UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo I C Teste 1

17/11/2023

Avaliação Discreta Duração: 1h30

Nº mec. ________________ **Nome** ____

Comece por escrever o seu número e nome nas quatro folhas do enunciado. Cada folha contém uma questão, a que deve responder na própria folha (frente e verso), justificando claramente a sua resposta. Pode consultar apenas o seu formulário e não pode utilizar qualquer equipamento eletrónico. Boa sorte!

1. (4,0 val.) Considere a função definida por

$$f(x) = \sqrt{\arctan(x) + \frac{\pi}{2}}.$$

   (a) Caracterize a função f, determinando o seu domínio, contradomínio, zeros e estudando a monotonia da função.

   (b) Mostre que f é invertível, determine a expressão que define a sua inversa f^{-1} e caracterize também esta função (domínio, contradomínio, zeros e monotonia).

   (c) Calcule as derivadas de f e f^{-1} e mostre que, com $y = f(x)$, se verifica

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}.$$

Nº mec. ________________ **Nome:** ____

2. (4,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+x)\ln(x) & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, utilizando a Regra de Cauchy e diga, justificando, se f é contínua em 0.

   (b) Determine a função derivada de f, indicando o seu domínio.

   (c) Enuncie o Teorema de Rolle e aplique este teorema para mostrar que existe pelo menos um ponto em que a derivada desta função f se anula.

Nº mec. ________________ **Nome:** ____

3. (6,0 val.) Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx;$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx;$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} \, dx.$

Nº mec. ________________ **Nome:** ____

4. (6,0 val.)

   (a) Determine a função F tal que

   $$F'(x) = \left(\int_{x}^{x^2+1} \mathrm{e}^t \, dt \right)' \quad \text{e} \quad F(0) = 0.$$

   (b) Determine o valor de $k > 0$ de modo a que a área da região definida por

   $$0 \le x \le \sqrt[3]{k} \quad \text{e} \quad 0 \le y \le x^2$$

   seja igual a π.

   (c) Efetue uma mudança de variável no integral

   $$\int_0^{64} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} \, dx$$

   de modo a obter um integral em que a função integranda é um quociente de funções polinomiais (não calcule o integral na nova variável).