

# ХІІІ.10.5 Исследование остывания полубесконечного стержня

Антонина Тихонова

May 2019

**Аннотация** В данной работе рассматривается нагревание полубесконечного стержня с одного из концов. Его температура  $T(x)$  зависит от длины и находится из уравнения:

$$\frac{d}{dx}(k(x)\frac{dT}{dx}) - \frac{2\alpha(x)}{R}T(x) + \frac{2\alpha(x)}{R} \cdot T_{ext} = 0 \quad (1)$$

Где  $T_{ext}$  — температура окружающей среды,  $k(x)$  — коэффициент теплопроводности,  $\alpha(x)$  — коэффициент теплоотдачи.

Из граничных условий получим, что:

$$x = 0 \rightarrow -k\frac{dT}{dx} = F_0 \quad (2)$$

$$x = l \rightarrow -k\frac{dT}{dx} = \alpha(T(l) - T_{ext}) \quad (3)$$

$$\alpha(x) = \frac{a}{x-b} \rightarrow b = \frac{\alpha(l) \cdot l}{\alpha(l) - \alpha(0)}, a = -\alpha(0) \cdot b \quad (4)$$

## Метод прогонки

Для решения исходного уравнения (1) необходимо получить разностную схему, которая задает систему из  $N$  уравнений. Эту систему решаем с помощью метода прогонки.

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n, 1 \leq n \leq N-1 \quad (5)$$

$$K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_N, K_N y_N + M_N y_{N-1} = P_N \quad (6)$$

Таким образом, в для метода прогонки в качестве исходных данных берем массивы  $A_n, B_n, C_n, F_n$ , параметры граничных условий  $K_0, M_0, P_0, K_N, M_N, P_N$ .

В методе вычисляем прогоночные коэффициенты  $\xi_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n \xi_n}$  и  $\eta_{n+1} = \frac{F_n + A_n \eta_n}{B_n - A_n \xi_n}$ , причем начальные  $\xi_1 = -\frac{M_0}{K_0}$ ,  $\eta_1 = \frac{P_0}{K_0}$ .

В обратном ходе метода прогонки вычисляем  $y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \eta_n + 1$ ,  $y_N = \frac{P_N - M_N \eta_N}{K_N + M_N \xi_N}$

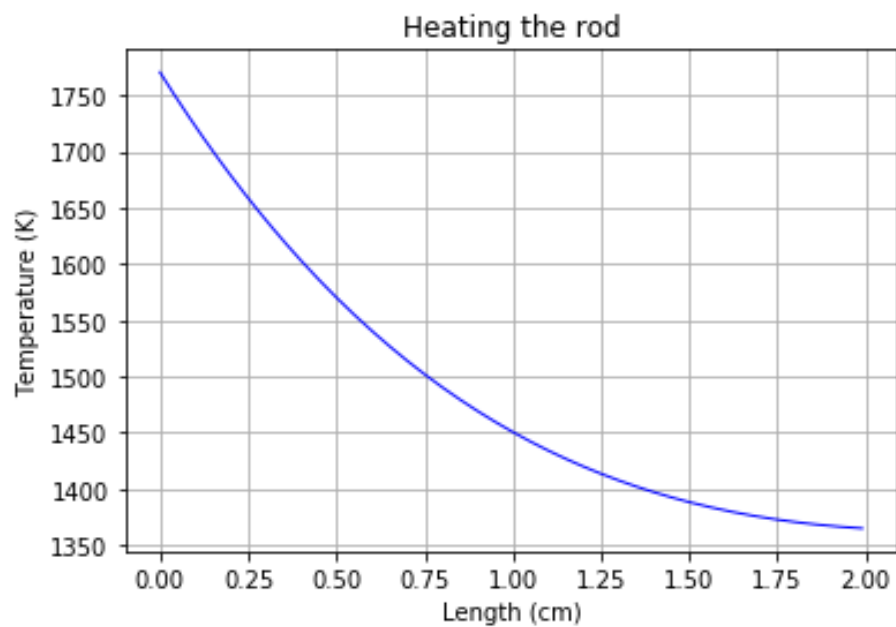
## Исходные данные

Для численного построения графика возьмем исходные данные

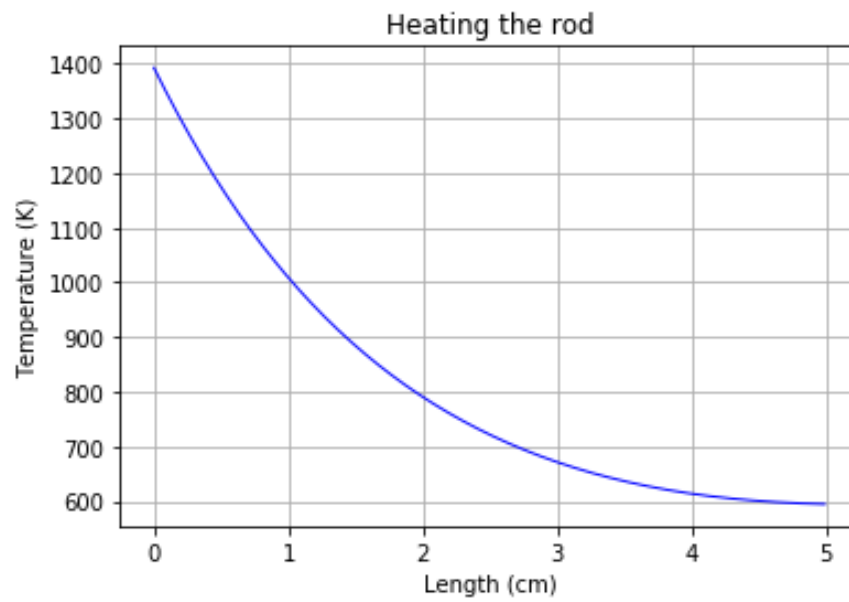
- $l(\text{см})$  - длина стержня

- $R(\text{cm})$  - радиус стержня
- $T_{ext} = 300 \text{ K}$  температура окружающей среды
- $F_0 = 100 \text{ Вт} / (\text{см}^2 \text{ K})$  - плотность теплового потока
- $k_0 = 0.1 \text{ Вт} / (\text{см K})$  - коэффициент теплопроводности в начале стержня
- $k_N = 0.2 \text{ Вт} / (\text{см K})$  - коэффициент теплопроводности в конце стержня
- $\alpha_0 = 1 \exp -2 \text{ Вт} / (\text{см}^2 \text{ K})$  - коэффициент теплоотдачи в начале стержня
- $\alpha_N = 0.9 \exp -2 \text{ Вт} / (\text{см}^2 \text{ K})$  - коэффициент теплоотдачи в конце стержня

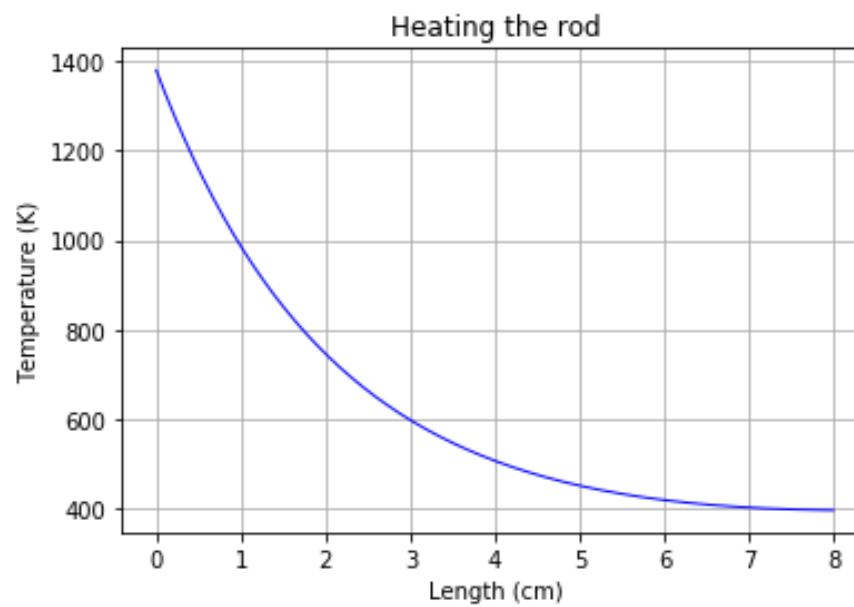
Решения задачи при различных  $l$ ,  $R = 0,5$   $l = 2 \text{ cm}$  :



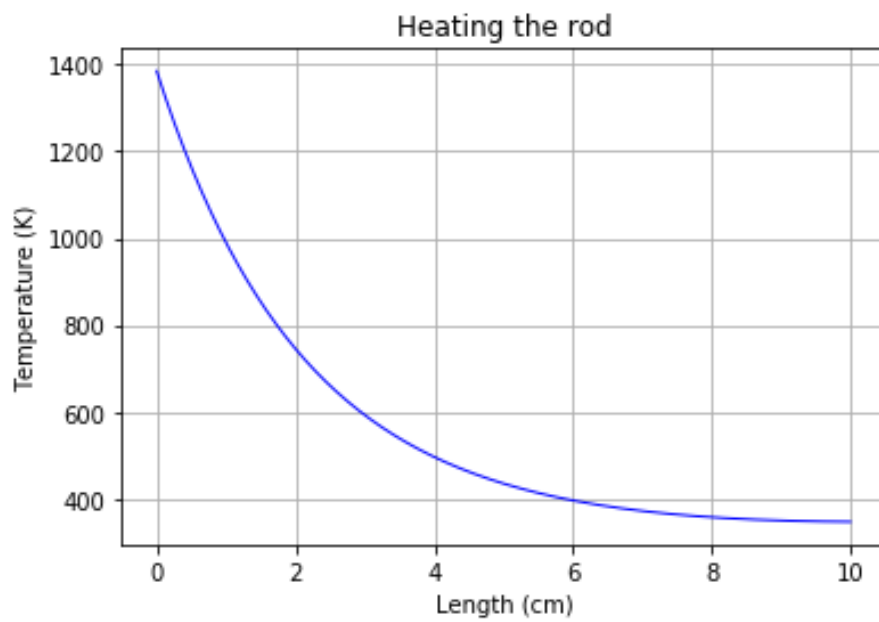
$l = 5\text{cm}$  :



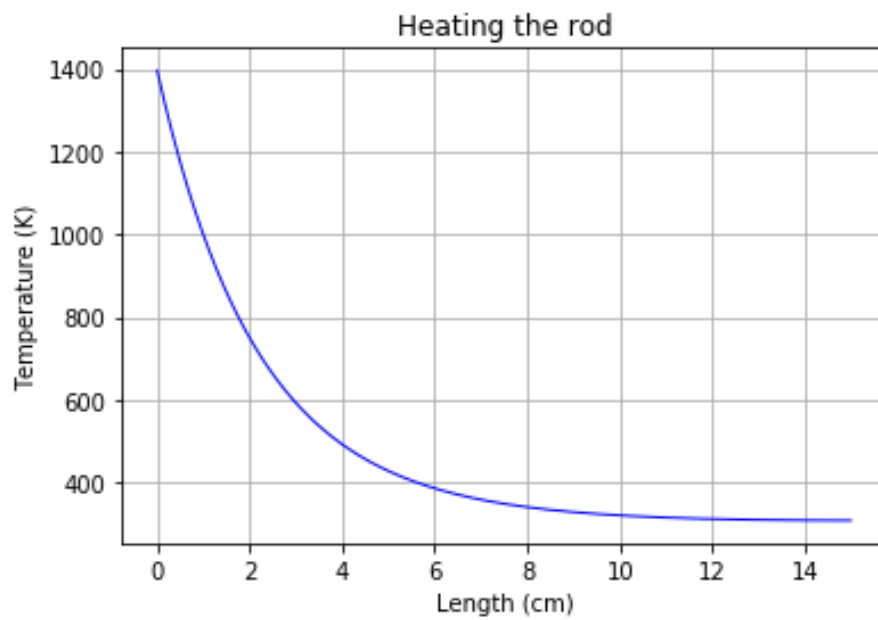
$l = 8\text{cm}$  :



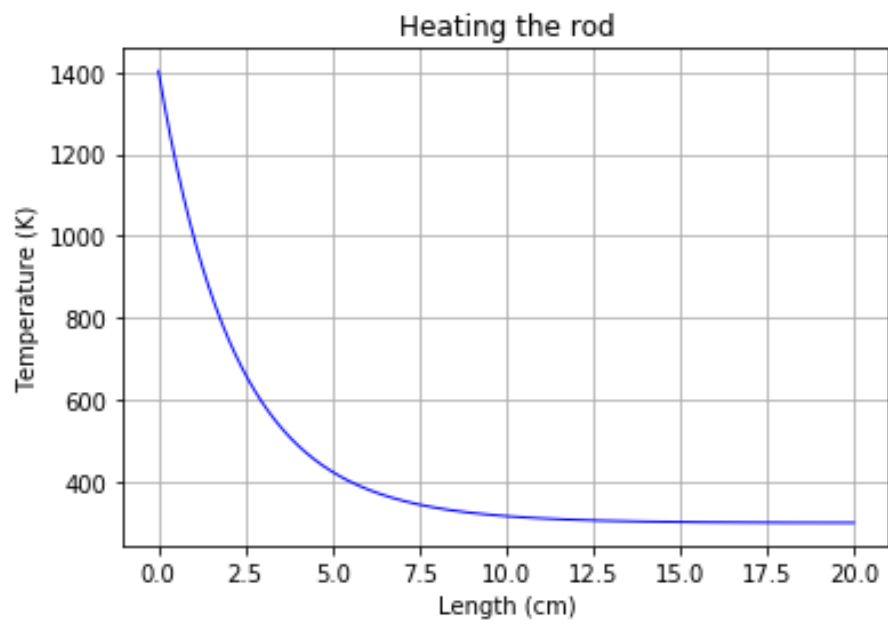
$l = 10\text{cm}$  :



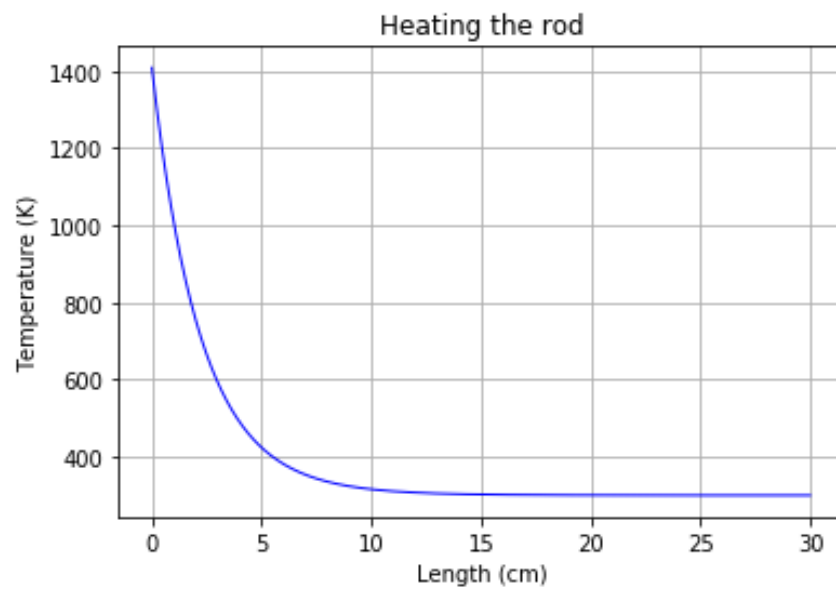
$l = 15\text{cm}$  :



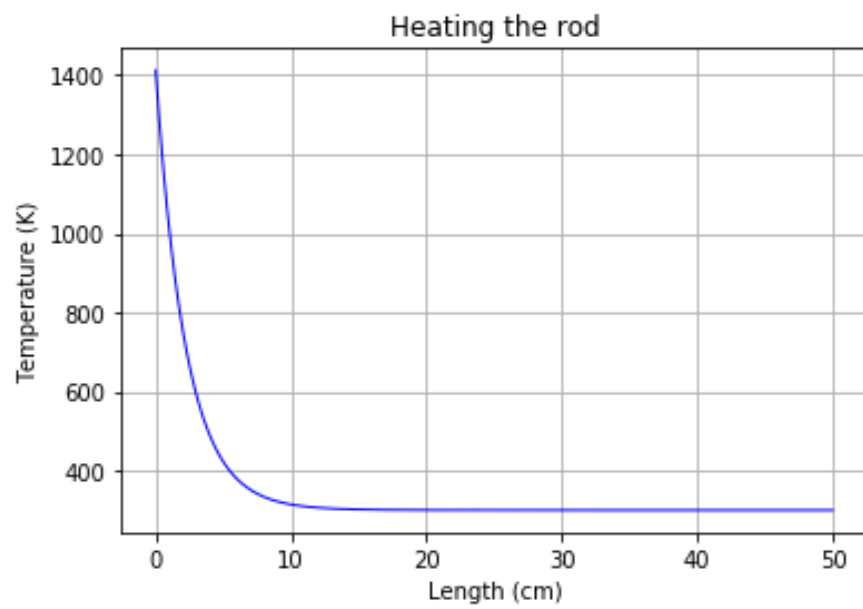
$l = 20\text{cm}$  :



$l = 30\text{cm}$  :

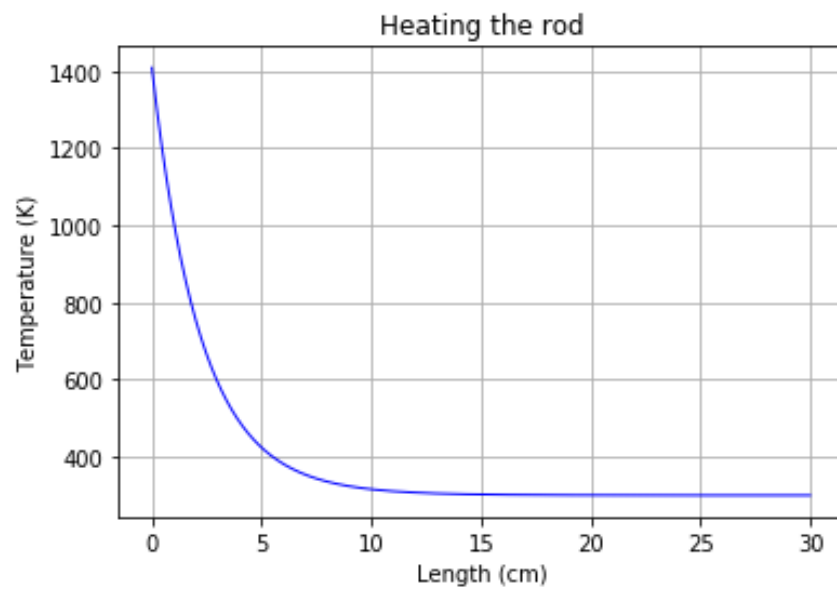


$l = 50\text{cm}$  :

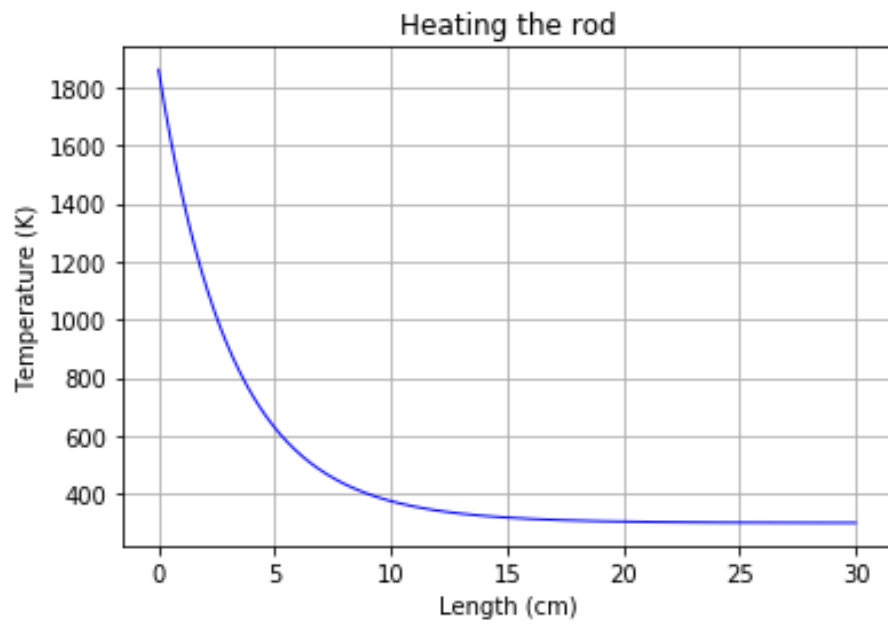


Решения задачи при различных  $R$ ,  $l = 30$

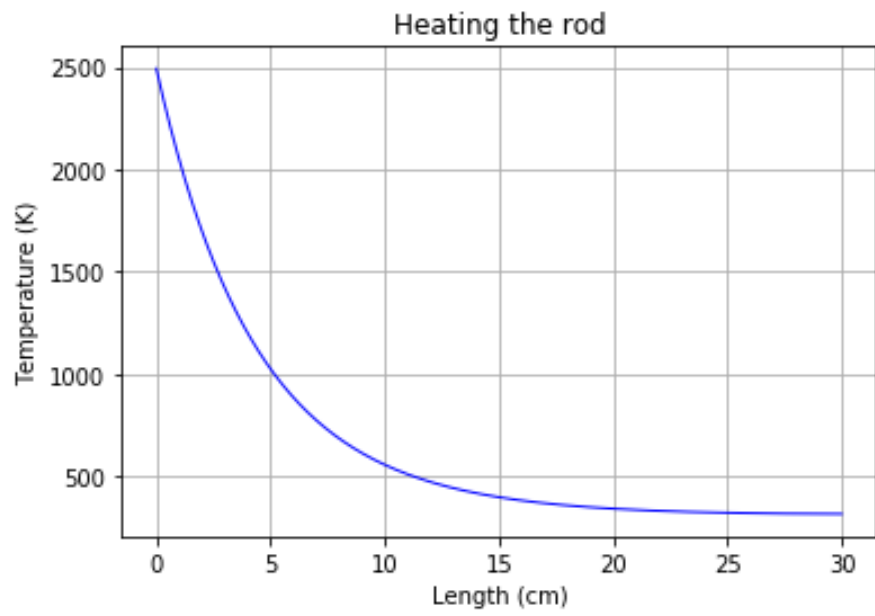
$r = 0,5\text{cm}$  :



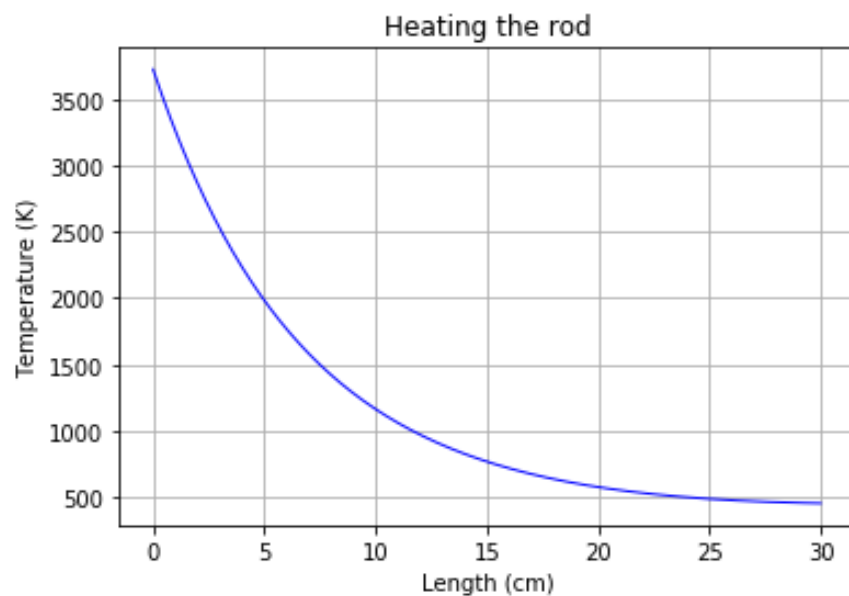
$r = 1\text{cm}$  :



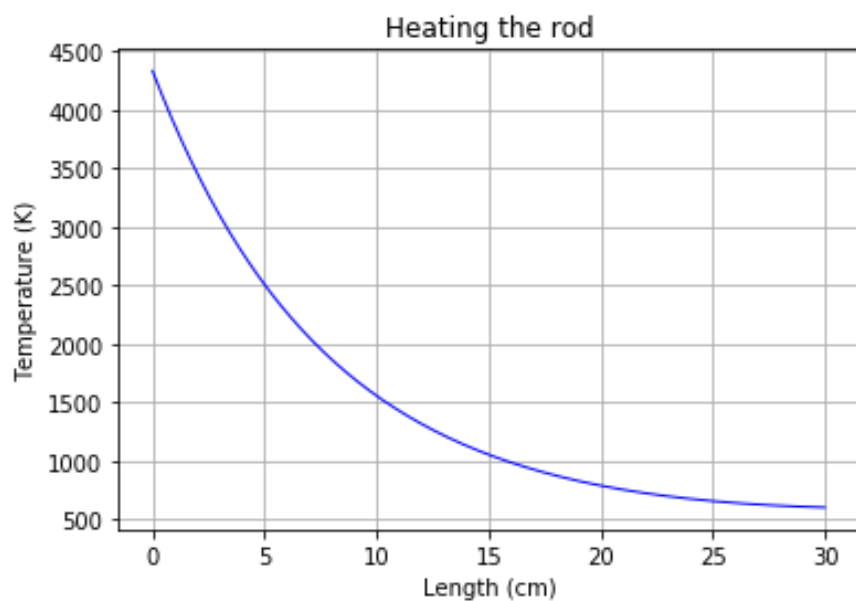
$r = 2\text{cm}$  :



$r = 5\text{cm}$  :



$r = 7\text{cm}$  :



### Вывод

Как видно из графиков, температура резко падает на первых 10 сантиметрах стержня (для выбранных начальных условий), затем перестает изменяться, так как достигает температуры окружающей среды  $T_{ext}$ . При увеличении толщины стержня, длина, на которой устанавливается  $T_{ext}$  увеличивается, график становится более пологим.