Глава 9

Геометрия в векторных пространствах над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

§ 9.1 Положительно и отрицательно определенные формы и сигнатура формы

Далее $K=\mathbb{R}$ или $K=\mathbb{C}$ и V — векторное пространство над K.

• Мн.-во положит. определ. форм: $\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)=\{\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}(V)\mid\forall\, v\in V\setminus\{0\}\ \big(\sigma(v,v)>0\big)\}$.
Мн.-во отрицат. определ. форм: $\overline{\mathrm{SBi}}_{<0}(V)=\{\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}(V)\mid\forall\, v\in V\setminus\{0\}\ \big(\sigma(v,v)<0\big)\}$.

Пусть $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}(V)$; тогда $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)\Leftrightarrow-\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{<0}(V)$.

• Мн. пол. опред. матриц: $\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{>0}(n,K)=\{s\in\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}(n,K)\mid\forall\, v\in K^n\setminus\{0\}\ \big(v^{\mathsf{T}}\cdot s\cdot\overline{v}>0\big)\}$.
Мн. отр. опред. матриц: $\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{<0}(n,K)=\{s\in\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}(n,K)\mid\forall\, v\in K^n\setminus\{0\}\ \big(v^{\mathsf{T}}\cdot s\cdot\overline{v}<0\big)\}$.

Пусть $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}(V)$, $\dim V<\infty$ и $e\in\mathrm{OB}(V)$; тогда
⋆ $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)\Leftrightarrow\forall\, v\in V\setminus\{0\}\ \big((v^e)^{\mathsf{T}}\cdot\sigma_{e,e}\cdot\overline{v^e}>0\big)\Leftrightarrow\sigma_{e,e}\in\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{>0}(n,K)$;
⋆ $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{<0}(V)\Leftrightarrow\forall\, v\in V\setminus\{0\}\ \big((v^e)^{\mathsf{T}}\cdot\sigma_{e,e}\cdot\overline{v^e}<0\big)\Leftrightarrow\sigma_{e,e}\in\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{<0}(n,K)$.

Пусть $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}(V)$, $n=\dim V<\infty$ и $e\in\mathrm{OOB}(V,\sigma)$, то есть $\sigma_{e,e}$ — диагонал. матрица и $\forall\, v\in V\ \big(\sigma(v,v)=\sum\limits_{1\le i\le n}\sigma_{i,i}|v^i|^2\big)$; тогда $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)\Leftrightarrow\forall\, i\in\{1,\ldots,n\}\ \big(\sigma_{i,i}>0\big)$.

Пример для случая $V=\mathrm{C}^0([\alpha;\beta],K)$: $\sigma\colon(f,g)\mapsto\int_\alpha^\beta s(x)f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$, где $s\in V$ и $\forall\, x\in[\alpha;\beta]\ \big(s(x)>0\big)$; тогда $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)$ (здесь важна непрерывность функций).

• Следствия из теоремы об ортогональном дополнении и теоремы Лагранжа. В сделанных выше предположениях для любых $\sigma\in\overline{\mathrm{Bi}}(V)$ имеем следующие факты:
(1) если $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)$ и $U\le V$, то $U\cap U^\perp=\{0\}$ и, если $\dim U<\infty$, то форма $\sigma|_{U\times U}$ невырождена и $V=U\oplus U^\perp$;
(2) если $n=\dim V<\infty$, то $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)\Leftrightarrow\exists\, e\in\mathrm{OB}(V)\ \big(\sigma_{e,e}=\mathrm{id}_n\big)$;
(3) если $n=\dim V<\infty$ и $e\in\mathrm{OB}(V)$, то $\sigma\in\overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)\Leftrightarrow\exists\, g\in\mathrm{GL}(n,K)\ \big(\sigma_{e,e}=g^{\mathsf{T}}\cdot\overline{g}\big)$.

Доказательство.
(1) $U \cap U^{\perp} \subseteq \{v \in V \mid \sigma(v,v) = 0\} = \{0\}$. Если $\dim U < \infty$, то по пунктам (3) и (4) теоремы ортогональном дополнении получаем, что $\sigma|_{U\times U}$ невырождена и $V = U \oplus U^{\perp}$.
(2), (3) Если $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)$, то по пункту (2) теоремы Лагранжа имеем $\mathrm{OnOB}(V,\sigma) \neq \varnothing$.
(2) Пусть $e \in \mathrm{OnOB}(V,\sigma)$; тогда $\sigma_{e,e} = \mathrm{id}_n$ (так как $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\ \big(\sigma_{i,i} > 0\big)$).
(3) Если $e \in \mathrm{OB}(V)$, то пусть $\widehat{e} \in \mathrm{OnOB}(V,\sigma)$ и $g = \mathrm{c}_e^{\widehat{e}}$; тогда $\sigma_{e,e} = (\mathrm{c}_e^{\widehat{e}})^{\mathsf{T}}\cdot\sigma_{\widehat{e},\widehat{e}}\cdot\overline{\mathrm{c}_e^{\widehat{e}}} = g^{\mathsf{T}}\cdot\overline{g}$.
(2), (3) Если $\sigma_{e,e} = g^{\mathsf{T}}\cdot\overline{g}$, где $g \in \mathrm{GL}(n,K)$ (в частности, $\sigma_{e,e} = \mathrm{id}_n$), то $\sigma_{e,e} \in \overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{>0}(n,K)$ (так как $\sigma_{e,e} \in \overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}(n,K)$ и $\forall\, v \in K^n\setminus\{0\}\ \big(v^{\mathsf{T}}\cdot\sigma_{e,e}\cdot\overline{v} = (g\cdot v)^{\mathsf{T}}\cdot\overline{(g\cdot v)} = \sum_{1\le i\le n} |(g\cdot v)^i|^2 > 0\big)$; здесь используется то, что $g \in \mathrm{GL}(n,K)$); отсюда следует, что $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)$.

Из пункта (3) следствия получаем, что $\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{>0}(n,K) = \{g^{\mathsf{T}}\cdot\overline{g} \mid g \in \mathrm{GL}(n,K)\}$ и $\overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{<0}(n,K) = \{-g^{\mathsf{T}}\cdot\overline{g} \mid g \in \mathrm{GL}(n,K)\}$; так как $\det(g^{\mathsf{T}}\cdot\overline{g}) = |\det g|^2 > 0$, отсюда следует, что $\forall\, s \in \overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{>0}(n,K)\ \big(\det s > 0\big)$ и $\forall\, s \in \overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{<0}(n,K)\ \big((-1)^n \det s > 0\big)$.

Далее $n = \dim V < \infty$ и $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}(V)$.

• Критерий Сильвестра. В сделанных выше предположениях для любых $e \in \mathrm{OB}(V)$ имеем следующие факты, в которых для любых $i \in \{1,\ldots,n\}$ через cm_i обозначен i-й угловой минор матрицы $\sigma_{e,e}$ (то есть $cm_i = \det\sigma_{(e_1,\ldots,e_i),(e_1,\ldots,e_i)}$):
(1) $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V) \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\ \big(cm_i > 0\big)$;
(2) $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{<0}(V) \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\ \big((-1)^i cm_i > 0\big)$.

Доказательство.
(1) Если $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)$, то для любых $U \le V$ выполнено $\sigma|_{U\times U} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(U)$, и, значит, для любых $i \in \{1,\ldots,n\}$ выполнено $\sigma|_{\langle e_1,\ldots,e_i\rangle\times\langle e_1,\ldots,e_i\rangle} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(\langle e_1,\ldots,e_i\rangle)$, поэтому $\sigma_{(e_1,\ldots,e_i),(e_1,\ldots,e_i)} \in \overline{\mathrm{S}}\mathrm{Mat}_{>0}(i,K)$. В итоге имеем $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\ \big(cm_i > 0\big)$.

Если $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \, (cm_i > 0)$, то к e можно применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта. В результате получим $\widehat{e}$, где $\widehat{e} \in \mathrm{OOB}(V, \sigma)$ и $\sigma_{\widehat{e}, \widehat{e}}$ — диагон. матрица с числами $cm_1, \frac{cm_2}{cm_1}, \ldots, \frac{cm_n}{cm_{n-1}}$ на диагонали; эти числа положительны, поэтому $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V)$.
(2) $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{<0}(V) \Leftrightarrow -\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(V) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \, \big((-1)^i cm_i > 0\big)$; в последнем переходе используются пункт (1) и то, что $\det\big(-\sigma_{(e_1, \ldots, e_i), (e_1, \ldots, e_i)}\big) = (-1)^i cm_i$.

• Положительный и отрицательный индексы инерции формы σ: $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) = \max\{\dim U \mid U \leq V \ \wedge \ \sigma|_{U \times U} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(U)\}$ и $\mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = \max\{\dim U \mid U \leq V \ \wedge \ \sigma|_{U \times U} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{<0}(U)\}$.

• Закон инерции Сильвестра. В сделанных выше предположен. для любых $e \in \mathrm{OOB}(V, \sigma)$ имеем следующие факты:
(1) $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(e_i, e_i) > 0\}|$;
(2) $\mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(e_i, e_i) < 0\}|$;
(3) $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) + \mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = \mathrm{rk}(\sigma)$.

Доказательство.
Используя перенумерацию базисных векторов, можно считать, что $\sigma(e_1, e_1) > 0, \ldots,$ $\sigma(e_p, e_p) > 0$, $\sigma(e_{p+1}, e_{p+1}) < 0, \ldots, \sigma(e_{p+q}, e_{p+q}) < 0$ и $\sigma(e_{p+q+1}, e_{p+q+1}) = 0, \ldots,$ $\sigma(e_n, e_n) = 0$, где $p, q \in \{0, \ldots, n\}$ и $p + q \leq n$; тогда $p = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(e_i, e_i) > 0\}|$, $q = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(e_i, e_i) < 0\}|$ и $p + q = \mathrm{rk}(\sigma_{e,e})$.
(1) Если $U \leq V$ и $\sigma|_{U \times U} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(U)$, то $U \cap \langle e_{p+1}, \ldots, e_n \rangle = \{0\}$, и, значит, $\dim U =$ $= \dim(U + \langle e_{p+1}, \ldots, e_n \rangle) - \dim\langle e_{p+1}, \ldots, e_n \rangle \leq n - (n - p) = p$; в итоге $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) \leq p$.
Далее, пусть $U = \langle e_1, \ldots, e_p \rangle$; тогда $\sigma|_{U \times U} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(U)$, поэтому $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) \geq \dim U = p$.
(2) Равенство $\mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = q$ доказывается так же, как равенство $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) = p$ в пункте (1).
(3) $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) + \mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = p + q = \mathrm{rk}(\sigma_{e,e}) = \mathrm{rk}(\sigma)$.

Из закона инерции Сильвестра следует, что числа $|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(e_i, e_i) > 0\}|$ и $|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(e_i, e_i) < 0\}|$, где $e \in \mathrm{OOB}(V, \sigma)$, не зависят от e.

Общий факт об изоморфизме между вект. пространствами с $^{-}$-билинейной формой: пусть K — поле с инволюцией, V — векторное пространство над K, $n = \dim V < \infty$, $\sigma \in \overline{\mathrm{Bi}}(V)$ и $e \in \mathrm{OB}(V)$; тогда из формулы $\forall\, v, w \in V\ \bigl(\sigma(v, w) = (v^e)^{\mathsf{T}} \cdot \sigma_{e,e} \cdot \overline{w^e}\bigr)$ следует, что $\begin{pmatrix} V \to K^n \\ v \mapsto v^e \end{pmatrix}$ — изоморфизм между (V, σ) и $\bigl(K^n, \bigl((v, w) \mapsto v^{\mathsf{T}} \cdot \sigma_{e,e} \cdot \overline{w}\bigr)\bigr)$.

• <u>Теорема о классификации пространств с формой.</u> Пусть $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, V, Y — вект. пространства над K, $\dim V, \dim Y < \infty$, $\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}(V)$ и $\varphi \in \overline{\mathrm{SBi}}(Y)$; тогда $(V, \sigma) \cong (Y, \varphi) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigl(\dim V = \dim Y \wedge \mathrm{ind}_{>0}(\sigma) = \mathrm{ind}_{>0}(\varphi) \wedge \mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = \mathrm{ind}_{<0}(\varphi)\bigr)$.

Доказательство.
Если $n = \dim V = \dim Y$, $p = \mathrm{ind}_{>0}(\sigma) = \mathrm{ind}_{>0}(\varphi)$ и $q = \mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = \mathrm{ind}_{<0}(\varphi)$, то пусть $e \in \mathrm{OnOB}(V, \sigma)$ и $h \in \mathrm{OnOB}(Y, \varphi)$; тогда $\sigma_{e,e}$ и $\varphi_{h,h}$ — диагональные матрицы с числами $1, \ldots, 1$ (p штук), $-1, \ldots, -1$ (q штук) и $0, \ldots, 0$ ($n - p - q$ штук) на диагонали (здесь используется закон инерции Сильвестра); из указанного выше общего факта получаем, что $(V, \sigma) \cong \Bigl(K^n, \Bigl((v, w) \mapsto \sum\limits_{1 \le i \le p} v^i \overline{w^i} - \sum\limits_{p+1 \le i \le p+q} v^i \overline{w^i}\Bigr)\Bigr) \cong (Y, \varphi)$.
Если $(V, \sigma) \cong (Y, \varphi)$, то $V \cong Y$ и $\dim V = \dim Y$. Пусть $a \in \mathrm{Iso}((V, \sigma), (Y, \varphi))$; тогда $\forall\, v \in V\ \bigl(\sigma(v, v) = \varphi(a(v), a(v))\bigr)$; отсюда следует, что $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) = \max\{\dim U \mid U \le V\ \wedge$ $\wedge\ \sigma|_{U \times U} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(U)\} = \max\{\dim a(U) \mid a(U) \le Y \wedge \varphi|_{a(U) \times a(U)} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(a(U))\} =$ $= \max\{\dim X \mid X \le Y \wedge \varphi|_{X \times X} \in \overline{\mathrm{SBi}}_{>0}(X)\} = \mathrm{ind}_{>0}(\varphi)$; аналогично $\mathrm{ind}_{<0}(\sigma) = \mathrm{ind}_{<0}(\varphi)$.

• Сигнатура формы σ ($\sigma \in \overline{\mathrm{SBi}}(V)$): $(\mathrm{ind}_{>0}(\sigma), \mathrm{ind}_{<0}(\sigma))$ (или $\mathrm{ind}_{>0}(\sigma) - \mathrm{ind}_{<0}(\sigma)$).
Исследование кривых и поверхностей второго порядка при помощи квадратичных форм.

Описание алгоритма исследования кривых и поверхностей второго порядка над $\mathbb{R}$ при помощи большой и малой квадратичных форм имеется в § 2 главы VIII учебника Д.В. Беклемишева «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры».

§ 9.2 Предгильбертовы пространства

• Предгильбертово пространство — вект. простр.-во над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с положит. определенной формой. Обозначение формы: $(\,|\,)$. Примеры: $(v\,|\,w) = v^{\mathsf{T}}\cdot\overline{w}$, $(f\,|\,g) = \int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

Обозначения: $\flat = \flat_{(\,|\,)}$, $\sharp = \sharp^{(\,|\,)}$, $\mathrm{OOB}(V) = \mathrm{OOB}(V, (\,|\,))$, $\mathrm{OnOB}(V) = \mathrm{OnOB}(V, (\,|\,))$; обозн.-е матрицы Грама с σ сохраняется, то есть $(\sigma_{(v_1,\ldots,v_m),(w_1,\ldots,w_m)})_{j_1,j_2} = (v_{j_1}\,|\,w_{j_2})$.

Обозначения в квантовой механике (в них V — предгильберт. пр.-во над $\mathbb{C}$ и $v, w \in V$):
⋆ $\langle v\,|\,w\rangle = (w\,|\,v) = \overline{(v\,|\,w)}$ (тогда $\big((v,w) \mapsto \langle v\,|\,w\rangle\big) \in \mathrm{Bi}(\overline{V}, V, \mathbb{C})$);
⋆ $\langle v\,| = \flat v$ — бра-вектор, $|\,w\rangle = w$ — кет-вектор (тогда $(\langle v\,|)(|\,w\rangle) = (\flat v)(w) = \langle v\,|\,w\rangle$);
⋆ $|\,v\rangle\langle w\,| = |\,v\rangle \otimes \langle w\,| = v \otimes \flat w$ (тогда $\forall\, u \in V\ \big(u\langle v\,|\,w\rangle = |\,u\rangle\langle v\,|\,w\rangle = (|\,u\rangle\langle v\,|)(w)\big)$, а также $\forall\, x \in V\ \big(\langle v\,|\,w\rangle \flat x = \langle v\,|\,w\rangle\langle x\,| = (\flat v)\circ(|\,w\rangle\langle x\,|)\big)$); если $\langle v\,|\,v\rangle = 1$, то $\mathrm{proj}_{\mathbb{C}v} = |\,v\rangle\langle v\,|$.

• Евклидово/унитарное пространство — конечномерное вект. пространство над $\mathbb{R}$/над $\mathbb{C}$ с полож. опред. формой, то есть конечномерное предгильбертово простр.-во над $\mathbb{R}$/над $\mathbb{C}$.

Пусть V — евклидово/унитарное пространство, $n = \dim V$ и $e, \widetilde{e} \in \mathrm{OnOB}(V)$; тогда $\sigma_{e,e} = \sigma_{\widetilde{e},\widetilde{e}} = \mathrm{id}_n$ и $(\mathrm{c}^{e}_{\widetilde{e}})^{\mathsf{T}}\cdot\overline{\mathrm{c}^{e}_{\widetilde{e}}} = \mathrm{id}_n$ ($\Rightarrow |\det \mathrm{c}^{e}_{\widetilde{e}}| = 1$); таким образом, $\mathrm{c}^{e}_{\widetilde{e}}$ — ортогональная матрица ($\mathrm{c}^{e}_{\widetilde{e}} \in \mathrm{O}(n)$)/унитарная матрица ($\mathrm{c}^{e}_{\widetilde{e}} \in \mathrm{U}(n)$).

• Норма: $\|v\| = \sqrt{(v\,|\,v)}$. Утверждение: $v \neq 0 \Rightarrow \|v\| > 0$ и $\|cv\| = \sqrt{(cv\,|\,cv)} = |c|\,\|v\|$. Гильбертово простр.-во — полное (относ.-но $\|\ \|$) предгильбертово пр.-во. Примеры: $\ell^2_{\mathbb{R}}$, $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

• Теорема о свойствах нормы. Пусть V — предгильбертово пространство; тогда
(1) $\forall\, v, w \in V\ \big(|(v\,|\,w)| \leq \|v\|\,\|w\|\big)$ (это неравенство Коши–Буняковского–Шварца);
(2) $\forall\, v, w \in V\ \big(\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|\big)$ (это неравенство треугольника);
(3) если $n = \dim V < \infty$, то для любых $e \in \mathrm{OnOB}(V)$ и $v \in V$ выполнено $v = \sum\limits_{1\leq i\leq n} (v\,|\,e_i)e_i$, а также $\|v\|^2 = \sum\limits_{1\leq i\leq n} |(v\,|\,e_i)|^2$ (это равенство Парсеваля).

Доказательство.
(1) Доказательство при помощи матрицы Грама. Матрица $\sigma_{(v,w),(v,w)}$ необратима (если v и w зависимы) или положительно определена (если v и w независимы), поэтому имеем $\det\sigma_{(v,w),(v,w)} \geq 0$, то есть $\det\begin{pmatrix} \|v\|^2 & (v\,|\,w) \\ \overline{(v\,|\,w)} & \|w\|^2 \end{pmatrix} \geq 0$, и, значит, $\|v\|^2\|w\|^2 \geq |(v\,|\,w)|^2$.
Доказат.-во при помощи выбора базиса. Если v и w зависимы, то нужный факт очевиден; иначе пусть $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$, $e_2 \in \langle e_1\rangle^\perp \cap \langle v, w\rangle$ и $\|e_2\| = 1$; тогда $e = (e_1, e_2) \in \mathrm{OnOB}(\langle v, w\rangle)$ и, значит, $|(v\,|\,w)| = \|v\|\,|(e_1\,|\,w)| = \|v\|\,|(w^e)^1| \leq \|v\|\sqrt{|(w^e)^1|^2 + |(w^e)^2|^2} = \|v\|\,\|w\|$.
(2) $\|v+w\|^2 = (v+w\,|\,v+w) = \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}((v\,|\,w)) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|(v\,|\,w)| + \|w\|^2$; по пункту (1) получаем, что $\|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$.
(3) Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $(v^e)^i = ((v^e)^1 e_1 + \ldots + (v^e)^n e_n\,|\,e_i) = (v\,|\,e_i)$.
Альтернативное доказательство: $v^e = (\sharp(\flat v))^e = \sigma^{e,e}\cdot((\flat v)_e)^\mathsf{T} = \big((v\,|\,e_1)\ \ldots\ (v\,|\,e_n)\big)^\mathsf{T}$.
Второе альтернативное доказательство: используем лемму об ортогональном проекторе для случая $U = V$ и $e \in \mathrm{OnOB}(V)$ (отметим, что $\mathrm{proj}_V = \mathrm{id}_V$).
Следствие из того, что $v^e = \big((v\,|\,e_1)\ \ldots\ (v\,|\,e_n)\big)^\mathsf{T}$: $\|v\|^2 = \sum\limits_{1\leq i\leq n} |(v^e)^i|^2 = \sum\limits_{1\leq i\leq n} |(v\,|\,e_i)|^2$.

Пусть $K = \mathbb{R}$ и V — евклидово пр.-во или $K = \mathbb{C}$ и V — унитарное пр.-во, $n = \dim V$ и $e \in \mathrm{OnOB}(V)$; тогда $\begin{pmatrix} V \to K^n \\ v \mapsto v^e \end{pmatrix}$ — изоморфизм между $(V, (\,|\,))$ и $\big(K^n, \big((v,w) \mapsto \sum\limits_{1\leq i\leq n} v^i\overline{w^i}\big)\big)$.

Отметим факты (без доказательства) о гильбертовых пространствах (в них $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, V — сепарабельное гильбертово простр.-во над K и $\dim V = \infty$; сепарабельность означает, что в V существует счетное всюду плотное подмножество).
$\star$ Обозначим $\mathrm{OnOB}(V) = \{e \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, V) \mid \forall\, j_1, j_2 \in \mathbb{N}\,\big((e_{j_1}\,|\,e_{j_2}) = \delta_{j_1,j_2}\big) \wedge \big($замыкание подпространства $\langle\{e_1, e_2, \ldots\}\rangle\big) = V\}$; тогда $\mathrm{OnOB}(V) \neq \varnothing$.

$\star$ Пусть $e \in \mathrm{OnOB}(V)$; тогда $\forall\, v \in V \left(v = \sum\limits_{1 \le i < \infty} (v\,|\,e_i)e_i \;\wedge\; \|v\|^2 = \sum\limits_{1 \le i < \infty} |(v\,|\,e_i)|^2\right)$, а также $\begin{pmatrix} V \to \ell^2_K \\ v \mapsto ((v\,|\,e_1), (v\,|\,e_2), \ldots) \end{pmatrix}$ — изоморфизм гильбертовых пространств между V и ℓ^2_K.

Далее V — предгильбертово пространство и $U, U' \le V$.

• Метрика: $\mathrm{dist}(v,w) = \|v - w\|$ (V — метрич. пр.-во относит.-но dist). Расстояние между подмн.-вами: $\mathrm{dist}(X,Y) = \inf\{\mathrm{dist}(x,y) \mid x \in X \,\wedge\, y \in Y\}$. Теор. о расстоян. и проекциях.

Теорема о расстояниях и проекциях. В сделанных выше предположен. имеем след. факты:
(1) $\forall\, v, v' \in V \left(\mathrm{dist}(v + U, v' + U') = \mathrm{dist}(v - v', U + U')\right)$;
(2) если $\dim U < \infty$, то $\forall\, v \in V \left(\mathrm{dist}(v, U) = \mathrm{dist}(v, \mathrm{proj}_U(v))\right)$;
(3) если $\dim V < \infty$, то $\mathrm{proj}_U + \mathrm{proj}_{U^\perp} = \mathrm{id}_V$ и $\forall\, v \in V \left(\mathrm{dist}(v, U) = \|\mathrm{proj}_{U^\perp}(v)\|\right)$;
(4) если $m = \dim U < \infty$, то для любых $e \in \mathrm{OnOB}(U)$ и $v \in V$ выполнено $\mathrm{proj}_U(v) = \sum\limits_{1 \le i \le m} (v\,|\,e_i)e_i$, а также $\|v\|^2 \ge \sum\limits_{1 \le i \le m} |(v\,|\,e_i)|^2$ (это неравенство Бесселя).

Доказательство.
(1) $\mathrm{dist}(v + U, v' + U') = \inf\{\|(v - u) - (v' + u')\| \mid u \in U \,\wedge\, u' \in U'\} =$ $= \inf\{\|(v - v') - w\| \mid w \in U + U'\} = \mathrm{dist}(v - v', U + U')$.
(2) Пусть $u \in U$; тогда $(v - \mathrm{proj}_U(v)) \perp (\mathrm{proj}_U(v) - u)$ и, значит, $\|v - u\|^2 =$ $= \|v - \mathrm{proj}_U(v)\|^2 + \|\mathrm{proj}_U(v) - u\|^2$; это выражение минимально, если и только если $u = \mathrm{proj}_U(v)$. В итоге имеем $\mathrm{dist}(v, U) = \inf\{\|v - u\| \mid u \in U\} = \mathrm{dist}(v, \mathrm{proj}_U(v))$.
(3) Так как $v = (v - \mathrm{proj}_U(v)) + \mathrm{proj}_U(v)$, где $v - \mathrm{proj}_U(v) \in U^\perp$ и $\mathrm{proj}_U(v) \in U = U^{\perp\perp}$, получаем, что $v - \mathrm{proj}_U(v) = \mathrm{proj}_{U^\perp}(v)$ и $\mathrm{dist}(v, U) = \|v - \mathrm{proj}_U(v)\| = \|\mathrm{proj}_{U^\perp}(v)\|$.
(4) Используем лемму об ортогональном проекторе. Далее, $\mathrm{proj}_U(v) \perp (v - \mathrm{proj}_U(v))$ и, значит, $\|v\|^2 = \|\mathrm{proj}_U(v)\|^2 + \|v - \mathrm{proj}_U(v)\|^2 \ge \|\mathrm{proj}_U(v)\|^2 = \sum\limits_{1 \le i \le m} |(v\,|\,e_i)|^2$.

Дополнительные факты (без док.-ва) о гильберт. пр.-вах (в них V — гильберт. пр.-во):
$\star$ форма $(\,|\,)$ топологически невырождена (это теорема Рисса–Фреше);
$\star$ пусть $U \le V$ и U замкнуто; тогда U — гильбертово пространство относит.-но $(\,|\,)|_{U\times U}$, $U = U^{\perp\perp}$ и $V = U \oplus U^{\perp}$, а также для V и U выполнены пункты (2), (3), (4) теоремы о расстояниях и проекциях (без требований $\dim U < \infty$ и $\dim V < \infty$).

• Метод наименьших квадратов: замена системы $a\cdot v = y$ ($a \in \mathrm{Mat}(p,n,\mathbb{R})$ и $\mathrm{rk}(a) = n$) на систему $a\cdot v = \mathrm{proj}_X(y)$, где $X = \{a\cdot v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ (тогда $\exists!\, v \in \mathbb{R}^n \left(a\cdot v = \mathrm{proj}_X(y)\right)$).

Далее V — предгильбертово пространство над $\mathbb{R}$.

• Угол между векторами ($v, w \in V\setminus\{0\}$): $\angle(v,w) = \arccos \frac{(v\,|\,w)}{\|v\|\,\|w\|}$. Угол между вектором и подпространством ($v \in V\setminus\{0\}$, $U \le V$, $U \ne \{0\}$, $\dim U < \infty$): $\angle(v,U) = \arccos \frac{\|\mathrm{proj}_U(v)\|}{\|v\|}$.

Корректность определений углов: $-\|v\|\,\|w\| \le (v\,|\,w) \le \|v\|\,\|w\|$ и $0 \le \|\mathrm{proj}_U(v)\| \le \|v\|$.
Формула для скалярного произведения: $(v\,|\,w) = \|v\|\,\|w\| \cos\angle(v,w)$.
Теорема косинусов: $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\,\|w\|\cos\angle(v,w)$.

• Псевдоевклидово/псевдоунитарное пространство сигнатуры (p,q) — конечномерное вект. простр.-во над $\mathbb{R}$/над $\mathbb{C}$ с невырожд. $^{-}$-симметричн. $^{-}$-билинейн. формой сигнатуры (p,q).

Пусть V — псевдоевклидово/псевдоунитарное пр.-во сигнатуры (p,q) и $e, \widetilde{e} \in \mathrm{OnOB}(V)$; тогда $\sigma_{e,e} = \sigma_{\widetilde{e},\widetilde{e}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_q \end{pmatrix}$ и $(\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e})^{\mathsf{T}}\cdot \begin{pmatrix} \mathrm{id}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_q \end{pmatrix} \cdot \overline{\mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_q \end{pmatrix}$ ($\Rightarrow |\det \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e}| = 1$).

Пусть $K = \mathbb{R}$ и V — псевдоевклидово пространство сигнатуры (p,q) или $K = \mathbb{C}$ и V — псевдоунитарное пространство сигнатуры (p,q), $n = p+q$ и $e \in \mathrm{OnOB}(V)$; тогда $\begin{pmatrix} V \to K^n \\ v \mapsto v^e \end{pmatrix}$ — изоморфизм между $(V, (\,|\,))$ и $\left(K^n, \left((v,w) \mapsto \sum\limits_{1\le i\le p} v^i\,\overline{w^i} - \sum\limits_{p+1\le i\le n} v^i\,\overline{w^i}\right)\right)$ (отметим, что $v^e = \sigma^{e,e}\cdot((\flat v)_e)^{\mathsf{T}} = \left((v\,|\,e_1)\ \ldots\ (v\,|\,e_p)\ \ -(v\,|\,e_{p+1})\ \ldots\ -(v\,|\,e_n)\right)^{\mathsf{T}}$).

§ 9.3 Ориентация, объем, векторное произведение

Далее V — векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $n = \dim V < \infty$.

• Отн.-е одинаковой ориентированности ($e, \widetilde{e} \in \mathrm{OB}(V)$): $e \overset{\mathrm{or}}{\sim} \widetilde{e} \Leftrightarrow \det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} > 0$. Утверждение: $\overset{\mathrm{or}}{\sim}$ — отношение эквивалентности на множ.-ве $\mathrm{OB}(V)$ и, если $V \neq \{0\}$, то $|\mathrm{OB}(V)/\overset{\mathrm{or}}{\sim}| = 2$.

⋆ Рефлексивность: $\det \mathrm{c}_e^e = 1$. Симметричность: $\det \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^e = \frac{1}{\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}}$. Транзитивность: $\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{\widetilde{e}}} =$ $= \det \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{\widetilde{\widetilde{e}}} \cdot \det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}$. Кол.-во классов: $e \in \mathrm{OB}(V)$; тогда $\mathrm{OB}(V)/\overset{\mathrm{or}}{\sim} = \big\{[e]_{\overset{\mathrm{or}}{\sim}}, [(-e_1, e_2, \ldots, e_n)]_{\overset{\mathrm{or}}{\sim}}\big\}$.

Альтернативное опр.-е: $e \overset{\mathrm{or}}{\sim} \widetilde{e} \Leftrightarrow \big(e$ и $\widetilde{e}$ можно соединить непрерывной кривой в $\mathrm{OB}(V)\big)$.

• Ориентация пр.-ва V — выбор эл.-та $\mathrm{OB}_{>0}(V)$ мн.-ва $\mathrm{OB}(V)/\overset{\mathrm{or}}{\sim}$. Знак набора векторов:

$$\operatorname{sign}(v_1, \ldots, v_n) = \begin{cases} 1, & (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{OB}_{>0}(V) \\ -1, & (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{OB}_{<0}(V) \\ 0, & (v_1, \ldots, v_n) \notin \mathrm{OB}(V) \end{cases}.$$

Теор. о знаке базиса и формах объема.

Теорема о знаке базиса и формах объема. Пусть V — векторное простр.-во с ориентацией и $e \in \mathrm{OB}(V)$; тогда для любых $\widetilde{e} \in \mathrm{OB}(V)$ выполнено $\operatorname{sign}(\widetilde{e}) \operatorname{vol}^{\widetilde{e}} = |\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}| \operatorname{sign}(e) \operatorname{vol}^e$, а также мн.-во $\mathrm{VF}_{>0}(V)$, равное $\mathbb{R}_{>0} \operatorname{sign}(e) \operatorname{vol}^e$, не зависит от выбора упорядоч. базиса e.

Доказательство.

По теореме о формах объема $\operatorname{vol}^{\widetilde{e}} = \det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} \operatorname{vol}^e$; кроме того, $\operatorname{sign}(\widetilde{e}) = \operatorname{sign}(\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}) \operatorname{sign}(e)$.
В итоге получаем, что $\operatorname{sign}(\widetilde{e}) \operatorname{vol}^{\widetilde{e}} = \operatorname{sign}(\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}) \det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} \operatorname{sign}(e) \operatorname{vol}^e = |\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}| \operatorname{sign}(e) \operatorname{vol}^e$.
Далее, $\mathbb{R}_{>0} \operatorname{sign}(\widetilde{e}) \operatorname{vol}^{\widetilde{e}} = \{c \,|\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}| \operatorname{sign}(e) \operatorname{vol}^e \mid c \in \mathbb{R}_{>0}\} = \mathbb{R}_{>0} \operatorname{sign}(e) \operatorname{vol}^e$.

Далее V — псевдоевклидово пространство сигнатуры (p, q) с ориентацией и $n = p + q$.

• Каноническая форма объема в V: $\operatorname{vol} = \operatorname{sign}(e) \sqrt{|\det \sigma_{e,e}|} \operatorname{vol}^e$, где $e \in \mathrm{OB}(V)$ (далее доказана незав.-сть от e); если $e \in \mathrm{OnOB}_{>0}(V)$ $(= \mathrm{OnOB}(V) \cap \mathrm{OB}_{>0}(V))$, то $\operatorname{vol} = \operatorname{vol}^e$.

• Корректность определения объема. Объем в координатах ($e \in \mathrm{OB}(V)$): $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sign}(e)\sqrt{|\det \sigma_{e,e}|} \sum\limits_{1 \le j_1, \ldots, j_n \le n} \varepsilon_{j_1, \ldots, j_n} v_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot v_n^{j_n}$. Лемма об объеме и матрице Грама.

$\star$ $\mathrm{sign}(\widetilde{e})\sqrt{|\det \sigma_{\widetilde{e},\widetilde{e}}|}\,\mathrm{vol}^{\widetilde{e}} = |\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}|\,\mathrm{sign}(e)\sqrt{(\det \mathrm{c}_{\widetilde{e}}^{e})^2\,|\det \sigma_{e,e}|}\,\mathrm{vol}^e = \mathrm{sign}(e)\sqrt{|\det \sigma_{e,e}|}\,\mathrm{vol}^e$.

Пусть $e \in \mathrm{OB}(V)$ и $\widehat{e} \in \mathrm{OnOB}(V)$; тогда $\sigma_{e,e} = (\mathrm{c}_e^{\widehat{e}})^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{id}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_q \end{pmatrix} \cdot \mathrm{c}_e^{\widehat{e}}$ и, значит, $\det \sigma_{e,e} = (-1)^q (\det \mathrm{c}_e^{\widehat{e}})^2$, поэтому $\mathrm{sign}(\det \sigma_{e,e})) = (-1)^q$ и $|\det \sigma_{e,e}| = (-1)^q \det \sigma_{e,e}$.

Альтернативное определ.-е объема: $\mathrm{vol} = \mathrm{vol}^e$, где $e \in \mathrm{OnOB}_{>0}(V)$. Корректность: если $e, \widetilde{e} \in \mathrm{OnOB}_{>0}(V)$, то $\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} = 1$ (так как $|\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}}| = 1$ и $\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}} > 0$) и, значит, $\mathrm{vol}^{\widetilde{e}} = \mathrm{vol}^e$.
Следствие из альтернативного определения: пусть $e \in \mathrm{OB}(V)$ и $\widehat{e} \in \mathrm{OnOB}_{>0}(V)$; тогда $\mathrm{vol} = \mathrm{vol}^{\widehat{e}} = \det \mathrm{c}_e^{\widehat{e}}\,\mathrm{vol}^e = \mathrm{sign}(\det \mathrm{c}_e^{\widehat{e}})\,|\det \mathrm{c}_e^{\widehat{e}}|\,\mathrm{vol}^e = \mathrm{sign}(e)\sqrt{|\det \sigma_{e,e}|}\,\mathrm{vol}^e$.

Лемма об объеме и матрице Грама. В сделанных выше предположениях для любых $v_1, \ldots, v_n \in V$ имеем следующие факты:
(1) $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sign}(v_1, \ldots, v_n)\sqrt{|\det \sigma_{(v_1, \ldots, v_n),(v_1, \ldots, v_n)}|}$;
(2) $\forall\, w_1, \ldots, w_n \in V\ \big(\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n) \cdot \mathrm{vol}(w_1, \ldots, w_n) = (-1)^q \det \sigma_{(v_1, \ldots, v_n),(w_1, \ldots, w_n)}\big)$.

Доказательство.
(1) Если векторы $v_1, \ldots, v_n$ зависимы, то требуемая формула верна, так как $0 = 0 \cdot 0$; иначе $e = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{OB}(V)$; в сист. координат, связанной с e, имеем $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sign}(e)\sqrt{|\det \sigma_{e,e}|}\,\mathrm{vol}^e(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sign}(v_1, \ldots, v_n)\sqrt{|\det \sigma_{(v_1, \ldots, v_n),(v_1, \ldots, v_n)}|}$.
(2) Пусть $e \in \mathrm{OB}(V)$; тогда $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n) \cdot \mathrm{vol}(w_1, \ldots, w_n) = |\det \sigma_{e,e}| \det\big(v_1^e\ \ldots\ v_n^e\big) \cdot \det\big(w_1^e\ \ldots\ w_n^e\big) = (-1)^q \det\big(\big(v_1^e\ \ldots\ v_n^e\big)^{\mathsf{T}} \cdot \sigma_{e,e} \cdot \big(w_1^e\ \ldots\ w_n^e\big)\big) = (-1)^q \det \sigma_{(v_1, \ldots, v_n),(w_1, \ldots, w_n)}$.

Из доказанной леммы следует, что в случае попарно ортогональных векторов $v_1, \ldots, v_n$ имеем $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sign}(v_1, \ldots, v_n)\sqrt{|(v_1\,|\,v_1)|} \cdot \ldots \cdot \sqrt{|(v_n\,|\,v_n)|}$.

Далее V — евклидово пространство и $m \in \mathbb{N}_0$.

• Неотрицательный объем в V: $|\mathrm{vol}|_m(v_1, \ldots, v_m) = |\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_m)|$ в $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, если $v_1, \ldots, v_m$ независимы ($|\mathrm{vol}|$ не зависит от ориентации); иначе $|\mathrm{vol}|_m(v_1, \ldots, v_m) = 0$.

• Теорема о неотрицательном объеме в евклидовом пространстве. В сделанных выше предположениях для любых $v_1, \ldots, v_m \in V$ имеем следующие факты:
(1) $|\mathrm{vol}|_m(v_1, \ldots, v_m) = \sqrt{\det \sigma_{(v_1,\ldots,v_m),(v_1,\ldots,v_m)}}$;
(2) если $m \geq 1$ и $\widehat{v}_m = v_m - \mathrm{proj}_{\langle v_1,\ldots,v_{m-1}\rangle}(v_m) = \mathrm{proj}_{\langle v_1,\ldots,v_{m-1}\rangle^\perp}(v_m)$, то $|\mathrm{vol}|_m(v_1, \ldots, v_m) = |\mathrm{vol}|_{m-1}(v_1, \ldots, v_{m-1}) \cdot \|\widehat{v}_m\|$.

Доказательство.
(1) Если векторы $v_1, \ldots, v_m$ зависимы, то требуемая формула верна, так как $0 = 0$; иначе по предыдущей лемме $|\mathrm{vol}|_m(v_1, \ldots, v_m) = |\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_m)| = \sqrt{\det \sigma_{(v_1,\ldots,v_m),(v_1,\ldots,v_m)}}$ ($\sigma_{(v_1,\ldots,v_m),(v_1,\ldots,v_m)} \in \mathrm{SMat}_{>0}(m, \mathbb{R})$, поэтому $\det \sigma_{(v_1,\ldots,v_m),(v_1,\ldots,v_m)} > 0$).
(2) Из леммы об определителе матрицы Грама следует, что $\det \sigma_{(v_1,\ldots,v_m),(v_1,\ldots,v_m)} =$ $= \det \sigma_{(v_1,\ldots,v_{m-1}),(v_1,\ldots,v_{m-1})} \cdot \|\widehat{v}_m\|^2$; извлекая корень, получаем требуемую формулу.

Далее V — псевдоевклидово простр.-во сигнатуры (p, q) с ориентацией и $n = p + q \geq 1$.

• Векторное произведение в V: $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \sharp\big(v_n \mapsto \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n)\big)$; эквивалентное св.-во, определ. вектор $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$: $\forall\, v_n \in V\ \big((v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \,|\, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n)\big)$.

Легко видеть, что $\begin{pmatrix} V^{n-1} \to V \\ (v_1, \ldots, v_{n-1}) \mapsto v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \end{pmatrix}$ — антисимм. полилин. оператор.

• Векторное произведение в координатах ($e \in \mathrm{OB}(V)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$): $(v_1 \times \ldots \times v_{n-1})^i =$ $= \mathrm{sign}(e)\sqrt{|\det \sigma_{e,e}|} \sum\limits_{1 \leq j_1,\ldots,j_n \leq n} \sigma^{i,j_n} \varepsilon_{j_1,\ldots,j_n} v_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot v_{n-1}^{j_{n-1}}$. Теорема о вект. произведении.

$\star$ $(v_1 \times \ldots \times v_{n-1})^i = \sum\limits_{1\le j_n\le n} \sigma^{i,j_n} \big(v_n \mapsto \mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_n)\big)_{j_n} = \sum\limits_{1\le j_n\le n} \sigma^{i,j_n}\,\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_{n-1},e_{j_n}) =$
$= \mathrm{sign}(e)\sqrt{|\det\sigma_{e,e}|} \sum\limits_{1\le j_1,\ldots,j_n\le n} \sigma^{i,j_n}\varepsilon_{j_1,\ldots,j_n} v_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot v_{n-1}^{j_{n-1}}.$

Теорема о векторном произведении. В сделанных выше предположениях для любых $v_1,\ldots,v_{n-1}\in V$ имеем следующие факты:
(1) $v_1\times\ldots\times v_{n-1}\in\langle v_1,\ldots,v_{n-1}\rangle^\perp$ и $v_1\times\ldots\times v_{n-1}\ne 0 \Leftrightarrow \big(v_1,\ldots,v_{n-1}$ независимы$\big)$;
(2) если $q=0$, то $\|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\| = |\mathrm{vol}|_{n-1}(v_1,\ldots,v_{n-1})$ и, если векторы $v_1,\ldots,v_{n-1}$ независимы, то $(v_1,\ldots,v_{n-1},v_1\times\ldots\times v_{n-1})\in\mathrm{OB}_{>0}(V)$;
(3) для любых $w_1,\ldots,w_{n-1}\in V$ выполнено $(v_1\times\ldots\times v_{n-1}\,|\,w_1\times\ldots\times w_{n-1}) =$
$= (-1)^q\det\sigma_{(v_1,\ldots,v_{n-1}),(w_1,\ldots,w_{n-1})}$;
(4) если $n=3$ и $q=0$, то для любых $u,v,w\in V$ выполнено
$(u\times v)\times w = (u\,|\,w)v-(v\,|\,w)u$ и $(u\times v)\times w+(v\times w)\times u+(w\times u)\times v=0$.

Доказательство.
В доказательстве пунктов (1), (2), (3) обозначим $v_n = v_1\times\ldots\times v_{n-1}$.
(1) $\forall\, i\in\{1,\ldots,n-1\}\ \big((v_n\,|\,v_i)=\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_{n-1},v_i)=0\big)$, поэтому $v_n\in\langle v_1,\ldots,v_{n-1}\rangle^\perp$; далее, $v_n\ne 0\Leftrightarrow \exists\, v\in V\ \big(\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_{n-1},v)\ne 0\big)$. Если $\exists\, v\in V\ \big(\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_{n-1},v)\ne 0\big)$, то $v_1,\ldots,v_{n-1}$ независимы (иначе $\forall\, v\in V\ \big(\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_{n-1},v)=0\big)$). Если $v_1,\ldots,v_{n-1}$ независимы, то пусть $v\in V$ и $(v_1,\ldots,v_{n-1},v)\in\mathrm{OB}(V)$; тогда $\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_{n-1},v)\ne 0$.

(2) Если $v_1,\ldots,v_{n-1}$ зависимы, то $\|v_n\| = 0 = |\mathrm{vol}|_{n-1}(v_1,\ldots,v_{n-1})$. Пусть $v_1,\ldots,v_{n-1}$ независимы; тогда $v_n\ne 0$ и по пункту (2) теоремы о неотрицат. объеме в евклид. пр.-ве имеем $\|v_n\|^2 = (v_1\times\ldots\times v_{n-1}\,|\,v_n) = |\mathrm{vol}|_n(v_1,\ldots,v_n) = |\mathrm{vol}|_{n-1}(v_1,\ldots,v_{n-1})\cdot\|v_n\|$ (здесь $\widehat{v}_n = v_n - \mathrm{proj}_{\langle v_1,\ldots,v_{n-1}\rangle}(v_n) = v_n$); сокращая на $\|v_n\|$, получаем, что $\|v_n\| =$
$= |\mathrm{vol}|_{n-1}(v_1,\ldots,v_{n-1})$; кроме того, $\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_n) = \|v_n\|^2 > 0 \Rightarrow (v_1,\ldots,v_n)\in\mathrm{OB}_{>0}(V)$.

(3) Обозначим $w_n = w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ и $s = \sigma_{(v_1,\ldots,v_{n-1}),(w_1,\ldots,w_{n-1})}$. Пусть $(v_n\,|\,w_n) = 0$; докажем, что $s \notin \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$ (значит, требуемая формула верна, так как $0 = (-1)^q \cdot 0$). Если $v_1,\ldots,v_{n-1}$ или $w_1,\ldots,w_{n-1}$ зависимы, то свойство $s \notin \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$ доказывается так же, как в теореме о базисах и невырожд. формах. Если $v_1,\ldots,v_{n-1}$ и $w_1,\ldots,w_{n-1}$ независимы, то $v_n \neq 0$, $w_n \neq 0$ и $w_n \in \langle v_n\rangle^\perp = \langle v_1,\ldots,v_{n-1}\rangle$, поэтому $w_n = c_1 v_1 + \ldots + {}$ $+ c_{n-1}v_{n-1}$, где $\big(c_1 \ \ldots \ c_{n-1}\big) \in \mathbb{R}_{n-1}\setminus\{0\}$, и, значит, $\forall\, j \in \{1,\ldots,n-1\}$ $\big(c_1(v_1\,|\,w_j) + {}$ $+ \ldots + c_{n-1}(v_{n-1}\,|\,w_j) = 0\big)$; итак, $\big(c_1 \ \ldots \ c_{n-1}\big)\cdot s = 0$, поэтому $s \notin \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$.
Пусть $(v_n\,|\,w_n) \neq 0$; по пункту (2) леммы об объеме и матрице Грама имеем $(v_n\,|\,w_n)^2 =$
$= (v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\,|\,w_n)\cdot(w_1 \times \ldots \times w_{n-1}\,|\,v_n) = \mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_{n-1},w_n)\cdot\mathrm{vol}(w_1,\ldots,w_{n-1},v_n) =$
$= (-1)^q \det\sigma_{(v_1,\ldots,v_{n-1},w_n),(w_1,\ldots,w_{n-1},v_n)} = (-1)^q \det\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & (v_n\,|\,w_n)\end{pmatrix} = (-1)^q \det s\,(v_n\,|\,w_n)$;
сокращая на $(v_n\,|\,w_n)$, получаем, что $(v_n\,|\,w_n) = (-1)^q \det s$.
(4) Для любых $x \in V$ выполнено $((u \times v) \times w\,|\,x) = \mathrm{vol}(u \times v, w, x) = \mathrm{vol}(w, x, u \times v) =$
$= (w \times x\,|\,u \times v) = \det\begin{pmatrix} (w|u) & (w|v) \\ (x|u) & (x|v)\end{pmatrix} = (u\,|\,w)(v\,|\,x) - (v\,|\,w)(u\,|\,x) = ((u\,|\,w)v - (v\,|\,w)u\,|\,x)$,
поэтому $\flat((u \times v) \times w) = \flat((u\,|\,w)v - (v\,|\,w)u)$ и, значит, $(u \times v) \times w = (u\,|\,w)v - (v\,|\,w)u$.
Используя доказанную формулу, получаем, что $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v =$
$= ((u\,|\,w)v - (v\,|\,w)u) + ((v\,|\,u)w - (w\,|\,u)v) + ((w\,|\,v)u - (u\,|\,v)w) = 0$.

В физике принят подход к объему и векторному произведению на языке псевдоскаляров и псевдовекторов (без выбора ориентации в V). Обозначим $\frac{\pm}{V}\mathbb{R} = \{c \in \mathrm{Func}(\mathrm{OB}(V),\mathbb{R}) \mid$ $\forall\, e, \widetilde{e} \in \mathrm{OB}(V)$ $\big(c(\widetilde{e}) = \mathrm{sign}(\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}})\, c(e)\big)\}$ и $\frac{\pm}{V} V = \{v \in \mathrm{Func}(\mathrm{OB}(V), V) \mid \forall\, e, \widetilde{e} \in \mathrm{OB}(V)$ $\big(v(\widetilde{e}) = \mathrm{sign}(\det \mathrm{c}_e^{\widetilde{e}})\, v(e)\big)\}$ — простр.-ва псевдоскаляров и псевдовекторов над V соответ.; пусть $v_1,\ldots,v_n \in V$; тогда $\Big(e \mapsto \sqrt{|\det\sigma_{e,e}|} \sum\limits_{1 \le j_1,\ldots,j_n \le n} \varepsilon_{j_1,\ldots,j_n} v_1^{j_1}\cdot \ldots \cdot v_n^{j_n}\Big) \in \frac{\pm}{V}\mathbb{R}$ (это объем)
и $\Big(e \mapsto \sqrt{|\det\sigma_{e,e}|} \sum\limits_{1 \le i,j_1,\ldots,j_n \le n} \sigma^{i,j_n}\varepsilon_{j_1,\ldots,j_n} v_1^{j_1}\cdot \ldots \cdot v_{n-1}^{j_{n-1}} e_i\Big) \in \frac{\pm}{V} V$ (это вект. произвед.-е).