Université de Technologie de Compiègne

Projet TZ : Implémentation et comparaison de plusieurs méthodes d'intégrations numériques
Durée : 4 semaines.
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Descriptif

Il est question dans cette TZ d'une part, de revisiter les méthodes d'intégrations vues dans le cours d'analyse et d'autre part de proposer un algorithme basé sur un code de calcul qui permet de quantifier quelques grandeurs physiques telles que le volume, la masse, le centre de gravité et le moment d'inertie. L'étudiant sera amené à faire ce travail en plusieurs dimensions de l'espace et avec des géométries variées tout en analysant et en comparant les différentes méthodes étudiées (précisant les avantages, les inconvénients, l'efficacité et la rapidité numérique). Il sera aussi amené à valider des lois et des formules physiques (comme la conservation de la masse et flux du rationnel).

Travail demandé

1. **Partie 1 :** Soit f une fonction continue définie d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Méthode de Riemann.
      i. Rappeler toutes les étapes de la méthode de Riemann permettant de calculer numériquement l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$,
      ii. Écrire un algorithme représentant cette méthode
      iii. Écrire un code de calcul illustrant cet algorithme.
      iv. Calculer à l'aide de ce code l'intégrale de la fonction $exp(-x^2)$ sur l'intervalle $[0, b]$ pour $b = 1, 10, 100$.
   (b) Méthode de trapèze.
      i. Rappeler toutes les étapes de la méthode de trapèze permettant de calculer numériquement l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$.
      ii. Préciser les principales différences avec la méthode de Riemann.
      iii. Écrire un algorithme représentant cette méthode
      iv. Écrire un code de calcul illustrant cet algorithme.
      v. Calculer à l'aide de ce code l'intégrale de la fonction $exp(-x^2)$ sur l'intervalle $[0, b]$ pour $b = 1, 10, 100$.
   (c) Méthode de Simpson.
      i. Rappeler toutes les étapes de la méthode de Simpson à l'ordre 2 permettant de calculer numériquement l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$.
      ii. Préciser les principales différences avec les méthodes précédentes.
      iii. Écrire un algorithme représentant cette méthode
      iv. Écrire un code de calcul illustrant cet algorithme.
      v. Calculer à l'aide de ce code l'intégrale de la fonction $exp(-x^2)$ sur l'intervalle $[0, b]$ pour $b = 1, 10, 100$.
      vi. Comparer les trois méthodes utilisées en précisant les avantages et les inconvénients.

2. **Partie 2 :** Soit f une fonction continue définie d'un domaine D de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Intégrale double sur un rectangle.

      i. Rappeler les étapes de la méthode de Riemann lorsque D est un rectangle de la forme $[a, b] \times [c, d]$.

      ii. Écrire un algorithme représentant cette méthode

      iii. Écrire un code de calcul illustrant cet algorithme.

      iv. Calculer à l'aide de ce code l'intégrale de la fonction $exp(-x^2 - y^2)$ sur le carré $[0, b] \times [0, b]$ pour $b = 1, 10, 100$.

   (b) Intégrale sur un disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R.

      i. Calculer l'intégrale de la fonction $exp(-x^2-y^2)$ en utilisant les coordonnées polaires sur le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R.

      ii. En déduire la valeur de l'intégrale de la fonction $exp(-x^2)$ sur $[0, +\infty]$.

      iii. Comparer avec avec le résultats obtenus précédemment.

   (c) Forme de Green-Riemann.

      i. Soit C une courbe d'équation paramétrique $(x(t), y(t))$, $t_1 < t < t_2$. Rappeler la formule de la circulation du champ de vecteur $\vec{V} = (P(x, y), Q(x, y))$ le long de C.

      ii. On suppose que

$$P(x, y) = -\int_0^y exp(-x^2 - s^2)ds \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \int_0^x exp(-t^2 - y^2)dt.$$

      Calculer la concentration de $\vec{V}$ lorsque $x(t) = t$ et $y(t) = t$ pour $0 < t < +\infty$.

      iii. Comparer avec les résultats obtenus précédents en s'appuyant sur le théorème de Green-Riemann