пусть B — независимое множество; докажем, что B — порождающее множество, если и только если $\forall v \in V \setminus B\ \big(B \cup \{v\}$ — зависимое множество$\big)$.
Если B — порожд. мн.-во и $v \in V \setminus B$, то $v = \sum_{b \in B} f(b)b$ для некотор. $f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)$, поэтому $v - \sum_{b \in B} f(b)b = 0$ и, значит, $B \cup \{v\}$ — зависимое множество.
Если $\forall v \in V \setminus B\ \big(B \cup \{v\}$ — зависимое множество$\big)$ и $v \in V$, то в случае $v \in B$ получаем $v \in \langle B \rangle$ и в случае $v \in V \setminus B$ имеем следующие факты: $\sum_{b \in B} f(b)b + f(v)v = 0$ для некотор. $f \in \mathrm{FinFunc}(B \cup \{v\}, K) \setminus \{0\}$; здесь $f(v) \neq 0$ (иначе B — зависимое множество), поэтому $v = -\sum_{b \in B} \frac{f(b)}{f(v)} b$ и, значит, $v \in \langle B \rangle$; в итоге B — порождающее множество.
(у1) $\Leftrightarrow$ (у5). Пусть B — порождающее множество, то есть $V = \langle B \rangle$; докажем, что B — независимое множество, если и только если $\forall b \in B\ \big(B \setminus \{b\}$ — непорождающее множество$\big)$, а это эквивалентно доказательству того, что B — зависимое множество, если и только если $\exists b \in B\ \big(B \setminus \{b\}$ — порождающее множество$\big)$; далее используем доказанное выше утверждение $\big(B$ — зависимое множество$\big) \Leftrightarrow \exists b \in B\ \big(b \in \langle B \setminus \{b\} \rangle\big)$.
$\big(B$ — зависимое множество$\big) \Leftrightarrow \exists b \in B\ \big(b \in \langle B \setminus \{b\} \rangle\big) \Leftrightarrow \exists b \in B\ \big(\langle B \rangle = \langle B \setminus \{b\} \rangle\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists b \in B\ \big(V = \langle B \setminus \{b\} \rangle\big) \Leftrightarrow \exists b \in B\ \big(B \setminus \{b\}$ — порождающее множество$\big)$.

В случае, когда $|B| = n < \infty$ и $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, из теоремы о св.-вах базиса получаем, что след. утв.-я эквивалентны: (у1) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V, (у2) отображ.-е $\begin{pmatrix} \mathrm{Func}(\{1, \ldots, n\}, K) \to V \\ f \mapsto f(1)e_1 + \ldots + f(n)e_n \end{pmatrix}$ — изоморфизм векторных пространств, (у3) для любых $v \in V$ существ. единств. такие $f_1, \ldots, f_n \in K$, что $v = f_1 e_1 + \ldots + f_n e_n$.

• Теорема о порядках независимых и порождающих множеств. Пусть K — поле, V — вект. пространство над K, $C, D \subseteq V$ и $|D| < \infty$; тогда, если C — независимое множество и $C \subseteq \langle D \rangle$, то $|C| \leq |D|$, и, если C и D — базисы пространства V, то $|C| = |D|$.

Доказательство.
Пусть $n = |D|$; докажем, что, если $C \subseteq \langle D \rangle$ и $|C| > n$, то C — зависимое множество (это теорема о линейной зависимости линейных комбинаций). Воспользуемся индукцией по n. База: $n = 0$ — ясно. Проведем индукцион. переход. Пусть $n \geq 1$; зафиксируем $b \in C$, где $b \neq 0$, и разложение $b = f_{b,1} d_1 + \ldots + f_{b,n} d_n$, где $f_{b,1}, \ldots, f_{b,n} \in K$ и $d_1, \ldots, d_n$ — такое перечисление элементов множества D, что $f_{b,n} \neq 0$. Для каждого $c \in C \setminus \{b\}$ зафиксируем разлож.-е $c = f_{c,1} d_1 + \ldots + f_{c,n} d_n$, где $f_{c,1}, \ldots, f_{c,n} \in K$; заметим, что для любых $c \in C$ выполнено $c - \frac{f_{c,n}}{f_{b,n}} b = (f_{c,1} - \frac{f_{c,n}}{f_{b,n}} f_{b,1}) d_1 + \ldots + (f_{c,n-1} - \frac{f_{c,n}}{f_{b,n}} f_{b,n-1}) d_{n-1}$, поэтому $\widetilde{C} = \{c - \frac{f_{c,n}}{f_{b,n}} b \mid c \in C \setminus \{b\}\} \subseteq \langle D \setminus \{d_n\} \rangle$. Если $\exists\, c, c' \in C \setminus \{b\} \bigl(c - \frac{f_{c,n}}{f_{b,n}} b = c' - \frac{f_{c',n}}{f_{b,n}} b \wedge$ $\wedge\; c \neq c'\bigr)$, то C — зависимое мн.-во; иначе $|\widetilde{C}| = |C| - 1 > n - 1$; тогда по предположению индукции получаем, что $\widetilde{C}$ — зависимое мн.-во и, значит, существует такой $c \in C \setminus \{b\}$, что $c - \frac{f_{c,n}}{f_{b,n}} b \in \langle \widetilde{C} \setminus \{c - \frac{f_{c,n}}{f_{b,n}} b\} \rangle$, поэтому $c \in \langle C \setminus \{c\} \rangle$, то есть C — зависимое множество.
Пусть C и D — базисы пространства V; тогда C — независимое множество и $C \subseteq \langle D \rangle$, поэтому $|C| \leq |D| < \infty$, и D — независимое множество и $D \subseteq \langle C \rangle$, поэтому $|D| \leq |C|$.

Факт без доказательства: все базисы любого векторного пространства равномощны.

• Теорема о существовании базиса. Пусть K — поле, V — векторное пространство над K, C — независимое подмножество в V и D — порождающее подмножество в V, а также в V существует конечное порождающее подмножество; тогда
(1) существует такой базис B пространства V, что $C \subseteq B$ (и, значит, дополняя до базиса множество $\varnothing$, получаем, что в V существует базис);
(2) существует такой базис B пространства V, что $B \subseteq D$ (и, значит, выделяя базис из множества V, получаем, что в V существует базис).

Доказательство.
Пусть T — конечное порождающее подмнож.-во в V (то есть $T \subseteq V$, $V = \langle T \rangle$ и $|T| < \infty$).
(1) Обозначим $\mathrm{Indep}_C = \{E \subseteq V \mid C \subseteq E \wedge E$ — независимое множество$\}$; из теоремы о порядках независимых и порождающих множеств следует, что $\{|E| \mid E \in \mathrm{Indep}_C\}$ — непустое подмножество в $\{|C|, \ldots, |T|\}$, поэтому существует такое $B \in \mathrm{Indep}_C$, что $|B| = \max\{|E| \mid E \in \mathrm{Indep}_C\}$; из теоремы о свойствах базиса следует, что B — базис.
(2) Построим такое $\widetilde{D} \subseteq D$, что $V = \langle \widetilde{D} \rangle$ и $|\widetilde{D}| < \infty$. Из того, что $V = \langle D \rangle$, следует, что $\forall\, t \in T\ \exists\, D_t \subseteq D\ \big(t \in \langle D_t \rangle \wedge |D_t| < \infty\big)$; положим $\widetilde{D} = \bigcup_{t \in T} D_t$; тогда $V = \langle T \rangle = \langle \widetilde{D} \rangle$ и $|\widetilde{D}| \leq |T| \cdot \max\{|D_t| \mid t \in T\} < \infty$. Обозначим $\mathrm{Gener}_{\widetilde{D}} = \{E \subseteq \widetilde{D} \mid V = \langle E \rangle\}$; тогда $\{|E| \mid E \in \mathrm{Gener}_{\widetilde{D}}\}$ — непуст. подмн.-во в $\{0, \ldots, |\widetilde{D}|\}$, поэтому существ. такое $B \in \mathrm{Gener}_{\widetilde{D}}$, что $|B| = \min\{|E| \mid E \in \mathrm{Gener}_{\widetilde{D}}\}$; из теоремы о свойствах базиса следует, что B — базис.

Факт без доказательства: в любом векторном пространстве существует базис.

Далее K — поле, V, Y — векторные пространства над K и B — базис пространства V.

• Теорема об универсальности базиса. В сделанных выше предположениях для любых $\alpha \in \mathrm{Func}(B, Y)$ существует единственный такой $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$, что $a|_B = \alpha$ (и, значит, отображение $\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(V,Y) \to \mathrm{Func}(B,Y) \\ a \mapsto a|_B \end{pmatrix}$ — изоморфизм векторных пространств).

Доказательство.
Существование оператора a. Пусть $v \in V$; тогда $\exists!\, f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)\ \big(v = \sum_{b \in B} f(b) b\big)$; положим $a(v) = \sum_{b \in B} f(b)\alpha(b)$. Далее докажем, что $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ и $a|_B = \alpha$:
$\forall\, v = \sum_{b \in B} f(b) b, v' = \sum_{b \in B} f'(b) b \in V, c, c' \in K\ \big(a(cv + c'v') = \sum_{b \in B} (cf + c'f')(b)\alpha(b) =$
$= c\sum_{b \in B} f(b)\alpha(b) + c'\sum_{b \in B} f'(b)\alpha(b) = ca(v) + c'a(v')\big)$ и $\forall\, b \in B\ \big(a(b) = \alpha(b)\big)$.
Единственность оператора a. Пусть $a, a' \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ и $a|_B = a'|_B$; тогда для любых $v \in V$ имеем следующие факты: $\exists!\, f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)\ \big(v = \sum_{b \in B} f(b) b\big)$ и, значит, $a(v) = a(\sum_{b \in B} f(b) b) = \sum_{b \in B} f(b) a(b) = \sum_{b \in B} f(b) a'(b) = a'(\sum_{b \in B} f(b) b) = a'(v)$.

• Теорема о базисах и линейных операторах. В сделанных выше предположениях для любых $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ имеем следующие факты:
(1) a — инъекция, если и только если все $a(b)$, где $b \in B$, попарно различны и $a(B)$ — независимое множество (то есть набор векторов $a(b)$, где $b \in B$, независим);
(2) a — сюръекция, если и только если $a(B)$ — порождающее множество;
(3) a — изоморфизм, если и только если все $a(b)$, где $b \in B$, попарно различны и $a(B)$ — базис (то есть набор векторов $a(b)$, где $b \in B$, является базисом).

Доказательство.
Из того, что B — базис пространства V, следует, что $\mathrm{Ker}\, a = \big\{\sum_{b \in B} f(b) b \mid$
$f \in \mathrm{FinFunc}(B, K) \wedge a(\sum_{b \in B} f(b) b) = 0\big\} \cong \{f \in \mathrm{FinFunc}(B, K) \mid \sum_{b \in B} f(b) a(b) = 0\}$ и
$\mathrm{Im}\, a = \{a(\sum_{b \in B} f(b) b) \mid f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)\} = \big\{\sum_{b \in B} f(b) a(b) \mid f \in \mathrm{FinFunc}(B, K)\big\} = \langle a(B) \rangle$.
(1) $a \in \mathrm{Inj}(V, Y) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, a = \{0\} \Leftrightarrow \{f \in \mathrm{FinFunc}(B, K) \mid \sum_{b \in B} f(b) a(b) = 0\} = \{0\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (все $a(b)$, где $b \in B$, попарно различны и $a(B)$ — независимое множество).
(2) $a \in \mathrm{Surj}(V, Y) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, a = Y \Leftrightarrow \langle a(B) \rangle = Y \Leftrightarrow$ ($a(B)$ — порождающее множество).
(3) $a \in \mathrm{Iso}(V, Y) \Leftrightarrow a \in \mathrm{Inj}(V, Y) \wedge a \in \mathrm{Surj}(V, Y) \Leftrightarrow$ (все $a(b)$, где $b \in B$, попарно разл. и $a(B)$ — независимое и порождающее множество, то есть базис).

§ 4.3 Размерность, координаты, замена координат

• Размерность $\dim V$ вект. пространства V — порядок (мощность) базиса пространства V. Примеры (K — поле): $\dim K^n = \dim K_n = n$, $\dim \mathrm{Mat}(p, n, K) = np$ и $\dim K[x] = \infty$.

Корректность определения: пусть в V существует конечное порождающее подмножество; тогда в V существует базис, и все базисы пространства V имеют одинаковый порядок.

Размерность аффинного подпространства ($U \leq V$ и $v \in V$): $\dim(v + U) = \dim U$.

• Теорема о свойствах размерности. Пусть K — поле, V — векторное пространство над K и $\dim V < \infty$; тогда
(1) для любого независимого подмножества C в V выполнено $|C| \leq \dim V$ и, если $|C| = \dim V$, то C — базис пространства V;
(2) для любого порождающего подмножества D в V выполнено $|D| \geq \dim V$ и, если $|D| = \dim V$, то D — базис пространства V;
(3) для любого подпр.-ва U в V выполн. $\dim U \leq \dim V$ и, если $\dim U = \dim V$, то $U = V$.

Доказательство.
(1) $\exists\, B \subseteq V$ $\big(B$ — базис в $V \wedge C \subseteq B\big)$, поэтому $|C| \leq |B| = \dim V$ и $|C| = |B| \Rightarrow C = B$.
(2) $\exists\, B \subseteq V$ $\big(B$ — базис в $V \wedge B \subseteq D\big)$, поэтому $|D| \geq |B| = \dim V$ и $|D| = |B| \Rightarrow D = B$.
(3) Обозначим $\mathrm{Indep}(U) = \{E \subseteq U \mid E$ — независ. мн.-во$\}$; тогда $\{|E| \mid E \in \mathrm{Indep}(U)\}$ — непустое подмножество в $\{0, \ldots, \dim V\}$, поэтому существует такое $A \in \mathrm{Indep}(U)$, что $|A| = \max\{|E| \mid E \in \mathrm{Indep}(U)\}$; тогда A — базис в U. В итоге имеем $\dim U = |A| \leq \dim V$ и, если $\dim U = \dim V$, то $|A| = \dim V$, поэтому A — базис в V и, значит, $U = \langle A \rangle = V$.

• Теорема о размерности и линейных операторах. Пусть K — поле, V, Y — векторные пространства над K и $\dim V, \dim Y < \infty$; тогда
(1) $\mathrm{Inj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y) \neq \varnothing$, если и только если $\dim V \leq \dim Y$;
(2) $\mathrm{Surj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y) \neq \varnothing$, если и только если $\dim V \geq \dim Y$;

(3) $V \cong Y$, если и только если $\dim V = \dim Y$;
(4) если $\dim V = \dim Y$, то $\mathrm{Inj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y) = \mathrm{Surj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y) = \mathrm{Iso}(V, Y)$ (это принцип Дирихле для линейных операторов), а также для любых $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ и $b \in \mathrm{Hom}(Y, V)$ выполнено $b \circ a = \mathrm{id}_V \Rightarrow b = a^{-1}$.

Доказательство.
Пусть $n = \dim V$, $p = \dim Y$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{h_1, \ldots, h_p\}$ — базисы в V и Y соответственно.
(1) Если $a \in \mathrm{Inj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y)$, то $|\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}| = n$ и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — независимое мн.-во; отсюда по теореме о св.-вах размерности (для Y) следует, что $n \leq p$.
Если $n \leq p$, то продолжим отобр. $e_1 \mapsto h_1, \ldots, e_n \mapsto h_n$ до лин. оператора $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ (используем универсальность базиса); тогда $a(e_1), \ldots, a(e_n)$ попарно различны и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — независимое множество, поэтому $a \in \mathrm{Inj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y)$.
(2) Если $a \in \mathrm{Surj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y)$, то $|\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}| \leq n$ и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — порождающ. мн.-во; отсюда по теореме о св.-вах размерности (для Y) следует, что $n \geq p$.
Если $n \geq p$, то продолжим отобр.-е $e_1 \mapsto h_1, \ldots, e_p \mapsto h_p, e_{p+1} \mapsto h_1, \ldots, e_n \mapsto h_1$ до лин. операт. $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ (используем универсальность базиса); тогда $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — базис и, значит, порождающее множество, поэтому $a \in \mathrm{Surj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y)$.
(3) Если $V \cong Y$, то $\mathrm{Inj}(V, Y) \cap \mathrm{Surj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y) \neq \varnothing$, поэтому $n = p$.
Если $n = p$, то продолжим отобр. $e_1 \mapsto h_1, \ldots, e_n \mapsto h_n$ до лин. оператора $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$; тогда $a(e_1), \ldots, a(e_n)$ попарно разл. и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — базис, поэтому $a \in \mathrm{Iso}(V, Y)$.
(4) Далее $n = p$. Если $a \in \mathrm{Inj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y)$, то $|\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}| = n = p$ и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — независимое множество, поэтому $a(e_1), \ldots, a(e_n)$ попарно различны и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — базис, и, значит, $a \in \mathrm{Iso}(V, Y)$. Если $a \in \mathrm{Surj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y)$, то $|\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}| \leq n = p$ и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — порождающее множество, поэтому $a(e_1), \ldots, a(e_n)$ попарно различны и $\{a(e_1), \ldots, a(e_n)\}$ — базис, и, значит, $a \in \mathrm{Iso}(V, Y)$.
$b \circ a = \mathrm{id}_V \Rightarrow a \in \mathrm{Inj}(V, Y) \cap \mathrm{Hom}(V, Y) \Rightarrow a \in \mathrm{Iso}(V, Y) \Rightarrow b = (b \circ a) \circ a^{-1} = a^{-1}$.

Далее K — поле, V — векторное пространство над K и $n = \dim V < \infty$.

• Мн.-во упорядоченных базисов: $\mathrm{OB}(V) = \{(e_1, \dots, e_n) \in V^n \mid \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в $V\}$.

Столбец коорд.-т вектора ($e \in \mathrm{OB}(V)$): v^e. Утверждение: $v = e \cdot v^e$. Изоморфизм $\begin{pmatrix} V \to K^n \\ v \mapsto v^e \end{pmatrix}$.

Пример: если $n = 2$, то $\mathrm{OB}(V) = \{(e_1, e_2) \mid e_1 \in V \setminus \{0\} \wedge e_2 \in V \setminus \langle e_1 \rangle\}$.
Координаты в K^n: обозначим $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$; тогда $\mathbf{e} \in \mathrm{OB}(K^n)$ и $\forall\, v \in K^n \, \big(v^{\mathbf{e}} = v\big)$.

⋆ Для любых $v \in V$ выполнено $v = (v^e)^1 e_1 + \ldots + (v^e)^n e_n = \big(e_1 \ \dots \ e_n\big) \cdot \begin{pmatrix} (v^e)^1 \\ \vdots \\ (v^e)^n \end{pmatrix} = e \cdot v^e$.

$\begin{pmatrix} V \to K^n \\ v \mapsto v^e \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} K^n \to V \\ v \mapsto v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n \end{pmatrix}$ — взаимно обр. изоморфизмы вект. простр.-в.

Далее Y — векторное пространство над K, $p = \dim Y < \infty$, $e \in \mathrm{OB}(V)$ и $h \in \mathrm{OB}(Y)$.

• Матрица линейного оператора a ($a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$): $a_e^h = \big(a(e_1)^h \ \dots \ a(e_n)^h\big)$. Теорема о матрице линейного оператора. Изоморфизм вект. пр.-в и колец $\begin{pmatrix} \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Mat}(n, K) \\ a \mapsto a_e^e \end{pmatrix}$.

$$a_e^h = \begin{pmatrix} (a(e_1)^h)^1 & \dots & (a(e_n)^h)^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a(e_1)^h)^p & \dots & (a(e_n)^h)^p \end{pmatrix}$$ — матрица лин. операт. a относит. упоряд. базисов e и h.

Пример: пусть $a \in \mathrm{Mat}(p, n, K)$, $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ — стандартные упорядоченные базисы в K^n и K^p соответст.; тогда $(\mathrm{lm}_a)_{\mathbf{e}}^{\mathbf{h}} = a$ (так как $(\mathrm{lm}_a)_{\mathbf{e}}^{\mathbf{h}} = \big((a \cdot \mathbf{e}_1)^{\mathbf{h}} \ \dots \ (a \cdot \mathbf{e}_n)^{\mathbf{h}}\big) = \big(a_1^\bullet \ \dots \ a_n^\bullet\big) = a$).
Кроме того, из доказанной далее теоремы в случае, когда $V = K^n$, $Y = K^p$, $e = \mathbf{e}$, $h = \mathbf{h}$, следует, что $\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(K^n, K^p) \to \mathrm{Mat}(p, n, K) \\ a \mapsto a_{\mathbf{e}}^{\mathbf{h}} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(p, n, K) \to \mathrm{Hom}(K^n, K^p) \\ a \mapsto \mathrm{lm}_a \end{pmatrix}$ — взаимно обратные изоморфизмы векторных пространств.

Теорема о матрице линейного оператора. Пусть K — поле и V, X, Y, Z — векторные пространства над K; тогда

(1) если $n = \dim V < \infty$, $p = \dim Y < \infty$, $e \in \mathrm{OB}(V)$ и $h \in \mathrm{OB}(Y)$, то $\forall\, a \in \mathrm{Hom}(V, Y), v \in V\ \big(a(v)^h = a_e^h \cdot v^e\big)$, а также отобр. $\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(V,Y) \to \mathrm{Mat}(p,n,K) \\ a \mapsto a_e^h \end{pmatrix}$ — изоморфизм векторных пространств (и, значит, $\dim \mathrm{Hom}(V, Y) = np$);

(2) если $\dim V, \dim X, \dim Z < \infty$, $e \in \mathrm{OB}(V)$, $f \in \mathrm{OB}(X)$ и $g \in \mathrm{OB}(Z)$, то $\forall\, a \in \mathrm{Hom}(V, X), b \in \mathrm{Hom}(X, Z)\ \big((b \circ a)_e^g = b_f^g \cdot a_e^f\big)$.

Доказательство.

(1) $a(v)^h = a((v^e)^1 e_1 + \ldots + (v^e)^n e_n)^h = ((v^e)^1 a(e_1) + \ldots + (v^e)^n a(e_n))^h =$
$= (v^e)^1 a(e_1)^h + \ldots + (v^e)^n a(e_n)^h = (a_e^h)_1^\bullet (v^e)^1 + \ldots + (a_e^h)_n^\bullet (v^e)^n = a_e^h \cdot v^e$.

Пусть φ — отображение из пункта (1); легко видеть, что φ — линейный оператор. Инъективность оператора φ: пусть $a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ и $a_e^h = 0$; тогда $a = 0$ (так как $\forall\, v \in V$ $\big(a(v)^h = 0 \cdot v^e = 0\big)$). Сюръективность оператора φ: пусть $a \in \mathrm{Mat}(p, n, K)$; тогда матрица лин. оператора $\begin{pmatrix} V \to Y \\ v \mapsto (a \cdot v^e)^1 h_1 + \ldots + (a \cdot v^e)^p h_p \end{pmatrix}$ относительно e и h равна матрице a (так так $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}\ \big(((a \cdot e_j^e)^1 h_1 + \ldots + (a \cdot e_j^e)^p h_p)^h = (a_j^1 h_1 + \ldots + a_j^p h_p)^h = a_j^\bullet\big)$).

(2) $n = \dim V \Rightarrow (b \circ a)_e^g = \big(b(a(e_1))^g\ \ldots\ b(a(e_n))^g\big) = \big(b_f^g \cdot a(e_1)^f\ \ldots\ b_f^g \cdot a(e_n)^f\big) = b_f^g \cdot a_e^f$.

$\begin{pmatrix} \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Mat}(n,K) \\ a \mapsto a_e^e \end{pmatrix}$ — изоморфизм вект. простр.-в и колец (так как $\forall\, a, b \in \mathrm{End}(V)$ $\big((b \circ a)_e^e = b_e^e \cdot a_e^e\big)$ и $(\mathrm{id}_V)_e^e = \mathrm{id}_n$) и, значит, $\forall\, a \in \mathrm{End}(V)\ \big(a \in \mathrm{GL}(V) \Leftrightarrow a_e^e \in \mathrm{GL}(n, K)\big)$.

Следствия о матрицах из теории о линейных операторах (далее $a, b, g \in \mathrm{Mat}(n, K)$):

⋆ $b \cdot a = \mathrm{id}_n \Leftrightarrow \mathrm{lm}_{b \cdot a} = \mathrm{id}_{K^n} \Leftrightarrow \mathrm{lm}_b \circ \mathrm{lm}_a = \mathrm{id}_{K^n} \Leftrightarrow \mathrm{lm}_b = \mathrm{lm}_a^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{lm}_b = \mathrm{lm}_{a^{-1}} \Leftrightarrow b = a^{-1}$;

$\star$ $g \in \mathrm{GL}(n,K) \Leftrightarrow \mathrm{lm}_g \in \mathrm{GL}(K^n) \Leftrightarrow (\mathrm{lm}_g(\mathbf{e}_1),\ldots,\mathrm{lm}_g(\mathbf{e}_n)) \in \mathrm{OB}(K^n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (g_1^\bullet,\ldots,g_n^\bullet) \in \mathrm{OB}(K^n)$ и $g \in \mathrm{GL}(n,K) \Leftrightarrow g^\mathsf{T} \in \mathrm{GL}(n,K) \Leftrightarrow (g_\bullet^1,\ldots,g_\bullet^n) \in \mathrm{OB}(K_n)$.

Далее K — поле, V — векторное пространство над K, $n = \dim V < \infty$ и $e, \widetilde{e} \in \mathrm{OB}(V)$.

- Матрица замены координат: $\mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} = (\mathrm{id}_V)_e^{\widetilde{e}} = \big(e_1^{\widetilde{e}} \ \ldots \ e_n^{\widetilde{e}}\big)$. Пример: если $e = (e_1,\ldots,e_n) \in \mathrm{OB}(K^n)$, то $\mathrm{c}_e^{\mathbf{e}} = \big(e_1 \ \ldots \ e_n\big)$. Утверждение: $\forall\, \widetilde{\widetilde{e}} \in \mathrm{OB}(V)\, \big(\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{\widetilde{\widetilde{e}}} \cdot \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} = \mathrm{c}_e^{\widetilde{\widetilde{e}}}\big)$ и $\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e} = (\mathrm{c}_e^{\widetilde{e}})^{-1}$.

$\star$ $\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{\widetilde{\widetilde{e}}} \cdot \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} = (\mathrm{id}_V)_{\widetilde{e}}^{\widetilde{\widetilde{e}}} \cdot (\mathrm{id}_V)_e^{\widetilde{e}} = (\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V)_e^{\widetilde{\widetilde{e}}} = \mathrm{c}_e^{\widetilde{\widetilde{e}}}$ и $\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e} \cdot \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} = \mathrm{c}_e^e = \mathrm{id}_n \Rightarrow \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e} = (\mathrm{c}_e^{\widetilde{e}})^{-1}$.

- Преобразование столбца координат вектора ($v \in V$): $v^{\widetilde{e}} = \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} \cdot v^e$; покомпонентная запись ($i \in \{1,\ldots,n\}$): $v^{\widetilde{i}} = \sum\limits_{1 \le k \le n} (e_k)^{\widetilde{i}} v^k$. Преобраз.-е базиса: $\widetilde{e} = e \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$ ($\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$ — матрица перехода).

Выше используется обозначение: $\forall\, v \in V, i \in \{1,\ldots,n\}\, \big(v^i = (v^e)^i \wedge v^{\widetilde{i}} = (v^{\widetilde{e}})^i\big)$.

$\star$ $v^{\widetilde{e}} = (\mathrm{id}_V(v))^{\widetilde{e}} = (\mathrm{id}_V)_e^{\widetilde{e}} \cdot v^e = \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} \cdot v^e$ и $v^{\widetilde{i}} = (v^{\widetilde{e}})^i = (\mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} \cdot v^e)^i = \sum\limits_{1 \le k \le n} (\mathrm{c}_e^{\widetilde{e}})_k^i (v^e)^k = \sum\limits_{1 \le k \le n} (e_k)^{\widetilde{i}} v^k$.

$\star$ Для любых $i \in \{1,\ldots,n\}$ имеем $e_{\widetilde{i}} = \widetilde{e}_i = \sum\limits_{1 \le k \le n} (e_{\widetilde{i}})^k e_k = \sum\limits_{1 \le k \le n} e_k (\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e})_i^k$, и, значит, $\widetilde{e} = e \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$.

Далее Y — векторное пространство над K, $\dim Y < \infty$ и $h, \widetilde{h} \in \mathrm{OB}(Y)$.

- Преобразов.-е матрицы лин. оператора ($a \in \mathrm{Hom}(V,Y)$): $a_{\widetilde{e}}^{\widetilde{h}} = \mathrm{c}_h^{\widetilde{h}} \cdot a_e^h \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$; случай $V = Y$, $e = h$ и $\widetilde{e} = \widetilde{h}$: $a_{\widetilde{e}}^{\widetilde{e}} = \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} \cdot a_e^e \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$; покомпон. запись ($i,j \in \{1,\ldots,n\}$): $a_{\widetilde{j}}^{\widetilde{i}} = \sum\limits_{1 \le k,l \le n} (e_k)^{\widetilde{i}} (e_{\widetilde{j}})^l a_l^k$.

Выше используется обознач.-е: $\forall\, a \in \mathrm{End}(V), i,j \in \{1,\ldots,n\}\, \big(a_j^i = (a_e^e)_j^i \wedge a_{\widetilde{j}}^{\widetilde{i}} = (a_{\widetilde{e}}^{\widetilde{e}})_j^i\big)$.

$\star$ $a_{\widetilde{e}}^{\widetilde{h}} = (\mathrm{id}_Y \circ a \circ \mathrm{id}_V)_{\widetilde{e}}^{\widetilde{h}} = (\mathrm{id}_Y)_h^{\widetilde{h}} \cdot a_e^h \cdot (\mathrm{id}_V)_{\widetilde{e}}^{e} = \mathrm{c}_h^{\widetilde{h}} \cdot a_e^h \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$ и, если $V = Y$, $e = h$ и $\widetilde{e} = \widetilde{h}$, то $a_{\widetilde{j}}^{\widetilde{i}} = (a_{\widetilde{e}}^{\widetilde{e}})_j^i = (\mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} \cdot a_e^e \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e})_j^i = \sum\limits_{1 \le k,l \le n} (\mathrm{c}_e^{\widetilde{e}})_k^i (a_e^e)_l^k (\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e})_j^l = \sum\limits_{1 \le k,l \le n} (e_k)^{\widetilde{i}} (e_{\widetilde{j}})^l a_l^k$.

§ 4.4 Факторпространства, прямая сумма векторных пространств, двойственное пространство

Далее K — поле, V — векторное пространство над K и $U \le V$.

• Факторпр.-во: $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ (мн.-во классов смежности) с фактороперациями. Корректность опред.-я. Теорема о гомоморфизме. Коразмерность: $\operatorname{codim}_V U = \dim V/U$.

Структура векторн. пространства на V/U: $\forall\, v, v' \in V, c, c' \in K$ $\big(c(v+U) + c'(v'+U) = {}$ $= (cv + c'v') + U\big)$; корректность: $\forall\, v, v', \breve{v}, \breve{v}' \in V, c, c' \in K$ $\big(v + U = \breve{v} + U \wedge v' + U = \breve{v}' + U \Rightarrow$ $\Rightarrow c(v - \breve{v}) + c'(v' - \breve{v}') \in U \Rightarrow (cv + c'v') + U = (c\breve{v} + c'\breve{v}') + U\big)$; ясно, что V/U — вект. пр.-во.

Теорема о гомоморфизме. Пусть K — поле, V, Y — векторные пространства над K и $a \in \operatorname{Hom}(V, Y)$; тогда $V/\operatorname{Ker} a \cong \operatorname{Im} a$.

Доказательство.

Отобр.-е $\begin{pmatrix} V/\operatorname{Ker} a \to \operatorname{Im} a \\ v + \operatorname{Ker} a \mapsto a(v) \end{pmatrix}$ опред. корректно и является изоморфизмом вект. простр.-в (проверка линейности указанного отображения: для любых $v, v' \in V$ и $c, c' \in K$ выполнено $c(v + \operatorname{Ker} a) + c'(v' + \operatorname{Ker} a) = (cv + c'v') + \operatorname{Ker} a \mapsto a(cv + c'v') = ca(v) + c'a(v')$).

Пример: пусть $\lambda \in \operatorname{Hom}(V, K)$, $\lambda \ne 0$ и $U = \operatorname{Ker} \lambda$; тогда $K \ge \operatorname{Im} a \ne \{0\}$, поэтому $V/U \cong K$ и, значит, $\operatorname{codim}_V U = 1$ (то есть U — гиперплоскость в V).

• Теорема о факторпространстве. В сделанных выше предположениях имеем след. факты:
(1) если A — базис пространства U, B — базис пространства V и $A \subseteq B$, то все $b + U$, где $b \in B \setminus A$, попарно различны и $\{b + U \mid b \in B \setminus A\}$ — базис пространства V/U;
(1') если $\dim V < \infty$, то $\dim V/U = \dim V - \dim U$;
(2) если $\dim V < \infty$, Y — векторное пространство над K и $a \in \operatorname{Hom}(V, Y)$, то $\dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Im} a = \dim V$ (это теорема о размерностях ядра и образа).

Доказательство.

(1) Все $b+U$, где $b \in B \setminus A$, попарно различны и $\{b+U \mid b \in B \setminus A\}$ — независимое мн.-во, так как для любых $f \in \mathrm{FinFunc}(B \setminus A, K)$ выполнено $\sum_{b \in B \setminus A} f(b)(b+U) = 0_{V/U} = U \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{b \in B \setminus A} f(b)b \in U \Rightarrow \exists\, g \in \mathrm{FinFunc}(A, K) \left(\sum_{b \in B \setminus A} f(b)b = \sum_{a \in A} g(a)a\right) \Rightarrow f = 0$.

$\{b+U \mid b \in B \setminus A\}$ — порождающее множество, так как для любых $v \in V$ выполнено $\exists\, f \in \mathrm{FinFunc}(B, K) \left(v+U = \sum_{b \in B} f(b)b + U = \sum_{b \in B} f(b)(b+U) = \sum_{b \in B \setminus A} f(b)(b+U)\right)$.

(1') Пусть A — базис в U; тогда $\exists\, B \subseteq V$ $\left(B \text{ — базис в } V \wedge A \subseteq B\right)$; отсюда по пункту (1) следует, что $\dim V/U = |\{b+U \mid b \in B \setminus A\}| = |B| - |A| = \dim V - \dim U$.

(2) $V/\operatorname{Ker} a \cong \operatorname{Im} a \Rightarrow \dim(V/\operatorname{Ker} a) = \dim \operatorname{Im} a \Rightarrow \dim V - \dim \operatorname{Ker} a = \dim \operatorname{Im} a$.

$\dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Im} a = \dim V \Rightarrow$ второе док.-во принципа Дирихле для лин. операторов.

Далее K — поле, $k \in \mathbb{N}_0$ и $U, W, V_1, \ldots, V_k$ — векторные пространства над K.

• Прямая сумма $U \oplus W$: $U \times W$ с покомпонентными операциями. Операторы вложения и проекции $(i \in \{1, \ldots, k\})$: $\begin{pmatrix} V_i \to V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \\ v_i \mapsto (0, \ldots, 0, v_i, 0, \ldots, 0) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \to V_i \\ (v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_i \end{pmatrix}$.

Структура векторного пространства на $U \oplus W$: $\forall\, u, u' \in U, w, w' \in W, c, c' \in K$ $\left(c(u,w) + c'(u',w') = (cu + c'u', cw + c'w')\right)$; ясно, что $U \oplus W$ — векторное пространство; аналогичным образом определяется структура векторного пространства на $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

• Теорема о прямой сумме. Пусть K — поле, V — векторн. пространство над K, $k \in \mathbb{N}_0$ и $V_1, \ldots, V_k \leq V$; обозначим через add лин. операт. $\begin{pmatrix} V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \to V \\ (v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 + \ldots + v_k \end{pmatrix}$; тогда

(1) если $B_1, \ldots, B_k$ — базисы пространств $V_1, \ldots, V_k$ соотв., то $\{(b_1, 0, \ldots, 0) \mid b_1 \in B_1\} \cup$ $\cup \ldots \cup \{(0, \ldots, 0, b_k) \mid b_k \in B_k\}$ — базис пространства $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ (и, значит, если дополнительно add — изоморфизм, то $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ — базис пространства V);

(1') если $\dim V_1, \dots, \dim V_k < \infty$, то $\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$;
(2) следующие утверждения эквивалентны: (у1) $\mathrm{add} \in \mathrm{Iso}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k, V)$,
(у2) $\forall\, v \in V\ \exists!\, v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k\ \bigl(v = v_1 + \ldots + v_k\bigr)$, (у3) для любых $i \in \{1, \dots, k\}$ выполнено $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{0\}$ и $V = V_1 + \ldots + V_k$;
(3) если $\dim V < \infty$, то в пункте (2) условие «$V = V_1 + \ldots + V_k$» можно заменить на условие «$\dim V = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$»;
(4) если $U, W \leq V$ и $\dim U, \dim W < \infty$, то $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$ (это формула Грассмана).

Доказательство.
(1) $\{(b_1, 0, \dots, 0) \mid b_1 \in B_1\} \cup \ldots \cup \{(0, \dots, 0, b_k) \mid b_k \in B_k\}$ — независимое множество, так как для любых $f_1 \in \mathrm{FinFunc}(B_1, K), \dots, f_k \in \mathrm{FinFunc}(B_k, K)$ выполнено
$\sum_{b_1 \in B_1} f_1(b_1)(b_1, 0, \dots, 0) + \ldots + \sum_{b_k \in B_k} f_k(b_k)(0, \dots, 0, b_k) = 0_{V_1 \oplus \ldots \oplus V_k} = (0, \dots, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigl(\sum_{b_1 \in B_1} f_1(b_1) b_1, \dots, \sum_{b_k \in B_k} f_k(b_k) b_k\bigr) = (0, \dots, 0) \Rightarrow f_1 = 0, \dots, f_k = 0$.
$\{(b_1, 0, \dots, 0) \mid b_1 \in B_1\} \cup \ldots \cup \{(0, \dots, 0, b_k) \mid b_k \in B_k\}$ — порождающее множество, так как для любых $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$ выполнено $\exists\, f_1 \in \mathrm{FinFunc}(B_1, K), \dots, f_k \in \mathrm{FinFunc}(B_k, K)$
$\bigl((v_1, \dots, v_k) = (v_1, 0, \dots, 0) + \ldots + (0, \dots, 0, v_k) = (\sum_{b_1 \in B_1} f_1(b_1) b_1, 0, \dots, 0) + \ldots +$
$+ (0, \dots, 0, \sum_{b_k \in B_k} f_k(b_k) b_k) = \sum_{b_1 \in B_1} f_1(b_1)(b_1, 0, \dots, 0) + \ldots + \sum_{b_k \in B_k} f_k(b_k)(0, \dots, 0, b_k)\bigr)$.
Ясно, что $\mathrm{add}(\{(b_1, 0, \dots, 0) \mid b_1 \in B_1\} \cup \ldots \cup \{(0, \dots, 0, b_k) \mid b_k \in B_k\}) = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, поэтому, если add — изоморфизм, то $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ — базис пространства V.
(1') Пусть $B_1, \dots, B_k$ — базисы в $V_1, \dots, V_k$ соответственно; тогда $\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k) =$
$= |\{(b_1, 0, \dots, 0) \mid b_1 \in B_1\} \cup \ldots \cup \{(0, \dots, 0, b_k) \mid b_k \in B_k\}| = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$.
(2) $\bigl(\mathrm{add}$ — изоморфизм$\bigr) \Leftrightarrow \bigl(\mathrm{add}$ — биекция$\bigr) \Leftrightarrow \forall\, v \in V\ \exists!\, v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$
$\bigl(v = v_1 + \ldots + v_k\bigr) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathrm{add} = \{0\} \wedge \mathrm{Im}\,\mathrm{add} = V \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathrm{add} = \{0\} \wedge V = V_1 + \ldots + V_k$.
Далее докажем, что $\mathrm{Ker}\,\mathrm{add} = \{0\}$, если и только если для любых $i \in \{1, \dots, k\}$ выполнено $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{0\}$.

Если $\operatorname{Ker}\operatorname{add} = \{0\}$, то пусть $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $v \in V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k)$; тогда $v = v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_k$ для некоторых $v_1 \in V_1, \ldots, v_{i-1} \in V_{i-1}$, $v_{i+1} \in V_{i+1}, \ldots, v_k \in V_k$, поэтому $\operatorname{add}(v_1, \ldots, v_{i-1}, -v, v_{i+1}, \ldots, v_k) = 0$ и, значит, $v = 0$. Если $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}\ \bigl(V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{0\}\bigr)$, то пусть $(v_1, \ldots, v_k) \in \operatorname{Ker}\operatorname{add}$; тогда $v_1 + \ldots + v_k = 0$, поэтому $v_1 \in V_1 \cap (V_2 + \ldots + V_k)$ и, значит, $v_1 = 0$; далее $v_2 + \ldots + v_k = 0$ и аналогично $v_2 = 0$; в итоге $(v_1, \ldots, v_k) = (0, \ldots, 0)$.
(3) Используем принцип Дирихле для линейных операторов и пункт (2): $\bigl(\operatorname{add}$ — изоморфизм$\bigr) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\operatorname{add} = \{0\} \wedge \dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k) = \dim V \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$ $\bigl(V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{0\}\bigr) \wedge \dim V = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$.
(4) Обозначим через a линейный оператор $\begin{pmatrix} U \oplus W \to V \\ (u, w) \mapsto u + w \end{pmatrix}$; тогда $\operatorname{Ker} a =$ $= \bigl\{(v, -v) \mid v \in U \cap W\bigr\} \cong U \cap W$ и $\operatorname{Im} a = U + W$, поэтому $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) =$ $= \dim\operatorname{Ker} a + \dim\operatorname{Im} a = \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

• Внутренняя прямая сумма: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \Leftrightarrow \operatorname{add} \in \operatorname{Iso}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k, V)$. Лемма об инвариантном подпространстве. Прямая сумма квадратных матриц: $a' \oplus a'' = \left(\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & a'' \end{smallmatrix}\right)$.

Примеры ($n \in \mathbb{N}_0$): если $\operatorname{char} K \neq 2$, то $\operatorname{Mat}(n, K) = \operatorname{SMat}(n, K) \oplus \operatorname{AMat}(n, K)$; если $\operatorname{char} K$ не делит n, то $\operatorname{Mat}(n, K) = K \operatorname{id}_n \oplus \{a \in \operatorname{Mat}(n, K) \mid \operatorname{tr} a = 0\}$.

Лемма об инвариантном подпространстве. Пусть K — поле, V — векторное пространство над K, $n = \dim V < \infty$, $a \in \operatorname{End}(V)$, $U \leq V$ и $a(U) \subseteq U$ (то есть U — a-инвариантное подпространство в V), а также $n' = \dim U$ и $n'' = n - n'$; тогда
(1) $\exists\, e \in \operatorname{OB}(V), a' \in \operatorname{Mat}(n', K), a'' \in \operatorname{Mat}(n'', K), b \in \operatorname{Mat}(n', n'', K)\ \bigl(a_e^e = \left(\begin{smallmatrix} a' & b \\ 0 & a'' \end{smallmatrix}\right)\bigr)$;
(2) если $W \leq V$, $V = U \oplus W$ и $a(W) \subseteq W$ (то есть W — a-инвариантное подпространство в V), то $\exists\, e \in \operatorname{OB}(V), a' \in \operatorname{Mat}(n', K), a'' \in \operatorname{Mat}(n'', K)\ \bigl(a_e^e = \left(\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & a'' \end{smallmatrix}\right)\bigr)$.

Доказательство.
Пусть $(e_1, \dots, e_{n'}) \in \mathrm{OB}(U)$; тогда $a(e_1), \dots, a(e_{n'}) \in U$.
(1) Дополним $(e_1, \dots, e_{n'})$ до $(e_1, \dots, e_n) \in \mathrm{OB}(V)$ и пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$; тогда $a_e^e = \big(a(e_1)^e \ \dots \ a(e_{n'})^e \ a(e_{n'+1})^e \ \dots \ a(e_n)^e\big) = \left(\begin{smallmatrix} a' & b \\ 0 & a'' \end{smallmatrix}\right)$, где $a' = \big(a|_{U \to U}\big)^{(e_1,\dots,e_{n'})}_{(e_1,\dots,e_{n'})} \in$ $\in \mathrm{Mat}(n', K)$ и $\left(\begin{smallmatrix} b \\ a'' \end{smallmatrix}\right) = \big(a|_{\langle e_{n'+1},\dots,e_n\rangle}\big)^e_{(e_{n'+1},\dots,e_n)} \in \mathrm{Mat}(n, n'', K)$.
(2) Пусть $(e_{n'+1}, \dots, e_n) \in \mathrm{OB}(W)$ и $e = (e_1, \dots, e_n)$; тогда $e \in \mathrm{OB}(V)$ $(\Leftarrow V = U \oplus W)$ и $a(e_{n'+1}), \dots, a(e_n) \in W$, поэтому $a_e^e = \big(a(e_1)^e \ \dots \ a(e_{n'})^e \ a(e_{n'+1})^e \ \dots \ a(e_n)^e\big) = \left(\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & a'' \end{smallmatrix}\right)$, где $a' = \big(a|_{U \to U}\big)^{(e_1,\dots,e_{n'})}_{(e_1,\dots,e_{n'})} \in \mathrm{Mat}(n', K)$ и $a'' = \big(a|_{W \to W}\big)^{(e_{n'+1},\dots,e_n)}_{(e_{n'+1},\dots,e_n)} \in \mathrm{Mat}(n'', K)$.

Пример: пусть $a \in \mathrm{End}(V)$, $a^2 = a$, $U = \mathrm{Ker}(a - \mathrm{id}_V) = \{v \in V \mid a(v) = v\}$ и $W = \mathrm{Ker}\, a$; тогда $U \cap W = \{0\}$ и $V = U + W$ (так как $\forall\, v \in V\ \big(a(v) \in U \wedge v - a(v) \in W\big)$), поэтому $V = U \oplus W$, а также, если $\dim V < \infty$, $(e_1, \dots, e_m) \in \mathrm{OB}(U)$ и $(e_{m+1}, \dots, e_n) \in \mathrm{OB}(W)$, то $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathrm{OB}(V)$ и $a_e^e = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (геометрический смысл: оператор a является проектором на подпространство U вдоль подпространства W).

Далее K — поле и V — векторное пространство над K.

• Двойственное пространство: $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$. Двойственный базис ($n = \dim V < \infty$, $e \in \mathrm{OB}(V)$): $e^* = \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \mapsto (v^e)^1 \\ \vdots \\ v \mapsto (v^e)^n \end{pmatrix}$; $(e^1, \dots, e^n) \in \mathrm{OB}(V^*)$. Строка коорд.-т ковектора: λ_e.

$\star$ $\dim V^* = n$ и $\{e^1, \dots, e^n\}$ — порождающее множество (так как для любых $\lambda \in V^*$ имеем $\forall\, v \in V\ \big(\lambda(v) = (v^e)^1 \lambda(e_1) + \dots + (v^e)^n \lambda(e_n) = (\lambda(e_1) e^1 + \dots + \lambda(e_n) e^n)(v)\big)$ и, значит, $\lambda = \lambda(e_1) e^1 + \dots + \lambda(e_n) e^n$), поэтому $(e^1, \dots, e^n) \in \mathrm{OB}(V^*)$.
$\forall\, \lambda \in V^* \big(\lambda_e = \big(\lambda(e_1) \ \dots \ \lambda(e_n)\big) = \lambda_e^{(1)}\big)$ ($\lambda_e^{(1)}$ — матрица линейного оператора λ).

Далее $n = \dim V < \infty$, $e, \widetilde{e} \in \mathrm{OB}(V)$ и $\lambda \in V^*$.

• Утверждение: $\lambda = \lambda_e \cdot e^*$ и $\forall\, v \in V\ \big(\lambda(v) = \lambda_e \cdot v^e\big)$. Изоморфизм $\begin{pmatrix} V^* \to K_n \\ \lambda \mapsto \lambda_e \end{pmatrix}$. Преобр.-я при замене базиса ($j \in \{1, \ldots, n\}$): $\lambda_{\widetilde{e}} = \lambda_e \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$ и $\lambda_{\widetilde{j}} = \sum\limits_{1 \le l \le n} (e_{\widetilde{j}})^l \lambda_l$, а также $\widetilde{e}^* = \mathrm{c}_{e}^{\widetilde{e}} \cdot e^*$.

$\star$ $\lambda = \big(\lambda(e_1)\ \ldots\ \lambda(e_n)\big) \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = \lambda_e \cdot e^*$ и $\lambda(v) = \big(\lambda(e_1)\ \ldots\ \lambda(e_n)\big) \cdot \begin{pmatrix} (v^e)^1 \\ \vdots \\ (v^e)^n \end{pmatrix} = \lambda_e \cdot v^e$.

Выше используется обозначение: $\forall\, \lambda \in V^*, j \in \{1, \ldots, n\}\ \big(\lambda_j = (\lambda_e)_j \wedge \lambda_{\widetilde{j}} = (\lambda_{\widetilde{e}})_j\big)$.

$\star$ $\lambda_{\widetilde{e}} = \lambda_{\widetilde{e}}^{(1)} = \mathrm{c}_{(1)}^{(1)} \cdot \lambda_e^{(1)} \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e} = \lambda_e \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}$ и $\lambda_{\widetilde{j}} = (\lambda_{\widetilde{e}})_j = (\lambda_e \cdot \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e})_j = \sum\limits_{1 \le l \le n} (\lambda_e)_l (\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e})_j^l = \sum\limits_{1 \le l \le n} (e_{\widetilde{j}})^l \lambda_l$.

$\star$ Для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $e^{\widetilde{j}} = \widetilde{e}^j = \sum\limits_{1 \le l \le n} (e^{\widetilde{j}})_l\, e^l = \sum\limits_{1 \le l \le n} (\mathrm{c}_{e}^{\widetilde{e}})_l^j\, e^l$, и, значит, $\widetilde{e}^* = \mathrm{c}_{e}^{\widetilde{e}} \cdot e^*$.

Далее K — поле и V, Y — векторные пространства над K.

• Двойственный оператор для a ($a \in \mathrm{Hom}(V, Y)$): $a^* = \begin{pmatrix} Y^* \to V^* \\ \theta \mapsto \theta \circ a \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}(Y^*, V^*)$.

Утверждение: если $\dim V < \infty$, то $\begin{pmatrix} V \to V^{**} \\ v \mapsto \big(\lambda \mapsto \lambda(v)\big) \end{pmatrix}$ — изоморфизм вект. пространств.

Легко видеть, что $\big(a \mapsto a^*\big)$ — линейный оператор, а также, если X, Z — векторные пространства над K, то $\forall\, a \in \mathrm{Hom}(V, X), b \in \mathrm{Hom}(X, Z)\ \big((b \circ a)^* = a^* \circ b^*\big)$.

Если $\dim V, \dim Y < \infty$, $e \in \mathrm{OB}(V)$ и $h \in \mathrm{OB}(Y)$, то $\forall\, \theta \in Y^*\ \big(a^*(\theta)_e = (\theta \circ a)_e = \theta_h \cdot a_e^h\big)$.

$\star$ Легко видеть, что $\big(v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(v))\big)$ — линейный оператор, и это биекция, так как, если $n = \dim V$, то $n = \dim V^{**}$, и $\mathrm{Ker}\big(v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(v))\big) = \{0\}$ (если $v \in V$, $\forall\, \lambda \in V^*\ \big(\lambda(v) = 0\big)$ и $e \in \mathrm{OB}(V)$, то $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\ \big((v^e)^i = e^i(v) = 0\big)$ и, значит, $v = 0$).