



On White II, Wassily Kandinsky 1923

MCE\_IM\_2024-2025

## Aula 2

### Cap. 1 Cinemática

Movimento curvilíneo

#### 1.2 Dinâmica da partícula

Conceito de força. Leis de Newton. Forças de contacto e ligação. Tensões e outras ligações. Força de atrito. Força elástica.

Isabel Malaquias  
[imalaquias@ua.pt](mailto:imalaquias@ua.pt)  
 Gab. 13.3.16

## Movimento circular

Trajectória circular

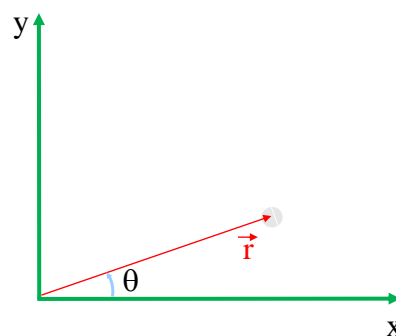
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$x = |\vec{r}| \cos \theta$$

$$y = |\vec{r}| \sin \theta$$

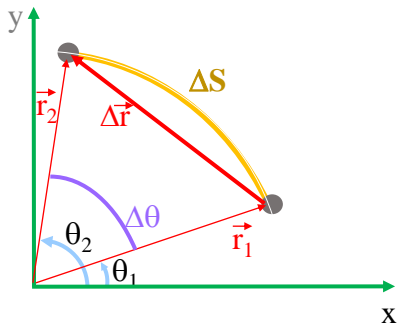
$r$  e  $\theta$  são coordenadas polares

$\theta$  posição angular



MCE\_IM\_2024-2025

Movimento circular



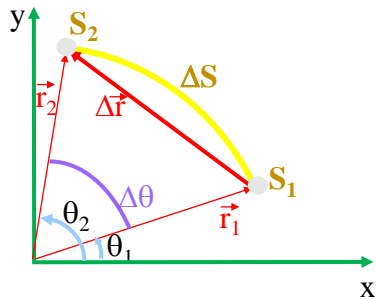
$$\Delta S = r \Delta \theta$$
$$r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

movimento em sentido retrógrado indica o sentido positivo do movimento

MCE\_IM\_2024-2025

Movimento circular

S - posição medida sobre a circunferência

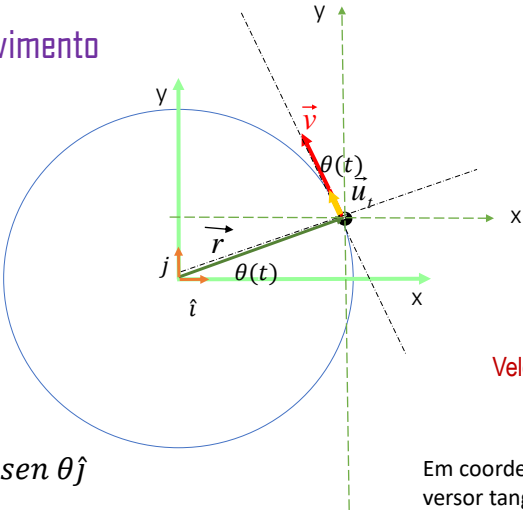


As posições podem ser descritas em termos de r (cartesiana), θ (angular) e s (linear), estando relacionados entre si pela relação

$$s = r \theta$$
$$com\ r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

MCE\_IM\_2024-2025

Velocidade no movimento circular



$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$

Velocidade é sempre tangente à circunferência (trajetória)

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \theta \hat{i} + |\vec{r}| \sin \theta \hat{j}$$

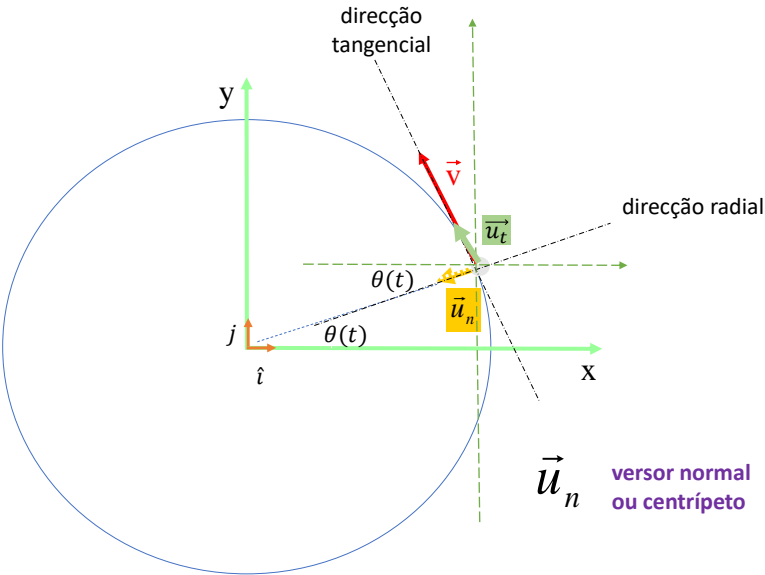
Em coordenadas cartesianas, o versor tangente será dado por:

$$\vec{v} = v[-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}]$$

$$\vec{u}_t = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

MCE\_IM\_2024-2025

Aceleração no movimento circular



$$\vec{u}_n = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}$$

$\vec{u}_n$  versor normal ou centrípeto

MCE\_IM\_2024-2025

## Aceleração no movimento circular

Analiticamente, poderemos chegar à mesma conclusão

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d[v(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i})]}{dt}$$

$$\vec{v} = v[-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}]$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + v\left[-\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\hat{j} - \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\hat{i}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + v\frac{d\theta}{dt}[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}v$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + \frac{v^2}{r}[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}]$$

MCE\_IM\_2024-2025

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + \frac{v^2}{r}[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}] \Leftrightarrow$$

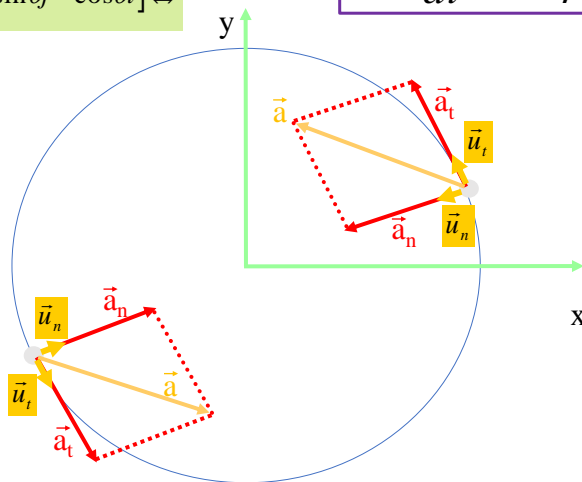
$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

$a_t$  - aceleração tangencial

$a_n$  - aceleração radial

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$



MCE\_IM\_2024-2025

aceleração tangencial - traduz a variação temporal do módulo da velocidade

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

aceleração normal (centrípeta ou radial) - traduz a variação temporal da direcção da velocidade

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

MCE\_IM\_2024-2025

## Questão 2

Uma partícula de massa  $m=1\text{kg}$ , inicialmente em repouso, parte da origem do referencial em  $t=0\text{s}$ , sujeita à ação de uma força dada por:  $\vec{F}(t) = t\hat{x} + 4t\hat{y}$  (N). Determine:

- O vetor posição,  $\vec{r}(t)$ .
- A componente tangencial do vetor aceleração.

MCE\_IM\_2024-2025

## Movimento Circular – Relação entre grandezas lineares e angulares

$$s = R \theta$$

R = constante no movimento circular

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v = \frac{rd\theta}{dt} \Leftrightarrow v = r\omega$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$v = R \omega$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$a = R \alpha$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

MCE\_IM\_2024-2025

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a_t = \frac{d(\omega r)}{dt} \Leftrightarrow a_t = r \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow$$

NB: no movimento circular,  $r$  é constante

$$a_t = r \alpha$$

**$a_t$  – aceleração tangencial (linear)**

**$\alpha$  - aceleração angular  $\text{rad/s}^2$**

### Exemplos

→ **Pêndulo**

→ **Movimento curvilíneo**

MCE\_IM\_2024-2025

## Movimento circular uniforme (m.c.u.)

$$|\vec{v}| = \text{constante}; \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{constante}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \implies \mathbf{a}_t = \mathbf{0}$$

$$\frac{d\vec{u}_n}{dt} \neq \vec{0} \implies a_n \neq 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

- A aceleração normal é constante no m.c.u.
- Não há aceleração tangencial

MCE\_IM\_2024-2025

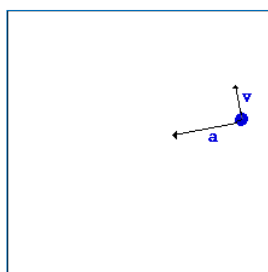
$$a_t = 0 \implies \alpha = \frac{a_t}{r} = 0$$

$$v = cte \implies \omega = \frac{v}{r} = cte$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$1 \text{ volta} \implies \Delta\theta = 2\pi$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \equiv T$$



**T – período (s)**

$$T = \frac{1}{f}$$

<http://surendranath.tripod.com/CirclePlus/CirclePlus.html>

**f - frequência (Hz ou s<sup>-1</sup>)**

MCE\_IM\_2024-2025

### Movimento Circular - Equações cinemáticas

$$\Delta s = \int_0^t v dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$$

$$\Delta v = \int_0^t a_t dt$$

$$v = v_0 + a_t t$$

$$\Delta \theta = \int_0^t \omega dt$$

se  $\alpha = \text{cte}$

$$\Delta \omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

MCE\_IM\_2024-2025

### Questão 3

Um ponto descreve uma circunferência de acordo com a lei  $s = t^3 + 2t^2$ , onde  $s$  é medido em metro ao longo da circunferência e  $t$  vem em segundo.

Em  $t = 2s$ , a aceleração total do ponto é  $16\sqrt{2} \text{ ms}^{-2}$ . Calcule o raio da circunferência.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(t^3 + 2t^2)}{dt} = 3t^2 + 4t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(3t^2 + 4t)}{dt} = 6t + 4$$

Em  $t = 2s$

$$v(t = 2) = 3 \times 2^2 + 4 \times 2 = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$a_t(t = 2s) = 6 \times 2 + 4 = 16 \text{ ms}^{-2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Em  $t = 2s$   $16\sqrt{2} = \sqrt{16^2 + a_n^2}$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow 16 = \frac{20^2}{r} \Leftrightarrow r = 25m$$

MCE\_IM\_2024-2025



## 1ª Lei de Newton ou Lei da Inércia

Uma partícula livre move-se com velocidade constante: movimento em linha recta com velocidade constante ou repouso.

## 2ª Lei de Newton - Lei fundamental

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

*se m for constante*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

MCE\_IM\_2024-2025

## 3ª Lei de Newton – Lei da Acção-Reacção

### As forças surgem aos pares

Para cada acção há uma reacção de igual intensidade mas de sentido oposto.

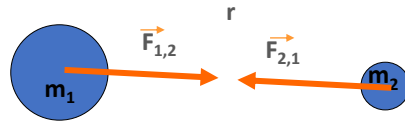
A força exercida no corpo 1 pelo corpo 2 é simétrica da força exercida no corpo 2 pelo corpo 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{Par acção-reacção}$$

**Os pares acção-reacção  
actuaem SEMPRE em corpos  
DIFERENTES**

MCE\_IM\_2024-2025

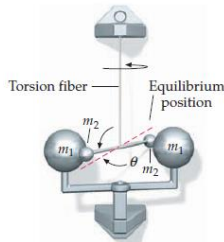
## Lei da Gravitação de Newton



$F_{1,2}$  - Força exercida *na* massa  $m_1$  pela massa  $m_2$

$F_{2,1}$  - Força exercida *na* massa  $m_2$  pela massa  $m_1$

**Forças atractivas!**



$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

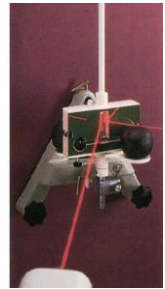
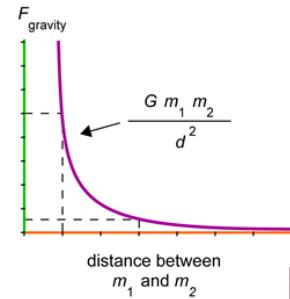
**G - Constante de Gravitação Universal**

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

**Balança de Cavendish - esquema e dispositivo laboratorial**

MCE\_IM\_2024-2025

## Forças a distância



Dispositivo experimental

## Campo Gravítico

$$F_{1,2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

O efeito de  $m_2$  em  $m_1$  é acelerar  $m_1$   
Então podemos escrever

$$F_{1,2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} = m_1 a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{G m_2}{r^2}$$

$$F_{1,2} = m_1 \left[ \frac{G m_2}{r^2} \right]$$

$$F_{1,2} = m_1 g$$

**$g$  é o CAMPO GRAVÍTICO**

É a força por unidade de massa em  $m_1$  devido à massa  $m_2$ .

Todas as massas criam um **campo gravítico  $g(r)$**  no espaço

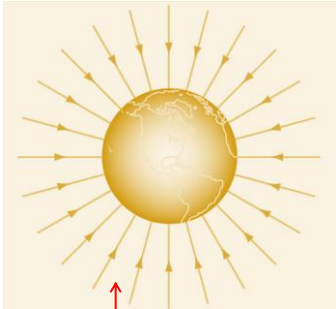
$$g(r) = G \frac{M}{r^2}$$

Vector dirigido para M

$g$  é também a aceleração sofrida por uma massa colocada nesse ponto

MCE\_IM\_2024-2025

Campo gravítico da terra (linhas de campo)



linhas de campo

$g_0 = G \frac{M_T}{r_T^2}$       Na superfície terrestre

$g = G \frac{M_T}{(r_T + h)^2} \Leftrightarrow g = G \frac{M_T}{r_T^2 (1 + \frac{h}{r_T})^2} \Leftrightarrow$

$g = \frac{g_0}{(1 + \frac{h}{r_T})^2}$

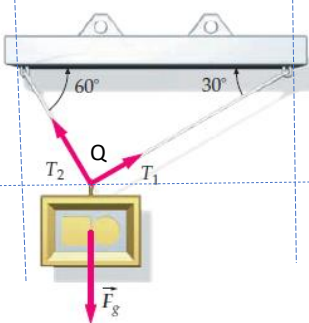
h - altura acima da superfície terrestre

se h = 6 km ... g diminui 2/1000 !!

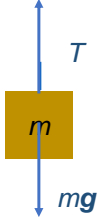
MCE\_IM\_2024-2025

equilíbrio  
 $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$

Massa m em equilíbrio



Massa m



$T = mg$

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}$

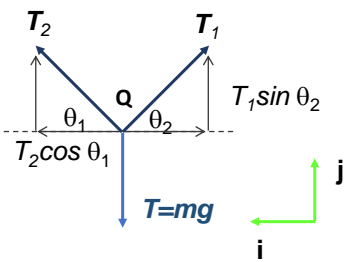
$F_{x,Res.} = T_1 \cos \theta_2 - T_2 \cos \theta_1 = 0$

$F_{y,Res.} = T_1 \sin \theta_2 + T_2 \sin \theta_1 - mg = 0$

equilíbrio

$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$

Ponto Q



MCE\_IM\_2024-2025

Problemas de Dinâmica

Três massas de 5 kg estão colocadas nos vértices de um triângulo equilátero, cujo lado mede 0,25 m.  
Determine a intensidade, direcção e sentido da força gravitacional resultante sobre uma das massas, devido à presença das outras duas.

Sugestão:

$$\mathbf{F}_{2,3} = - F_{2,3} \hat{i}$$

$$\mathbf{F}_{1,3} = - F_{1,3} \cos 60 \hat{i} + F_{1,3} \sin 60 \hat{j}$$

$$\mathbf{R}_3 = (- F_{2,3} - F_{1,3} \cos 60) \hat{i} + F_{1,3} \sin 60 \hat{j} \text{ (N)}$$

MCE\_IM\_2024-2025

Problemas de Dinâmica

2 - Calcule a aceleração dos corpos da figura e a tensão nas cordas. Aplique ao caso em que  $m_1 = 50 \text{ g}$ ,  $m_2 = 80 \text{ g}$  e  $F = 1 \text{ N}$ .

a)

$$R_1 = T - P_1 = T - m_1 g = m_1 a$$

$$R_2 = F - T = m_2 a$$

$$a_1 = a_2 = a$$

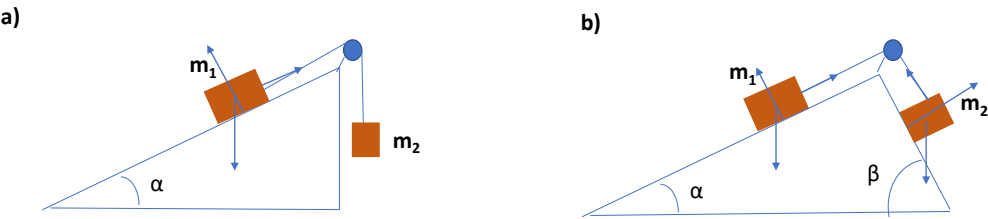
b)

NB: As roldanas fixas servem para mudar a direcção e sentido das forças aplicadas; não diminuem a intensidade das forças aplicadas  
Sugestão: Fazer o diagrama de forças em cada corpo e depois aplicar a 2ª lei de Newton a cada um deles

MCE\_IM\_2024-2025

Problemas de Dinâmica

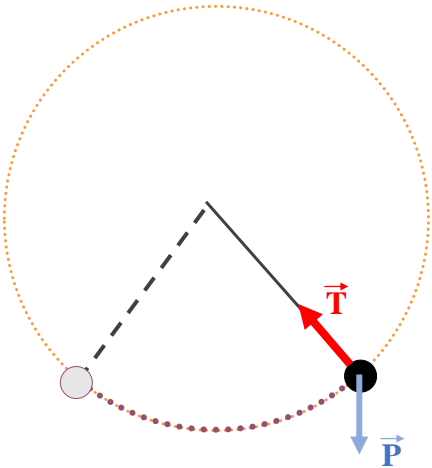
3 - Determine a aceleração com que os corpos na figura se movem e as tensões nas cordas.



NB : Considerem os valores anteriormente disponibilizados para o problema 4

MCE\_IM\_2024-2025

PÊNDULO SIMPLES  
(movimento no plano vertical)



Trajectória circular

Forças:  $\vec{P}$  e  $\vec{T}$

Em qualquer posição:

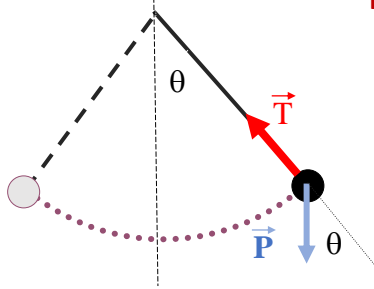
$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Pendulum/Pendulum.html>

MCE\_IM\_2024-2025

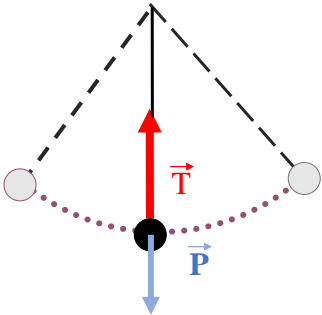
PÊNDULO SIMPLES



Posição extrema ( $v=0$ )

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\begin{cases} |\vec{T}| - |\vec{P}| \cos \theta = m|\vec{a}_n| & |\vec{T}| - |\vec{P}| \cos \theta = m \frac{v^2}{L} = 0 \\ |\vec{P}| \sin \theta = m|\vec{a}_t| & |\vec{P}| \sin \theta = m|\vec{a}_t| \end{cases}$$



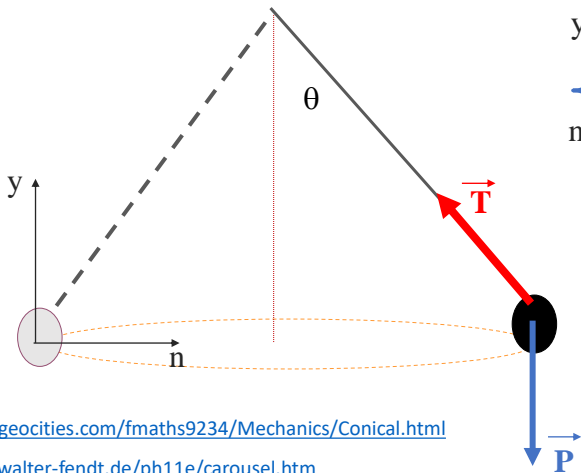
Posição de equilíbrio ( $\theta=0$ )

$$\begin{aligned} |\vec{T}| - |\vec{P}| &= m \frac{v^2}{L} \\ |\vec{a}_t| &= 0 \end{aligned}$$

Valor máximo da tensão!

MCE\_IM\_2024-2025

PÊNDULO CÔNICO  
(movimento circular no plano horizontal)



$$\begin{cases} y & |\vec{T}| \cos \theta = |\vec{P}| \\ n & |\vec{T}| \sin \theta = m|\vec{a}_n| \end{cases}$$

Quanto vale a aceleração tangencial?

<http://www.geocities.com/fmaths9234/Mechanics/Conical.html>

<http://www.walter-fendt.de/ph11e/carousel.htm>

MCE\_IM\_2024-2025

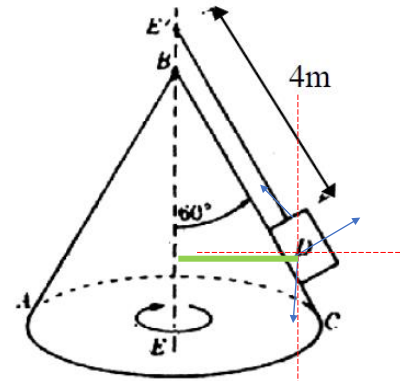
## Problemas de Dinâmica

10 - Um corpo D cuja massa é de 6 kg esta sobre uma superfície cónica A B C e está rodando em torno do eixo EE' com uma velocidade angular de 10 rev/min.

Calcule:

- a velocidade linear do corpo
- a reacção da superfície do corpo
- a tensão no fio
- a velocidade angular necessária para reduzir a reacção do plano a zero.

$$r = L \sin 60^\circ$$



NB: o pêndulo move-se sobre o cone, descrevendo uma trajectória circular. Identificar as forças que actuam sobre o pêndulo e não esquecer que há aceleração centrípeta. Sendo a velocidade angular constante, também a velocidade linear é.

Reacção do plano zero significa que o pêndulo deixa de estar apoiado

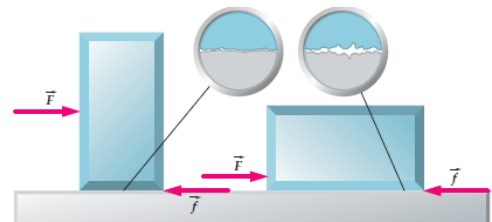
MCE\_IM\_2024-2025

## FORÇA DE ATRITO (sólido)

Superfícies de dois materiais em contacto

A força de atrito  $f$  tende a impedir o movimento relativo das superfícies

Microscopicamente a força tem origem eléctrica  
Lubrificação separa as superfícies



Força de atrito

estático

cinético

MCE\_IM\_2024-2025

## FORÇA DE ATRITO (estático)

Na situação limite, em que a **força de atrito estático atinge o valor máximo**, verifica-se que:

a força de atrito estático máxima é proporcional à normal exercida entre as superfícies

$$f_{a.e.max} = \mu_E N$$

$\mu_E$  é o **coeficiente de atrito estático**, para as duas superfícies

Em geral, temos:

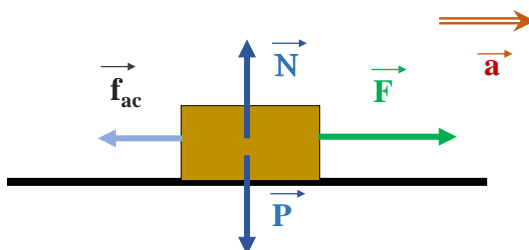
$$f_{a.e.} \leq \mu_E N$$

**Normalmente, a força de atrito não depende da área de contacto**

MCE\_IM\_2024-2025

## FORÇA DE ATRITO (cinético)

Quando o corpo entra em movimento, temos uma situação com atrito cinético e verifica-se que:



a força de atrito cinético é proporcional à normal exercida entre as superfícies

$$f_{a.c.} = \mu_C N$$

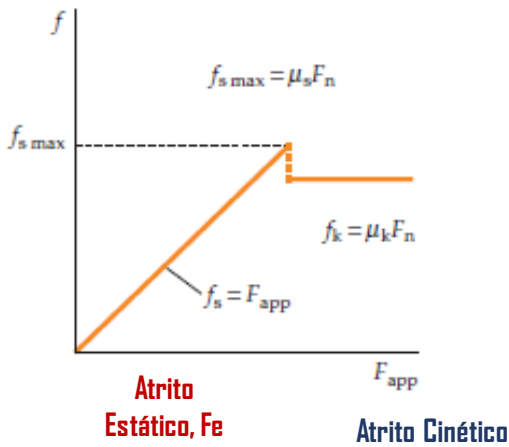
$\mu_C$  é o **coeficiente de atrito cinético**, para as duas superfícies

**Normalmente, a força de atrito não depende da área de contacto**

MCE\_IM\_2024-2025



COMO VARIA A FORÇA DE ATRITO com a força aplicada?



	$\mu_e$	$\mu_c$
Aço sobre aço	0,74	0,57
Cobre sobre aço	0,53	0,36
Borracha sobre cimento	1,0	0,8
Madeira sobre madeira	0,25-0,5	0,2
Gelo sobre aço	0,1	0,03
Teflon sobre teflon	0,04	0,04

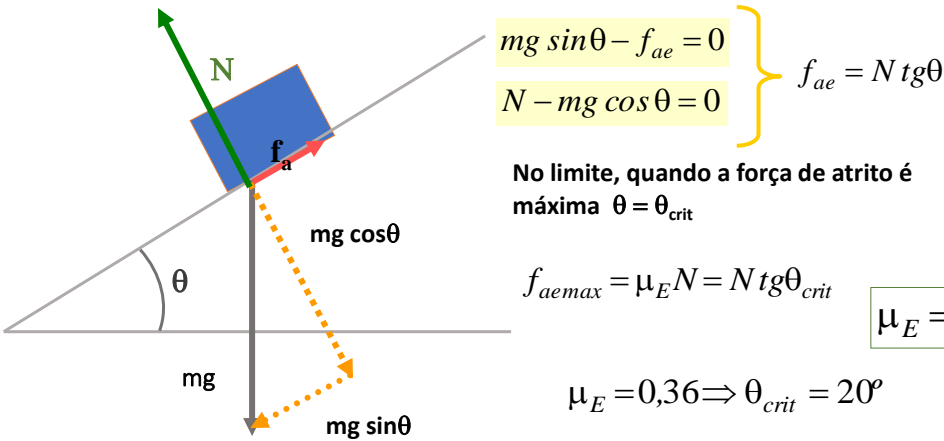
Atrito Cinético < Atrito Estático

MCE\_IM\_2024-2025

Como medir o coeficiente de atrito  $\mu$ ?

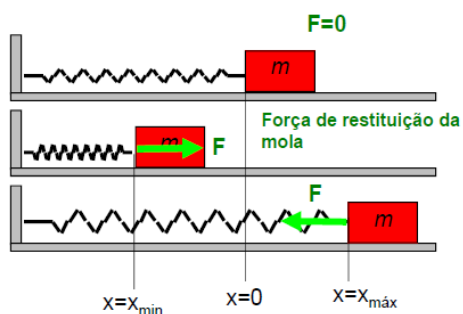
Um corpo é colocado num plano inclinado, ficando em repouso. A inclinação  $\theta$  é aumentada até atingir um valor máximo (crítico)  $\theta_{crit}$  que se relaciona com  $\mu_E$ .

Em repouso  $\theta \leq \theta_{crit}$



MCE\_IM\_2024-2025

## Força elástica



Força elástica ou força restauradora,  $F$

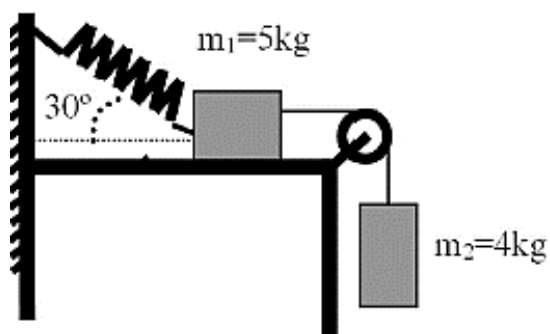
$$F = -kx$$

$k$  = constante da mola

MCE\_IM\_2023-2024

## Problemas de Dinâmica

- 19 - Considere o esquema da figura. A mola tem uma constante de força  $k = 400\text{N/m}$ . Estando o sistema em repouso, e na iminência de se movimentar, **qual o alongamento da mola** (o ângulo mantém-se constante):
- Se não houver atrito.
  - Se o coeficiente de atrito entre  $m_1$  e a mesa for 0,4.



MCE\_IM\_2023-2024



## Problemas de Dinâmica

1. Determine a força de atrito exercida pelo ar sobre um corpo cuja massa é de 0,4 kg se ele cair com uma aceleração de  $9,0 \text{ m/s}^2$ .
2. Um bloco de madeira está sobre um plano inclinado cuja inclinação se pode variar. Aumenta-se gradualmente a inclinação até que o bloco comece a deslizar, para uma inclinação de  $30^\circ$ . Determine o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano.

MCE\_IM\_2024-2025