В. Видев, К. Кръстев, М. Иванова

ВИСША МАТЕМАТИКА

първа част

ТРАКИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ-СТАРА ЗАГОРА

ФАКУЛТЕТ ”ТЕХНИКИ И ТЕХНОЛОГИИ”

В. Видев, Кр. Кръстев, М. Иванова

ВИСША МАТЕМАТИКА

първа част

ЯМБОЛ-2013

Анотация. Настоящият учебник, съдържащ цикъл от лекции от лекции и упражнения е предназначен за студентите от Факултет “Техники и технологии” на Тракийски университет, град Стара Загора. Тематичните единици в учебика представят основни сведения от линейната алгебра и аналитичната геометрия. Курсът е съобразен с учебната програма на дисциплината “Математика-I част”, която се преподава на студентите от специалностите “Автоматика, информационна и управляваща техника”, “Електротехника”, “Автотранспортна и земеделска техника”, „Дизайн, технологии и мениджмънт на модната индустрия”, “Технология на храните”, “Топло и газоснабдяване”. Авторите с благодарност ще приемат всички критични препоръки и забележки за подобряване на учебника.

От авторите

СЪДЪРЖАНИЕ

§ 1. Матрици.

Правоъгълна таблица от числа разположени в m реда и n стълба се нарича *числова матрица* от тип $m\times n$. Обикновено матриците се означават с главни латински букви $A,B,C,\ldots,Z$ а техните елементи със съответните малки латински букви. Ако A е произволна матрица от тип $m\times n$, то същата може да се запише във вида

$$(A)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Следователно всеки от елементите на матрицата A притежава два *индекса*, първият от които показва номера на реда, а вторият номера на стълба, на които този елемент принадлежи. При това двойно индексиране означаваме с a_{ij} елементът от матрицата A, който се намира в ред i и стълб j, където $i=1,2,\ldots,m$ и $j=1,2,\ldots,n$. Елементите a_{ij} от матрицата A, за които първият и вторият индекс съвпадат, образуват *главния диагонал* на матрицата A. За произволна матрица A от тип $m\times n$ обикновено се използва означението $A_{m\times n}$ като в общия случай се счита, че числата m и n са различни и тогава матрицата A се нарича *правоъгълна матрица*. Ако всички елементи на матрицата $A_{m\times n}$ са равни на нула, то тази матрица се нарича *нулева матрица от* ***тип*** *$m\times n$*. Ако $m=n$, тогава матрицата A се нарича *квадратна матрица*, като за нея вместо означението $A_{m\times n}$ се използва означението A_n, освен това в този случай числото n се нарича *ред на квадратната матрица*. Когато за една матрица $A_{m\times n}$ числото $m=1$, тогава матрицата $A_{1\times n}$ се нарича *матрица ред*, а когато $n=1$, тогава матрицата $A_{m\times 1}$ се нарича *матрица стълб.* Квадратна матрица, за която всички елементи под или над главния диагонал са равни на нула се нарича *триъгълна матрица*, а ако всички елементи извън главния диагонал са нули, същата се нарича *диагонална матрица*. Диагонална матрица, за която всички елементи по главния диагонал са равни на 1, се нарича *единична матрица*. Единичната матрица от ред n се означава с E_n, като по дефиниция имаме:

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Ако в матрицата A от тип $m\times n$ сменим редовете със стълбове, получаваме нова матрица A', която се нарича *транспонирана матрица* на A и е от тип $n\times m$.

Нека $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ са две еднотипни матрици с елементи a_{ij} и b_{ij}, където $i=1,2,\ldots,m$ и $j=1,2,\ldots,n$. Матриците $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ се наричат *равни*, ако съответните им елементи са равни помежду си, т.е. ако $a_{ij}=b_{ij}$, за всички възможни индекси i,j. *Сума* на матриците $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ с елементи a_{ij} и b_{ij}, се нарича матрица $C_{m\times n}$ от същия тип, с елементи $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, за всички възможни индекси i,j. Означаваме накратко тази матрица с $C=A+B$.

Пример 1. Нека

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & 0-2 & 1+3 \\ 2-1 & 1+2 & -1+1 \\ 3+0 & 0+5 & -2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разлика на матриците $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ с елементи a_{ij} и b_{ij}, се нарича *матрица* $D_{m\times n}$ от същия тип, с елементи $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, за всички възможни индекси i,j. Означаваме накратко тази матрица с $D=A-B$.

Пример 2. Нека

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$A-B=\begin{pmatrix} 1-0 & 2-1 & 3-4 \\ 0-5 & 2-(-1) & -1-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение на реалното число λ с матрицата $A_{m\times n}$ с елементи a_{ij} се нарича *матрица* F с елементи $f_{ij}=\lambda a_{ij}$, за всички възможни индекси i,j. Означаваме накратко тази матрица с $F=\lambda A$.

Пример 3. Нека

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } \lambda=-2.$$

Тогава според дефиницията

$$-2A=\begin{pmatrix} -2.0 & -2.1 \\ -2.(-4) & -2.3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Произведение на матриците $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ с елементи a_{ij} и b_{ij}, се нарича матрица $C_{m\mathrm{x}n}$ от тип $m\times n$, с елементи

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},$$

за всички възможни индекси i,j. Тази матрица означаваме накратко с $C=AB$, а правилото за намирането се нарича "*ред по стълб*". Правилото „*ред по стълб*" за произведение на двете матрици $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ означава, че в матрицата произведение $C_{m\mathrm{x}n}$, елементът c_{ij} се получава като се умножи всеки елемент от реда с номер i със съответния му елемент от стълба с номер j и получените произведения се съберат. В произведението на двете матрици A и B е важно кой множител е ляв и кой множител е десен, като умножението на A и B е възможно, точно когато броя на стълбовете на левия множител е равен на броя на редовете на десния множител. Това означава, че ако произведението на двете матрици A и B е възможно, то произведението на матриците B и A не винаги е възможно, а ако и двете произведения съществуват, то в общия случай те не са равни помежду си матрици. Матрици A и B, за които $AB=BA$, се наричат *нилпотентни матрици.*

Пример 4. Намерете произведението $A.B$, ако:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0\\5&2&1\end{pmatrix}.$$

Решение: Като използваме дефиницията за произведение на две матрици, последователно получаваме:

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.1+2.5&1.3+2.2&1.0+2.1\\0.1+1.5&0.3+1.2&0.0+1.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&7&2\\5&2&1\end{pmatrix}.$$

Пример 5. Намерете произведенията AB и BA, ако:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Според дефиницията за произведение на матрици имаме, че

$$AB = \begin{pmatrix} 2.1+5.0 & 2.3+5.0 \\ 0.1+6.0 & 0.3+6.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1.2+3.0 & 1.5+3.6 \\ 0.0+0.0 & 0.5+0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 23 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В дадения пример се вижда, че $AB \neq BA$. Следователно за действието умножение на матрици не е в сила комутативния закон.

За изброените действия с матрици са в сила следните *свойства*:

1. $A+B=B+A$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $(A+B)C=AC+BC$;
4. $C(A+B)=CA+C$;
5. $(\lambda+m)A=\lambda A+m$;
6. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
7. $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$;
8. $(AB)C=A(BC)$;
9. $AE=EA=A$,

в които A,B,C са произволни матрици, съответно λ и m са произволни реални числа и се предполага че съответните матрични действия са възможни. Ако A е квадратна матрица от ред n, тогава произведението A^n е матрица от ред n, която се получава като матрицата A се умножи сама на себе си n пъти. Матрицата A^n се нарича *n-та степен на матрицата* A.

Задачи

1. Дадени са матриците:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -3 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 0 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}$$

Намерете матриците: *а*) $A+B$; *б*) $2B$; *в*) $3A-B$.

Решение: *а*) Матрицата A е от тип (3×2), матрицата B е също от тип (3×2), следователно събирането може да бъде извършено и получената матрица е от тип (3×2), т.е.

$$A+B=\begin{pmatrix}1+2 & 7+6\\ -3+0 & 2+3\\ 0+4 & -2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 13\\ -3 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix};$$

в) $$3A-B=\begin{pmatrix}3.1 & 3.7\\ 3.(-3) & 3.2\\ 3.0 & 3.(-2)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6\\ 0 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2 & 21-6\\ -9-0 & 6-3\\ 0-4 & -6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 15\\ -9 & 3\\ -4 & -10\end{pmatrix}.$$

Отг. *б*) $\begin{pmatrix}4 & 12\\ 0 & 6\\ 8 & 8\end{pmatrix}$.

2. Дадени са матриците:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Намерете матрицата $C=6A+5B-E$.

Отг. $C=\begin{pmatrix}-8 & 11 & 4\\ 15 & 15 & 7\\ 9 & 17 & 7\end{pmatrix}$.

3. Намерете произведението AB и BA, ако

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}12 & 1 & 7\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение: Матрицата A е от тип (3×2), матрицата B е от тип (2×3), следователно умножението може да бъде извършено и AB е матрица от тип (3×3), т.е.

$$A.B=\begin{pmatrix}2.12+0.5 & 2.1+0.3 & 2.7+0.(-1)\\ 1.12+(-1).5 & 1.1+(-1).3 & 1.7+(-1).(-1)\\ 3.12+(-2).5 & 3.1+(-2).3 & 3.7+(-2).(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 2 & 14\\ 7 & -2 & 8\\ 26 & -3 & 23\end{pmatrix};$$

Матрицата BA е от тип (2×2), т.е.

$$BA=\begin{pmatrix}12 & 1 & 7\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12.2+1.1.+7.3 & 12.0+1.(-1)+7.(-2)\\ 5.2+3.1+(-1).3 & 5.0+3(-1)+(-1).(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46 & -15\\ 10 & -1\end{pmatrix}.$$

Двете произведения не са равни, тъй като са матрици от различен тип.

4. Пресметнете произведенията:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix};$ *б)* $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix};$ *г)* $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 2\end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix};$ *е)* $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Решение: *б*) Първата матрица е от тип (3×2), а втората е квадратна от тип (2×2), следователно умножението може да бъде извършено и получената матрица ще е от тип (3×2), т.е.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -6 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}_{(3\times 2)}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}_{(2\times 2)}=\begin{pmatrix}3.1+(-1).3 & 3.2+(-1).6\\ -6.1+2.3 & (-6).2+2.6\\ (-3).1+1.3 & (-3).2+1.6\end{pmatrix}_{(3\times 2)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{(3\times 2)};$$

в) $$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}_{(3\times 1)}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}_{(1\times 3)}=\begin{pmatrix}1.4 & 1.5 & 1.6\\ 2.4 & 2.5 & 2.6\\ 3.4 & 3.5 & 3.6\end{pmatrix}_{(3\times 3)}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{pmatrix}_{(3\times 3)};$$

г) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}_{(1\times 3)}\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 2\end{pmatrix}_{(3\times 1)}=\begin{pmatrix}1.(-1)+0.4+2.2\end{pmatrix}_{(1\times 1)}=\begin{pmatrix}3\end{pmatrix}_{(1\times 1)};$$

е)

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}_{(1\times 3)}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}_{(3\times 3)}$$

$$=(1.3+(-1).3+0.1,\ 1.1+(-1).1+0.0,\ 1.(-1)+(-1).(-2)+0.1)\ ;$$

$$=(0\quad 0\quad 1)_{(1\times 3)}$$

Отг. *а*) $\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 1 & 13\end{pmatrix}$; *д*) $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 9 & 7\\ 6 & -2\end{pmatrix}$.

5. Дадени са матриците:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Пресметнете произведенията:

а) AB; *б*) BC; *в*) CB; *г*) ABC.

Решение: *а*) Матрицата A е квадратна от тип (2×2), матрицата B е от тип (2×3), следователно умножението може да бъде извършено и AB е матрица от тип (2×3), т.е.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}_{(2\times2)}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}_{(2\times3)}$$

$$=\begin{pmatrix}1.1+2.0 & 1.(-1)+2.2 & 1.1+2.(-1)\\ -1.1-3.0 & -1.(-1)-3.2 & -1.1-3.(-1)\end{pmatrix}_{(2\times3)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ -1 & -5 & 2\end{pmatrix}_{(2\times3)};$$

$$б)\ BC=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}_{(2\times3)}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}_{(3\times2)}$$

$$=\begin{pmatrix}1.(-2)+(-1).3+1.4 & 1.1+(-1).2+1.5\\ 0.(-2)+2.3+(-1).4 & 0.1+2.2+(-1).5\end{pmatrix}_{(2\times2)}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{(2\times2)}$$

Отг. *в*) $CB=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 6 & -1\end{pmatrix}$;

г) $ABC=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -1\end{pmatrix}$.

6. Извършете степенуването:

$a)\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^2;\qquad б)\ \begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3;\qquad в)\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n,\ \mathrm{n}\in \square.$

Решение:

$$a)\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 10\end{pmatrix};$$

$$б)\ \begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -16\\ 0 & 4\end{pmatrix};$$

в) Прилага се методът на математическата индукция. Проверява се верността на твърдението при $n = 2,\ 3$:

(1.1) $$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Хипотезата е, че $n = k \in \mathrm{N}$ е изпълнено, т.е.

(1.2) $$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}0 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Пресмята се

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+k\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

От (1) и от хипотезата (2), изпълнена за произволно $k\in \mathrm{N}$ - следва, че за всяко $n\in \mathrm{N}$ е изпълнено

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

7. Пресметнете матричните изрази(полиноми):

а) A^2+2A+E, ако $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A^2-3A+2E$, ако $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) A^3-A^2+2A, ако $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A^4+A^3+A^2+A$, ако $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$а)\ A^2+2A+E=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -7 & 15 \end{pmatrix}.$$

Отг. *б)* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; *в)* $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *г)* $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. За матриците $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ да се провери, че:

а) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; *б)* $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

9. Дадена е матрицата

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажете, че: *а)* $A^2=A$; *б)* $A^4=A$.

§ 2. Детерминанти .

Детерминанта на квадратна матрица A_2 от втори ред, или накратко *детерминанта от втори ред*, се нарича числото

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Очевидно детерминантата на матрицата A_2 се получава като от произведението на елементите на главния диагонал на матрицата A_2 се извади произведението на елементите от втория диагонал на матрицата A_2. Това правило за пресмятане на детерминанти от втори ред се нарича „*пресмятане на кръст*”.

Пример 1. Пресметнете детерминантата от втори ред:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} .$$

Решение: Като използваме дефиницията за детерминанта от втори ред, получаваме

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5.(-3) - (-2).1 = -15 + 2 = -13 .$$

Детерминанта на квадратна матрица A_3 от трети ред, или накратко *детерминанта от трети ред*, се нарича числото

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}) ,$$

което лесно може да се получи по *правилото на Сарус*. При това правило се съставя матрица от три реда и пет стълба, като вдясно от третия стълб на началната матрица A_3 се дописват първите два стълба:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

след което детерминантата на матрицата A_3 се получава като от сумата от произведенията на тройките елементи по главния диагонал и успоредните му диагонали се извади сумата от произведенията на тройките елементи по втория диагонал и успоредните на него диагонали.

Детерминанта на квадратна матрица A_n от n-ти ред, или накратко детерминанта от n-ти ред, се нарича числото

$$\det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} ,$$

където A_{ij} се нарича *адюнгирано количество* на елемента a_{ij} от матрицата A_n. За адюнгираните количества имаме формулата

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} ,$$

където M_{ij} е детерминанта от ред $n-1$ (*поддетерминанта*), получена от детерминантата на матрицата A_n след зачертаване на ред i и стълб j. Обикновено M_{ij} се нарича *допълнителен минор* на елемента a_{ij} от матрицата A_n. Сумата

$$\det A_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

означава, че детерминантата на матрицата A_n е развита по елементите от ред i на тази матрица, за някое естествено число $i = 1, 2, \ldots, n$ и се нарича развитие на детерминантата на A_n по ред i. Аналогично сумата

$$\det A_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

означава, че детерминантата на матрицата A_n е развита по елементите от стълб k на същата матрица, за някое естествено число $k = 1, 2, \ldots, n$ и се нарича развитие на детерминантата на A_n по стълб k.

Пример 2. Пресметнете детерминантата от четвърти ред

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение: Пресмятаме детерминантата, като използваме разлагане елементите на третия ред:

$$\Delta_4 = 0.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 8 = 10 .$$

Детерминантите от произволен ред притежават следните свойства:

Свойство 1. *Ако една детерминанта има два равни реда, то тя е равна на нула;*

Свойство 2. *Ако една детерминанта има два равни стълба, то тя е равна на нула.*

Свойство 3. *Ако една детерминанта има ред или стълб състоящ се от нули, то тя е равна на нула;*

Свойство 4. *Една детерминанта приема противоположна стойност, ако се разменят местата на два реда или на два стълба от нея;*

Свойство 5. *Ако една детерминантата има два пропорционални реда, то тя е равна на нула;*

Свойство 6. *Ако една детерминантата има два пропорционални стълба, то тя е равна на нула;*

Свойство 7. *Ако даден ред или стълб в една детерминанта се умножи с числото* k, *тогава и стойността на детерминантата се умножава по същото число* k;

Свойство 8. *Ако се разменят местата на редовете и стълбовете в матрицата* A_n, *то детерминантата на новополучената матрица е равна на детерминантата на матрицата* A_n;

Свойство 9. *Всяка детерминанта може да бъде развита по елементите на произволен свой ред или стълб*;

Свойство 10. *Детерминантата на всяка триъгълна матрица е равна на произведението на елементите по главния диагонал*;

Свойство 11. *Детерминантата на всяка диагонална матрица е равна на произведението на елементите по главния диагонал*;

Свойство 12. *Детерминантата на единичната матрица е равна на* 1;

Свойство 13. *Детерминантата на нулевата матрица е равна на* 0;

Свойство 14. *Детерминатата не се променя, ако към елементите на даден ред или стълб прибавим елементите на друг ред или стълб умножен с произволно число*;

Свойство 15. *За детерминатата в която елементите на произволен ред или стълб имат общ множител, този множител може да се изнесе пред детерминантата*;

Свойство 16. *Детермината в която даден ред или стълб е сума на две събираеми се разделя на сума от две детерминанти в които всички редове или стълбове са равни освен дадения, а съответните на този ред редове в сумарните детерминанти се определят от събираемите на които се разделя фиксирания ред или стълб.*

Задачи

1. Намерете следните детерминанти от втори ред:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -2a & -(a+b) \\ a+b & 2b \end{vmatrix}$; *д)* $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}$.

Решение:

$$а)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 2.2 = -3;$$

$$в)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Отг. *б)* 14; *г)* $(a-b)^2$; *д)* $a^2 - b^2$.

2. Решете уравненията:

а) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; *б)* $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Решение: Лявата страна на уравнението е равна на

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = x.2 - 2.1 = 2x - 2.$$

Следователно за уравнението получаваме:

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Отг. *б)* $x = 1$.

3. Намерете детерминантите от трети ред:

$$a)\ \begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&0\\2&0&1\end{vmatrix};\qquad б)\ \begin{vmatrix}5&1&6\\7&6&2\\2&1&-7\end{vmatrix};\qquad в)\ \begin{vmatrix}1&2&3\\-3&4&-1\\2&-1&0\end{vmatrix};$$

$$г)\ \begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&1\\2&3&4\end{vmatrix};\qquad д)\ \begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{vmatrix};\qquad е)\ \begin{vmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha\\0&-\sin\alpha&\cos\alpha\end{vmatrix}.$$

Решение:

$$a)\ \begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&0\\2&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&0\\2&0&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\1&2\\2&0\end{matrix}=1.2.1+0.0.2+2.1.0-2.2.2-1.0.0-0.1.1=-6.$$

$$д)\ \begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{vmatrix}\begin{matrix}x&1\\1&x\\1&1\end{matrix}=x.x.x+1.1.1+1.1.1-1.x.1-x.1.1-1.1.x$$

$$=x^3-3x+2;$$

Отг. *б*) -197; *в*) -21; *г*) -5; *е*) 1.

4. Докажете:

$$a)\ \begin{vmatrix}a&b&a+b\\b&a+b&a\\a+b&a&b\end{vmatrix}=-2(a^3+b^3);$$

$$б)\ \begin{vmatrix}1&1&1\\\sin\alpha&\sin\beta&\sin\gamma\\\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\end{vmatrix}=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha).$$

5. Докажете, че детерминантата

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 & a+5 \\ a+6 & a+7 & a+8 \end{vmatrix}$$

има стойност, която не зависи от a .

Решение:

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 & a+5 \\ a+6 & a+7 & a+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 & a+5 \\ a+6 & a+7 & a+8 \end{vmatrix}\begin{matrix} a & a+1 \\ a+3 & a+4 \\ a+6 & a+7 \end{matrix}$$

$$= a(a+4)(a+8)+(a+1)(a+5)(a+6)+(a+2)(a+3)(a+7)$$

$$-(a+2)(a+4)(a+6)-a(a+5)(a+7)-(a+1)(a+3)(a+8)$$

$$= a(a^2+12a+32)+(a+1)(a^2+11a+30)+(a+2)(a^2+10a+21)$$

$$-(a+2)(a^2+10a+24)-a(a^2+12a+35)-(a+1)(a^2+11a+24)=0$$

6. Решете уравненията:

$$а)\ \begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix}=0; \qquad б)\ \begin{vmatrix} y & 4 & 9 \\ y & y & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0; \qquad в)\ \begin{vmatrix} z^2 & 3 & 3 \\ z & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Решение: *а*) Лявата страна на уравнението е равна на

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix}\begin{matrix} x & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

$$= x.1.x+3.(-2).3+(-1).2.3-(-1).1.3-x.(-2).3-3.2.x$$

$$= x^2-21.$$

Следователно за уравнението получаваме: $x^2-21=0$. Оттук за корени на уравнението намираме $x_{1,2}=\pm\sqrt{21}$.

Отг. *б*) $y_1=3,\ y_2=4;$ *в*) $z_1=-9/5,\ z_2=0.$

7. Намерете детерминантите от четвърти ред:

$$а)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad б)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$в)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad г)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение: *а*) Детерминантата е равна на нула, тъй като първите два реда са пропорционални;

б) Пресмятаме детерминантата, като използваме разлагане елементите на първия ред:

$$\Delta = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Отг. *в*) -1; *г*) -17.

8. Да се разложат на множители с реални коефициенти от първа и втора степен полиномите:

$$а)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 6 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \qquad б)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Отг. *а*) $(x-1)(x+2)(x-3)$; *б*) $(x+1)(x^2+x+1)$.

9. Намерете коефициентите пред x^3 и x^4 във функцията:

$$F(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Отг. -1 и 2 .

10. Намерете детерминантата от $n^{-\text{ти}}$ ред

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Упътване. Използвайте свойство 10.

Отг. $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

11. Докажете, че $A^2=2A$, ако

$$(A)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}.$$

12. Докажете, че $A^2=3A$, ако

$$(A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Докажете, че $C^4=C$, ако

$$(C)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Обратна матрица.

Нека A е квадратна матрица от n-ти ред. Матрицата B, за която са изпълнени равенствата

$$AB = BA = E \tag{3.1}$$

където E е единична матрица от ред n, се нарича *обратна матрица* на A (при условие, че такава матрица съществува). Означава се с A^{-1}. Следователно, по дефиниция

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\,.$$

Теорема 1. *Ако за дадена квадратна матрица съществува обратна матрица, то тя е единствена.*

Доказателство. Нека A е квадратна матрица от n -ти ред, която притежава поне една обратна матрица B. Да допуснем, че матрицата B_1 също е обратна на A. Тогава ще установим, че $B_1 = B$. Съгласно дефиницията за обратна матрица имаме, че

$$AB = BA = E \quad \text{и} \quad AB_1 = B_1A = E\,.$$

Като умножим с B отляво равенството $A.B_1 = E$ и като вземем под внимание останалите равенства, последователно получаваме:

$$B(AB_1)=BE \Rightarrow (BA)B_1=B \Rightarrow EB_1=B \Rightarrow B_1=B\,.$$

С това теоремата е доказана.

Ако детерминантата на квадратната матрица A_n от n -ти ред е различна от нула, тогава матрицата A_n се нарича *неособена* матрица. В противен случай матрицата A_n се нарича *особена* матрица.

Теорема 2. *За всяка неособена матрица* A_n *съществува еднозначно определена матрица* A^{-1}, *която се нарича обратна на матрицата* A *и която се дефинира чрез равенството:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\,,$$

в което $E = E_n$ *е единичната матрица от ред* n . *За обратната матрица* A^{-1} *на матрицата* A_n *е в сила формулата:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

където A_{ij} *е адюнгираното количество на елемента* a_{ij} *от матрицата* A_n .

Доказателство. Нека матрицата A има вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Образуваме матрицата

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. Нека $C = AA^{*}$, тогава за елементите на C имаме:

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ik}A_{kj} \qquad (i = 1,\, 2,\, \dots,\, n)\,.$$

От тук и от свойствата на детерминантите следва, че

$$c_{ii} = \Delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ и } c_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

По такъв начин намираме, че

$$C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{pmatrix} = \Delta.E.$$

Тогава като използваме, че $\Delta \neq 0$, последователно получаваме

$$E = \frac{1}{\Delta} C = \frac{1}{\Delta} A A^* = A(\frac{1}{\Delta} A^*),$$

т.е.

$$A.\left(\frac{1}{\Delta} A^*\right) = E,$$

Аналогично се доказва, че

$$\left(\frac{1}{\Delta} A^*\right).A = E.$$

От последните две равенства следва, че матрицата $\frac{1}{\Delta} A^*$ е обратна на матрицата A.

По такъв начин получаваме, че A притежава обратна матрица A^{-1}, която има вида (3.2), с което теоремата е доказана.

Пример 1. Намерете обратната матрица на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Първо пресмятаме детерминантата на A :

$$\det A = 2.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 .$$

По-нататък намираме адюнгираните количества:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогава въз основа на (3.2) намираме, че

$$A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Накрая ще се спрем върху някои твърдения, свързани с обратната матрица:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $\det A^{-1} = 1/\det A$;
3. 3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Последното равенство установяваме по следния начин. Образуваме произведението $(B^{-1}A^{-1}).(AB)$. Тогава, като използваме дефиницията за обратна матрица, последователно получаваме:

$$(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E\,B = B^{-1}B = E \ .$$

Аналогично се установява, че $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$. Следователно матрицата $B^{-1}A^{-1}$ е обратна на AB.

Задачи

1. Да се намери обратната матрица на A, ако:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix};\qquad б)\ A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix};\qquad в)\ A=\begin{pmatrix}2a & a+b\\ a+b & 2b\end{pmatrix};$$

$$г)\ A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 6 & -2 & 3\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix};\qquad д)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ 2 & 7 & 4\end{pmatrix};\qquad е)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 5 & -4 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix};$$

$$ж)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad з)\ A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad и)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение: *б*) Първо пресмятаме детерминантата на A:

$$\det A=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

След това намираме адюнгираните количества:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\left|\cos\alpha\right| = \cos\alpha\ ,\qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\left|\sin\alpha\right| = -\left|\sin\alpha\right|\ ,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\left|-\sin\alpha\right| = --\sin\alpha\ ,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\left|\cos\alpha\right| = \cos\alpha\quad .$$

Тогава, за обратната матрица намираме

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ж) Пресмятаме детерминантата на A, като използваме разлагане елементите на четръртия ред:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Тогава за адюнгираните количества, получаваме:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{13} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0;\qquad A_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0;\qquad A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

Съответно за обратната матрица A^{-1} имаме:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отг. $a)\ \begin{pmatrix}-5/14&-1/7\\-3/14&-2/7\end{pmatrix};\qquad в)\ \begin{pmatrix}\dfrac{2b}{(a-b)^2}&\dfrac{a+b}{(a-b)^2}\\\dfrac{a+b}{(a-b)^2}&-\dfrac{2a}{(a-b)^2}\end{pmatrix};\qquad г)\ \begin{pmatrix}3&1&-1\\3&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix};$

$$д)\ \begin{pmatrix}23/3&-2&-4/3\\-2/3&0&1/3\\-8/3&1&1/3\end{pmatrix};\quad е)\ \begin{pmatrix}3&1&-1\\3&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix};\qquad з)\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$и)\ \begin{pmatrix}1&-2&4&5\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

§4. Системи линейни уравнения и формули на Крамер за решаването им.

Общият вид на една система от m-линейни уравнения с n-неизвестни в матричен запис е следният:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

В този запис матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

се нарича основна матрица на системата (4.1), стълбът

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

се нарича *стълб от неизвестните* на системата (4.1) и накрая стълбът

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

се нарича *стълб от свободни коефициенти* на системата линейни уравнения (4.1).

По-популярен запис на тази система е следният:

$$\text{(4.5)} \qquad \left| \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots & +a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right. ,$$

като *тук всички уравнения са равноправни.* Под *решение* на системата линейни уравнения (4.5) разбираме всяка наредена n-торка числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, които заместени във всяко едно от уравненията на (4.5), водят до *тъждество.* Система, която има поне едно решение се нарича *съвместима*, в противен случай системата се нарича *несъвместима.* Една система се нарича *определена* ако притежава точно едно решение, в противен случай системата се нарича *неопределена.* Система уравнения в която броят на уравенията е повече от броя на неизвестните се нарича *преопределена* и такива системи няма да разглеждаме. Матрицата

$$\text{(4.6)} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

се нарича *разширена матрица* на системата линейни уравнения (4.1). Матричният запис (4.1) на системата линейни уравнения (4.5) накратко може да се запише по следния начин: $AX = B$. Това уравнение може да се приведе във вида $X = A^{-1}B$ при условие, че $m = n$, $\det A \neq 0$ и A^{-1} е обратната матрица на матрицата A. Въз основа на последното равенство могат да се изведат формулите на Крамер за решаване на системи линейни уравнения и по-точно е в сила следната:

Теорема на Крамер. *Нека основната матрица на системата линейни уравнения*

$$(4.7)\qquad \left| \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots & +a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

има детерминанта различна от нула. Тогава тази система има точно едно решение, което се намира по формулите на Крамер

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

в които Δ *означава детерминантата на основната матрица* A *на системата* (4.7), *а детерминантите* $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ *са детерминанти на матриците, които се получават като в матрицата* A *последователно се заместят първи, втори,.., n-ти стълб със стълба от свободни коефициенти на системата* (4.7).

От формулите на Крамер следва, че ако $\Delta = 0$ и поне една от детерминантите $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ е различна от нула, системата линейни уравнения (4.7) *няма решение,* а ако всички детерминанти $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ са равни на нула, тогава системата (4.7) *притежава безброй много решения.*

Задачи

1. Да се реши по формулите на Крамер системата линейни уравнения:

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =2 \\ 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & =-1 \end{array} \right. .$$

Решение: Съгласно формулите на Крамер имаме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 1 + 4 + 3 - 2 = 2 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 - 2 + 3 - 4 = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 1 - 4 + 3 + 2 = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 1 + 4 + 2 - 1 = 2.$$

$$\Rightarrow\ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1,\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1,\ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1\,.$$

2. Да се решат по формулите на Крамер системите линейни уравнения:

$$а)\ \begin{vmatrix} 3x_1 & + & x_2 & = & 9 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{vmatrix}; \qquad б)\ \begin{vmatrix} 2x_1 & - & x_2 & = & -7 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 11 \end{vmatrix};$$

$$в)\ \begin{vmatrix} 4x_1 & + & 3x_2 & = & -2 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \end{vmatrix}; \qquad г)\ \begin{vmatrix} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -7 \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{vmatrix};$$

$$д)\ \begin{vmatrix} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -10 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{vmatrix}; \qquad е)\ \begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{vmatrix};$$

$$ж)\ \begin{vmatrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{vmatrix}; \qquad з)\ \begin{vmatrix} 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{vmatrix};$$

$$и)\ \begin{vmatrix} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение: $а)$ Съгласно формулите на Крамер имаме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -33; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3; x_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0.$$

$ж)$ Съгласно формулите на Крамер имаме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12;$$

$$\Rightarrow \; x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

и) Съгласно формулите на Крамер имаме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 54 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -108; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 162;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 54; \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -54;$$

$$\Rightarrow \; x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -1.$$

Отг. *б*) $(-2,3)$; *в*) $(1,-2)$; *г*) $(-2,1)$; *д*) $(1,3,-1)$; *е*) $(2,0,-1)$; з) $(2,0,-1)$.

§ 5. Метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения.

Две системи линейни уравнения се наричат *еквивалентни системи линейни уравнения*, ако двете системи са едновременно несъвместими или, ако всяко решение на едната система е решение на другата система (накратко, ако множествата от решенията на двете системи съвпадат).

Една система линейни уравнения може да се преобразува в еквивалентна на нея система, чрез следните *елементарни преобразувания*:

1. *Размяна на местата на две уравнения в системата*;
2. *Умножаване на уравнение от системата с число различно от нула*;
3. *Прибавяне на едно уравнение от системата умножено с число различно от нула към друго уравнение от системата.*

При тези елементарни преобразувания не се променя множеството от решение на произволна система линейни уравнения.

Нека е дадена системата линейни уравнения

$$(5.1)\qquad \left| \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \ldots & +a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

в която броят на уравненията не е равен на броя на неизвестните и нека

$$\overline{A}_{m\times n} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

е разширената матрица на системата която в общия случай е правоъгълна матрица, като в случай че матрицата $\overline{A}_{m\times n}$ е квадратна, тогава тя може да бъде неособена или особена матрица. От индексите определящи типа на разширената матрица на системата следва, че са възможни случаите $m>n$, $m=n$ или $m<n$.

В тези три случая или по-точно в общия случай (5.1) на система линейни уравнения, тази система може да се реши по *метода на Гаус* наречен още *метод на последователните изключвания на неизвестните.* Този метод се прилага за системи линейни уравнения в които няма ограничения за броя на уравненията и броя на неизвестните. Методът или по-точно *алгоритъмът на Гаус* се състои в това, че вървейки от първото към последното уравнение и от първото към последното неизвестно можем да превърнем разширената матрица на системата

$$(5.2)\qquad \overline{A}_{m\times n}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

в триъгълна матрица от вида:

$$\overline{A}_k=\left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n}\dots\tilde{a}_{1m} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n}\dots\tilde{a}_{2m} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn}\dots\tilde{a}_{nm} & \tilde{b}_n \end{array}\right),$$

която може да се получи от матрицата $\overline{A}_{m\times n}$ след k на брой елементарни преобразувания.

По този начин получаваме еквивалентна на началната системата линейни уравнения, която има следната триъгълна форма:

$$(5.3) \qquad \left|\begin{array}{llllll} \tilde{a}_{11}x_1+ & \tilde{a}_{12}x_2+ & \ldots+ & \tilde{a}_{1n}x_n & = & \tilde{b}_1 \\ & \tilde{a}_{22}x_2+ & \ldots & \tilde{a}_{2n}x_n & = & \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & \ldots & \tilde{a}_{nn}x_n & = & \tilde{b}_n \end{array}\right. ,$$

и в която последното уравнение е решено относно неизвестното x_n. Като намерим x_n и заместим в предпоследното уравнение можем да получим x_{n-1} и по този начин вървейки от последното към първото уравнение можем да получим последователно решението $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$. Ако в последното уравнение на системата (5.3) са в сила зависимостите $\tilde{b}_n \neq 0$ и $\tilde{a}_{nn} = 0$, то системата няма решение, а ако $\tilde{b}_n = 0$ и $\tilde{a}_{nn} = 0$, системата има безброй много решения.

Във втория случай решенията на системата зависят от един, два или повече *параметъра* или по-общо системата има безброй много решения които могат да се представят геометрично.

Задачи

1. Да се решат по метода на Гаус системите линейни уравнения:

$$а)\left|\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 7x_3 & = & 6 \end{array}\right.; \qquad б)\left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right.;$$

$$в)\left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.; \qquad г)\left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & -3 \\ 7x_1 & - & 15x_2 & + & 11x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -6 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \end{array}\right.;$$

$$д)\left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 16 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \end{array}\right.; \qquad е)\left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & -7 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 6x_4 & = & -7 \end{array}\right.;$$

$$ж)\left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 14 \\ & & 4x_2 & & & + & 7x_4 & = & 15 \end{array}\right.; \qquad з)\left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}\right.;$$

Решение: *а*) Записваме разширената матрица на системата след размяна на местата на първото и второто уравнение:

$$\overline{A_1} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right),$$

от която след умножение на първия ред с числата –2, -4, -3 и последователното му прибавяне съответно към втория, третия и четвъртия ред, получаваме втората матрица в алгоритъма, която е еквивалентна на първата:

$$\overline{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 3 & -19 & -16 \\ 0 & 13 & -19 & -6 \end{array}\right)$$

От тази матрица след умножение на втория ред с числата –3 и –13 и последователното му прибавяне съответно към третия и четвъртия ред, получаваме третата матрица в алгоритъма на Гаус, която е еквивалентна на първата и втората матрица:

$$\overline{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 98 & 98 \end{array}\right).$$

В последната матрица след деление на третия и четвъртия ред с числата 8 и 98, получаваме четвъртата матрица в алгоритъма:

$$\overline{A}_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Накрая умножаваме третия ред с числото –1 и го прибавяме към четвъртия ред и така получаваме петата и последна матрица в алгоритъма на Гаус:

$$\overline{A}_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

От крайната матрица в алгоритъма на Гаус следва непосредствено системата линейни уравнения:

$$\left|\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 8x_3 & = & 9 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Решавайки тази системата от последното трето, към първото уравнение, получаваме решението на системата:

$$x_1 = 2;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = 1.$$

б) Първоначално съставяме разширената матрица на системата

$$\overline{A}_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

от която след умножение на първия ред с числата –3, -4, -2 и последователното му прибавяне съответно към втория, третия и четвъртия ред получаваме втората матрица в алгоритъма, която е еквивалентна на първата:

$$\overline{A}_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & -7 & -12 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

От тази матрица след умножение на втория ред с числата –2 и 1 и след последователното му прибавяне съответно към третия и четвъртия ред получаваме третата матрица в алгоритъма на Гаус, която е еквивалентна на първата и втората матрица:

$$\overline{A}_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -12 & -6 \end{array}\right).$$

Умножаваме третия ред с числото 5 и го прибавяме към четвъртия ред и така получаваме четвъртата и последна матрица в алгоритъма на Гаус:

$$\overline{A}_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 24 \end{array}\right).$$

От крайната матрица в алгоритъма на Гаус следва непосредствено системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & & +2x_3 & +3x_4 & = 1 \\ & +x_2 & -4x_3 & -10x_4 & = -4 \\ & & +x_3 & +8x_4 & = 6 \\ & & & +28x_4 & = 24 \end{array} \right. .$$

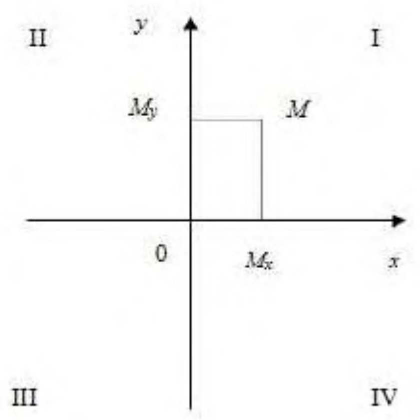
Решавайки тази системата от последното четвърто, към първото уравнение, получаваме решението на системата:

$$x_1 = \frac{1}{7}, \quad x_2 = \frac{8}{7}, \quad x_3 = -\frac{6}{7}, \quad x_4 = \frac{6}{7}.$$

Отг. *в*) $(1,2,-2,3)$; *г*) $(-1,2,3,-2)$; *д*) $(4,0,1,0)$; *е*) $(2,-1,0,-2)$;
ж) $(2,2,0,1)$; *з*) несъвместима.

§ 6. Декартови координатни системи в равнината и пространството.

Координати на точка в равнината се наричат числа, които определят положението на тази точка в равнината. *Правоъгълни или декартови координати* (наречени на името на *Рене Декарт*), съответни на дадена точка в равнината, се въвеждат по следния начин: в тази равнина се избира точка O наречена *начало на координатната система* и две минаващи през точката O взаимно перпендикулярни координатни направления наречени *координатни оси.* За удобство предполагаме, че оста Ox, която обикновено се нарича *абцисна ос* е *хоризонтална* и е насочена отляво надясно. Оста Oy, която обикновено се нарича *ординатна ос*, е *вертикална* и е насочена отдолу нагоре. Освен въвеждането на координатното начало O, по двете взаимно перпендикулярни коодинатни оси Ox и Oy, се избира единица за измерване на разстояния, наречена *мащаб*, която изискваме да е една и съща за двете координатни оси. По този начин в равнината се въвежда декартова координатна система Oxy, с помощта на която с всяка точка M от равнината свързваме *наредена* двойка числа (x_M, y_M) наречени координати на точката M Числото x_M - *абциса* на точката M, а числото y_M - *ордината* на точката M.



Фиг.1

Абцисата x_M е число равно на разстоянието (измерено съгласно въведения мащаб) от кооординатното начало O до ортогоналната проекция на точката M върху ординатната ос, взето със знак плюс или минус в зависимост от това дали точката M е съответно отдясно или отляво на ординатната ос. Ординатата y_M е число равно на разстоянието (измерено обикновено съгласно същия мащаб) от кооординатното начало O до ортогоналната проекция на точката M върху ординатната ос, взето със знак плюс или минус в зависимост от това дали точката M е съответно отдолу или отгоре на абцисната ос. Координатите (x_M, y_M) на точката M от координатната равнина Oxy *напълно* и *еднозначно* определят положението на точката M в равнината Oxy. Това е така, защото *на всяка наредена двойка реални числа* (x_M, y_M) *съответства точно една точка* M *от координатната равнина* Oxy *и обратно за всяка точка* M *от* Oxy *съществува еднозначно определена наредена двойка числа* (x_M, y_M). Координатните оси Ox и

Oy разделят равнината на *четири квадранта*, които можем да номерираме с I, II, III и IV. Тази номерация правим в посока обратна на хода на часовниковата стрелка, като за знаците на точките в съответнита квадранти имаме следната таблица:

Квадрант	I	II	III	IV
X	+	-	-	+
Y	+	+	-	-

Ако означим с φ ъгълът, който отсечката OM сключва с положителната посока на оста Ox и ако r е дължината на тази отсечка, тогава координатите на точка M, лежаща в първи квадрант, се определят чрез системата равенства:

$$x_M = r.\, cos\varphi \qquad (6.1)$$
$$y_M = r.\, sin\varphi$$

Не е трудно да се убедим, че ползвайки формула (6.1) можем да определим координатите на произволна точка от равнината, относно декартовата координатна система Oxy въведена в тази равнина, чрез параметрите r и φ. По този начин знака на абцисата x_M съвпада със знака на косинуса на ъгъла φ, съответно знака на ординатата y_M съвпада със знака на синуса на този ъгъл. Лесно може да се съобрази, че ако една точка лежи на абцисната ос, то нейната ордината е равна на нула и обратно. Съответно, ако дадена точка лежи на ординатната ос, то нейната абциса е равна на нула и обратно.

При решаването на някои задачи е целесъобразно вместо дадена правоъгълна координатна система Oxy да се избере друга правоъгълна координатна система $O'x'y'$, която е разположена по даден начин относно първата координатна система. Тогава може да се говори за *преобразуване* на началната координатна система и естествено възниква въпроса за преход от едната координатна система към другата координатна система. Такъв тип трансформации се наричат *ортогонални трансформации.* Да разгледаме най-напред случая когато осите на двете координатни системи Oxy и $O'x'y'$ са успоредни помежду си и имат еднакви направления, тогава преобразуването на координатната система се нарича *транслация.* Нека началото на новата координатна система O' е точка с координати a, b относно старата координатна система Oxy. Тогава точката M от равнината със стари координати x, y ще има следните координати относно новата координатна система $O'x'y'$:

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Следователно новите координати на точката M са равни на старите □ координати минус координатите на старото координатно начало.

По-нататък нека новата координатна система $O'x'y'$, при неизменно координатно начало точка O, да се завърта на ъгъл α относно старата координатна система Oxy, като ъгълът α се счита за положителен ако се отчита по посока съвпадаща с хода на часовата стрелка и отрицателен в противоположния случай. Тогава новите координати на точката M се изразяват чрез старите и координати по следните трансформационни формули:

$$x' = a + x.cos\alpha - y.sin\alpha \qquad (6.3)$$
$$y' = b + x.sin\alpha + y.cos\alpha ,$$

като в тези формули участват координатите на старото координатно начало O и ъгълът на завъртане α. Преобразуването (6.3) се нарича *ротация,* а ъгълът α се нарича *ротационен ъгъл.*

Нека r е разстоянието от точката $M(x_M, y_M)$ до координатното начало $O(0,0)$ на координатната равнина Oxy. Тогава за разстоянието $r := d(O,M)$ е в сила формулата:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

В общия случай, ако са дадени две произволни точки в равнината $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$,тогава за разстоянието между тези две точки е в сила формулата

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad (6.4)$$

или *разстоянието между две точки в равнината е равно на корен квадратен от сумата на квадратите на разликите от координатите на тези точки.*

Да приемем, че отсечката AB е разделена от точката $C(x_C, y_C)$ на две отсечки AC и CB или накратко AB е разделена в отношение l отчитано от края A на тази отсечка. Тогава е в сила равенството

$$\frac{AC}{CB} = l, \text{ където } \ l \geq 0.$$

Числото l се нарича *просто отношение* на точките ABC взети в този ред. Координатите на тези три точки са свързани помежду си чрез следните формули:

$$(6.5)\qquad x_C = \frac{x_A + l.x_B}{1+l},\quad y_C = \frac{y_A + l.y_B}{1+l},$$

където $l \neq -1$. Когато C е среда на отсечката AB, тогава $l = 1$. От формулите за просто отношение на три точки в равнината, получаваме следната *формула за среда на отсечка в равнината:*

$$(6.6)\qquad x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Простото отношение на три точки в равнината притежава следните свойства:

1. *l=0* $\Leftrightarrow$ *точката* C *съвпада с точката* A*;*

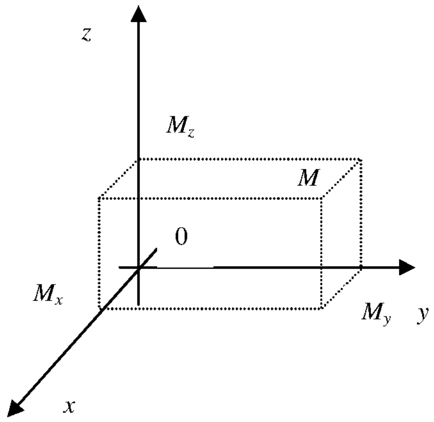
2. *l>0* $\Leftrightarrow$ *точката* C *принадлежи на отсечката* AB*;*

3. *l<0* $\Leftrightarrow$ *точката* C *не принадлежи на отсечката* AB*;*

Накрая ще отбележим, че за лицето на триъгълника ABC в равнината е в сила следната формула:

$$(6.7)\qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Декартова координатна система в пространството се въвежда чрез наредена тройка взаимноперпендикулярни оси, които се пресичат в една точка O, наречена координатно начало.



Фиг. 2

Първата, втората и третата ос се наричат съответно *абсцисна, ординатна* и *апликатна* ос и се означават с Ox, Oy и Oz. Въвежда се отсечка, наречена мащаб, чиято дължина се приема за 1. Така въведената декартова координатна система се означава с $Oxyz$.

Нека M е произволна точка е пространството, като M_x, M_y и M_z са проекциите съответно върху осите Ox, Oy и Oz. Реалните числа x, y и z, дефинирани чрез равенствата $x = \overline{OM_x}$, $y = \overline{OM_y}$, $z=\overline{OM_z}$, се наричат *декартови координати* на M. Фактът, че M има координати x, y и z, се отбелязва с $M(x, y, z)$ или $M(x; y; z)$. Трите координатни оси Ox, Oy и Oz определят три взаимоперпедикулярни равнини, наречени *координатни*. Те разделят пространството на осем части, наречени *октанти*. Знаците на координатите на точките, разположени в различните октанти, са дадени в следната таблица:

Координати	Октанти							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

Нека са дадени точките $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. За разстоянието между тях е в сила следната формула:

(6.8) $$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\,.$$

Координатите x_M, y_M и z_M на точката M, която дели отсечката AB в отношение $\lambda \neq 1$, се определят чрез равенствата

(6.9) $$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Ако M е среда на отсечката AB, то

(6.10) $$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Задачи

1. Постройте в равнината, в която е въведена декартова координатна система Oxy, точките: $A(2;5)$, $B(-1;7)$, $C(-2.5;-3)$ и $D(4;-3)$.

2. Дадени са точките $A(3;5)$, $B(7;-5)$ и $C(2;5)$. Намерете разстоянията $|AB|$, $|BC|$ и $|CA|$.

Решение: Като използваме формула (6.4), намираме разстоянието $|AB|$ между точките A и B:

$$d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (-5-5)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$
.

Аналогично се пресмятат $|BC|$ и $|CA|$.

Отг. $|BC| = 5\sqrt{5}$, $|CA| = 1$.

3. Докажете, че триъгълникът с върхове точките $A(0;5)$, $B(-4\sqrt{3};4)$, $C(-\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2})$ е равностранен.

4. Докажете, че триъгълникът с върхове точките $A(1;0)$, $B(0;1)$ и $C(1;1)$. е равнобедрен.

5. Даден е триъгълникът с върхове точките $A(7;1)$, $B(2;5)$ и $C(2;1)$. Докажете, че триъгълникът е правоъгълен.

Решение: Като използваме формула (7.4), намираме последователно дължините на страните на триъгълника ABC:

$$|AB| = \sqrt{(2-7)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41},$$
$$|BC| = \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4^2} = 4,$$
$$|CA| = \sqrt{(7-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5^2} = 5.$$

Оттук не е трудно да се установи, че $|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2$. Тогава, въз основа на теоремата, обратна на Питагоровата теорема, получаваме, че ъгълът при върха C е прав, т.е. даденият триъгълник е правоъгълен.

6. Върху абсцисната ос намерете точка Q, чието разстояние до точка $P(-5;3)$ е равно на 3.

Решение: Нека координатите на точка Q са x и y. Тъй като Q лежи върху Ox, то $y=0$. По условие $|PQ|=3$. Тогава, като използваме формула (6.4), получаваме за x следното уравнение

$$\sqrt{(x+5)^2+3^2}=3.$$

Решаваме го и намираме, че $x=-5$. Следователно търсената точка Q има координати $(-5,0)$.

7. Намерете точка K, която дели насочената отсечка с начало $A(-3;6)$ и край $B(5;-4)$ в отношение:

$$а)\ \lambda=2;\ \ б)\ \lambda=\frac{1}{2};\ \ в)\ \lambda=1;\ \ г)\ \lambda=-\frac{1}{2}.$$

Решение: *а*) Като използваме формули (6.5), за координатите x_K и y_K на точка K получаваме:

$$x_K=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-3+2.5}{1+2}=\frac{7}{3},$$
$$y_K=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{6+2(-4)}{1+2}=-\frac{2}{3}.$$

Отг. *б*) $K(-\frac{1}{3};2\frac{2}{3})$; *в*) $K(1;1)$; *в*) $K(-11;16)$.

8. Намерете средата M на отсечката с краища $A(6;1)$ и $B(4;-5)$.

Отг. $M(5;-2)$.

9. Да се намерят координатите на точка B, която е симетрична на точка $A(4;-3)$ относна точка $P(2;2)$.

Упътване. Използвайте, че точка P е среда на отсечката AB.

Отг. $B(-2;7)$.

10. Даден е успоредник $ABCD$ като са известни координатите на върховете $A(-3;-1)$, $B(1;-1)$, $C(5;3)$. Да се определят координатите на върха D.

Отг. $D(1;3)$.

11. Дадени са точките $A(-2;1)$ и $B(3;5)$. Точките P и Q делят отсечката AB на три равни части. Намерете координатите на точките P и Q.

Отг. $P(-\frac{1}{3};2\frac{1}{3})$, $Q(1\frac{1}{3};3\frac{2}{3})$.

12. Даден е триъгълник с върхове $A(5;8)$, $B(3;4)$ и $C(-7;2)$. Намерете дължината на медианата му, която минава през върха A.

Решение: Ще припомним, че медиана в триъгълник е отсечка, която съединява връх със средата на срещуположната му страна. Нека E е средата на страната BC. Като използваме формула (6.6), намираме за координатите □:

$$x_E = \frac{3-7}{2} = -2,$$
$$y_E = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Тогава, като приложим формула (6.4), за дължината на медианата AE получаваме:

$$|AE| = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

13. Намерете лицето на триъгълника ABC и височината към страната BC, ако $A(11;25)$, $B(2;3)$ и $C(5;7)$.

Упътване. Използвайте формула (6.7).

Отг. $S=15$, $h=6$.

14. Намерете лицето на четириъгълника с върхове: $A(0;5)$, $B(2;-1)$, $C(-1;-4)$ и $D(-4;3)$.

Отг. $S=26$.

15. Намерете разстоянията между точките:

а) $A_1(9;-3;2)$ и $A_2(1;-2;0)$; *б)* $A_3(7;13;-14)$ и $A_4(9;4;-4)$;

в) $A_5(-2;-5;5)$ и $A_6(-1;-3;2)$.

Решение. *а)* Като използваме формула (6.8), намираме че

$$|A_1A_2|=\sqrt{(1-9)^2+(-2-(-3))^2+(0-2)^2}=\sqrt{8^2+1^2+2^2}=\sqrt{69}.$$

Отг. *б)* $|A_3A_4|=\sqrt{185}$, *в)* $|A_5A_6|=\sqrt{14}$.

16. Докажете, че триъгълникът с върхове $M(5;-13;15)$, $N(5;-8;-10)$ и $P(3;-3;4)$ е равнобедрен.

17. Докажете, че триъгълникът с върхове $A(3;-1;6)$, $B(-1;7;-2)$ и $C(1;-3;2)$ е правоъгълен.

18. Върху ординатната ос намерете точка A, която е равноотдалечена от точките $B(-4;1;7)$ и $C(3;5;-2)$.

Отг. $A(0;-7/2;0)$.

19. В координатната равнина Oxy намерете точка D, която е равноотдалечена от точките $A(1;-1;5)$, $B(3;4;4)$, и $C(4;6;1)$.

Отг. $D(16;-5;0)$.

20. Дадени да точките $M(1;0;-4)$ и $N(1;-2;7)$. Да се намерят координатите на симетричната на:

а) M относно N; *б)* N относно M.

Отг. *а)* $M_1(1;-4;18)$; *б)* $N_2(1;2;-15)$.

21. Намерете точка M, която дели насочената отсечка с начало $A(7;-5;-4)$ и край $B(7;-11;2)$ в отношение $\lambda=\frac{3}{2}$.

Отг. $M(7;-8\frac{3}{5};-\frac{2}{5})$.

22. Дадени са върховете на триъгълника ABC. Да се намерят координатите на средите на този триъгълник и медицентъра му, ако:

а) $A(-3;2;-2)$, $B(-9;12;-6)$ и $C(-7;4;-8)$;
б) $A(-9;2;8)$, $B(-15;5;2)$ и $C(-8;0;6)$;
в) $A(5;-1;-6)$, $B(17;4;-1)$ и $C(9;17;-2)$.

Отг. *а)* $A_1(-8;8;-7)$, $B_1(-5;3;-5)$, $C_1(-6;7;-4)$ и $M(-6\frac{1}{3};6;-5\frac{1}{3})$;
б) $A_1(-11\frac{1}{2};2\frac{1}{2};4)$, $B_1(-8\frac{1}{2};1;7)$, $C_1(-12;3\frac{1}{2};5)$ и $M(-10\frac{2}{3};2\frac{1}{3};5\frac{1}{3})$;
в) $A_1(13;10\frac{1}{2};1\frac{1}{2})$, $B_1(7;8;-4)$, $C_1(11;1\frac{1}{2};-3\frac{1}{2})$ и $M(10\frac{1}{3};6\frac{2}{3};-3)$.

23. Ако $A(5;-1;4)$ и $B(-1;8;-7)$ са два съседни върха на успоредник $ABCD$, а $F(3;-2;-5)$ е пресечната точка на диагоналите му, да се намерят координатите на върховете C и D.

Отг. $C(1;-3;-14)$, $D(7;-12;-3)$.

§ 7. Уравнения на права в равнината.

Нека в равнината е въведена декартова координатна система Oxy. Тогава на всяка права линия l в равнината може да се съпостави уравнение от вида:

$$(7.1) \qquad l:\ Ax+By+C=0,$$

в което неизвестни са x и y, а A, B, C са константи, като поне една от първите две от тях е различна от нула. Това условие записваме по следния начин:

$$A^2+B^2>0.$$

Това уравнение се нарича *общо уравнение* на правата линия *l*.

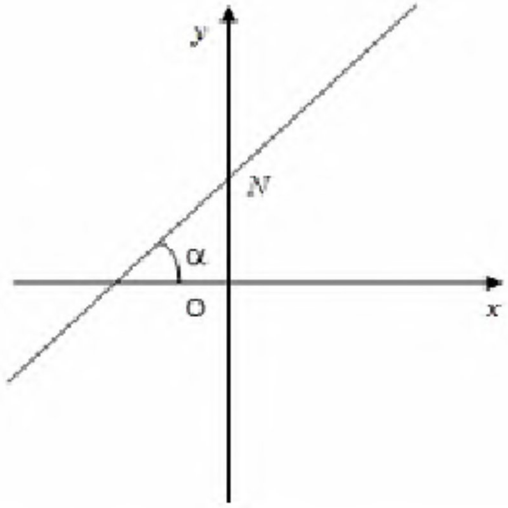
Нека в общото уравнение на правата линия l константата B е различна от нула. Тогава уравнението (7.1) може да се реши относно променливата y и да се представи в следния вид:

$$(7.2) \qquad y=kx+n \qquad ,$$

в който

$$k=-\frac{A}{B}, \qquad n=-\frac{C}{B}.$$

Уравнението (7.2) се нарича *декартово* уравнение на правата l, като в това уравнение коефициентът k е равен на *тангенса на ъгъла*, който правата l сключва с положителната посока на абцисната ос Ox, а коефициентът n е равен на *дължината на отсечката*, която правата l отрязва от ординатната ос Oy:



Фиг. 3

Често се казва, че уравнението (7.2) задава *линейна функция* от вида:

$$y = f(x) = kx + n.$$

Декартовото уравнение на правата линия l може да се запише още по следния начин:

$$(7.3) \qquad y - y_M = k(x - x_M),$$

ако предварително е известен ъгловият коефициент k на правата l и някоя точка $M(x_M, y_M)$ през която правата линия l минава.

Нека $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ са две произволни точки в равнината, тогава уравнението на правата l, минаваща през тези две точки, се задава чрез следната детерминанта от втори ред:

$$(7.4) \qquad l: \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0.$$

От свойствата на детерминантите следва, че последното уравнение може да се запише по следния начин:

(7.5) $$l:\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$$

Нека правата линия l в равнината притежава общо уравнение от вида (7.1) и нека точка $M(x_M, y_M)$ е произволна точка от равнината. Тогава за разстоянието $d(M,l)$ от точката M до правата линия l е в сила формулата:

(7.6) $$d(l,M)=\frac{|A.x_M+B.y_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

От формулите (7.1) и (7.6) става ясно, че ако точката M лежи на правата l тогава $d(l,M)=0$.

Нека l_1 и l_2 са две прави линии в равнината с общи ъглови коефициенти съответно k_1 и k_2. Тогава острият ъгъл φ между двете прави линии удовлетворява равенството

(7.7) $$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1.k_2}\right|.$$

От тази формула следва, че:

1. Правите p_1 и p_2 са успоредни $\Leftrightarrow$ $k_1=k_2$;

2. Правите p_1 и p_2 са взаимноперпендикулярни $\Leftrightarrow$ $k_1k_2=-1$.

Задачи

1. Дадени са точките $A(2;3)$, $B(-1;5)$, $C(-4;7)$ и $D(8;2)$ и права g с уравнение $2x+3y-13=0$. Проверете кои от тези точки лежат на дадената права.

Отг. A, B и C.

2. В декартова координатна система, постройте правите с уравнения:

а) $x+2y-5=0$; *б*) $x-3y=0$; *в*) $2x-1=0$; *г*) $3y-6=0$.

3. Намерете пресечната точка B на правите $p_1: 3x-2y+1=0$ и $p_2: x-y+1=0$

Отг. $B(1;2)$.

4. Определете ъгловият коефициент и отреза, който отсича от ординатната ос всяка от правите с уравнения:

а) $3x-y-7=0$; *б*) $2x-y+3=0$; *в*) $5x+2y-8=0$;
г) $3x+8y+16=0$; *д*) $7x+14y=0$; *е*) $y-3=0$.

Решение: *а*) В общото уравнение на правата $3x-y-7=0$ константите са $A=3,\ B=-1$ и $C=-7$. Тогава, като използваме формули (7.2) намираме

$$k=-\frac{3}{-1}=3 \quad \text{и} \quad n=-\frac{-7}{-1}=7.$$

Отг. *б*) $k=2,\ n=3$; *в*) $k=-2\frac{1}{2},\ n=4$; *г*) $k=-\frac{3}{8},\ n=-2$; *д*) $k=-\frac{1}{2},\ n=0$; *е*) $k=0,\ n=3$.

5. Намерете уравнение на правата, която сключва ъгъл $45°$ с положителната посока на оста Ox и отсича отрез $n=-5$ от оста Oy.

Упътване. Използвайте декартовото уравнение на права и формули (7.2).

Отг. $y=x-5$.

6. Намерете декартово уравнение на права g, която минава през точката $M(-1;-3)$ и сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл φ, равен на:

а) $30°$; *б*) $45°$; *в*) $60°$; *г*) $120°$.

Решение: *а*) Като имаме предвид, че $\varphi = 30°$, за ъгловия коефициент на правата получаваме, че $k = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогава, като използваме уравнението от вида (7.3) на права, минаваща през дадена точка, намираме $y-(-3) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-(-1))$. Оттук не е трудно да се установи, че правата има общо уравнение $\sqrt{3}x - 3y - 9 + \sqrt{3} = 0$.

Отг. *б*) $x - y - 2 = 0$; *в*) $\sqrt{3}x - y - 3 + \sqrt{3} = 0$; *г*) $\sqrt{3}x + y + 3 - \sqrt{3} = 0$.

7. Намерете за коя стойност на параметъра b правата с уравнение $3x + by + 8 = 0$ сключва с положителната посока на Ox ъгъл, равен на $45°$.

Отг. $b = -3$.

8. Намерете декартовото уравнение на правата AB ако:

а) $A(2;-3)$, $B(3;5)$; *б*) $A(-1;-2)$, $B(4;1)$; *в*) $A(-3;0)$, $B(2;4)$;

Упътване. Използвайте уравнението от вида (7.4).

Отг. *а*) AB: $8x - y - 19 = 0$; *б*) AB: $3x - 5y - 7 = 0$; *в*) AB: $4x - 5y + 12 = 0$.

9. Нека е даден триъгълник с върхове $A(-2;3)$, $B(4;5)$ и $C(0;-7)$. Намерете уравненията на страните му.

Отг. $x - 3y + 11 = 0$; $3x - y - 7 = 0$; $5x + y + 7 = 0$.

10. Да се намери ъгълът, който сключва с положителната посока на абсцисната ос правата, минаваща през точките $M(1;4)$ и $N(2;-5)$.

Решение: За търсеният ъгъл α намираме: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-4-(-5)}{1-2} = -1$. Оттук следва, че $\alpha = 135°$.

11. В триъгълник с върхове $A(4;-3)$, $B(0;1)$ и $C(-1;-2)$ намерете уравнение на медианата, която минава през върха B.

Решение: Нека с $M(x_M; y_M)$ означим средата на страната CA. За координатите на M намираме:

$$x_M = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_M = \frac{-3-2}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Тогава, като използваме вида на уравнението (7.4) на права през две точки, получаваме следното уравнение на медианата през върха B:

$$7x + 3y - 3 = 0.$$

12. Намерете общото уравнение на права g, която минава през точката $A(3;2)$ и средата M на отсечката BC, ако $B(2;2)$ и $C(2;0)$.

Отг. $g: x - y - 1 = 0.$

13. Изчислете ъглите на триъгълник, страните на който имат уравнения

$$18x + 6y - 17 = 0,\ 14x - 7y + 15 = 0 \text{ и } 5x + 10y - 9 = 0.$$

Упътване. Използвайте формула (7.7).

Отг. $90°,\ 45°,\ 45°.$

14. Покажете, че правите с уравнения $p_1: 3x - 7y + 9 = 0$ и $p_2: 6x - 14y + 5 = 0$ са успоредни.

15. Намерете уравнение на права p, която минава през точка $M(1;2)$ и е успоредна на правата с уравнение $q: 2x - 3y + 1 = 0$.

Решение: Тъй като p минава през точка M, тя има уравнение:

$$p: \quad y-2=k(x-1),$$

където k е ъгловият коефициент на p. От условието, че правите p и q са успоредни, следва, че $k=k_1$, където k_1 е ъгловият коефициент на q. Като имаме предвид формули (7.2) и общото уравнение на q, получаваме $k_1=\frac{2}{3}$. Тогава $k=\frac{2}{3}$ и уравнението на p придобива вида $y-2=\frac{2}{3}(x-1)$, откъдето лесно намираме общото уравнение на $p: 2x-3y+4=0$.

16. Даден е триъгълник ABC с върхове $A(6;4)$, $B(-3;5)$ и $C(-2;-6)$. Намерете уравнение на права, минаваща през върха A и е успоредна на медианата през върха B.

Отг. $6x+5y-56=0$.

17. Покажете, че правите $p_1: 3x + 2y - 5 = 0$ и $p_2: 4x - 6y + 14 = 0$ са взаимоперпендикулярни.

18. В триъгълник с върхове $A(5;3)$, $B(-3;5)$ и $C(-2;-7)$ намерете уравнение на височината, минаваща през върха A.

Решение: Като използваме формула (7.2), намираме ъгловия коефициент k_1 на правата BC:

$$k_1=\frac{-7-5}{-2-(-3)}=\frac{-12}{1}=-12.$$

Тъй като височината през върха A е перпендикулярна на правата BC, то $k.(-12)=-1$, където k е ъгловия коефициент. Оттук получаваме, че $k=\frac{1}{12}$.

Тогава, като имаме предвид (7.3), намираме

$$y-3=\frac{1}{12}(x-5),$$

откъдето следва, че $p: x-12y+31=0.$

19. Дадена е точка $P(6,-3)$ и права $q: 2x-3y+18=0$. Намерете:

а) ортогонално симетричната точка P' на P спрямо q;

б) симетричната права q' на q спрямо P.

Отг. *а*) $P'(-6,15)$; *б*) $q': 2x-3y-60=0$

20. Намерете уравнение на права, която минава през точка $A(2;3)$ и е перпендикулярна на правата $2x-y+1=0.$

Отг. $x+2y-8=0.$

21. Намерете уравнение на права, минаваща през пресечната точка на правите $x+y-1=0,\ x-y+2=0$ и е перпендикулярна на правата $10x-2y+15=0$.

Отг. $x+5y-7=0.$

22. За триъгълник ABC са известни уравненията на две от страните $AB: x+y-4=0$ и $BC: 2x-y-5=0$ и ортоцентъра $H(0;0)$. Да се намерят:

а) координатите на върховете $A,\ B$ и C;
б) лицето на триъгълника ABC.

Отг. *а*) $A(8;-4),\ B(3;1),\ C(5;5)$; *б*) $S=15.$

23. Дадени са точките $A(1;2)$, $B(3;1)$ и $M(0;5)$. Намерете уравненията на страните на правоъгълника $ABCD$ и дължината на диагонала му, ако точка M е от правата CD.

Отг. $AB: x+2y-5=0,\ BC: 2x-y-5=0,\ CD: x+2y-10=0,\ AD: 2x-y=0,$
$BD=10.$

24. Намерете разстоянието от точката до правата във всеки един от случаите:

а) $A_1(1;-2)$ и $p_1: 3x+4y-15=0;$
б) $A_2(1;-2)$ и $p_2: 5x-12y+7=0;$
в) $A_3(1;8)$ и $p_3: x+5=0.$

Упътване. Използвайте формула (7.6).

Отг. *а)* 4; *б)* $\frac{10}{13}$; *в)*7.

25. Пресметнете разстоянието между успоредните прави:

а) $p_1: 7x+y-2=0$ и $p_2: 7x+y-10=0;$
б) $p_3: 3x+4y+12=0$ и $p_4: 6x+8y+5=0.$

Отг. *а)* $\frac{3\sqrt{2}}{10}$; *б)* $1\frac{9}{10}$.

26. Основите на трапец лежат върху правите $p: 2x+3y-8=0$ и $q: 4x+6y-9=0$. Намерете височината му.

Отг. $\frac{7\sqrt{13}}{26}$.

27. В триъгълник с върхове $A(2;-3)$, $B(5;1)$ и $C(-4;-2)$ намерете дължината на височината му през върха A.

28. *Отг.* $\frac{9\sqrt{10}}{10}$.

§ 8. Векторни пространства, линейни действия с вектори.

Векторно (*линейно*) *пространство* над полето на реалните числа $\Re$ се нарича всяко множество M от елементи за което са дефинирани две операции *събиране* в M и *умножение с реално число* на елементи от M, като се изисква да са в сила следните аксиоми:

Ax 1. *За произволни елементи* $\vec{a},\ \vec{b}\in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\,.$$

Ax 2. *За произволни елементи* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\,.$$

Ax 3. *Съществува нулев елемент* $\vec{0}\in \mathrm{M}$ *такъв, че за всеки елемент* $\vec{a}\in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\,.$$

Ax 4. *За произволен елемент* $\vec{a}\in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}\,.$$

Ax 5. *За произволен елемент* $\vec{a}\in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$1.\vec{a}=\vec{a}\,.$$

Ax 6. *За произволни числа* $\lambda,\ \mu$ *и произволен елемент* $\vec{a}\in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}\,.$$

Ax 7. *За произволни числа* $\lambda,\ \mu$ *и произволен елемент* $\vec{a}\in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})\,.$$

Ах 8. *За произволно число* λ *и произволни елементи* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{M}$ *е в сила равенството*

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Елементите на векторното пространство M се наричат *вектори*, а изброените аксиоми се наричат *аксиоми за векторно пространство*.

От формулираните аксиоми 1 - 8 произтичат редица следствия:

Следствие 1. *Векторите* $\vec{0}$ *и* $\vec{a}$ *са единствени.*

Следствие 2. *За произволен вектор* $\vec{a}$ *имаме:*

$$-(-\vec{a}) = \vec{a}.$$

Следствие 3. *За произволен вектор* $\vec{a}$ *е в сила равенството:*

$$0.\vec{a} = \vec{0}.$$

Следствие 4. *За произволно число* λ *е в сила равенството*

$$\lambda.\vec{0} = \vec{0}.$$

Следствие 5. *За произволен вектор* $\vec{a}$ *е в сила равенството:*

$$(-1).\vec{a} = -\vec{a}.$$

Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се наричат *линейно зависими* ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ поне едно от които не е равно на нула и такива, че

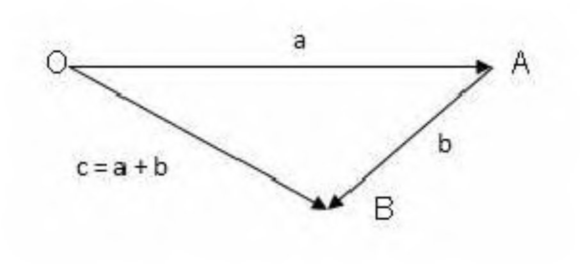
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}.$$

Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се наричат *линейно независими* ако не са линейно зависими. Ако системата вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ е линейно независима, тогава всяка нейна подсистема вектори е линейно независима.

Ако една система вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ съдържа нулевия вектор, тогава тази система винаги е линейно зависима. Ако една подсистема на системата вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ е линейно независима, тогава и цялата система вектори е линейно независима.

Геометричният модел на векторното пространство приема насочените отсечки, за които единият край A е приет за първи а другият край B за втори, за *свързани вектори.* Два ненулеви свързани вектора са равни, ако са еднопосочни и имат една и съща дължина. Съвкупността от всички свързани вектори, които са равни на даден свързан вектор, се нарича *свободен вектор* с представител дадения свързан вектор. За представител на даден свободен вектор може да се вземе кой да е свързан вектор, който принадлежи към него. Свободните вектори се означават с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т.н. Съвкупността от всички нулеви насочени отсечки се нарича *нулев вектор* и се означава с $\vec{o}$. Под дължина на свободен вектор $\vec{a}$ се разбира дължината на произволен негов представител, означава се с $|\vec{a}|$. Два свободни вектора са равни, ако те съвпадат като съвкупности. Обикновено, когато се използват свободни вектори, се има предвид подходящи техни представители.

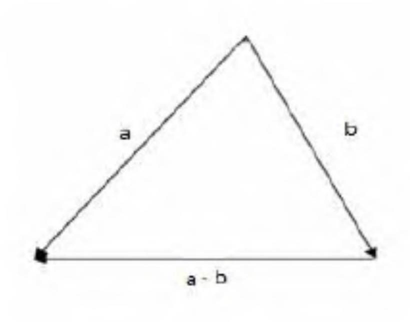
Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два свободни вектора. Под *сума* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се разбира трети вектор $\vec{c}$, който се получава по следния начин: Избираме произволна точка O в пространството и построяваме представител $\overrightarrow{OA}$ на вектора $\vec{a}$. След това от точка A построяваме представител $\overrightarrow{AB}$ на вектора $\vec{b}$:



Фиг.4

Векторът $\vec{c}$ с представител $\overrightarrow{OB}$ се нарича *сума* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Означава се с $\vec{a}+\vec{b}$, т.е. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ (Фиг. 4).

Разлика на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича векторът $\vec{x}$, за който е в сила равенството $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$. Означава се с $\vec{a}-\vec{b}$. Нека представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имат общо начало. Тогава насочената отсечка с начало края на представителя на $\vec{b}$ и край края на представителя на $\vec{a}$ е представител на разликата $\vec{a}-\vec{b}$:



Фиг. 5

Произведение на ненулевия вектор $\vec{a}$ с числото λ $(\lambda \neq 0)$ се нарича вектор $\vec{b}$, който има дължина, равна на $|\lambda|.|\vec{a}|$ и посока, съвпадаща с тази на $\vec{a}$, ако $\lambda > 0$ и противоположна на нея, ако $\lambda < 0$. Означава се с $\lambda\vec{a}$, т.е. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, под произведение се разбира нулевият вектор.

Два ненулеви вектора се наричат *колинеарни*, ако съществуват техни представители, които са успоредни помежду си. Ако единият от два вектора е нулевият, по дефиниция се приема, че те са колинеарни.

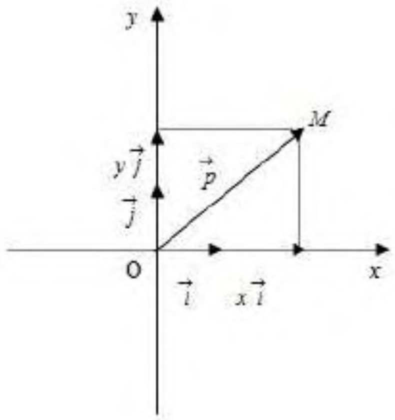
Три ненулеви вектора се наричат *компланарни*, ако съществуват техни представители, които са успоредни на някаква равнина. Ако единият от три вектора е нулевият, по дефиниция се приема, че те са компланарни. В сила са следните твърдения:

1. Необходимо и достатъчно условие два вектора да са линейно зависими е те да са колинеарни;
2. Необходимо и достатъчно условие три вектора да са линейно зависими е те да са колинеарни;
3. Всеки четири вектора в пространството са линейно зависими.

Нека в равнината е въведена декартова координатна система Oxy и нека $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са вектори с дължина равна на единица и еднопосочни съответно с координатните оси Ox и Oy. Тези вектори се наричат *координатни вектори*. За всеки вектор a от равнината е в сила представянето:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}\ ,$$

където x и y са числа. Това представяне е единствено.



Фиг. 6

Числата x и y се наричат *координати* на вектора $\vec{a}$. Фактът, че $\vec{a}$ има координати x и y, се отбелязва с $\vec{a}(x, y)$. Ако $\overrightarrow{OM}$ е представител на $\vec{a}(x, y)$, тогава точка M има координати (x, y).

Нека в пространството е въведена декартова координатна система $Oxyz$ и нека $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ са некомпланарни вектори с дължина равна на единица и еднопосочни съответна с осите Ox, Oy и Oz. Очевидно $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ са некомпланарни вектори, които се наричат *координатни вектори*. За всеки вектор $\vec{a}$ в пространството е в сила представянето

$$a = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,,$$

където x, y и z са числа. Това представяне е единствено. Числата x, y и z се наричат *координати* на вектора $\vec{a}$. Фактът, че $\vec{a}$ има координати x, y и z, се отбелязва с $\vec{a}(x, y, z)$. Ако $\overrightarrow{OM}$ е представител на $\vec{a}(x, y, z)$, то точка M има координати (x, y, z).

Сумата на векторите $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ има координати $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Произведението на числото λ и вектора $\vec{a}(x, y, z)$, има координати $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Ако $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ са две произволни точки, тогава пространственият вектор с представител насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ има координати $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Задачи

1. Докажете, че множеството на всички матрици от тип $m \times n$, с така въведените операции сума на две матрици и умножение на матрица с число, е векторно пространство.

2. Определете размерността на векторното пространство на всички правоъгълни матрици от тип $m \times n$.

3. Докажете, че за всеки два свободни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е в сила неравенството

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

4. Нека M е пресечната точка на диагоналите на успоредника $ABCD$ и нека са дадени векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Да се изразят чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$.

Решение: От определението за сума и разлика на вектори следва $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. От свойството на диагоналите в успоредника, че те взаимно се разполовяват и от определението за произведение на вектор с число, намираме:

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

Следователно $\overrightarrow{MA}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{MB}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\ \overrightarrow{MC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{MD}=-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.

5. Дадени са радиус-векторите r_1, r_2, r_3 на три последователни върха M_1, M_2, M_3 на успоредника $M_1M_2M_3M_4$. Намерете радиус-вектора на четвъртия връх M_4.

Решение: Нека $\vec{r}_4=\overrightarrow{OM}$ е радиус-векторът на четвъртият връх M_4. От дефиницията за сума на вектори следва, че $\vec{r}_4=\vec{r}_1+\overrightarrow{M_1M_4}$. Тъй като $\overrightarrow{M_1M_4}=\overrightarrow{M_2M_3}$, $\overrightarrow{M_2M_3}=\vec{r}_3-\vec{r}_2$, то $\vec{r}_4=\vec{r}_1+\vec{r}_3-\vec{r}_2$.

6. В триъгълник ABC точка G е медицентър. Докажете, че

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}.$$

7. Дадени са четирите точки A, B, C и D, като M, N и L са среди съответно на отсечките AB, CD, и MN. Докажете, че:

а) $\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{LD}=\vec{0}$;

б) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

8. Нека точка L центърът на правилния шестоъгълник $ABCDEF$. Докажете, че $\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{LE}+\overrightarrow{LF}=\vec{0}$

9. В триъгълник ABC е прекарана ъглополовящата AL на ъгъла при върха A. Изразете вектора $\overrightarrow{AL}$ чрез векторите $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$.

Отг. $\overrightarrow{AB}=\frac{|\vec{b}|\vec{c}+|\vec{c}|\vec{b}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$.

10. Дадени са векторите $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(2;1;4)$ и $\vec{c}(-3;4;5)$. Намерете векторите:

а) $3\vec{a}$; *б)* $2\vec{b}$; *в)* $-3\vec{c}$; *г)* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; *д)* $2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$.

Отг. *а)* (3;-6;9); *б)* (4;2;16); *в)* (9;-12;15); *г)* (0;3;12); *д)* (-16;9;14)

11. Дадени са векторите $\vec{a}(1;1;-1)$, $\vec{b}(2;-1;3)$ и $\vec{c}(1;-2;1)$. Да се представи векторът $\vec{d}(12;-9;11)$ като линейна комбинация на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение: Нека $\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$, където λ_1, λ_2, λ_3 са неизвестни коефициенти. Тъй като равните вектори имат равни координати, а координатите на линейната комбинация са равни на съответните линейни комбиации на едноименните координати, то получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} 12=\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 \\ -9=\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3 \\ 11=-\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 \end{array}\right. .$$

След решаването на системата намираме $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ и $\lambda_3=4$. Окончателно намираме, че $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$.

12. Да се представи векторът $\vec{d}(25;-22;16)$ като линейна комбинация на векторите $\vec{a}(5;-2;0)$; $\vec{b}(0;-3;4)$ и $\vec{c}(-6;0;1)$.

Отг. $\vec{d}=5\vec{a}+4\vec{b}+\dfrac{100}{33}\vec{c}$.

13. Дадени са векторите $\vec{a}(2;-1;4)$ и $\vec{b}(-3;2;0)$ спрямо базиса от единични вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Да се намери представянето на векторите:

а) $\vec{a}+\vec{b}$;   *б*) $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Решение: *а*) Спрямо дадения базис векторът $\vec{a}$ има представянето $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, а векторът $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$. Тогава

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}\right)+\left(-3\vec{i}+2\vec{j}\right)=(2-3)\vec{i}+(-1+2)\vec{j}+(4+0)\vec{k}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k},$$

т.е. $\vec{a}+\vec{b}\,(-1;1;4)$. Това е търсеното представяне на вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

б) Като използваме представянета на вектора $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$ и формулите $X_2=\mu X_1,\ Y_2=\mu Y_1,\ Z_2=\mu Z_1$, (изразяващи едно достатъчно условие за колинеарност на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$), получаваме:

$$-\frac{1}{2}\vec{b}=-\frac{1}{2}\left(-3\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}\right)=\frac{3}{2}\vec{i}-\vec{j}\text{, т.е. }-\frac{1}{2}\vec{b}\left(\frac{3}{2};-1;0\right).$$

14. Да се провери колинеарността на векторите $\vec{a}(2;-1;3)$ и $\vec{b}(-6;3;-9)$, зададени спрямо един и същия базис. Да се провери дали те са еднопосочни или противопосочни.

Решение: За да проверим колинеарността на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е достатъчно да се установи, че единият от тях се получава от другия чрез умножаване с подходящо число, например $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. В такъв случай следват равенствата:

$$-6=2\lambda,\ 3=(-1)\lambda,\ -9=3\lambda.$$

От второто уравнение намираме, че $\lambda=-3$. За тази стойност на λ се удоволетворяват и другите уравнения, откъдето следва колинеарността на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тъй като $\lambda<0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са противоположни. Колинеарността на два вектора се проверява по-лесно като се провери дали съответните координати спрямо дадения базис са пропорционални. За случая имаме:

$$\frac{-6}{3}=\frac{3}{-1}=\frac{-9}{3}=-3=\lambda\,.$$

15. Определете при какви стойности на α и β векторите $\vec{a}=-3\vec{i}+4\vec{j}+\alpha\vec{k}$ и $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$ са колинеарни.

Отг. $\alpha=-4/3,\ \beta=-9/2$.

16. Дадени са четири вектора $\vec{a}(2;1;-1)$; $\vec{b}(1;-1;2)$; $\vec{c}(3;-2;1)$ и $\vec{d}(-8;9;-1)$. Представете всеки от тях като линейна комбинация на останалите три вектора.

17. Да се установи дали векторите $\vec{a}(6;4;2)$; $\vec{b}(-9;6;3)$ и $\vec{c}(-3;6;3)$ са линейно зависими. Ако са линейно зависими, да се представи векторът $\vec{c}$ като линейна комбинация на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

18. Докажете, че векторите $\vec{a}(2,0,0)$, $\vec{b}(2,1,0)$ и $\vec{c}(-1,-1,2)$ са линейно независими.

19. Докажете, че точките $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8)$, $C(2;2;-7)$ и $D(5;-4;2)$ са последователни върхове на трапец.

Упътване. Докажете, че векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни.

20. Дадени са точките $A(4;-3;1)$ и $B(5;7;-1)$. Намерете координатите на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Отг. $\overrightarrow{AB}(1;10;-2)$, $\overrightarrow{BA}(-1;-10;2)$.

§ 9. Евклидови векторни пространства, произведения на вектори.

Векторното пространство $\boldsymbol{R}^n$ (удовлетворяващо **Ах.1- Ах.8)** се нарича *евклидово векторно пространство*, ако в това пространство е дефинирано изображение g, което се нарича *скаларно* (*вътрешно*) *произведение* в $\boldsymbol{R}^n$ и което удовлетворява следните пет аксиоми:

Ах 9. *За произволни вектори* $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R}^n$ *имаме, че* $g(\vec{a}, \vec{b}) \in \boldsymbol{R}$.

Ах 10. *За произволен вектор* $\vec{a}$ *е в сила равенството:*

$$g(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0.$$

Ах 11. *За произволни вектори* $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R}^n$ *е в сила равенството*

$$g(\alpha\vec{a}, \vec{b}) = \alpha g(\vec{a}, \vec{b}).$$

Ах 12. *За произволни вектори* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{R}^n$ *е в сила неравенството*:

$$g(\vec{a}, \vec{b}) + g(\vec{a}, \vec{c}) = g(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}).$$

Ах 13. *За произволни вектори* $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R}^n$ *е в сила равенството*

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \vec{a}).$$

Скаларно произведение $\vec{a}.\vec{b}$ на два ненулеви свободни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича произведението от дължините им по косинуса на ъгъла φ, заключен между тях:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\varphi .$$

Ако един от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нулев, по дефиниция се приема, че скаларното им произведение е равно на нула, т.е. $\vec{a}.\vec{b} = 0$. За скаларното произведение са в сила следните закони:

1. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$;

2. $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$;

3. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$, където λ е число.

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви, тогава:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} .$$

Произведението $\vec{a}.\vec{a}$ се нарича *скаларен квадрат* на вектора $\vec{a}$ и се означава с $\vec{a}^2$. От дефиницията за скаларно произведение следва, че

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} .$$

Нека $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ са произволни вектори. Тогава за скаларното произведение е в сила формулата

$$\vec{a}_1.\vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 . \tag{9.1}$$

Дължината на вектора $\vec{a}(x, y, z)$ се пресмята по формулата

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ са ненулеви, то ъгълът между тях се определя чрез зависимостта

$$\cos \sphericalangle (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

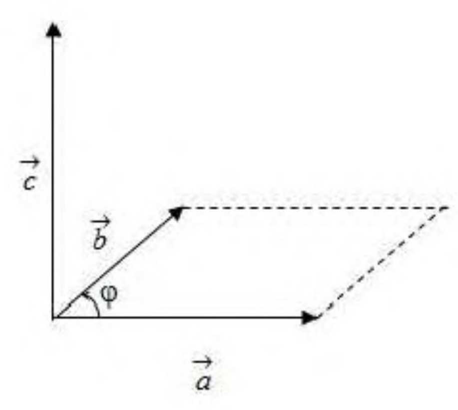
Теорема. Необходимо и достатъчно условие ненулевите вектори $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ да са взаимоперпендикулярни е скаларното им произведение да е равно на нула, т.е. $\vec{a}_1.\vec{a}_2 = 0$, или

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 .$$

Нека тройката некомпланарни вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ имат за общо начало O. Завъртаме вектора $\vec{p}$ около точката O в равнината, определена от векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ по най-късия път, докато посоката му съвпадне с тази на вектора $\vec{q}$. Наблюдаваме това въртене от края на вектора $\vec{r}$. Ако въртенето е в посока, обратна на посоката на въртене на часовниковата стрелка, наредената тройка вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ наричаме *дясна* (*положително*) *ориентирана*, а в противния случай тройката вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ наричаме *лява* (*отрицателно*) ориентирана.

Под *векторно* (*външно*) *произведение* на два неколинеарни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се разбира вектор $\vec{c}$, за който са в сила следните условия:

1. Има дължина, равна на $|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\varphi$, където φ е ъгълът, заключен между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. Перпендикулярен е на всеки от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. Наредената тройка вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ е дясна.



Фиг. 7

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, под *векторно* (*външно*) *произведение* на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се разбира нулевият вектор. Векторното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се означава с $\vec{a}\times\vec{b}$. Според дефиницията на векторно произведение лицето на успоредника определен от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (фиг. 10) е равно на $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Векторното произведение на два свободни вектора притежава следните свойства:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, където λ - число;
3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

За векторното произведение на векторите $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ е в сила следната формула:

$$(9.2)\qquad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=(y_a z_b - y_b z_a)\vec{i}+(x_b z_a - x_a z_b)\vec{j}+(x_a y_b - x_b y_a)\vec{k}$$

(тук $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ са координатните вектори).

Смесено произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ на три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се нарича числото $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$.

Ако векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са некомпланарни, абсолютната стойност на смесеното произведение на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е равна на обема на паралепипеда, построен с помощта на тези вектори.

Необходимо и достатъчно условие векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ да са компланарни е смесеното им произведение да е равно на нула, т.е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Смесеното произведение притежава следните свойства:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$;

2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{c}\vec{a}$;

3. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}$;

Нека са дадени векторите $a\left(x_a,y_a,z_a\right)$, $b\left(x_b,y_b,z_b\right)$ и $c\left(x_c,y_c,z_c\right)$. Тогава за смесеното произведение е в сила формулата:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \tag{9.3}$$

Задачи

1. Да се изчисли скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, сключващи ъгъл φ, във всеки от следните случаи:

а) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,\ \varphi=0$;

б) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$;

в) $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=\sqrt{2},\ \varphi=\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=5,\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Отг. *а*) 10, *б*) 6, *в*) 0, *г*) 15

2. Даден е четириъгълник с върхове точките $A(1;-3;5)$, $B(-2;4;1)$, $C(6;-1;-3)$ и $D(5;6;-8)$. Намерете скаларните произведения:

а) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; *б*) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$; *в*) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BD}$.

Решение: Пресмятаме координатите на векторите: $\overrightarrow{AB}(-3;7;-4)$ и $\overrightarrow{BC}(8;-5;-4)$. Като използваме формула (9.1) за скаларно произведение на два вектора, получаваме:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(-3).8+7.(-5)+(-4).(-4)=-43.$$

Отг. *б*) -23; *в*) -72.

3. Даден е четириъгълник с върхове $A(7;-8;4)$, $B(7;4;-2)$, $C(-5;10;-2)$ и $D(-5;-2;4)$. Да се докаже, че диагоналите му са взаимно перпендикулярни.

Решение: Достатъчно е да намерим координатите на векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, да изразим чрез тях скаларното им произведение и да се убедим, че то е нула. Действително, $\overrightarrow{AC}(-12;18;-6)$, а $\overrightarrow{BD}(-12;-6;6)$. Тъй като

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=(-12)(-12)+18(-6)+(-6)6=0, \text{ то } \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}.$$

4. Да се определи при каква стойност на λ, векторите $\vec{a}=\lambda\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{a}=3\vec{i}+\lambda\vec{j}-4\vec{k}$ са взаимно перпендикулярни.

Решение: Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са съответно с координати $(\lambda;5;4)$ и $(3;\lambda;-4)$. Да изразим тяхното скаларно произведение $\vec{a}.\vec{b}=3\lambda+5\lambda+16=8\lambda+16$. Тези стойности на λ, за които $\vec{a}.\vec{b}=0$, са търсените, т.е. $\lambda=-2$.

5. Намерете дължините на векторите $\vec{m}(3,1,-2)$, $\vec{n}(0,1,-1)$ и $\vec{p}.(-2,3,-6)$.

Решение: Като използваме формулата за дължина на вектор, зададен с координатите си, намираме $|\vec{m}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$.

Отг. $|\vec{n}|=\sqrt{2}$, $|\vec{p}|=7$.

6. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сключват ъгъл $\varphi = \frac{\pi}{6}$, като $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ и $|\vec{b}| = 1$. Да се пресметне косинусът на ъгъла между векторите $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Решение: Според формулата

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{p}.\vec{q}}{|\vec{p}|.|\vec{q}|}, \text{ а}$$

$$|\vec{p}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2}.$$

Аналогично намираме, че $|\vec{q}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 1$. Изчисляваме скаларното произведение

$$\vec{p}.\vec{q} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

7. Намерете вътрешните ъгли на триъгълник с върхове точките $A(1;7;2)$, $B(5;-3;3)$ и $C(12;-1;-5)$.

Отг. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.

8. Дадени са векторите $\vec{a}(4;-2;-4)$ и $\vec{b}(6;-3;2)$. Да се пресметнат:

а) $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right).\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$; *б*) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$; *в*) $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$.

Отг. *а*) -200; *б*) 129; *в*) 41.

9. Дадени са векторите: $\vec{a}(3;1;2)$, $\vec{b}(2;7;4)$ и $\vec{c}(5;-8;10)$. Да се намерят:

а) $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}$; *б*) $\vec{a}^2\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$; *в*) $\vec{a}^2.\vec{b} + \vec{b}^2.\vec{c} + \vec{c}^2.\vec{a}$.

Отг. *а*) $(21;42;21)$; *б*) 280; *в*) $(115;242;137)$.

10. Дадени са векторите $\vec{a}(5;-7;-2)$ и $\vec{b}(1;0;-6)$. Намерете координатите на векторното произведение $\vec{a}\times\vec{b}$.

Решение: Като използваме формула (9.2), получаваме

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}=42\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}+30\vec{j}=42\vec{i}+28\vec{j}+7\vec{k}.$$

Следователно координатите на $\vec{a}\times\vec{b}$ са $(42,28,7)$.

11. Дадени са точките $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ и $C(3;2;1)$. Намерете координатите на векторното произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB}$.

Отг. $(-6;4;6)$.

12. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сключват ъгъл $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, като $|\vec{a}|=6$ и $|\vec{b}|=5$. Да се пресметне $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Отг. $|\vec{a}\times\vec{b}|=15$.

13. Дадени са $|\vec{a}|=3;$ $|\vec{b}|=26$ и $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. Да се пресметне $\vec{a}.\vec{b}$.

Отг. $\vec{a}.\vec{b}=\pm 30$.

14. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са взаимно перпендикулярни, като $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=4$. Да се пресметнат:

а) $\left|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\right|$; *б*) $\left|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})\right|$.

Отг. *а*) 24; *б*) 60.

15. Намерете лицето на триъгълника с върхове точките $A(7;0;3)$, $B(-2;1;5)$ и $C(3;-4;0)$.

Решение: От дефиницията на векторното произведение следва, че $S_{ABC} = \frac{1}{2} | \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} |$. Като използваме, че са дадени координатите на върховете на триъгълника, намираме, че $\overrightarrow{AB}(-2-7,\, 1-0,\, 5-3)$ и $\overrightarrow{AC}(3-7,\, -4-0,\, 0-3)$, т.е. $\overrightarrow{AB}(-9,\, 1,\, 2)$ и $\overrightarrow{AC}(-4, -4, -3)$. По-нататък получаваме, че

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -9 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 35\vec{j} + 40\vec{k}\,.$$

Тогава $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-35)^2 + 40^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2850}.$

16. Изчислете лицето на успоредника, три последователни върха на който се намират в точките $A(7;-5;6)$, $B(9;-4;8)$ и $C(6;0;6)$.

Упътване. Използвайте, че лицето на успоредник е $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

Отг. 15

17. Даден е триъгълник с върхове точките $A(3;-4;5)$, $B(5;-3;7)$ и $C(6;-8;7)$. Намерете дължината на височината, спусната от върха C към страната AB.

18. Да се изчисли синусът на ъгъла, заключен между векторите $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$.

Решение: От формулата $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\varphi$ определяме

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|},$$

където φ е ъгълът, заключен между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пресмятаме

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}=6,\quad |\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7,$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & -4\\ 3 & -2 & -6\end{vmatrix}=4\vec{i}+12\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+12^2+(-2)^2}=\sqrt{164}$$

Тогава $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{164}}{6.7}=\dfrac{\sqrt{41}}{21}$.

19. За векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са дадени $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$ и $\vec{a}.\vec{b}=12$. Да се пресметне $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Решение: Намираме $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{3}{5}$, откъдето $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\dfrac{4}{5}$ и

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\varphi=10.2.\frac{4}{5}=40.$$

20. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сключват ъгъл $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, като $|\vec{a}|=1$ и $|\vec{b}|=2$. Да се пресметне: *а*) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$; *б*) $\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right|^2$.

Отг. *а*) 3;*б*) 27.

21. Дадени са векторите $\vec{a}(1;-1;3)$, $\vec{b}(-2;2;1)$ и $\vec{c}(3;-2;5)$. Намерете смесеното произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Отг. -7 .

22. Да се докаже, че точките $A(-1;2;1)$, $B(-3;1;2)$, $C(3,-2;2)$ и $D(3;-4;3)$ лежат в една равнина.

Решение: Да разгледаме например трите вектора с общо начало точката A и краища съответно точките B, C и D: $\overrightarrow{AB}(-2;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}(4;-4;1)$, $\overrightarrow{AD}(4;-6;2)$. По формулата за смесеното произведение установяваме, че $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=0$. Тъй като е изпълнено условието $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, то векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ са компланарни. Следователно точките A, B, C и D лежат в една равнина.

23. Пресметнете обема на триъгълна пирамида с върхове $A_1(3;0;2)$, $A_2(-1;2;-4)$, $A_3(0;-5;-2)$ и $A_4(1;1;1)$.

Решение: Обемът на дадена триъгълна пирамида ще намерим, като използваме следната формула $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}.\overrightarrow{A_1A_3}.\overrightarrow{A_1A_4}\right|$. В началото намираме координатите на векторите, които участват в тази формула, а именно:

$$\overrightarrow{A_1A_2}(-1-3,2-0,-4-2) \text{ или } \overrightarrow{A_1A_2}(-4;2;-6);$$
$$\overrightarrow{A_1A_3}(0-3,-5-0,-2-2) \text{ или } \overrightarrow{A_1A_3}(-3;-5;-4);$$
$$\overrightarrow{A_1A_4}(1-3,1-0,1-2) \text{ или } \overrightarrow{A_1A_4}(-2;1;-1).$$

Като използваме формулата за изразяване на смесеното произведение чрез координатите на участващите в него вектори, получаваме

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-4 & 2 & -6\\ -3 & -5 & -4\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|52|=\frac{26}{3}.$$

24. Дадени са върховете на триъгълна пирамида: $A(-4;-5;8)$, $B(3;2;1)$, $C(1;4;-2)$ и $D(3;6;7)$. Намерете дължината на височината □ спусната от върха D.

Отг. 11.

25. Построен е паралелепипед върху векторите $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Да се намерят:

а) Обемът V на паралелепипеда;

б) Лицето S на стената, образувана от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

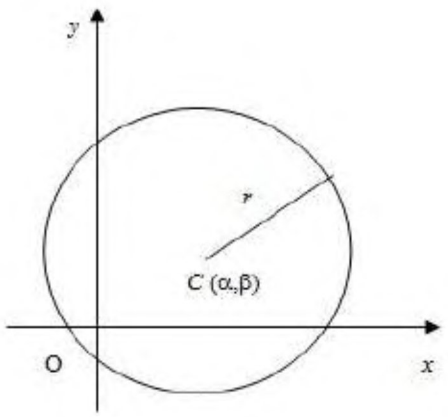
в) Височината h към същата стена.

Отг. *а*) 15; *б*) 5; *в*) 3.

§ 10. Уравнения на окръжност и елипса

10.1. Окръжност

Окръжността е множество от точки в една равнина, които са равноотдалечени от дадена точка C в същата равнина, наречена *център*.



Фиг. 10.1

Разстоянието от центъра на окръжността до коя да е точка от нея се нарича *радиус*. Ако в равнината е въведена декартова координатна система Oxy, и е дадена окръжност k с радиус r и център $C(\alpha,\beta)$ (фиг.10.1), тогава k има общо уравнение:

(10.1) $$k: (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 .$$

В частност, ако C съвпада с координатното начало O, т.е. $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, уравнение (10.1) придобива вида

$$k: x^2 + y^2 = r^2$$

и се нарича *централно уравнение* на окръжност.

Общото уравнение от втора степен с две променливи

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

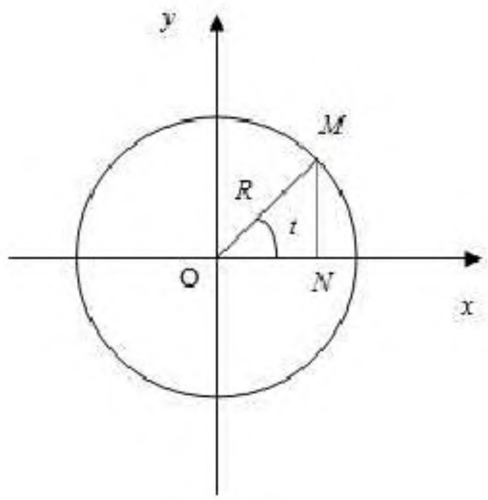
(a, b, c, d, e, f - константи) определя окръжност, ако са в сила следните условия:

(10.2) $$a = b \neq 0, \quad c = 0 \quad \text{и} \quad d^2 + e^2 - 4af > 0\,.$$

В този случай координатите α и β са центъра и радиусът r на окръжността се определя чрез формулите:

(10.3) $$\alpha = -\frac{d}{2a}, \qquad \beta = -\frac{e}{2a}, \qquad r = \sqrt{\frac{d^2 + e^2 - 4af}{4a^2}}\,.$$

Окръжността с център $C(\alpha, \beta)$ и радиус r $(r > 0)$ има следното параметрично представяне:



Фиг. 9

$$\begin{aligned} x &= \alpha + r\cos t, \\ y &= \beta + r\sin t, \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Ако $T(x_0, y_0)$ е точка от окръжността с уравнение (10.1), допирателната към окръжността в тази точка има уравнение

(10.4) $$(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=r^2.$$

Задачи

1. Намерете уравнение на окръжност, ако:

а) центърът й е точката $C(2;-5)$, а радиусът е равен на 4;

б) центърът й е точката $D(-2;3)$ и тя минава през точка $A(7;4)$;

в) точките $M(5;3)$ и $N(3;-7)$ са краища на един от диаметрите й.

Решение: *а*) Използвайки формула (10.1) при $\alpha=2, \beta=-5$ и $r=4$ получаваме $(x-2)^2+(y-(-5))^2=4^2$ или $(x-2)^2+(y+5)^2=16$.

Отг. *б*) $(x+2)^2+(y-3)^2=82$; *в*) $(x-4)^2+(y+2)^2=26$.

2. Да се напише уравнение на окръжност, минаваща през началото на координатната система и с център точката $C(7;5)$.

Решение: Радиуса на окръжността намираме като използваме разстоянието между точка C и координатното начало: $r=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$. Тогава уравнението на окръжността е $(x-7)^2+(y+5)^2=16$.

3. Да се напише уравнение на окръжност, която се допира до правата $4x-3y-40=0$ и центърът й е координатното начало.

Решение: Радиусът на окръжност намираме като разстояние от центъра $O(0;0)$ до дадената права: $r=\left|\frac{4-3.0-40}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=8$. Уравнението на окръжността е $x^2+y^2=64$.

4. Намерете уравнение на окръжността, която има за център точка $C(1;2)$ и се допира до правата $3x+4y-10=0$.

Упътване. Използвайте, че радиусът, който съединява центъра на окръжността с точката на допиране, е перпендикулярен на дадената права.

Отг. $(x-1)^2+(y-2)^2=0,04$.

5. Намерете уравнение на окръжността, която минава през точките $C(3;1)$ и $C(-1;3)$ а центърът й лежи на правата p с уравнение $3x-y-3=0$.

Решение: Нека $M(x_M;y_M)$ е средата на отсечката AB. Тогава

$$x_M=\frac{3-1}{2}=1 \text{ и } y_M=\frac{1+3}{2}=2.$$

Центърът $C(\alpha;\beta)$ на окръжността лежи на правата p, която минава през точката M и е перпендикулярна на правата q, минаваща през A и B. Правата p има уравнение $y-2=k(x-1)$. Тъй като p е перпендикулярна на q, то $kk_1=-1$, където k_1 е ъгловият коефициент на q. Понеже $k_1=\frac{3-1}{-1-1}=-1$, тогава $k=1$ и правата p има уравнение $y-2=1.(x-1)$ или $x-y+1=0$. Като използваме, че C лежи на p и на дадената права, получаваме, че α и β трябва да удовлетворяват системата

$$\left|\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ 3x-y-3=0. \end{array}\right.$$

Решенията на тази система са $x=2$ и $y=5$, т.е. $\alpha=2$ и $\beta=5$. Радиусът на окръжността е равен на

$$|CA|=\sqrt{(3-2)^2+(1-5)^2}=\sqrt{17},$$

а самата окръжност има уравнение

$$(x-2)^2+(y-5)^2=17 .$$

6. Да се намери уравнението на окръжност, която минава през точките $A(2;3)$ и $B(5;2)$, а центърът й е върху абсцисната ос.

Упътване. Използвайте, че радиусът $C(\alpha;0)$ лежи на симетралата на отсечката AB.

Отг. $\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{85}{9}$.

7. Намерете уравнение на окръжността, която минава през точките $A(-1;5)$, $B(-2;-2)$ и $C(5;5)$.

Упътване. Използвайте, че центърът на окръжността е пресечната точка на симетралите на две от отсечките AB, BC и CA.

Отг. $(x-2)^2+(y-1)^2=25.$

8. Страните на триъгълник ABC лежат върху правите с уравнения $x=2,\ x+y+3=0$ и $x+2y+4=0$. Намерете уравнение на окръжността, която е описана около триъгълника ABC.

Отг. $(x+1)^2+(y+4)^2=10.$

9. Намерете уравнение на окръжност, която се допира до абсцисната ос, има радиус равен на 1 и центърът й лежи на правата с уравнение $x+y+2=0$.

Отг. $(x+3)^2+(y-1)^2=1$; $(x+1)^2+(y+1)^2=1$.

10. Намерете уравнение на окръжност, която минава през точка $A(2;1)$ и се допира до успоредните прави $p:\ 2x+y-5=0$ и $q:\ 2x+y+15=0$.

Упътване. Използвайте, че центърът на окръжността лежи на правата, равноотдалечена от p и q.

Отг. $(x+2)^2+(y+1)^2=20$.

11. Да се определи кои от следните уравнения задават окръжности и на тези окръжности да се намерят центровете и радиусите :

а) $x^2+y^2=-1$; *б)* $x^2+y^2-2x-4y-20=0$; *в)* $x^2+y^2-8y=0$.

Отг. *а)* не е окръжност; *б)* $C(1;2)$, $r=5$; *в)* $C(0;4)$, $r=4$.

12. Намерете уравнение на правата, която минава през центровете на двете окружности с уравнения $x^2+y^2-6y=0$ и $x^2+y^2+4x-2y+4=0$.

Отг. $x-y+3=0$.

13. Определете как е разположена точка $A(1;2)$ спрямо всяка от следните окръжности:

а) $x^2+y^2=3$; *б)* $(x-1)^2+(y-3)^2=5$; *в)* $(x-2)^2+(y-8)^2=37$.

Отг. *а)* вън от окръжността; *б)* вътре в окръбността; *в)* лежи на окръжността.

14. Намерете пресечната точка на всяка от окръжностите :

а) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; *б*) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$; *в*) $x^2+y^2-4x+4y=0$

с координатните оси.

Отг. *а*) абсцисната ос пресича окръжността в точките $(0;0)$ и $(8;0)$; ординатната ос пресича окръжността в точките $(0;0)$ и $(0;-6)$; *б*) окръжността се допира до абсцисната ос в точките $(3;0)$ и пресича ординатната ос в точките $(0;9)$ и $(0;1)$; *в*) окръжността се допира до абсцисната ос в точка $(2;0)$ и се допира до ординатната ос в точка $(0;-2)$.

15. Определете взаимното положение на правата и окръжността, ако те имат съответно уравнения:

а) $2x-y+3=0$ и $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;
б) $2x+y-3=0$ и $x^2+y^2=2$;
в) $x-y-1=0$ и $(x-4)^2+(y-1)^2=5$.

Отг. *а*) пресичат се; *б*) нямат общи точки; *в*) правата се допира до окръжността.

16. Намерете уравнения на допирателните към окръжността $x^2+y^2=5$, които са успоредни на правата $2x-y+7=0$.

Отг. $2x-y\pm5=0$.

17. През координатното начало са прекарани допирателни към окръжността с уравнение $(x-4)^2+y^2=8$. Намерете декартовите им уравнения.

Отг. $y=\pm x$.

18. Намерете уравнение на допирателната към:

а) окръжността $x^2 + y^2 = 25$ в точка $A(-3;4)$;

б) окръжността $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 34$ в точка $B(5;-2)$.

Упътване: Използвайте формула (11.4).

Отг. *а*) $3x - 4y + 25 = 0$; *б*) $3x - 5y - 25 = 0$.

19. Намерете координатите на пресечните точки на окръжностите с уравнения $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ и $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Отг. $M(0;1)$ и $N(2/5;1/5)$.

20. Намерете уравнение на правата, която минава през пресечните точки на окръжностите с уравнения $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ и $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 20$.

Отг. $3x + 2y - 16 = 0$.

21. Намерете параметрични уравнения на окръжността

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 .$$

Отг. $x = 2 + 5\cos t$, $y = 1 + 5\sin t$.

22. Да се напише уравнение на окръжност, която се допира до абсцисната ос в точката $M(5;0)$ и отсича от ординатната ос хорда с дължина 10.

Отг. $(x-5)^2 + \left(y \pm 5\sqrt{2}\right)^2 = 50$.

23. Да се намери центърът на окръжност с радиус $r = 50$, ако окръжността отсича от абсцисната ос хорда с дължина 28 и минава през точка $M(0;8)$.

Отг. $\alpha = 30$; $\beta = 48$ или $\alpha = -30$; $\beta = 48$.

24. През точка $A(6;-8)$ са прекарани допирателни към окръжността $x^2+y^2=25$. Намерете разстоянието от точка A до хордата, която цъединява допирните точки.

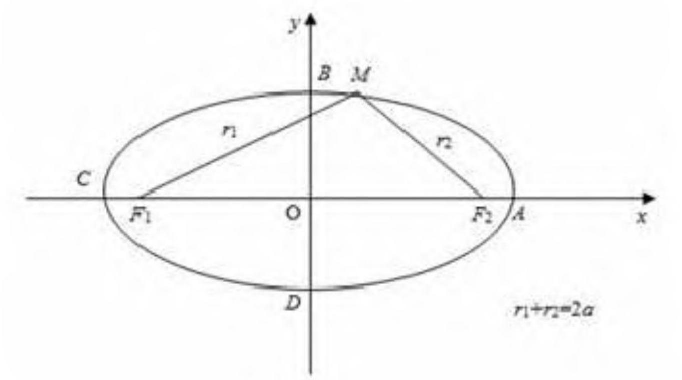
Отг. $7{,}5$.

25. Намерете уравнението на общата хорда на окръжностите $x^2+y^2=10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

Отг. $x+y-4=0$.

10.2. Елипса

Елипса се нарича множеството от точки в равнината, за всяка от които сумата от разстоянията й до две дадени точки от равнината е постоянна величина. Дадените две точки се наричат фокуси на елипсата. Обикновено се означават с F_1 и F_2, като $|F_1F_2| = 2c$. Постоянната величина се означава с $2a$ $(a > c)$.



Фиг. 10

Нека е дадена елипса, чиито фокуси F_1 и F_2 лежат на абсцисната ос и са симетрични относно координатното начало. Тогава тази елипса има уравнение от вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \tag{10.5}$$

където $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (очевидно $a > b$). Това уравнение се нарича *канонично* уравнение на елипсата. При това разположение на елипсата спрямо координатната система координатните оси са оси на симетрия на елипсата. Точките A, B, C, и D (виж фиг.10), в които тя пресича осите на симетрия, се наричат *върхове* на елипсата. $2a$ и $2b$ се наричат *голяма* и *малка ас*, а a и b - *голяма малка полуос* на елипсата. Величината $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ се нарича *ексцентрицитет* $(0 < \varepsilon < 1)$.

Взаимното разположение на точка $M\left(x_1, y_1\right)$ и елипсата с уравнение (10.5) се определя от следните условия:

1. ако $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} < 1$, точката M лежи във вътрешността на елипсата;

2. ако $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$, точката M лежи върху елипсата;

3. ако $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} > 1$, точката M лежи вън от елипсата.

Допирателната към елипсата с уравнение (10.5) в точка $T(x_0, y_0)$ от нея има уравнение от вида:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Разглежданата по-горе елипса има параметрични уравнения:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \qquad (0 \le t < 2\pi) \\ y &= b\sin t. \end{aligned}$$

Задачи

1. Намерете уравнение на елипсата, чиито фокуси лежат на абсцисната ос и са симетрични относно координатното начало, ако:

а) полуосите й са $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$;

б) голямата ос е 20, а фокусното й разстояние е 16;

в) голямата полуос е 10, а ексцентрицитетът й е $3/5$;

г) малката ос е 10, а ексцентрицитетът й е $12/13$;

д) сумата от полуосите е 7, а фокусното разстояние е $2\sqrt{21}$.

Решение: *д*) При даденото разположение на елипсата тя има уравнение от вида (10.5). За да намерим това уравнение, достатъчно е да намерим полуосите a и b. От условието следва, че $a+b=7$, $c=\sqrt{21}$. Тогава, като имаме предвид, че $b^2=a^2-c^2$, получаваме за a и b системата

$$\left| \begin{array}{l} a+b=7 \\ a^2-b^2=21 \end{array} \right. .$$

Като решим тази система и използваме, че $a>0$ и $b>0$, намираме че $a=5$ и $b=2$.Тогава каноничното уравнение на елипсата има вида $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

Отг. *а*) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{2}=1$; *б*) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$; *в*) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$; *г*) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

2. Да се определят полуосите на всяка от следните елипси:

а) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; *б*) $x^2+4y^2=1$;

в) $9x^2+25y^2=1$; *г*) $4x^2+9y^2=25$.

Отг. *а*) $a=3,\ b=2$; *б*) $a=1,\ b=1/2$; *в*) $a=1/3,\ b=1/5$; *г*) $a=5/2,\ b=5/3$.

3. Дадено е уравнението на елипсата $25x^2+169y^2=4225$. Да се изчислят дължините на осите, координатите на фокусите и ексцентрицитетът на елипсата.

Отг. $2a=26,\ \ 2b=10,\ \ e=12/13,\ F_1(12;0),\ F_2(-12;0)$.

4. Разстоянията от единия фокус на елипсата до краищата на голямата й ос са съответно равни на 7 и 1. Да се напише уравнението на елипсата.

Отг. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

5. Да се намери ексцентрицитетът на елипсата, ако се знае, че:

а) малката ос се вижда от фокусите под прав ъгъл;

б) разстоянието между фокосите е равно на разстоянието между върховете на малката и голямата ос.

Отг. *а*) $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$; *б*) $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

6. Намерете точка от елипсата с уравнение $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, чиято ордината е равна на 5.

Отг. $(\pm 5;\pm 2)$.

7. Намерете точка от елипсата $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, която се намира на разстояние 5 от малката й ос.

Отг. $(0;-2)$.

8. Определете положението на всяка от точките $M_1(-6;0)$, $M_2(0;5)$, $M_3(-2;1)$, $M_4(7;1)$ и $M_5(-1;-6)$ спрямо елипсата $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

Отг. M_1 и M_2 лежат на нея, M_3 е във вътрешността й, а M_4 и M_5 са вън от нея.

9. Елипсата минава през точките $M\left(\sqrt{3};-2\right)$ и $N\left(-2\sqrt{3};1\right)$. Да се напише уравнението на елипсата, ако осите и на симетрия са координатните оси.

Отг. $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

10. Намерете уравнение на елипса, чиито фокуси са разположени върху абсцисната ос симетрично относно координатното начало, ако:

а) малката ос на елипсата е 4 и тя минава през точка $M\left(4;-\sqrt{3}\right)$;

б) точките $M_1(4;\sqrt{3})$ и $M_2(-2\sqrt{2};-3)$ лежат върху елипсата.

Решение: *б*) При даденото разположение на елипсата тя има уравнение от вида (10.5). За да намерим това уравнение, достатъчно е да намерим a^2 и b^2. От условието, че точките $M_1(4;\sqrt{3})$ и $M_2(-2\sqrt{2};-3)$ лежат на елипсата, следва системата равенства:

$$\frac{4^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1\ ,$$

$$\frac{(-2\sqrt{2})^2}{a^2}+\frac{(-3)^2}{b^2}=1$$

Следователно a^2 и b^2 са решение на системата, като $a^2=20$ и $b^2=15$. (Ще отбележим, че системаса се решава чрез полагането: $u=1/a^2$ и $v=1/b^2$). По такъв начин получаваме, че елипсата има уравнение

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4}=1.$$

11. Намерете пресечните точки на правата $x+2y-7=0$ и елипсата $x^2+4y^2=25$.

Отг. $M(3;2)$ и $N(4;3/2)$.

12. Да се напише уравнението на права, допираща се до елипсата $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точка $M(4;3)$.

Решение: Точка $M(4;3)$ лежи на елипсата, защото координатите й удовлетворяват уравнението на елипсата. Следователно уравнението на търсената допирателна е от вида $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. В него заместваме $x_0=4,\ y_0=3$ и получаваме $3x+4y-24=0$.

13. Намерете при кои стойности на n правата с уравнение $y=2x+n$

а) пресича елипсата с уравнение $\frac{x^2}{2}+y^2=1$;

б) допира се до нея; *в*) минава вън от нея.

Отг. *а*) $-3<n<3$; *б*) $n=\pm 3$; *в*) $n<-3,\ n>3$

14. Намерете условието за допиране на правата $y=kx+n$ и елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение: За намиране на общите точки на двете линии решаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} y=kx+n \\ \dfrac{x^2}{\mathrm{a}^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right.$$

Заместваме y от първото уравнение във второто и получаваме

$$\left(b^2+a^2k^2\right)x^2+2a^2knx+a^2n^2-a^2b^2=0 \ .$$

За да бъде правата допирателна към елипсата, трябва системата да има единствено решение, т.е. квадратното уравнение, към което тя се свежда, да има двоен корен. Това е изпълнено, ако дискриминантата

$$D=a^4k^2n^2-\left(b^2+a^2k^2\right)\left(a^2n^2-a^2b^2\right)=0\,.$$

След преобразуване получаваме: $a^2k^2+b^2=n^2$, което е търсеното условие за допиране.

15. Намерете уравнения на допирателните към елипсата с уравнение:

а) $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{24}=1$, които са успоредни на правата с уравнение $2x-y+17=0$;

б) $x^2+2y^2=1$, които са успоредни на правата с уравнение $x+y-3=0$.

Отг. *а)* $2x-y\pm 12=0$; *б)* $2x+2y\pm\sqrt{6}=0$.

16. Намерете уравненията на допирателните към елипсата $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$, които са перпендикулярни на правата $13x+12y-115=0$.

Отг. $12x-13y\pm 169=0$.

17. Намерете уравненията на допирателните към елипсата $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{24}=1$, които са перпендикулярни на правата $x+2y+30=0$. Намерете разстоянието d между тях.

Отг. $12x-y\pm 12=0$; $d=24\sqrt{5}/5$.

18. Намерете уравнението на допирателната към елипсата $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ в точка $M\left(\sqrt{6}/2;-1\right)$.

Отг. $\sqrt{6}x-3y-6=0$.

19. Намерете общите допирателни към елипсите $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ и $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

Отг. $x+y\pm 3=0$; $x-y\pm 3=0$.

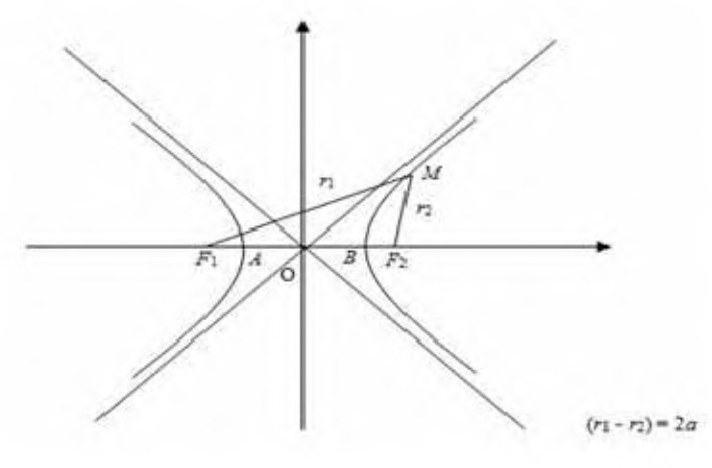
20. Намерете параметричните уравнения на елипсата $x^2+16y^2=16$.

Отг. $x=4\cos t$, $y=\sin t$.

§ 11 Уравнения на хипербола и парабола

11.1. Хипербола

Хипербола се нарича множеството от точки в равнината, за всяка от които абсолютната стойност на разликата от разстоянията й до две дадени точки от равнината е постоянна величина. Дадените две точки се наричат *фокуси* на хиперболата. Означават се обикновено с F_1 и F_2, като $|F_1F_2| = 2c$. Постоянната величина се означава с $2a$ $(a < c)$.



Фиг.11

Нека е дадена хипербола, чиито фокуси F_1 и F_2 лежат на абсцисната ос и са симетрични относно координатното начало. Тогава тази хипербола има уравнение от вида:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11.1}$$

където $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (очевидно $b < c$). Това уравнение се нарича *канонично уравнение на хиперболата.* При това разположение на хиперболата спрямо координатната система координатните оси са оси на симетрия за хиперболата. Точките A и B (виж фиг.11), в които тя пресича оста Ox, се наричат нейни *върхове*. $2a$ и $2b$ се наричат *реална* и *имагинерна ос*, а a и b - *реална* и *имагинерна полуос*. Величината $\varepsilon = \frac{c}{a}$ се нарича *ексцентрицитет* на хиперболата $(\varepsilon > 1)$. Правите с уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$ се наричат *асимптоти* на хиперболата с уравнение (11.1). Допирателната към хиперболата с уравнение (11.1) в точката $T(x_0, y_0)$ има уравнение от вида $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Уравнение от вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ също определя хипербола, чиито фокуси лежат върху ординатната ос и са симетрични относно координатното начало.

Задачи

1. Намерете уравнение на хипербола, чиито фокуси са раположени върху абсцисната ос и са симетрични относно координатното начало, ако:

а) реалната и имагинерната ос са съответно равни на 20 и 8;

б) реалната ос е 16 и ексцентрицитетът е равен на $5/4$;

в) фокусното разстояние е 26, а реалната ос е 12.

Решение: *а*) От условието имаме, че $2a = 20$ и $2b = 8$. Оттук намираме, че $a = 10$ и $b = 4$. Като имаме предвид (11.1), получаваме каноничното уравнение на дадената хипербола $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{16} = 1$.

б) Като използваме условието намираме, че $2a=16$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. Оттук последователно получаваме, че $a=8$ и $c=\varepsilon.a=\frac{5}{4}.8=10$. Като използваме зависимостта $b^2=c^2-a^2$ установяваме, че $b^2=10^2-8^2=36$, т.е. $b=6$. Тогава каноничното уравнение на дадената хипербола е следното $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

Отг. *в*) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$

2. Намерете уравнение на хипербола, чиито фокуси лежат върху ординатната ос и са симетрични относно координатното начало, ако фокусното разстояние е 10 и ексцентрицитетът е $5/3$.

Отг. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

3. Да се определят полуосите, координатите на фокусите и уравненията на асимптотите на всяка от хиперболите:

а) $16x^2-9y^2-144=0$; *б*) $9x^2-16y^2+144=0$.

Решение: *а*) Преобразуваме уравнението на хиперболата в каноничен вид $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, откъдето си вижда, че реалната ос е абсцисната ос. За хиперболата $a=3,\ b=4$ и $c=5$. Оттук намираме фокусите $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$. Уравненията на асимптотите получаваме след заместване в $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$. Те са $y=\pm\frac{4}{3}x$;

б) Уравнението може да се запише така: $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, откъдето правим заключение, че оста Oy е реалната ос за хиперболата. Имаме $a=4$, $b=3$, $c=5$ $\left(c=\sqrt{a^2+b^2}\right)$, $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$. Уравненията на асимптотите са $y=\pm\frac{3}{4}x$.

4. Дадена е хипербола с уравнение $25x^2-49y^2=1225$. Намерете полуосите, координатите на фокусите, ексцентрицитета и уравнвнията на асимптотите й.

Отг. $a=7$, $b=5$, $\varepsilon=\sqrt{74}/7$, $F_1(-\sqrt{74};0)$, $F_2(\sqrt{74};0)$, $\pm 5x-7y=0$.

5. Да се напише уравнение на хипербола, ако са известни фокусите и $F_1(10;0)$ и $F_2(-10;0)$ и точката $M\left(12;3\sqrt{5}\right)$, лежаща на хиперболата.

Отг. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

6. Да се напише уравнението на хиперболата, минаваща през фокусите на елипсата $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ и имаща фокуси във върховете на тази елипса.

Отг. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$.

7. Намерете уравнение на хиперболата, чиито фокуси лежат на абсцисната ос симетрично относно координатното начало, ако:

а) точка $M(-5;3)$ лежи на хиперболата, а ексцентрицитетът е равен на 2;

б) точките $M_1(-6;1)$ и $M(8;2\sqrt{2})$ лежат на хиперболата.

Отг. *а*) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; *б*) $x^2-y^2=16$.

8. Да се определи ъгъла между асимптотите на хиперболата, която има ексцентрицитет $e = 2$.

Отг. $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

9. Намерете точка, лежаща на хиперболата $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, която отстои от едната асимптота на разстояние три пъти по-голямо, отколкото от другата асимптота.

Отг. $\left(\pm\dfrac{14\sqrt{3}}{3}; \pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \right)$ - четири точки.

10. Намерете уравнение на допирателната към хиперболата с уравнение $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ в точка $A(-5;4)$.

Отг. $x + y + 1 = 0$.

11. Да се напише уравнението на допирателната към хиперболата $\dfrac{x^2}{15} - \dfrac{y^2}{6} = 1$, която е перпендикулярна на правата $x + y - 7 = 0$.

Отг. $x + y \pm 3 = 0$.

12. Да се напише уравнението на допирателната към хиперболата $\dfrac{x^2}{15} - \dfrac{y^2}{6} = 1$, която е успоредна на правата $x - 2y = 0$.

Отг. Не съществува.

13. Да се напише уравнението на допирателната към хиперболата $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, която сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл $\dfrac{\pi}{3}$.

Отг. $\sqrt{3}x - y \pm \sqrt{15} = 0$.

14. Да се намери уравнението на хиперболата с ексцентрицитет $e = 3$, ако фокусите и съвпадат с тези на елипсата $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение: Нека a_0, b_0, c_0 са елементите на дадената елипса. От каноничното й уравнение намираме $a_0 = 7,\ b_0 = 3$, а $c_0 = \sqrt{40}$. Тъй като дадената елипса и търсената хипербола имат общи фокуси, то фокусите на хиперболата са $F_1\left(-\sqrt{40};0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{40};0\right)$. От формулите $c_x = \sqrt{a_x^2 + b_x^2}$ и $e_x = \frac{c_x}{a_x}$ намираме $a_x^2 = \frac{40}{9}$ и $b_x^2 = \frac{320}{9}$. Уравнението на търсената хипербола е $\frac{9x^2}{40} + \frac{9y^2}{320} = 1$.

15. Напишете уравнението на права, която се допира до хиперболата $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{6} = 1$ в точка $M(5;-4)$.

Отг. $x + y = 1$.

16. Напишете уравнението на хиперболата, която се допира до правата $x - y - 2 = 0$ в точка $M(4;2)$.

Отг. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$.

17. Да се намери условието за допиране на правата $y = kx + n$ и хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Упътване. Използвайки метода от задача 14 за елипса, намираме следното условие: $a^2k^2 - b^2 = n^2$.

18. Намерете координатите на пресечните точки на хиперболата $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ и правата $4x-3y-16=0$.

Отг. $(6{,}25;3)$.

19. Намерете координатите на пресечните точки на окръжността $x^2+y^2=5$ и хиперболата $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{7}=1$.

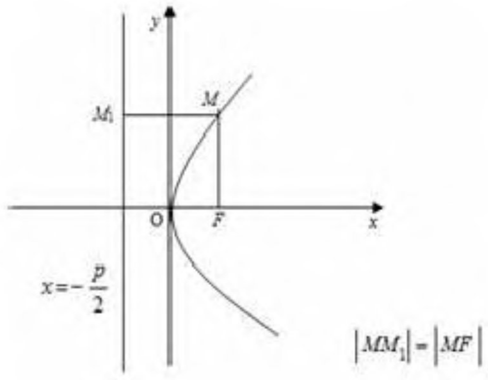
Отг. Двете криви нямат общи точки.

20. Намерете пресечните точки на хиперболите с уравнения $3x^2-4y^2=12$ и $9x^2-8y^2=72$.

Отг. $M_1(-4;-3)$, $M_2(4;-3)$, $M_3(-4;3)$, $M_4(4;3)$.

11.2. Парабола

Парабола е множество от точки в равнината, равноотдалечени от дадена точка и от дадена права в равнината. Точката се нарича *фокус*, а правата – *директриса* на параболата. Фокусът с означава с F, а разстоянието от F до директрисата – с p. Величината p се нарича *параметър* на параболата.



Фиг. 12

В декартови координати парабола с ос, успоредна на оста у, връх (x_1, y_1), се описва с уравнението:

(11.1) $$(y - y_1)^2 = 2p(x - x_1)$$

Нека е дадена парабола в равнината, чиято директриса е перпендикулярна на абсцисната ос Ox, като фокусът й лежи на положителната част на Ox, а перпендикулярът от F към директрисата се разполовява от координатното начало. Тогава тази парабола има уравнение от вида:

(11.2) $$y^2 = 2px,$$

което се нарича *канонично уравнение на параболата*. Фокусът на параболата с уравнение (11.2) има координати $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, а директрисата – уравнение $x{=}{-}p/2$..

Абсцисната ос е ос на симетрия на параболата. Пресечната □ точка с параболата се нарича връх на параболата.

Ако дадена парабола е разположена в лявата полуравнина, симетрична е спрямо Ox и върхът й съвпада с координатното начало, то тя има уравнение от вида

$$y^2 = -2px$$

Ако параболата има за връх точка O и е симетрична относно оста Oy, тя има уравнение от вида

$$x^2 = 2py\,,$$

когато е разположена в горната полуравнина, и уравненние от вида

$$x^2 = -2py\,,$$

когато е разположена в долната полуравнина.

Допирателната към параболата с уравнение (11.2) в точка $T(x_0, y_0)$ от нея има уравнение

$$y_0 y = p(x + x_0)\,.$$

Задачи

1. Намерете уравнение на парабола, чиито връх съвпада с координатното начало, ако:

а) тя е разположена в дясната полуравнина симетрично спрямо оста Ox и параметърът й е равен на $0{,}5$; *б*) тя е разположена в горната полуравнина симетрично относно оста Oy и параметърът й е равен на 2; $в)$ тя е разположена в горната полуравнина симетрично относно оста Oy и параметърът й е равен на 3.

Отг. $а) y^2 = x$; $б) x^2 = 4y$; $в) x^2 = -6y$.

2. Намерете уравнение на парабола, ако:

$а)$ фокусът й има координати $\left(\frac{3}{2};0\right)$;

$б)$ минава през точка $M(1;4)$ и е симетрична относно оста Ox.

$в)$ минава през точка $M(-4;-2)$ и е симетрична относно оста Oy.

Решение: $а)$ От абсцисата на фокуса $F\left(\frac{3}{2};0\right)$ определяме параметъра $p = \frac{1}{3}$

Уравнението на параболата е $y^2 = 6x$;

$б)$ Тъй като $x_M = 1 > 0$, следва, че параболата има уравнение от вида $y^2 = 2px$. Като заместим текущите координати на x и y с координатите на точка M, намираме $p = 8$. Уравнението на параболата е $y^2 = 16x$;

$в)$ Каноничното уравнение на параболата е от вида $x^2 = \pm 2py$ и в зависимост от ординатата на точка M определяме знака, както в случая $б)$. Уравнението на параболата е $x^2 = -8y$.

3. Намерете уравнение на парабола, чийто връх съвпада с координатното начало, ако тя е разположена симетрично относно абсцисната ос и минава през точка $M(2;8)$.

Отг. $y^2 = 32x$.

4. Намерете уравнение на парабола за която:

а) разстоянието от фокуса до върха и е 3;

б) параболата е симетрична относно Ox, минава през координатното начало и през точка $M(1;-4)$;

в) параболата е симетрична относно Oy, минава през координатното начало и има за фокус точка $F(0;2)$.

Отг. *а*) $y^2=12x$; *б*) $y^2=16x$; *в*) $x^2=8y$.

5. Да се определи параметърът, фокусът и уравнението на директрисата на параболата с уравнение:

а) $y^2=12x$; *б*) $x^2=10y$;

в) $y^2=-12x$; *г*) $x^2=-y$.

Решение: *а*) Като вземем предвид каноничните уравнения на параболите $y^2=\pm 2px$ и $x^2=\pm 2py$ в този случай получаваме $2p=12$, т.е. $p=6$, $F(3;0)$, $x=-3$;

Отг. *б*) $p=5$, $F\left(0;\frac{5}{2}\right)$, $y=-\frac{5}{2}$; *в*) $p=6$, $F(-3;0)$, $x=3$;
г) $p=\frac{1}{2}$, $F\left(0;-\frac{1}{4}\right)$, $y=\frac{1}{4}$.

6. Намерете пресечните точки на параболата $y^2=18x$ с правите:

а) $6x+y-6=0$; *б*) $9x-2y+2=0$; *в*) $4x-y+5=0$; *г*) $x+y-1=0$.

Отг. *а*) $(2;-6)$, $(1/2;3)$; *б*) правата е допирателна към параболата в точка $(2/9;2)$; *в*) не съществуват; *г*) $(-\sqrt{3};-1+\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-1-\sqrt{3})$.

7. През фокуса на параболата с уравнение $y^2=10x$ е прекарана права, перпендикулярна на оста ѝ на симетрия. Намерете дължината на отсечката с краища пресечните точки на правата и параболата.

Отг. 5.

8. Да се напише уравнението на общата хорда на параболата $y^2=18x$ и окръжността $(x+6)^2+y^2=100$.

Отг. $x-2=0$.

9. Да се напише уравнението на хордата на параболата $y^2=4x$, която минава през точка $A(2;1)$ и се дели от точката на две равни части.

Отг. $2x-y-3=0$.

10. Да се определи при какво условие правата $y=kx+n,\ (k\neq 0)$ се допира до параболата $y^2=2px$.

Отг. $p=2kn$.

11. Определете при кои стойности на k правата с уравнение $y=kx+2$ пресича параболата с уравнение $y^2=4x$.

Отг. $k<0,5$.

12. Намерете уравнение на допирателната към параболата с уравнение $y^2=12x$ в точка $M(3;6)$.

Отг. $x-y+3=0$.

13. От точка $M(2;9)$ са прекарани допирателни към параболата $y^2=36x$. Да се напишат уравненията на тези допирателни.

Решение: От уравнението на параболата намираме, че $p=18$. Допирателните през точка M търсим с уравнения от вида $y=kx+n$. Точка M лежи на допирателните и следователно координатите удовлетворяват уравненията им, т.е. $9=2k+n$. Като използваме условието за допиране на права с декартово уравнение и парабола с канонично уравнение $y^2=2px\left(p=2kn\right)$, след заместване получаваме $18=2kn$. Решенията на системата

$$\begin{vmatrix} 2k+n=9 \\ 2kn=18 \end{vmatrix}$$

са $k_1=3$ и $k_2=\dfrac{3}{2}$, $n=6$. Уравненията на допирателните са $3x-y+3=0$ и $3x-2y+12=0$.

14. Дадена е параболата $y^2=4x$ и допирателната $x+3y+9=0$. Намерете допирната точка.

Отг. $(9;-6)$.

15. Дадена е параболата $y^2=12x$. Прекарайте допирателна към нея:

а) в точка с абсциса $x=3$; *б*) успоредна на правата $3x-y+5=0$;

в) перпендикулярна на правата $2x+y-7=0$;

г) образуваща с правата $4x-2y+9=0$ ъгъл $\pi/4$.

Отг. *а*) $x+y+3=0$ в точката $(3;-6)$ и $x+y+3=0$ в точката $(3;6)$;

б) $y=3x+1$; *в*) $x-2y+12=0$; *г*) $3x+y+1=0$.

16. Намерете общата допирателна на елипсата $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ и параболата $y^2=\frac{20}{3}x$.

Отг. $x+3y+15=0,\ \ x-3y+15=0$.

17. Намерете лицето на триъгълник OAB, където O е координатното начало, а A и B са точките на допиране на допирателните към параболата с уравнение $y^2=20x$, които минават през точка $C(-2;1)$.

Отг. 60.

18. Намерете пресечните точки на параболата с уравнение:

а) $y^2=12x$ и елипсата $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

б) $y^2=x$ и елипсата $x^2+2y^2=2$.

Отг. *а)* $\left(5/4;\sqrt{15}\right)$, $\left(5/4;-\sqrt{15}\right)$; *б)* $\left(-1+\sqrt{3};\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$.

19. Намерете пресечните точки на хиперболата с уравнение $3x^2-y^2=12$ и параболата с уравнение $y^2=9x$.

Отг. $(4;6)$, $(4;-6)$.

§ 12. Уравнение на равнина в пространството

Нека в тримерното пространство е зададена тримерна декартова координатна система $Oxyz$, която е съвкупност от три перпендикулярни една на друга координатни оси Ox, Oy, Oz наречени съответно *абцисна ос*, *ординатна ос и апликатна ос.* Тези три оси дават възможност с всяка точка от пространството да свържем *наредена тройка числа* наречени съответно *абциса*, *ордината и апликата* на точката и които се отчитат по съответните координатни оси. Нека $M(x, y, z)$ е произволна точка от тримерното пространство и нека α е произволна равнина в тримерното пространство. Тогава на равнината α можем да съпоставим уравнение от първа степен с три неизвестни x, y, z от вида

$$a: Ax + By + Cz + D = 0, \tag{12.1}$$

където A, B, C, D са константи от които поне една от първите три е различна от нула, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Това уравнение се нарича *общо уравнение* на равнината α.

Нека $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$ са три произволни точки в пространството и нека равнината α минава през тези три точки. Тогава уравнението на равнината α може да се запише в следната детерминантна форма:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_B & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{12.2}$$

Нека $M(x_0;y_0;z_0)$ е точка от тримерното пространство и нека $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ са два компланарни с равнината α, но неколинеарни вектора. Тогава уравнение на равнината α може да се запише в следната форма:

(12.3) $$\alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вектора $\vec{n}$ се нарича *нормален вектор* към равнината α, когато $\vec{n} \perp \alpha$. Според това определение, векторът $\vec{n}$ е нормален към α когато е ортогонален на всеки вектор от равнината α.

Нека $M(x_0;y_0;z_0)$ е точка от тримерното пространство и нека $\vec{n}(A;B;C)$ е нормален вектор към равнината α. Тогава уравнението на равнината α има вида:

(12.4) $$\alpha: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Нека $M(x_M, y_M, z_M)$ е точка от тримерното пространство и нека равнината α има общо уравнение от вида (12.1). Тогава разстоянието $d(\alpha, M)$ от точката M до тази равнина се намира чрез формулата:

(12.5) $$d(\alpha, M) = \frac{|A.x_M + B.y_M + C.z_M + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

От формулите (12.1) и (12.5) следва, че точката M лежи на равнината α тогава и само тогава когато $d(a, M) = 0$.

Нека

(12.6) $$a_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и

(12.7) $$a_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

са две произволни равнини. При условие, че тези равнини се пресичат, косинусът на единия от двустенните ъгли между тях φ, може да се намери по формулата

(12.8) $$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Възможни са следните взаимни положение на две равнини α и β, зададени с общите си уравнения

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

а) сливат се когато

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

б) успоредни са когато

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

в) перпендикулярни са когато

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Задачи

1. Намерете кои от точките $A(1;0;1)$, $B(2;1;-5)$ и $C(2;2;2)$ лежат на равнината с уравнение:

$$\alpha : x + y + z - 2 = 0.$$

Решение: Като заместим с координатите на точката A в уравнението на равнината α получаваме равенството:

$$1 + 0 + 1 - 2 = 0,$$

което означава, че точката A принадлежи на равнината α. За останалите точки по същия начин получаваме, че не принадлежат на равнината α.

2. Намерете уравнението на равнината α минаваща през точките:

а) $A(1;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$; *б)* $A(1;-5;2)$, $B(4;0;1)$, $C(2;1;-3)$.

Решение:

а) $$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0-1 & 1-0 & 0-1 \\ 0-1 & 0-0 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y + z - 1 = 0.$$

Отг. б) $\alpha : 19x - 14y - 13z + 63 = 0$.

3. Намерете уравнението на равнината α, която минава през точката $M_0(1;2;3)$ и е успоредна векторите $\vec{a}(1;-1;2)$ и $\vec{b}(4;-3;-1)$.

Решение: От формула (12.3) имаме:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето намираме $\alpha : 7x + 9y + z - 28 = 0$.

4. Намерете уравнението на равнината α, която минава през точката $M_0(2;-1;5)$ и е перпендикулярна на равнините $\beta: 3x-2y+z+7=0$ и $\gamma: 5x-4y+3z+1=0$.

Решение: От условието, че търсената равнина α е перпендикулярна на равнините β и γ, следва че векторите $\vec{n}_\beta(3;-2;1)$ и $\vec{n}_\gamma(5;-4;3)$.са компланарни с нея. Използваме формула (12.3) и получаваме

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

откъдето следва уравнението $\alpha: x+2y+z-5=0$.

5. Намерете уравнение на равнина, която минава през две дадени точки и е успоредна на даден вектор:

а) $A(-3;7;-10)$, $B(2;-1;0)$ и $\vec{a}(3;-6;-7)$;

б) $A(3;-3;-3)$, $B(9;-11;-6)$ и $\vec{a}(7;10;-7)$.

Отг. *а*) $116x+65y-6z-167=0$; *б*) $86x+21y+116z+153=0$.

6. Намерете уравнение на равнина, минаваща през точка A и е перпендикулярна на вектора $\vec{a}$, ако:

а) $A(-10;2;-3)$ и $\vec{a}(4;-8;3)$; *б*) $A(1;8;5)$ и $\vec{a}(2;4;9)$;

в) $A(-9;-5;-9)$ и $\vec{a}(7;-7;5)$.

Решение: *а*) От формула (12.4) имаме $\alpha: 4(x+10)-8(y-2)+3(z+3)=0$, откъдето получаваме $\alpha: 4x-8y+3z+65=0$.

Отг. *б*) $\alpha: 2x+4y+9z-79=0$; *в*) $\alpha: 7x-7y+5z+73=0$.

7. Напишете нормалният вектор на равнината:

а) $\alpha: x+2y+z-5=0$; *б*) $\alpha: x+y+z-5=0$.

Отг. *а*) $(1;2;1)$; *б*) $(1;1;1)$.

8. Дадена е равнина $\alpha: 4x-y+5z-5=0$. Да се провери, кои от векторите $n_1(2;-1;-5)$, $n_2(4;-1;5)$, $n_3(8;-2;10)$ и $n_4(1;2;3)$ са перпендикулярни на равнината.

Отг. n_2 и n_4.

9. Точките $A(-1;2;5)$, $B(0;-4;5)$, $C(-3;2;1)$ и $D(1;2;4)$ са върхове на пирамида. Да се намерят уравненията на равнините:

а) α_{ABC}, през точките A, B и C;

б) $A\in\alpha$, $B\in\alpha$ и α е успоредна на ръба CD;

в) β, минаваща през точките C и D и перпендикулярна на α_{ABC};

г) γ, минаваща през точката D и перпендикулярна на ръба AB.

Решение: *б*) За определители на α избираме:

$$\alpha: \begin{cases} A(1;-2;5)\in\alpha \\ CD(4;0;3)\parallel\alpha \\ \overrightarrow{AB}(1;-6;0)\parallel\alpha \end{cases}.$$

Тогава

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Общото уравнение на α е $\alpha: 6x+y-8z+44=0$.

в) За определители на β избираме:

$$\beta:\begin{cases} C(-3;2;1)\in\alpha \\ CD(4;0;3)\parallel\alpha \\ \vec{n}(6;1;-3)\parallel\alpha \end{cases} \Rightarrow \beta:\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Тогава общото уравнение на равнината е $\beta: 3x-30y-4z+73=0$.

г) От условията $D(1;2;4)\in\gamma$ и $\gamma\perp\overrightarrow{AB}(1;-6;0)$ намираме

$$\gamma: 1.(x-1)-6.(y-2)+0.(z-4)=0 \quad \Rightarrow \quad \gamma: x-6y+11=0.$$

Отг. *а*) $\alpha_{ABC}: 6x+y-3z+19=0$.

10. Намерете ъгълът между равнините:

а) $\alpha_1: 3x-y+2z+5=0$ и $\alpha_2: x+9y+3z-6=0$;

б) $\alpha_1: 3x-2y-z-6=0$ и $\alpha_2: x-3y+4z+11=0$

Упътване: Използвате формула (15.8).

Отг. *а*) $3\sqrt{1274}/637$; *б*) $5\sqrt{91}/182$.

11. Намерете разстоянието от точка A до равнината α, ако:

а) $M(7;0;4)$ и $\alpha: x+y+z-2=0$; *б*) $A(-1;-2;3)$ и $\alpha: 2x-y+2z+3=0$;

Решение: *а*) От формула (12.5) имаме $d=\dfrac{|7+0+4-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$.

Отг. *б*) $9\sqrt{5}/5$.

12. Намерете уравнение на равнината α, минаваща през точка $A(3;1;4)$ и е перпендикулярна на вектора $\vec{a}(5;3;1)$. Да се намери разстоянието от точка $M(7;1;4)$ до равнината α.

Отг. $\alpha: 5x+3y+z-22=0$, $d=4\sqrt{35}/7$.

13. Пресметнете разстоянието между двете успоредни равнини:

$$\alpha_1 : 2x+3y-z+1=0 \text{ и } \alpha_2 : 2x+3y-z+5=0.$$

Отг. $2\sqrt{14}/7$.

14. Съставете уравнение на равнина, която минава през дадена точка H и е перпендикулярна на права, определена от точките K и M :

а) $H(2;-3;-1)$, $K(4;5;1)$ и $M(8;-12;7)$; *б)* $H(-9;3;2)$, $K(5;-8;3)$ и $M(-14;6;2)$.

Отг. *а)* $4x-17y+6z-53=0$; *б)* $19x-14y+z+211=0$.

15. Намерете обемът на куб, ако две от стените му лежат на равнини с уравнения $\alpha : 2x-2y+z-1=0$ и $\beta : 2x-2y+z+5=0$.

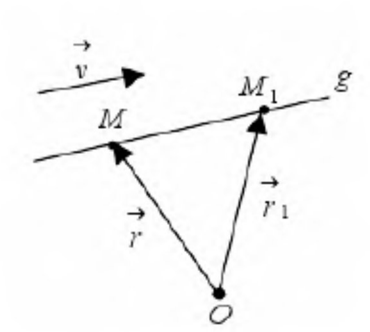
Решение: От едната равнина избираме точка и намираме разстоянието до другата равнина, което по абсолютна стойност ще представлява дължината на ръба на куба. В уравнението за α заместваме $x=0$ и $y=0$. Получаваме $z=1$, т.е. от равнината α е избрана точка $A(0;0;1)$. За разстоянието от тази точка до равнината β намираме:

$$d(A,\beta) = \frac{2.0-2.0+1+5}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Следователно дължината на ръба на куба е $a=|2|=2$, а обемът на куба е $V=a^3=2^3=8$.

§ 13. Уравнение на права в пространството .

Нека $Oxyz$ е декартова координатна система в тримерното пространство, относно която са дадени точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и ненулев вектор $\vec{v}(a,b,c)$. Тогава за произволна точка $M\,(x, y, z)$ от правата g, минаваща през точка M_1 и колинеарна



на вектора $\vec{v}$ ($M \in g$ и $\vec{v} \parallel g$) имаме *векторно параметричното уравнение на правата* g :

$$g : \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{v},$$

в което $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, λ е реален параметър, който обхожда множеството на реалните числа, точка $M\,(x, y, z)$ обхожда правата g. От това уравнение в координатен запис имаме:

$$g : \left| \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda a \\ y = y_1 + \lambda b \\ z = z_1 + \lambda c \end{array} \right.$$

като тази система се нарича *скаларно параметрични уравнения на правата* g. Ако изразим λ от скаларно параметричните уравнения на g и приравним получените изрази, ще намерим *каноничното уравнение на правата* g :

(13.1) $$g : \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} .$$

Нека правата g минава през две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогава скаларно параметричните уравнения на правата g се задават чрез системата равенства:

$$(13.2) \qquad g: \left| \begin{array}{lllll} x & = & x_1 & + & \lambda(x_2 - x_1) \\ y & = & y_1 & + & \lambda(y_2 - y_1), \\ z & = & z_1 & + & \lambda(z_2 - z_1) \end{array} \right.$$

от която следва *уравнение на права в пространството през две точки*:

$$(13.3) \qquad g: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Нека правата g е пресечница на две равнини, тогава *уравнението на* g *се задава чрез система съставена от уравненията на тези равнини*:

$$g: \left| \begin{array}{lllllllll} a_1 x & + & b_1 y & + & c_1 z & + & d_1 & = & 0 \\ a_2 x & + & b_2 y & + & c_2 z & + & d_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ако g е зададена с уравнение (13.1), тогава векторът $\vec{v}\ (a,b,c) \perp g$. Ако равнината α има уравнение:

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n}(A, B, C) \perp \alpha ,$$

тогава *за взаимното положение на правата g и равнина* α имаме случаите:

$$а) \quad g \subset \alpha \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1) \exists M \in g \cap \alpha \\ 2) \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{n} = a.A + b.B + c.C = 0 \end{array} \right. ;$$

$$б) \quad g \parallel \alpha <=> \left| \begin{array}{l} 1) \neg\exists M \in g \cap \alpha \\ 2) \vec{v} \perp \vec{n} \quad <=> \vec{v}.\vec{n} = a.A + b.B + c.C = 0 \end{array} \right. ;$$

$$в) \quad g \times \alpha \Leftrightarrow \vec{v} \not\perp \vec{n}, \qquad a.A + b.B + c.C \neq 0 \quad ;$$

$$г) \quad g \perp \alpha \quad <=> \vec{v} \neg\perp \vec{n}, a/A + b/B + c/C \neq 0$$

Съответно *ъгълът между права g и равнина* α се определя чрез формулата:

$$\cos\square\,(\vec{v}, \vec{n}) = \frac{\vec{v}.\vec{n}}{|\vec{v}|.|\vec{n}|} = \frac{a.A + b.B + c.C}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Нека са дадени правите g_1 и g_2, точките $M_1(x_1,y_1,z_1)\in g_1$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in g_2$ и векторите $\overrightarrow{v_1}(a_1,b_1,c_1)\parallel g_1$ и $\overrightarrow{v_2}(a_2,b_2,c_2)\parallel g_2$. Тогава *за взаимното положение на* g_1 *и* g_2 *имаме случаите*:

а) $g_1 \equiv g_2 \quad <=> \overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$;

б) $g_1 \parallel g_2 \quad <=> \overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \neg\parallel \overrightarrow{M_1M_2}$;

$$в)\ g_1 \times g_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1)\ \vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2 \\ 2)\ \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1v_2}\right) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. ;$$

г) g_1 и g_2 са кръстосани прави $\Leftrightarrow$ смесеното произведение $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right) \neq 0$ (трите вектора не са компланарни);

д) $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, т.е. $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Ъгълът между две прави g_1 и g_2 се определя чрез формулата:

$$\cos\angle(g_1,g_2) = \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|}.$$

Ако $\cos\angle(g_1,g_2) > 0 \Rightarrow$ ъгълът между g_1 и g_2 е остър. Ако $\cos\angle(g_1,g_2) < 0 \Rightarrow$ ъгълът между g_1 и g_2 е тъп. Ако $\cos\angle(g_1,g_2) = 0 \Rightarrow g_1 \perp g_2$.

Задачи

1. Правата g минава през точките $A(7,-3,6)$ и $B(1,-1,8)$. Напишете векторното параметрично, скаларното параметрично и каноничното уравнение на правата g.

Решение: От формула (13.3) за уравнението на права през две точки получаваме

$$g:\frac{x-7}{1-7}=\frac{y+3}{-1+3}=\frac{z-6}{8-6}.$$

Тогава за каноничното уравнение на g имаме

$$g:\frac{x-7}{-6}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-6}{2},$$

откъдето следва, че векторите $\vec{v}(-6;2;2)$ и $\vec{v}\,'(-3;1;1)$ са колинеарни на g и тогава векторното параметрично уравнение на правата g може да се представи във вида:

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda.\vec{v}\,'=\overrightarrow{OA}+\lambda.\vec{v}\,'=(7,-3,6)+\lambda(-3,1,1)=7\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}+\lambda(-3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}).$$

Скаларното параметрично уравнение на правата g се представя чрез системата равенства:

$$g:\left|\begin{array}{l} x=7-3\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=6+\lambda \end{array}\right..$$

2. Напишете каноничното, векторното параметрично и скаларното параметрично уравнение на правата g минаваща през точка $M(-1,2,0)$ и успоредна на вектора $\vec{q}(2,3,7)$.

Отг. $g:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{7}$;

$g:\vec{r}=-\vec{i}+2\vec{j}+\lambda(2\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k})$;

$$g:\left|\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=7\lambda \end{array}\right..$$

3. Напишете каноничното уравнение на правата l, която минава през точка $M(7,2,-1)$ и е успоредна на правата $g: \begin{vmatrix} x=-2+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{vmatrix}$.

Отг. $l: \dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$.

4. Напишете каноничното уравнение на правата m зададена с уравнения:

а) $m: \begin{vmatrix} x+2y-z+4=0 \\ x-y+3z-8=0 \end{vmatrix}$; *б)* $m: \begin{vmatrix} 2x-y+z-3=0 \\ x+3y+z-1=0 \end{vmatrix}$.

Решение: *а)* **I начин:** Правата m е зададена като пресечница на две равнини, следователно $\vec{n}_1(1,2,-1)\perp\alpha_1$ (от първата равнина) и $\vec{n}_2(1,-1,3)\perp\alpha_2$ (от втората равнина). Тогава $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2 \perp m$ и $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2 \perp n_1,\ n_2 \Rightarrow \vec{n}_1\wedge\vec{n}_2 \parallel g$. Пресмятаме

$$\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=5\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k} \ \Rightarrow\ \vec{n}_1\wedge\vec{n}_2(5,-4,-3).$$

Ще намерим точка A от m и ще съставим уравнение на права m минаваща през точката A и колинеарна на вектора $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2(5,-4,-3)$. Имаме:

$$y=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-z+4=0 \\ x+3z-8=0 \end{vmatrix} \ \Rightarrow\ x=-1,\ z=3\ \Rightarrow\ A(-1,0,3).$$

$$\Rightarrow\ m:\begin{vmatrix} A(-1,0,3) \\ \vec{v}(5,-4,3)\parallel\alpha \end{vmatrix} \ \Rightarrow\ m:\frac{x+1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z-3}{3}.$$

II начин: Намираме две точки от m, като в дадената система заместваме една от променливите, например y с 0, а след това x с 0. Така получаваме точките $A(-1,0,3)$ и $B\left(0,-\dfrac{4}{5},\dfrac{12}{5}\right)$. Тогава от уравнение (16.2) получаваме:

$$m:\frac{x+1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z-3}{3}.$$

Отг. б) $m:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-7}$.

5. Напишете уравнение на равнината α минаваща през точка $P(5,1,3)$ и права $g\subset\alpha$, където $g:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Решение: Три точки, нележащи на една права, определят равнина. По условие е дадена точка $P\in\alpha$, като $P\notin g$ -установява се чрез проверка. Търсим още две точки от равнината α, които принадлежат на g. Такива са $M(0,3,0)\in g$ и $N(3,0,-3/2)\in g$. Тогава уравнението на равнината α има вида:

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z-3 \\ 0-5 & 3-1 & 0-3 \\ 3-5 & 0-1 & \frac{-3}{2}-3 \end{vmatrix}=0,$$

откъдето след пресмятане на детерминантата, за уравнението на α получаваме:

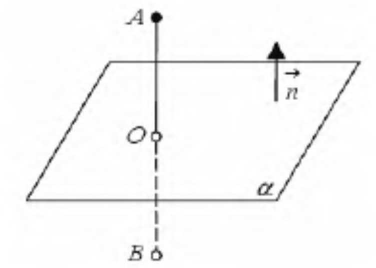
$$\alpha:24x+33y-18z-99=0.$$

6. Дадена е точка $A(8,6,4)$ и равнина $\alpha:3x-4y+z-56=0$.

а) Намерете ортогоналната проекция на A върху α;

б) Намерете точка B, симетрична на A спрямо α.

Решение: *а*) т. $A \notin \alpha$ - установява се чрез проверка. Нека т. Q е ортогонална



проекция на т. A върху α. Следователно $AQ \perp \alpha$. От уравнението $\alpha \Rightarrow \vec{n}(3,-4,1) \perp \alpha$. Тогава $\vec{n} \parallel AQ$. Правата AQ се определя от :

$$\left| \begin{array}{l} A \in AQ \\ \vec{n} \parallel AQ \end{array} \right. \Rightarrow AQ: \frac{x-8}{3} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-4}{1}.$$

Точка

$$Q \in AQ \cap \alpha \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y-6}{-4} \\ \dfrac{x-8}{3} = \dfrac{z-4}{1} \\ 3x-4y+z-56=0 \end{array} \right. .$$

От решението на системата $\Rightarrow$ т.$Q(14,-2,6)$.

б) Нека точка B е симетрична на A спрямо α. Тогава т. Q е среда на AB.

Нека

$$B(x,y,z) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 14 = \dfrac{8+x}{2} \Rightarrow x = 20 \\ -2 = \dfrac{6+y}{2} \Rightarrow y = -10 \\ 6 = \dfrac{4+z}{2} \Rightarrow z = 8 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \text{ т. } B(20,-10,8).$$

7. Намерете точка B, симетрична на точка $A(-2,-2,-2)$ спрямо равнината $\alpha: 6x-5y-2z+63=0$.

Отг. $B(-14,8,2)$.

8. Дадена е точка $A(2,-1,3)$ и права $p: \begin{vmatrix} x = 3\lambda \\ y = -7 + 5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{vmatrix}$.

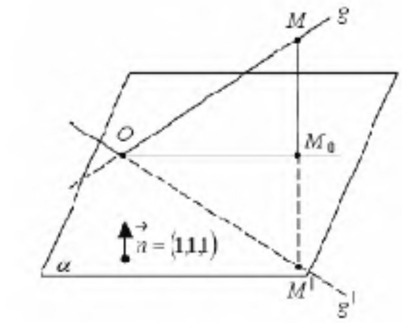
а) Намерете ортогоналната проекция Q на точка A върху правата p;

б) Намерете точка M, симетрична на дадената точка A спрямо p.

Упътване. Постройте равнина $\alpha: \begin{vmatrix} A(2,-1,3) \in \alpha \\ \perp \vec{n}(3,5,2) \end{vmatrix}$. Точка Q е прободната точка на p с α.

Отг. $Q(3,-2,4)$, $M(4,-3,5)$.

9. Намерете права g', симетрична на g спрямо равнината α, ако $g: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+1}{3}$ и $\alpha: x + y + z - 1 = 0$.



Решение: Правата g' може да се определи през две точки: т. $Q = g \cap \alpha$ и т. M', симетрична на M спрямо α. Освен това $\vec{v}(-4,-6,3) \parallel g$, $\vec{n}(1,1,1) \perp \alpha$. Чрез проверка се установява, че $\vec{v}.\vec{n} \neq 0 \Rightarrow g \times \alpha$. Пресечната точка Q на g и α се намира като решение на системата:

$$\begin{vmatrix} x + y + z - 1 = 0 \\ \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{-6} \\ \frac{x-1}{-4} = \frac{z+1}{3} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{т.} Q(1,1,-1)$$

Нека M е произволна точка от g, нека M' е симетрична на M и нека $MM' \cap \alpha = M_0$. Тогава $MM' \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}(1,1,1) \parallel MM'$ и е в сила системата равенства:

$$MM': \left| \begin{array}{l} \vec{n} \parallel MM' \\ M \in g \end{array} \right.$$

Винаги може да се намери една точка от правата g, например такава е $M(1/3, 0, -1/2) \Rightarrow MM': \dfrac{x-\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+\frac{1}{2}}{1}$. В сила са релациите:

$$M_0 = MM' \cap \alpha \Rightarrow M_0: \left| \begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ \dfrac{3x-1}{3} = y \\ \dfrac{27+1}{2} = y \end{array} \right. \Rightarrow M_0\left(\frac{13}{18}, \frac{7}{18}, \frac{-2}{18}\right).$$

Понеже M_0 е среда на $MM' \Rightarrow$ нейните координати са средно аритметично на координатите на M и M', което определя системата равенства:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{13}{18} = \dfrac{\frac{1}{3}+x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{10}{9} \\ \dfrac{7}{18} = \dfrac{0+z}{2} \Rightarrow y = \dfrac{7}{9} \\ \dfrac{-2}{18} = \dfrac{-\frac{1}{2}+z}{2} \Rightarrow z = \dfrac{5}{18} \end{array} \right. \Rightarrow \text{т. } M'\left(\frac{10}{9}, \frac{7}{9}, \frac{15}{8}\right)$$

Тогава $g': \left| \begin{array}{l} Q(1,1,1) \in g' \\ M' \in g' \end{array} \right.$, следователно уравнението на правата g' има вида:

$$g': \frac{x-1}{\frac{1}{9}} = \frac{y-1}{-\frac{2}{9}} = \frac{z+1}{\frac{23}{8}}.$$

10. Намерете разстоянието от точка $P(5,3,5)$ до правата g зададена със системата уравнения:

$$g:\begin{vmatrix} 3x+2y+3z+15=0 \\ x-2y+3z-1=0 \end{vmatrix}.$$

Решение: Намираме две точки от g, например т. $A_1\left(0,-4,-\frac{7}{3}\right)$ и т. $A_2(1,0,-3)$. Тогава уравнението на правата има вида:

$$g\!:\ \frac{x}{1}=\frac{y+\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{z+4}{1}.$$

Следователно $|d(P,g)|=|PP_0|$, където $P_0\in g$ и $PP_0\perp g$. Определяме равнината $\alpha:\begin{vmatrix} P\in\alpha \\ \alpha\perp g \end{vmatrix}$. Векторът $\vec{v}(1,7/3,1)\parallel g \ \Rightarrow\ \vec{v}\perp\alpha$. Тогава:

$$\alpha:1.(x-5)+\frac{7}{3}(y-3)+1.(z-5)=0 \ \Rightarrow\ \alpha:3x+7y+3z-51=0.$$

Имаме равенствата:

$$P_0=\alpha\cap g\Rightarrow P_0:\begin{vmatrix} x=\dfrac{y+\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}}=\dfrac{z+4}{1} \\ 3x+7y+3z-51=0 \end{vmatrix} \ \Rightarrow P_0(238/67,399/67,-30/67)$$

11. Дадени са правите $g_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+10}{1}$ и $g_2:\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Докажете, че: *а*) g_1 и g_2 се пресичат; *б*) определете координатите на пресечната им точка; *в*) намерете ъгъла между g_1 и g_2; *г*) напишете уравнението на равнината α, определена от правите g_1 и g_2.

Решение: *а*) $g_1 \times g_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$ и $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = 0$, където $\vec{v}_1 \parallel g_1$, $\vec{v}_2 \parallel g_2$, т. $M_1 \in g_1$, т. $M_2 \in g_2$. От уравненията на правите намираме, че $\vec{v}_1(2,2,1)$, $\vec{v}_2(1,4,-1) \Rightarrow \vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$. Намираме две произволни точки $M_1 \in g_1$ и $M_2 \in g_2$, например $M_1(0,-1,-11.5) \in g_1$, $M_2(0,-34,5) \in g_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(0,-33,16.5)$. Тогава:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \begin{vmatrix} 0 & -33 & 16.5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow g_1 \times g_2 .$$

Отг. *б*) т.$Q(11,10,-6)$; *в*) $45°$; *г*) $\alpha : 2x - y - 2z - 21 = 0$.

12. Дадени са правите $g_1 : \begin{vmatrix} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{vmatrix}$ и $g_2 : \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$.

Докажете, че $g_1 \parallel g_2$.

Решение: $g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$, където $M_1 \in g_1$, $M_2 \in g_2$. Намираме каноничното уравнение на $g_1 : \dfrac{x}{6} = \dfrac{y-10}{-2} = \dfrac{z+18}{8} \Rightarrow \vec{v}_1(6,-2,8) \parallel g_1$. От уравнението на g_2 намираме $\vec{v}_2(3,-1,4) \parallel g_2$. Вижда се, че $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$. Намираме точка $M_3(0,8/3,55/3) \in g_2$. Тогава $\overrightarrow{M_1M_2}(0,-20/3,109/3) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \Rightarrow g_1 \parallel g_2$;

§ 14. Комплексни числа.

14.1. Алгебрична дефиниция на комплексни числа.

Преди да престъпим към изучаването на комплексните числа, ще въведем едно понятие, което играе фундаментална роля в математиката и това е понятието *наредена двойка* от обекти (a,b). При дефинирането на това понятие е необходимо да са изпълнени следните две условия:

– за всяка наредена двойка (a,b) да могат да се определят точно два (не непременно различни) обекта, единият от които a се нарича *първи*, а другия b се нарича *втори* елемент на наредената двойка (a,b);

– за всеки два обекта a и b съществува точно една наредена двойка, така че a да е нейния първи елемент, а b да е нейния втори елемент.

Казваме, че наредените двойки (a,b) и (c,d) са равни и означаваме $(a,b)=(c,d)$, тогава и само тогава, когато $a=c$ и $b=d$.

Комплексно число ще наричаме множеството от всички наредени двойки (a,b), за които са въведени операциите *събиране и умножение*, по следните правила:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b).(c,d)=(a.c-b.d,b.c+a.d).$$

където a, b, c и d са реални числа. Понятията по-голямо и по-малко в множеството на комплексните числа не се дефинират. Операциите събиране и умножение на комплексни числа удовлетворяват следните аксиоми:

1. $z_1+z_2 = z_2+z_1$ - комутативност на събирането

2. $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ - асоциативност на събирането

3. $z+0=z$ - съществува неутрален (нулев) елемент относно събирането

4. $z+z^*=0$ - за всяко комплексно число $z=(a,b)$, съществува единствен противоположен елемент $z^*=(-a,-b)=-z$

5. $z_1.z_2 = z_2.z_1$ - комутативност на умножението

6. $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ - асоциативност на умножението

7. $(z_1+z_2).z_3 = z_1.z_3 + z_2.z_3$ - дистрибутивност на умножението

8. $z_1.0=0$

9. $z.z^{**}=z$ - съществува единствен единичен елемент $z^{**}=(1,0)\equiv 1$.

10. $z.z^*=1$ - съществува единствен противоположен елемент $z^*=\dfrac{1}{z}$, $z\neq 0$.

Нека за краткост означим комплексното число (a,b) с буквата $z=(a,b)$. Тогава a ще наричаме реална част на z и ще бележим с $a=\mathrm{Re}\,z$, а b ще наричаме имагинерна част на z и ще бележим с $b=\mathrm{Im}\,z$.

Комплексното число $\overline{z}=(a,-b)$ ще наричаме *комплексно спрегнато* на числото $z=(a,b)$, като са изпълнени равенствата: $z+\overline{z}=2a$, $z.\overline{z}=a^2+b^2$. В сила са следните свойства на комплексно спрегнатите числа:

1. $\overline{z}_1+\overline{z}_2 = \overline{z_2+z_1}$

2. $\overline{z}_1.\overline{z}_2 = \overline{z_1.z_2}$

3. $z+\overline{z}=2a$

4. $z.\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$

5. $\bar{\bar{z}} = z$

Чрез операциите сума и произведение на комплексни числа, ще дадем определение на обратните на тях операции, а именно разлика и частно. *Разлика* $z_1 - z_2$ *на две комплексни числа* се нарича комплексното число z, такова, че $z + z_2 = z_1$, съответно на наредената двойка $z = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$

Частно $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$ *на две комплексни числа* z_1 и z_2 е такова комплексно число z, за което е изпълнено $z.z_2 = z_1$. Умножавайки последното равенство отляво и отдясно със спрегнатото на z_2, от дадените дефиниции за произведение и равенство (равенство на наредена двойка) на комплексни числа получаваме за реалната и имагинерната част съответно:

$$a = \frac{a_1.a_2 + b_1.b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}, \quad b = \frac{a_2.b_1 + a_1.b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}.$$

Комплексното число съответно на наредената двойка $(0,1)$ се нарича *имагинерна единица* и се означава с $i = (0,1)$. Позовавайки се на правилото за събиране и с помощта на имагинерната единица, можем да запишем произволно комплексно число z във вида:

(14.1) $$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + b.i \;.$$

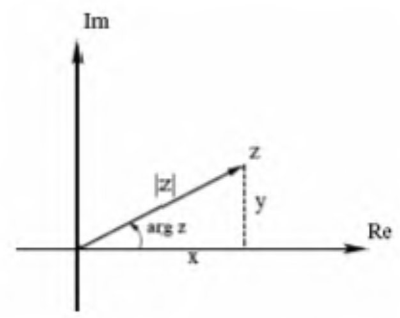
Тази новополучена форма на комплексното число $z = a + b.i$, ще наречем *алгебрична форма*. За втората степен на имагинерната единица i имаме:

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -1,$$

поради което въвеждаме означението $i = \sqrt{-1}$.

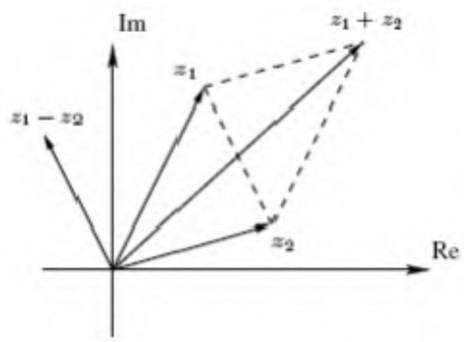
14.2. Геометрично представяне на комплексни числа .

Нека Oxy е правоъгълна декартова координатна система в равнината. Всяко комплексно число (a,b) можем да изобразим, като точка $M(a,b)$в равнината Oxy и обратно, всяка точка от равнината $M(x,y)$ ще бъде образ на комплексно число, за което $x{=}a$, $y=b$. Равнината изобразяваща множеството на комплексните числа се нарича *комплексна* (*Гаусова*) равнина. Оста Ox се нарича реална ос – на нея лежат геометричните образи на реалните числа. Оста Oy се нарича имагинерна ос- на нея лежат геометричните образи на имагинерните числа. Ако разгледаме комплексното число $(a,0)$, то се изобразява като точка от оста Ox . Тогава можем да отъждествим множеството от всички комплексни числа от този вид с множеството на реалните числа $a{=}(a,0)$. Можем да заключим, че множеството на комплексните числа е разширение на множеството на реалните числа или казано по друг начин множеството на реалните числа е подмножество на комплексните числа. При $a = 0$, числото $(0,b)$ се изобразява като точка върху оста Oy и се нарича *чисто имагинерно число*. При $a = 0$ и $b = 0$, числото $(0,0) = 0$ се изобразява в началото на координатната система и е *нула в множеството на комплексните числа*.



Фиг.12

На всяко число $z \neq 0$, може да се съпостави вектор с начало точка $O(0,0)$ и край точка $M(a,b)$. Векторът z_1+z_2, получен по правилото на успоредника, съответства на числото z_1+z_2. Съответствието между комплексните числа и векторите в равнината се пренася и за операцията събиране.



Фиг. 13

Освен чрез правоъгълни координати (a,b) точка M може да се представи и в полярни координати $(|z|,\varphi)$. Ориентираният ъгъл между положителната посока на реалната ос и вектора z, се нарича *аргумент на комплексното число* и се бележи с $\varphi = Arg\,z$. Аргументът се определя с точност до кратно на 2π, защото векторът може да се завърти многократно в една или друга посока на ъгъл 2π и отново ще се върне в същото положение. Най-малката стойност на аргумента, заключена в интервала $[0,2\pi)$, се нарича *главна стойност* и се означава с $\varphi_0 = \arg z$. В сила е следното равенство: $Arg\, z = \arg z + 2k\pi,\quad k \in Z$. Величината $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ се нарича модул на комплексното число z. Изпълнени са равенствата :

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ ,\qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тъй като връзката между правоъгълните и полярните координати е:

$$(14.2)\qquad \begin{matrix} a = r.\cos\varphi \\ b = r.\sin\varphi \end{matrix},\qquad r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|\quad ,$$

то комплексните числа могат да се преобразуват от алгебричен в тригонометричен вид или обратно в зависимост от конкретната задача. Замествайки (14.2) в (14.1) получаваме:

$$(14.3)\qquad z = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi).$$

Тригонометричният вид на комплексното число z се нарича още *полярна форма на z*. В сила е следната *формула на Ойлер*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi,$$

откъдето следва, че :

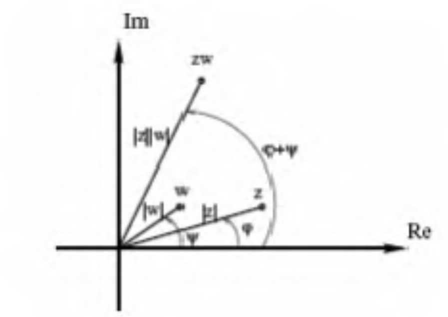
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = |z|.e^{i\varphi}.$$

Ако $z = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ и $\omega = |\omega|(\cos\psi + i.\sin\psi)$ са две комплексни числа, то за произведението им получаваме:

$$z\omega = |z||\omega|(\cos(\varphi + \psi) + i.\sin(\varphi + \psi)).$$

При *умножението* на две комплексни числа $z\omega$ представени в тригонометричен вид модулите им се умножават, а аргументите им се събират. Геометричната интерпретация на операцията умножение е последователно прилагане на хомотетия с център O и коефициент $|\omega|$, и ротация на ъгъл $\psi = \arg\omega$.



Фиг. 15

Този резултат може са бъде обобщен и за повече от две комплексни числа, откъдето следва равенството:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)\text{, където } n \in N\text{,}$$

което се нарича *формула на Моавър*.

При *делението* на комплексни числа, аналогично както и в алгебричен вид умножаваме с комплексно спрегнатото на знаменателя число и получаваме:

$$\frac{z}{\omega} = \frac{|z|}{|\omega|}(\cos(\varphi - \psi) + i.\sin(\varphi - \psi))\,.$$

При делението на комплексни числа в тригонометричен вид модулите им се разделят, а аргументите се изваждат.

Корен n-ти от комплексното число z се нарича такова комплексно число ω n-та степен на което е равна на z или $\sqrt[n]{z} = \omega$, когато $\omega^n = z$. Нека $z = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ и $\omega = |\omega|(\cos\psi + i.\sin\psi)$, тогава от формулата на Моавър следва, че $|\omega|^n(\cos n\psi + i.\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$. От дефиницията за равенство на две комплексни числа следва, че $|\omega|^n = |z|$, откъдето $\sqrt[n]{|z|} = |\omega|$ и $n\psi = \varphi + 2k\pi$, откъдето $\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k \in Z$. На пръв поглед $\sqrt[n]{z}$ приема безброй много различни стойности, но тъй като синус и косинус са периодични функции с период 2π се оказва, че различните стойности са само n на брой и се постигат за $k = 0,1,2,...,(n-1)$. В сила е следното равенство:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i.\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i},\ k = 0,1,2,...,(n-1)\ .$$

Геометричната интерпретация за стойностите на $\sqrt[n]{z}$ е, че те са разположени по върховете на правилен n- ъгълник, вписан в окръжност с център точка O и радиус равен на $\sqrt[n]{|z|}$.

Задачи

1. Представете комплексните числа в алгебричен вид:

а) $\dfrac{1}{1+i}$; *б)* $(3-2i)^2$.

Решение: *а)* $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i}\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$;

б) $(3-2i)^2 = 3^2 - 2.3.2i + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$.

2. Извършете посочените действия:

а) $\overline{(1-i).(2-3i)}(1+2i)$; *б)* $\dfrac{(3-2i)^2}{(2+3i)^3}$.

Решение:

а) $\overline{(1-i).(2-3i)}(1+2i)=\overline{(2-3i-2i+3i^2)}(1+2i)=\overline{(-1-5i)}(1+2i)$

$$=(-1+5i)(1+2i)=-11+3i.$$

Отг. б) $\frac{-2}{13}+\frac{3}{13}i$.

3. Намерете модула на числата:

а) $(3+2i)$; *б)* $\frac{(4+3i)}{(2+i)}$; *в)* $\frac{(2-i)^4}{(2+i)^4}$.

Решение:

а) $|3+2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$; *б)* $\left|\frac{4+3i}{2+i}\right|=\frac{|4+3i|}{|2+i|}=\frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$;

г) $\left|\frac{(2-i)^4}{(2+i)^4}\right|=\left|\frac{(2-i)}{(2+i)}\right|^4=\left(\frac{|(2-i)|}{|(2+i)|}\right)^4=1$, забележете, че $|2+i|=|2-i|$.

4. Намерете модула и аргумента на следните числа:

а) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; *б)* $1+\cos\frac{\pi}{7}+i.\sin\frac{\pi}{7}$.

Решение:

а) $$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{\sqrt{3}}{2},\ |z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,$$

$$\cos\varphi=-\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \arg z=\frac{2\pi}{3}+2k\pi;$$

б) $$a=1+\cos\frac{\pi}{7},\ b=\sin\frac{\pi}{7},\ |z|=\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2}=2.\cos\frac{\pi}{14}.$$

5. Представете в тригонометричен вид: *а)* i; *б)* $1+i\sqrt{3}$.

Решение: Намираме модула и след това главната му стойност

а) $a = 0, b = 1$, $|i| = 1$, $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$, $\sin\varphi = \frac{1}{1} = 1$ $\Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ или

$$i = 1.(\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2}) = e^{i.\frac{\pi}{2}};$$

б) $a = 1, b = \sqrt{3}$, $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

или

$$1 + i\sqrt{3} = 2.(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i.\frac{\pi}{3}}.$$

6. Намерете геометричния смисъл на следните величини:

а) $|z|$ *б*) $\mathrm{Re}|z|$; *г*) $\mathrm{Im}|z|$.

Решение: *а*) Разстоянието от координатното начало до точка z;

б) Разстоянието от мнимата ос да точка z;

г) Разстоянието от реалната ос да точка z.

7. Решете уравнението:

$$z^3 + 1 = 0.$$

Решение:

$$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1(\cos\pi + i.\sin\pi)} = 1(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}), \text{ където } k = 0,1,2$$

$k = 0$, $z_1 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 1$, $z_2 = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

$k = 2$, $z_3 = (\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ще отбележим, че корените z_1 и z_3 са комплексно спрегнати числа.

8. Използвайки формулата на Моавър докажете, че:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
\cos 3\varphi &= \mathrm{Re}(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \\
&= \mathrm{Re}(\binom{3}{0}\cos^3\varphi + \binom{3}{1}\cos^2\varphi . i\sin\varphi + \binom{3}{2}\cos\varphi.(i\sin\varphi)^2 + \binom{3}{3}\cos\varphi.(i\sin\varphi)^3) \\
&= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д. , *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* Москва, Наука, 1983 ;
2. Беклемишев Л. , Петрович А. , Чубаров И. , *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* Москва, Наука, 1987 ;
3. Бойчев Г., Видев В., *Ръководство за решаване на задачи по математика.* Фирма МИТ, Стара Загора, 2000 ;
4. Видев В., *Елементи от линейната алгебра и аналитичната геометрия.* “КОТА принт”, 2011, ISBN 978-954-305-311-7 ;
5. Воеводин В. , Кузнецов Ю. , *Матрицы и вычисления.* Москва, Наука, 1984 ;
6. Гьонов А., Стоев Н., *Сборник от задачи по аналитична геометрия.* Наука и изкуство, 1988 ;
7. Илин В. , Позняк Э. , *Аналитическая геометрия.* Москва, Наука, 1981 ;
8. Илин В. , Позняк Э. , *Линейная алгебра.* Москва, Наука, 1984 ;
9. Кудрявцев В. , Демидович Б. , *Краткий курс висшей математики.* Наука. Москва, 1986 ;
10. Мальцев А., *Основы линейной алгебры*. Москва, Наука, 1970 ;
11. Моденов П. , Пархоменко А. , *Сборник задач по аналитической геометрии.* Высшая школа, 1983 ;
12. Проскуряков И. , *Сборник задач по линейной алгебры.* Москва, Наука, 1984 ;
13. Розенфелд Б. , *Многомерные пространства*. Москва, Наука, 1955 ;
14. Станилов Г., *Аналитична геометрия*. Софтех, София, 1993 ;
15. Фадеев Д. , Соминский И., *Сборник задач по высшей алгебры.* Москва, Наука, 1977;
16. Цубербилер О., *Задачи и упражнения по аналитической геометрии.* Москва, Наука, 1970;
17. Чобанов И., *Векторна алгебра*. София; 1982 .

В. ВИДЕВ, К. КРЪСТЕВ, М. ИВАНОВА

ВИСША МАТЕМАТИКА ПЪРВА ЧАСТ

Българска

Първо издание

Рецензенти: Проф. дтн инж.Георги Тасев

Доц. д-р инж. Калоян Янков

Формат: 64/84/16

Печатни коли: 10

Печат "БПС" ООД

Издателство «Авангард Прима»

ISBN 978-619-160-221-6

СОФИЯ, 2013