Prvi domaći zadatak iz Stohastičkih sistema i estimacije

Tijana Aleksić, 2018/0455

November 2020

Parametri koji su korišćeni u zadacima:

$$P = 2$$
$$Q = 1$$
$$R = 2$$
$$S = 1$$

1 Zadatak 1

Potrebno je simulirati eksperiment iz tabele 1. Eksperiment izvlačenja papirića iz kutije. Na papirićima mogu da se nalaze brojevi 1,2,3,4,5 ili 6. Verovatnoća da se dobije broj 2 je duplo veća nego verovatnoća da se dobije bilo koji od ostalih brojeva,a verovatnoća da je kutija prazna je 0.02.

a)Matematički opisati eksperiment,elementarne ishode, slučajnu promenljivu,analitički odrediti funkciju raspodele $F_X(k)$,funkciju mase $p_X(k) = P(X = k)$, matematičko očekivanje $m = E\{X\}$ i varijansu $\sigma^2 = E\{(X-m)^2\}$

b)Generisati $N = 10^3$ ishoda i prikazati njihov histogram

c)Na osnovu generisanih odbiraka eksperimentalno proceniti funkciju mase verovatnoće $\widehat{p}_X(k)$ kao količnik broja povoljnih ishoda $(X = k)$ i ukupnog broja ishoda.Takodje,odrediti i funkciju raspodele kao :

$$\widehat{F}_X(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} \widehat{p}_X(n) \tag{1}$$

Dobijene funckije predstaviti grafički i to:

Na jednom grafiku predstaviti egzaktnu i eksperimentalnu funkciju raspodele, jednu preko druge.

Na drugom grafiku predstaviti egzaktnu i eksperimentalnu funkciju mase verovatnoce,jednu preko druge

d) Na osnovu generisanih odbiraka eksperimentalno odrediti matematičko očekivanje $(\widehat{m})$ i varijansu $(\widehat{\sigma}^2)$ kao :

$$\widehat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \widehat{m})^2 \tag{3}$$

Tabelarno prikazati dobijene vrednosti zajedno sa analitički odredjenim očekivanjem m i varijansom σ^2

1.1 Rešenje pod a)

Definišimo šta je slučajna promenljiva **X**.Nju definišemo kao izvlačenje papirića iz kutije.

Elementarni dogadjaji $\boldsymbol{\omega_i}$ je bilo koji ishod eksperimenta.U datom primeru možemo definisati 7 ishoda :

$\boldsymbol{\omega_0}$-nema papirića za izvlačenje
$\boldsymbol{\omega_1}$-izvučen papirić na kome je napisano 1
$\boldsymbol{\omega_2}$-izvučen papirić na kome je napisano 2
$\boldsymbol{\omega_3}$-izvučen papirić na kome je napisano 3
$\boldsymbol{\omega_4}$-izvučen papirić na kome je napisano 4
$\boldsymbol{\omega_5}$-izvučen papirić na kome je napisano 5
$\boldsymbol{\omega_6}$-izvučen papirić na kome je napisano 6

Da bi **matematički opisali eksperiment** treba opisati sledeća tri pojma:

1)$\boldsymbol{\Omega}$-prostor verovatnoće koji predstavlja sigurni dogadjaj,tj skup svih elementarnih dogadjaja. U datom zadatku $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ gde je sa 0 označeno da nema papirića koji može da se izvuče, a sa 1:6 dogadjaj da je izvuče papirić sa tim brojem na sebi.

2)$\boldsymbol{\mathcal{F}}$- polje dogadjaja je skup svih dogadjaja iz Ω tako da su zadovoljena dve aksiome A1 i A2, što predstavlja sve podskupe skupa Ω

3)Verovatnoće elementarnih dogadjaja.U datom zadatku znamo da je
$P(\omega_0) = 0.02$
$P(\omega_1) = a = P(\omega_3) = P(\omega_4) = P(\omega_5) = P(\omega_6)$
$P(\omega_2) = 2a$
Gde a nalazimo uz pomoć sledeće jednakosti

$$1 - 0.02 = 7 * a \tag{4}$$

odakle se dobija da je $\boxed{\boldsymbol{a = 0.14}}$
Za dati zadatak **zakon raspodele promenljive X**

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.02 & 0.14 & 0.28 & 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 \end{pmatrix}$$

Funkcija mase verovatnoće je predstavljena kao :

$$p_X(k) : \begin{cases} 0.02 & \text{ako } k = 0 \\ 0.14 & \text{ako } k = 1,3,4,5,6 \\ 0.28 & \text{ako } k = 2 \end{cases}$$

Funkcija gustine verovatnoće je predstavljena kao

$$F_X(x) : \begin{cases} 0 & \text{ako } x < 0 \\ 0.02 & \text{ako } 0 \leq x < 1 \\ 0.16 & \text{ako } 1 \leq x < 2 \\ 0.44 & \text{ako } 2 \leq x < 3 \\ 0.58 & \text{ako } 3 \leq x < 4 \\ 0.72 & \text{ako } 4 \leq x < 5 \\ 0.86 & \text{ako } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{ako } x \geq 6 \end{cases}$$

Matematičko očekivanje $\boldsymbol{m = E\{X\}}$ možemo dobiti iz zakona raspodele množenjem verovatnoća sa vrednošću iz tabele ,t.j.

$$\boldsymbol{m} = 0 * 0.02 + 1 * 0.14 + 2 * 0.28 + 3 * 0.14 + 4 * 0.14 + 5 * 0.14 + 6 * 0.14 = \boxed{3.22} \tag{5}$$

Varijansu možemo dobiti iz $\boldsymbol{varX = E\{X^2\} - m^2}$ i :

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 0.02 & 0.14 & 0.28 & 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 \end{pmatrix}$$

Odakle dobijamo :

$$\boldsymbol{E\{X^2\}} = 0 * 0.02 + 1 * 0.14 + 4 * 0.28 + 9 * 0.14 + 16 * 0.14 + 25 * 0.14 + 36 * 0.14 = \boxed{13.3} \tag{6}$$

Pa je :

$$\boldsymbol{Var(X)} = 13.3 - 10.3684 = \boxed{2.9316} \tag{7}$$

1.2 Rešenje pod b)

Traženi **normalizovani histogram** nalazi se na **slici 1**

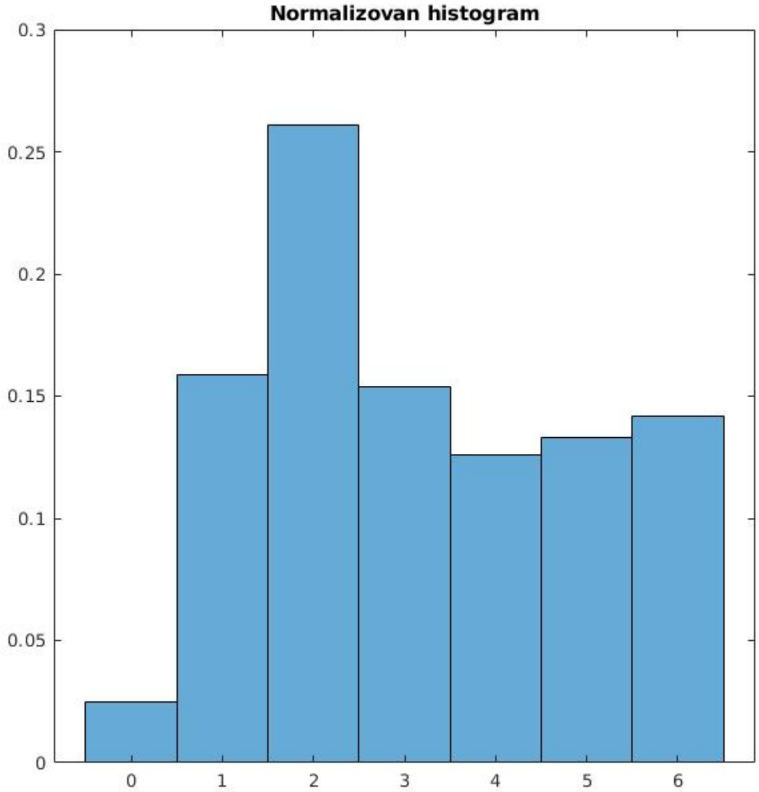

Figure 1: Histogram generisanih ishoda

1.3 Rešenje pod c)

Na **slici 2** i **slici 3** prikazani su traženi grafici:

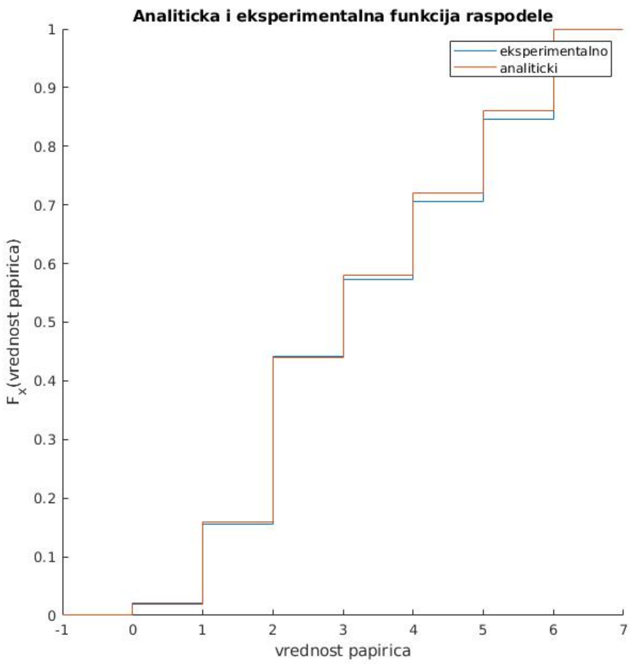

Figure 2: Egzaktna i eksperimenalna funkcija raspodele

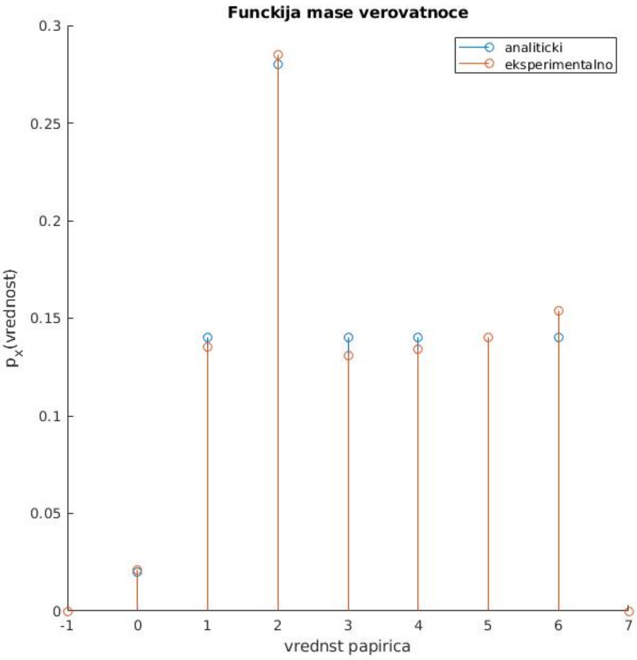

Figure 3: Egzaktna i eksperimenalna funkcija mase verovatnoće

1.4 Rešenje pod d)

U sledećoj tabeli nalaze se tražene vrednosti

	očekivano	eksperimentalno
m	3.22	3.2580
σ^2	2.9316	3.0305

1.5 Kod za prvi zadatak

```
%izracunajmo prvo verovatnocu da je izvucen jedan papiric, ona je q
q=1-0.02;


%znamo da se dobije 2 je duplo veca sansa od ostalih papirica sto nam
%izjednacava vervoatnocu kao da dodamo jos jedan papiric sa dvojkom na sebi
%Od q uniformno su rasporedjeni 1 2 2 3 4 5 6  sto ih je 7 pa je vrv za
%jedan od papirica
%vrv1 je verovatnoca bilo kog osim 2 papirica a vrv2 je za dvojku
vrv1=q/7;
vrv2=2*vrv1;



%X nam predstavlja koje sve mogucnosti moze uzeti promenljiva X koja je
%izvlacenje papirica iz kutije pri cemu 0 znaci da nema papirica te nema
%papirica za izvuci

X=[0 1 2 3 4 5 6];


%ovo je kvadriranje matrice
X2=X.^2;

%ovo su verovatnoce koje odgovaraju datim vredostima u X, po tekstu zadatka
fgv=[0.02 vrv1 vrv2 vrv1 vrv1 vrv1 vrv1];

%radi lakseg predstavljanja funkcije raspodele
F0=0;
```

```
F1=fgv(1);
F2=sum(fgv(1:2));
F3=sum(fgv(1:3));
F4=sum(fgv(1:4));
F5=sum(fgv(1:5));
F6=sum(fgv(1:6));
F7=sum(fgv(1:7));
%Funkcija raspodele promenljive X
F=[0 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 1]



%po definiciji iz verovatnoce ovome je jednaka srednja vrednost
m=sum(X.*fgv);

%izracunavamo prvo vaarijansu kao E(X^2)-(E(X))^2
varX=sum(X2.*fgv)-m^2;


%pravljenje slucajne promenljive sa datim verovatnocama
%funkcija rand daje random broj uniformno rasporedjen
%radnomi
n=1000;
%kreiramo n razlicitih uniformnih brojeva
randomi = rand(1,n);

%na osnovu uniformne raspodele skaliramo na intervale 0:6
log1=(randomi>0.02 & randomi ≤0.16);
log2=(randomi>0.16 & randomi ≤0.44).*2;
log3=(randomi>0.44 & randomi ≤0.58).*3;
log4=(randomi>0.58 & randomi ≤0.72).*4;
log5=(randomi>0.72 & randomi ≤0.86).*5;
log6=(randomi>0.86 & randomi ≤1).*6;
%matrica sa brojevima od 0 do 6 koji su se dobili u  1000 puta
Rand0123456=log1+log2+log3+log4+log5+log6;

%ukupan broj dobijenih 0 1 2 3 4 5 6
sum0=sum(randomi<0.02);
sum1=sum(randomi>0.02 & randomi ≤0.16);
sum2=sum(randomi>0.16 & randomi ≤0.44);
sum3=sum(randomi>0.44 & randomi ≤0.58);
sum4=sum(randomi>0.58 & randomi ≤0.72);
sum5=sum(randomi>0.72 & randomi ≤0.86);
sum6=sum(randomi>0.86 & randomi ≤1);

a=Rand0123456;
%crtanje histograma
figure,title('Histogram zadatak 1'),histogram(Rand0123456,'Normalization','probability');

%procena funkcija mase verovatnoce
Procenafgv=[sum0/n sum1/n sum2/n sum3/n sum4/n sum5/n sum6/n]
Fp0=0;
Fp1=Procenafgv(1);
Fp2=sum(Procenafgv(1:2));
Fp3=sum(Procenafgv(1:3));
Fp4=sum(Procenafgv(1:4));
Fp5=sum(Procenafgv(1:5));
Fp6=sum(Procenafgv(1:6));
Fp7=sum(Procenafgv(1:7));
ProcenaF=[0 Fp1 Fp2 Fp3 Fp4 Fp5 Fp6 Fp7 1];

%napomena za -1 i 7 : ubaceno je da bi se lepo video grafik "promene" u 0 i
%6 tj da se zna da je pre toga 0 a posle toga 1
xosa=[-1 0 1 2 3 4 5 6 7]
%F
figure(2);
hold on;
stairs(xosa,ProcenaF);stairs(xosa,F);
legend('eksperimentalno','analiticki');
title('Analiticka i eksperimentalna funkcija raspodele');
xlabel('vrednost papirica');
ylabel('F_x(vrednost papirica)');


analiticki=[0 0.02 0.14 0.28 0.14 0.14 0.14 0.14 0];
dobijeno=[0 sum0/n sum1/n sum2/n sum3/n sum4/n sum5/n sum6/n 0];
```

```
%fgv
hold on;
stem(xosa,analiticki);
stem(xosa,dobijeno);
legend('analiticki','eksperimentalno');
title('Funckija mase verovatnoce');
ylabel('p_x(vrednost)');
xlabel('vrednst papirica');

%matematicko ocekivanje eksperimenta
ProcenaM=sum(Rand0123456)/n;

%varijansa eksperimenta
ProcenaVarX=sum((Rand0123456-ProcenaM).^2)/(n-1);
```

2 Zadatak 2

Potrebno je generisati odbirke slučajne promenljive Y čija je funkcija gustine verovatnoće data u tabeli 2.
Na osnovu tabele i parametra Q=1. Slika u tabeli je prikazana na **slici 4**

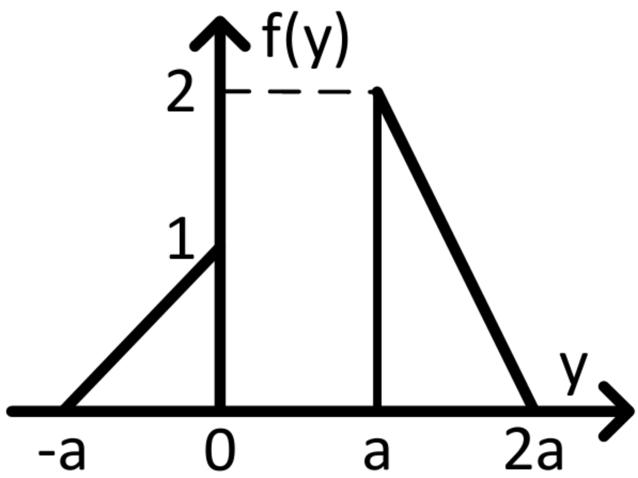

Figure 4: Q=1,iz tablice za drugi zadatak

a)Izračunati vrednost realne konstante a.
b)Odrediti funkciju $Y = g(X)$ kojom se postiže željena raspodela slučajne promenljive Y.Ovde je X uniformno raspodeljena slučajna promenljiva na intervalu $[0, 1]$
c)Generisati $N = 10^5$ odbiraka slučajne promenljive Y i na osnovu njih proceniti odgovarajuću gustinu verovatnoće koristeći histogram. Na istom grafiku prikazati i analitičku funkciju gustine verovatnoće datu u tabeli.
d)Analitički odrediti matematičko očekivanje i varijansu slučajne promenljive Y i uporediti ih sa eksperimentalno procenjenom vrednošću ovih parametara.

2.1 Rešenje pod a)

Iz uslova verovatnoće da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1 \tag{8}$$

Možemo dobiti $\boldsymbol{a}$ iz :

$$1 = \frac{a}{2} + \frac{2a}{2} = \frac{3a}{2} \tag{9}$$

$$\boxed{a = \frac{2}{3}} \tag{10}$$

2.2 Rešenje pod b)

Funkcija gustine verovatnoće promenljive Y sa grafika moze se predstaviti **analitički** kao :

$$\boldsymbol{f_Y(y)} : \begin{cases} \frac{3}{2}x+1 & \text{, ako } y\epsilon[-\frac{2}{3},0] \\ -3x+4 & \text{, ako } y\epsilon[\frac{2}{3},\frac{4}{3}] \\ 0 & \text{, ostalo} \end{cases}$$

Prvo gledajmo interval $\boldsymbol{y\epsilon[-2/3,0]}$

$$\boldsymbol{F_Y(y)} = \int_{-2/3}^{y} \left(\frac{3}{2}a+1\right) da = \boxed{\frac{3}{4}y^2+y+\frac{1}{3}} \tag{11}$$

Datu funkciju izjednačimo sa x i izrazimo y preko x.

$$\frac{3}{4}y^2+y+\frac{1}{3}=x$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2+2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}y+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=x$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=x$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{x}$$
$$\frac{3}{2}y+1=\sqrt{3x}$$

Odakle je $\mathbf{y(x)}$:

$$\boxed{y=\frac{2(\sqrt{3x}-1)}{3}} \tag{12}$$

Zamenjujući granice dobijamo granice za x:

$$-\frac{2}{3}\le\frac{2(\sqrt{3x}-1)}{3}\le 0$$
$$-2\le 2(\sqrt{3x}-1)\le 0$$
$$-\frac{2}{2}\le(\sqrt{3x}-1)\le 0$$
$$-1+1\le\sqrt{3x}\le 1$$
$$0\le 3x\le 1$$

Tada dobijamo da su granice za X:

$$\boxed{0\le x\le\frac{1}{3}} \tag{13}$$

Ukoliko gledamo drugi interval $\boldsymbol{y\epsilon[\frac{2}{3},\frac{4}{3}]}$

$$\boldsymbol{F_Y(y)} = \frac{1}{3}+\int_{2/3}^{y}(-3a+4)da = \boxed{-\frac{3}{2}y^2+4y-\frac{5}{3}} \tag{14}$$

Datu funkciju izjednačimo sa x i izrazimo y preko x.

$$-\frac{3}{2}y^2 + 4y - \frac{5}{3} = x$$
$$\frac{3}{2}y^2 - 4y + \frac{5}{3} = -x$$
$$-x = (\frac{\sqrt{6}}{2}y)^2 - 2\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}}{2}y + \frac{16}{6} - \frac{16}{6} + \frac{5}{3}$$
$$1 - x = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}y - \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2$$
$$-\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{6}}{2}y - \frac{4}{\sqrt{6}}$$
$$-\sqrt{6-6x} = 3y - 4$$

Odakle dobijamo konačno:

$$\boxed{y = \frac{-\sqrt{6-6x}+4}{3}} \tag{15}$$

Zamenjujući granice dobijamo druge granice za X:

$$\frac{2}{3} < \frac{-\sqrt{6-6x}+4}{3} \leq \frac{4}{3}$$
$$2 < -\sqrt{6-6x} + 4 \leq 4$$
$$-2 < -\sqrt{6-6x} \leq 0$$
$$4 > 6 - 6x \geq 0$$
$$-2 > -6x \geq -6$$

$$\frac{1}{3} < x \leq 1 \tag{16}$$

Odavde možemo zaključiti da je funkcija $\boldsymbol{G(X)}$ jednaka sa:

$$G(x) : \begin{cases} \frac{2(\sqrt{3x}-1)}{3} & \text{ako } x\epsilon[0, \frac{1}{3}] \\ \frac{-\sqrt{6-6x}+4}{3} & \text{ako } x\epsilon(\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

2.3 Rešenje pod c)

Na **slici 5** prikazan je **histogram** generisanih slučajnih promenljivih i **funckija gustine verovatnoće** koja je dobijena analitički i data izrazom :

$$\boldsymbol{f_Y(y)} : \begin{cases} \frac{3}{2}x + 1 & \text{, ako } y\epsilon[-\frac{2}{3}, 0] \\ -3x + 4 & \text{, ako } y\epsilon[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}] \\ 0 & \text{, ostalo} \end{cases}$$

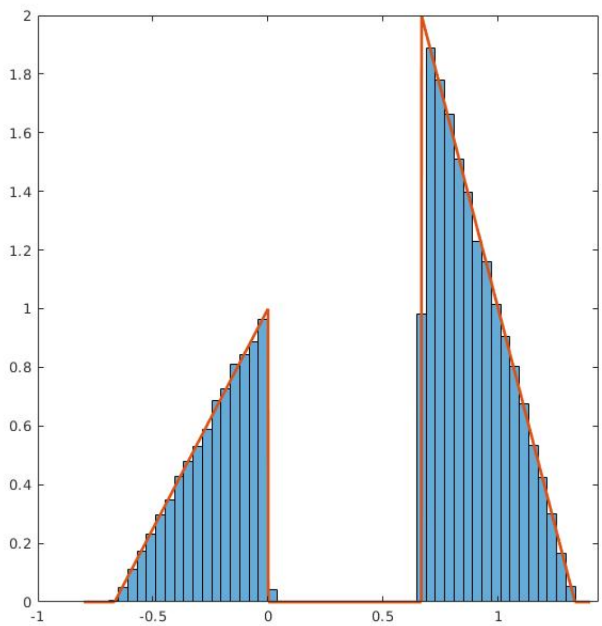

Figure 5: Histogram generisanih ishoda i funkcija gustine verovatnoće

2.4 Rešenje pod d)

Definišimo dva Integrala I_1 i I_2:

$$I_1 = \int_{-\frac{2}{3}}^{0} \left(\frac{3}{2}x^2 + x \right) dx = -\frac{2}{27} \tag{17}$$

$$I_2 = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} (-3x^2 + 4x) dx = \frac{16}{27} \tag{18}$$

Analitički dobijeno matematičko očekivanje može se dobiti kao:

$$\boldsymbol{m} = I_1 + I_2 = -\frac{2}{17} + \frac{16}{27} = \frac{14}{27} = \boxed{0.5185} \tag{19}$$

Za varijansu prvo izračunajmo očekivanje $\boldsymbol{E\{Y^2\}}$
Neka su:

$$I_3 = \int_{-\frac{2}{3}}^{0} \left(\frac{3}{2}x^3 + x^2 \right) dx = \frac{2}{81} \tag{20}$$

$$I_4 = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} (-3x^3 + 4x^2) dx = \frac{44}{81} \tag{21}$$

Odavde je varijansa $\boldsymbol{VarY}$ jednaka sa:

$$\boldsymbol{VarY} = I_3 + I_4 - m^2 = \frac{46}{81} - 0.2688 = \boxed{0.2991} \tag{22}$$

Iz simulacije dobijene vrednosti za procenu matematičkog očekivanja i varijanse upisane su u sledeću tabelu

	očekivano	eksperimentalno
m	0.5185	0.5201
σ^2	0.2991	0.2973

2.5 Kod za drugi zadatak

```
% skiciranje grafika
t=-0.8:0.001:1.4;
b=zeros(1,2201)
i=0;
for y=-0.8:0.001:1.4
    i=i+1;
    if(y≤-2/3)
        b(i)=0;
    end
    if(y>-2/3 && y≤0)
        b(i)=3/2*y+1;
    end
    if(y>0 && y<2/3)
        b(i)=0;
    end
    if(y≥2/3 && y≤4/3)
        b(i)=-3*y+4;
    end
    if(y>4/3)
        b(i)=0;
    end
end
figure,plot(t,b)

% Iz racuna znamo da je a*1/2+2*a/2 =1 odakle je

a=2/3;

%c)Generisati N=10^5 odbiraka slucajne pormenljive Y i na osnovu njih
%proceniti pdgpvarajucu fgv koristeci histogram. Na istom grafiku prikazati
%i analiticku fgv iz tabele.
N2=10^5;
Rand2=rand(1,N2);
for x=1:N2
    if(Rand2(x)≤1/3 && Rand2(x)≥0)
        Rand2(x)=2*(sqrt(3*Rand2(x))-1)/3;
    elseif(Rand2(x)≤1 && Rand2(x)>1/3)
        Rand2(x)=(4-sqrt(6-6*Rand2(x)))/3;
    end
end

figure,histogram(Rand2,50,'Normalization','pdf');
hold all
plot(t,b,'LineWidth',2)

%matematicko ocekivanje Y procena
ProcenaM2=sum(Rand2)/N2

%varijansa Y
ProcenaVarY=sum((Rand2-ProcenaM2).^2)/(N2-1)
```

3 Zadatak 3

Generisati $N = 10^5$ odbiraka dvodimenzionalnog normalno raspodeljenog slučajnog vektora $X = [X_1 X_2]^T$ sa nezavisnim komponentama koje imaju nulto matematičko očekivanje i varijanse σ_1^2i σ_2^2 date u tabeli 3.

Iz tabele tri i na osnovu parametara $R = 2$ date vrednosti su jednake

$$\sigma_1^2 = 9, \sigma_2^2 = 4 \tag{23}$$

Iz tabele 4 i na osnovu parametara $S = 1$ vrednosti koje će se koristi su i :

$$m_Y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

i

$$R_Y = \begin{bmatrix} 4 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

a)Izdeliti ravan (x_1, x_2) na $20x20$ elementarnih površina i eksperimentalno proceniti vrednosti funkcije gustine verovatnoće $\widehat{f}(x_1, x_2)$ u tačkama koje odgovaraju centrima ovih površina. Skicirati jedne ispod drugih eksperimentalno odredjenu i analitički dobijenu funkciju gustine verovatnoće.

b)Analitički odrediti matricu A i vektor b tako da slučajan vektor $Y = AX + b$ ima očekivanje m_Y i kovariocionu matricu R_Y iz tablice 4. Odrediti koeficijent korelacije ρ izmedju komponenti slučajnog vektora Y. Usvojiti da matrica A ima trougaonu formu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \tag{26}$$

c)Na osnovu generisanih odbiraka slučajnog vektora X i dobijenih vrednosti A i b iz prethodne tačke generisati odbirke slučajnog vektora Y i eksperimentalno proveriti da li vektor očekivanja i kovarijaciona matrica imaju tražene vrednosti.

d)Ponoviti postupak iz tačke b) za iste vrednosti $m_{Y_1}, m_{Y_2}, \sigma_{Y_1}, \sigma_{Y_2}$, ali za promenjen koeficijent korelacije: $\rho = 0$ i $\rho = 0.8$. Generisati odbirke odgovaraćih slučajnih vektora. Predstavitina tri grafika odbirke sva tri slučajna vektora (za ρ koje odgovara vektoru Y, zatim za $\rho = 0$ i $\rho = 0.8$)

3.1 Rešenje pod a)

Odredimo prvo analitički **funkciju gustine verovatnoće**.

Ovu funkciju posmatramo kao zajedničku finkciju gustine verovatnoće dve slučajne promenljive sa normalnim raspodelama.Tada se ova funkcija u opštem obliku izračunava na sledeći način. Definišimo zbog preglednosti eksponent sa:

$$\boldsymbol{exp} = -\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \tag{27}$$

A potom i celu funkciju gustine verovatnoće:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\boldsymbol{exp}} \tag{28}$$

Zamenimo paramatre koje znamo da su jednaki nuli radi uprošćenja izraza,$\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = 0$ i pošto su X_1 i X_2 nezavinse znamo da su one nekorelisane što povlači i činjenicu da je $\rho = 0$,pa je uprošćeni izraz za funkciju gustine verovatnoće :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{exp_2} \tag{29}$$

gde je :

$$exp_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right) \tag{30}$$

Na **slikama 6 i 7** prikazani su traženi grafici

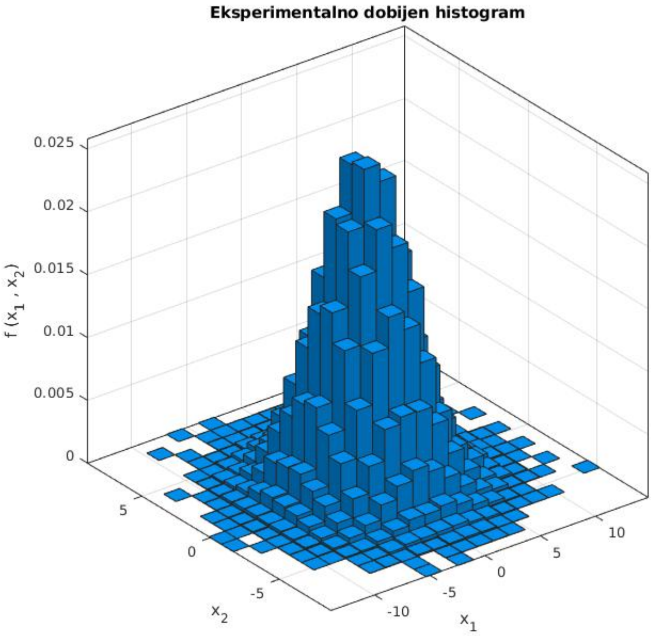

Figure 6: Histogram dobijen eksperimentalno za funkciju gustine verovatnoće

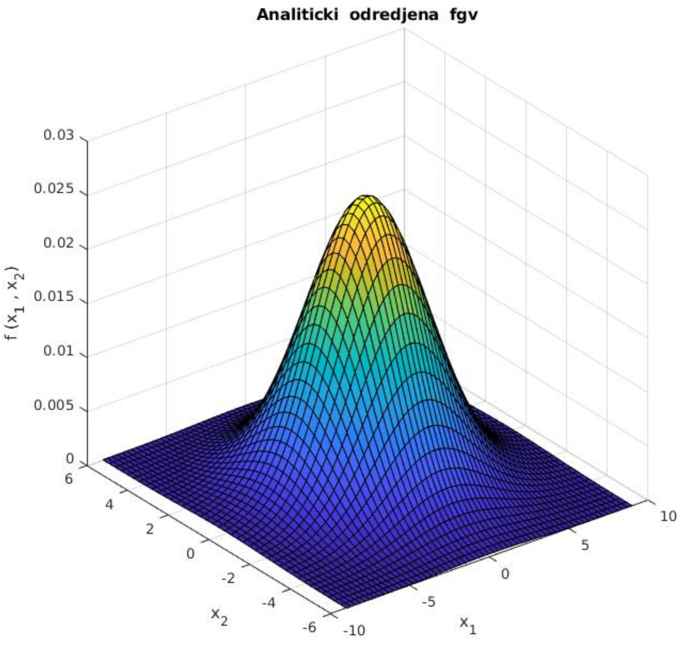

Figure 7: Analitička funkcija gustine verovatnoće

3.2 Rešenje pod b)

Iz **kovarijacione matrice** na osnovu date jednakosti:

$$\boldsymbol{R_Y} = \begin{bmatrix} Var(Y_1) & Cov(Y_1, Y_2) \\ Cov(Y_2, Y_1) & Var(Y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Možemo izvući sledeće bitne parametre:

$$Var(Y_1) = 4$$

$$Var(Y_2) = 1$$

$$Cov(Y_1, Y_2) = -0.8$$

Date parametre možemo upotrebiti za izračunavanje koeficijenta korelacije koji iznosi:

$$\boldsymbol{\rho(Y_1, Y_2)} = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_2)}} = \frac{-0.8}{2} = \boxed{-0.4} \tag{32}$$

Što se tiče matrice **A** i vektora **b**, možemo uvesti sledeću jednakost:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 \\ a_{22}X_2 + b_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Da bi našli vektor b potrebno je gledati očekivanje $E\{Y\}$ i tada dobijamo da je vektor b zapravo jednak:

$$\boxed{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = m_Y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}} \tag{34}$$

t.j. vrednosti b_1 i b_2 su:

$$\boxed{b_1 = -2}$$

$$\boxed{b_2 = 1}$$

Što se tiče parametara matrice **A** njih dobijamo iz sledećih jednačina

$$\boldsymbol{Var(Y_1)} = Var(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1) = a_{11}^2 Var(X_1) + a_{12}^2 Var(X_2) + 0 = \boxed{9a_{11}^2 + 4a_{12}^2} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{Var(Y_2)} = Var(a_{22}X_2 + b_2) = \boxed{a_{22}^2 Var(X_2)} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{Cov(Y_1, Y_2)} = E\{Y_1Y_2\} - E\{Y_1\}E\{Y_2\} \tag{37}$$

$$= E\{(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1)(a_{22}X_2 + b_2)\} - E\{a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1\}E\{a_{22}X_2 + b_2\}$$

$$= a_{12}a_{22}E\{X_2^2\} + b_1b_2 - b_1b_2 = \boxed{a_{12}a_{22}Var(X_2)}$$

Dakle sistem jednačina koji treba resiti je:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Var(X_1)a_{11}^2 + Var(X_2)a_{12}^2} &\boldsymbol{= Var(Y_1)} \\ \boldsymbol{Var(X_2)a_{22}^2} &\boldsymbol{= Var(Y_2)} \\ \boldsymbol{Var(X_2)a_{12}a_{22}} &\boldsymbol{= Cov(Y_1, Y_2)} \end{aligned} \tag{38}$$

Zamenom vrednosti za $\boldsymbol{Var(X_1)}$,$\boldsymbol{Var(X_2)}$,$\boldsymbol{Var(Y_1)}$,$\boldsymbol{Var(Y_2)}$ i $\boldsymbol{Cov(Y_1, Y_2)}$, dobijamo sistem sa tri nepoznate:

$$\begin{aligned} 4 = 9a_{11}^2 + 4a_{12}^2 \\ 4a_{22}^2 = 1 \\ 4a_{12}a_{22} = -0.8 \end{aligned} \tag{39}$$

čija su rešenja :

$$\boxed{a_{11} = \frac{\sqrt{336}}{30} = 0.611}$$

$$\boxed{a_{12} = -\frac{2}{5} = -0.4}$$

$$\boxed{a_{22} = \frac{1}{2} = 0.5}$$

Pa je matrica **A** jednaka

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.611 & -0.4 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{40}$$

3.3 Rešenje pod c)

Eksperimentalno utvrdjene vrednosti **kovarijacione matrice** i **vektora očekivanja** dobijene pomoću matlaba su :

$$m_Y = \begin{bmatrix} -1.9985 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$R_Y = \begin{bmatrix} 4.0082 & -0.7932 \\ -0.7932 & 0.9920 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Odakle možemo zaključiti da se eksperimentalno dobijeni rezultati poklapaju sa zadatim vrednostima.

3.4 Rešenje pod d)

Promenom vrednosti za ρ menjamo vrednost kovarijanse i to na sledeći način za date vrednosti:

1. Ako je $\boldsymbol{\rho = 0}$ tada je i $\boxed{\boldsymbol{Cov(Y_1, Y_2) = 0}}$

Zamenom vrednosti dobijamo sistem jednačina :

$$\begin{aligned} 9a_{11}^2 + 4a_{12}^2 &= 4 \\ 4a_{22}^2 &= 1 \\ 4a_{12}a_{22} &= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Iz srednje jednačine izračunavamo da je :

$$\boxed{a_{22} = \frac{1}{2}}$$

Ubacivanjem prethodne vrednosti u treću jednačinu zaključujemo da je :

$$\boxed{a_{12} = 0}$$

A zamenom vrednosti a_{12} u prvu jednačinu dobijamo vrednost :

$$\boxed{a_{11} = \frac{2}{3}}$$

Odavde je matrica A_1 jednaka:

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{44}$$

2.Ako je $\boldsymbol{\rho = 0.8}$ tada je

$$\boldsymbol{Cov(Y_1, Y_2)} = 0.8\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_2)} = 2 * 0.8 = \boxed{\mathbf{1.6}} \tag{45}$$

Zamenom vrednosti dobijamo sistem jednačina :

$$\begin{aligned} 9a_{11}^2 + 4a_{12}^2 &= 4 \\ 4a_{22}^2 &= 1 \\ 4a_{12}a_{22} &= 1.6 \end{aligned} \tag{46}$$

Iz srednje jednačine izračunavamo da je :

$$\boxed{a_{22} = 0.5}$$

Ubacivanjem prethodne vrednosti u treću jednačinu zaključujemo da je :

$$\boxed{a_{12} = 0.8}$$

A zamenom vrednosti a_{12} u prvu jednačinu dobijamo vrednost :

$$\boxed{a_{11} = 0.4}$$

Odavde je matrica $\boldsymbol{A_2}$ jednaka:

$$\boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Traženi grafici su na sledećim slikama:

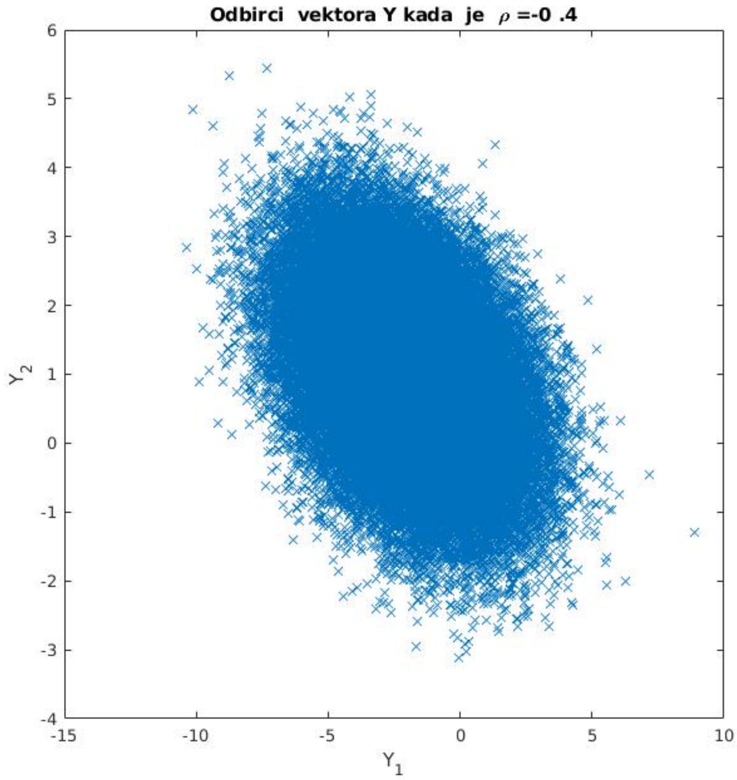

Figure 8: Odbirci slučajnog vektora sa $\rho = -0.4$

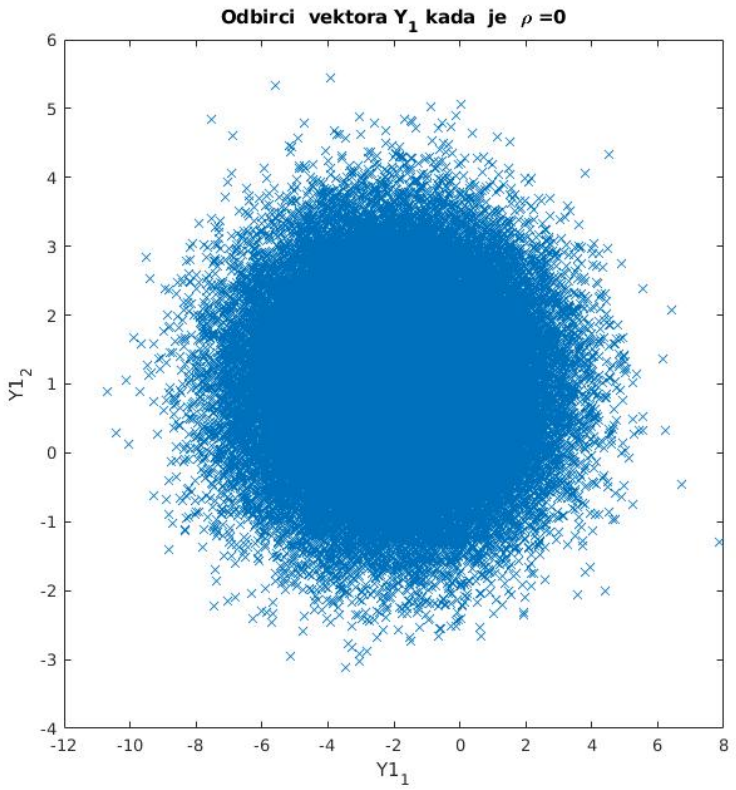

Figure 9: Odbirci slučajnog vektora sa $\rho = 0$

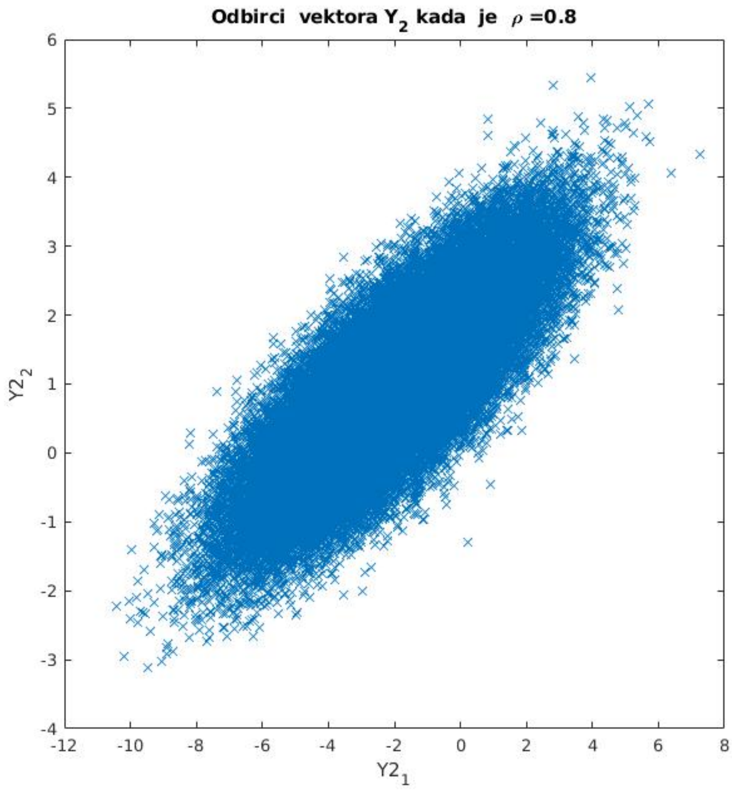

Figure 10: Odbirci slučajnog vektora sa $\rho = 0.8$

3.5 Kod za treći zadatak

```
%Zadatak 3
N3=10^5;
sigma1=[3 2];
mu1=[0 0];

X1=randn(1,N3).*sigma1(1)+mu1(1);
X2=randn(1,N3).*sigma1(2)+mu1(2);
X=[X1;X2]';

%histogram ove dve promenljive
figure,histogram2(X1,X2,20 ,'Normalization','pdf');
xlabel ('x_1') ;  ylabel ('x_2') ;  zlabel ('f (x_1 , x_2)') ;
title('Eksperimentalno dobijen histogram') ;

%analiticki  odredjena  fgv
xa1 = -3 * sigma1(1) : 0.3 : 3 * sigma1(1) ;
xa2 = -3 * sigma1(2) : 0.3 : 3 * sigma1(2) ;
[Xa1,Xa2] = meshgrid (xa1 , xa2 ) ;
Xanaliticki = [Xa1;Xa2]';
F = 1/(2*pi*sigma1(1)*sigma1(2) )*exp (-( Xa1.^2)*0.5/( sigma1(1) ^2)-(Xa2.^2)*0.5/( ...
     sigma1(2) ^2) ) ;

%crtanje 3D analiticke funckije
figure(2),surf(xa1 , xa2 ,F) ;
xlabel ('x_1') ;  ylabel ('x_2') ;  zlabel ('f (x_1 , x_2)') ;
title('Analiticki  odredjena  fgv') ;

%definisanje matrica
A=[0.611 -0.4;0 0.5];
b=[-2 1]';

%Pravljenje Y
Y=A*X'+b;

%ocekivanje E(Y1) i E(Y2)
```

```
m1exp=sum(Y(1,:))/N3
m2exp=sum(Y(2,:))/N3

%varijanse i kovarijansa
varY1 = sum((Y(1,:)-m1exp).^2)/(N3-1)
varY2 = sum((Y(2,:)-m2exp).^2)/(N3-1)
covY1Y2 = sum((Y(1,:)-m1exp).*(Y(2,:)-m2exp))/(N3-1)

%pravljenje Vektora Y1 i Y2
A1=[0.4 0.8;0 0.5]
A2=[2/3 0 ;0 0.5]
Y1=A1*X'+b;
Y2=A2*X'+b;


%iscrtavanje odbiraka vektora Y,Y1 i Y2
figure(3) ;
plot (Y(1,:),Y(2,:) ,'x') ;
xlabel ('Y_1') ;ylabel ('Y_2') ;
title('Odbirci  vektora Y kada  je  \rho =-0 .4') ;

figure(4) ;
plot (Y1(1,:),Y1(2,:) ,'x') ;
xlabel ('Y2_1') ;ylabel ('Y2_2') ;
title('Odbirci  vektora Y_2 kada  je  \rho =0.8') ;

figure(5) ;
plot (Y2(1,:),Y2(2,:) ,'x') ;
xlabel ('Y1_1') ;ylabel ('Y1_2') ;
title('Odbirci  vektora Y_1 kada  je  \rho =0') ;
```