

Практическая задача X.8.5

Антонина Тихонова

May 2019

X.8.5 Материальная точка массой m закреплена на конце тонкого однородного стержня и может совершать свободные колебания. Выполнить расчет для полного цикла колебаний. Для этого следует воспользоваться следующими уравнениями движения и дополнительными условиями:

$$u'' + \frac{g}{L} \sin u = 0, u(0) = \frac{\pi}{4}, u'(0) = 0, g = 9.8 \frac{m}{s^2}, L = 0,1m$$

Если угол отклонения мал, то дифференциальное уравнение можно линеаризовать, приняв $\sin u = u$. Сравнить полученные результаты с результатами линейного случая.

Решение задачи

В ходе решения рассмотрим 3 основных метода, которые можно использовать для решения ОДУ второго порядка (обыкновенного дифференциального уравнения) для простой гармонической колебательной системы. Затем мы реализуем 3 основных метода с использованием решателя *Python*.

1. Общие обозначения

Уравнение движения маятника в общем случае:

$$u'' + \frac{g}{L} \sin u = u'' + 98 \sin u = 0 \quad (1)$$

Отсюда

$$u'' = -98 \cdot \sin u = \alpha(u) \quad (2)$$

Уравнение движения маятника в линейном случае:

$$u'' + \frac{g}{L} u = u'' + 98 \cdot u = 0 \quad (3)$$

Отсюда

$$u'' = -98 \cdot u = \beta(u) \quad (4)$$

Уравнение (3) справедливо только при очень малых $u \approx \sin u$.

2. Метод Эйлера

(а) Краткая теория

Для решения методом Эйлера уравнений (1) и (3), запишем уравнения первого порядка:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha(u), \frac{d\omega}{dt} = \beta(u) \quad (5)$$

$$\frac{du}{dt} = \omega \quad (6)$$

Используя значения $u_0 = u(0)$ и $\omega_0 = \frac{du}{dt}(0)$, ищем значения u_n и ω_n для любого времени t на выбранном к исследованию промежутке времени:

$$t_{n+1} = t_n + \eta \quad (7)$$

$$u_{n+1} = u_n + \eta \cdot \omega_n \quad (8)$$

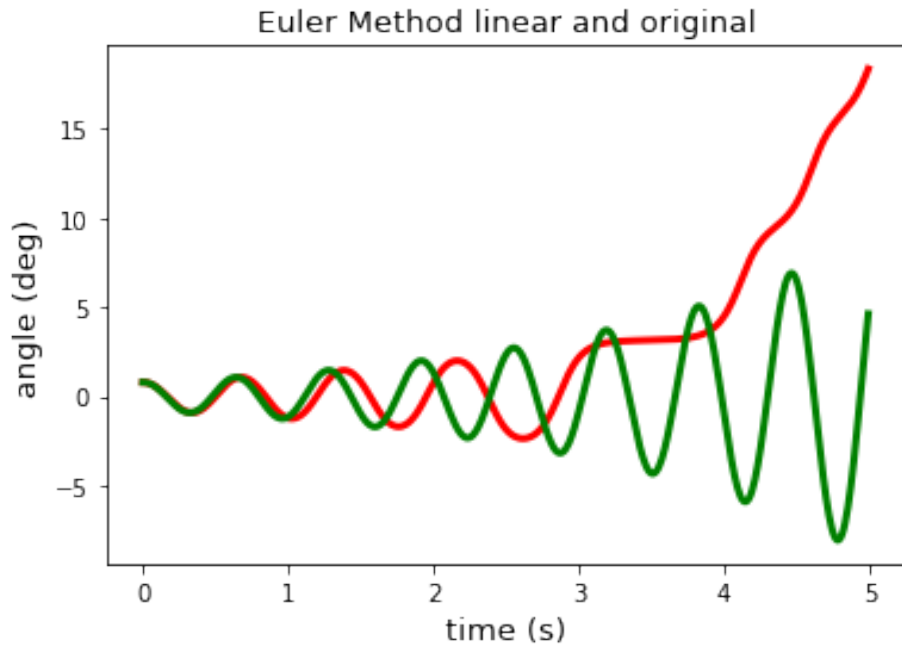
$$\omega_{n+1} = \omega_n + \eta \alpha_n, \omega_{n+1} = \omega_n + \eta \beta_n, \quad (9)$$

где η — шаг по времени, $n \in \overline{1, N}$, N — число шагов.

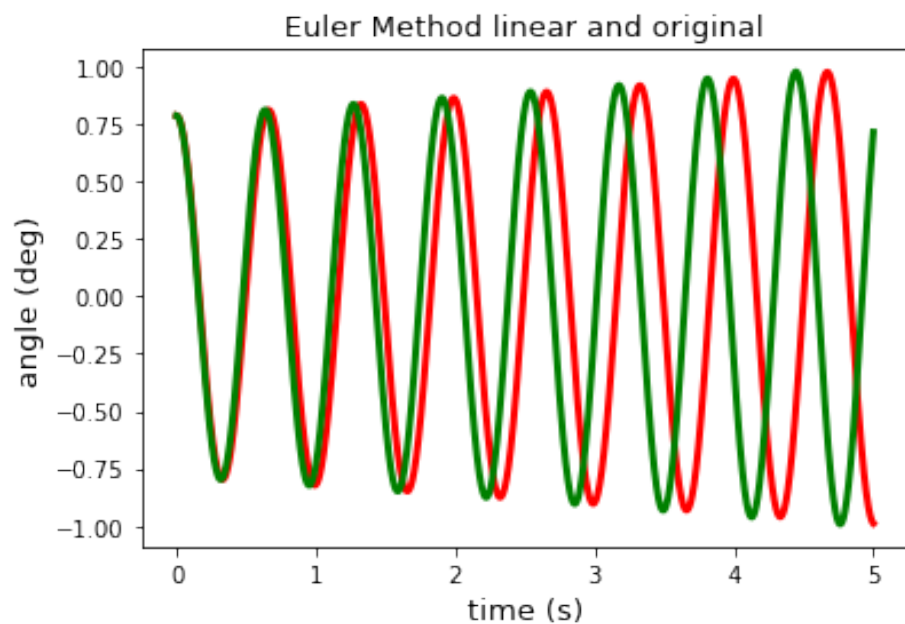
Программа заполняет массив, длины N для времени, начиная с 0 секунд, шагом η , строит массивы для $u' = \omega$ и u для линейного и обычного случая в соответствии с формулами (8) и (9). По полученным данным строятся графики.

(b) Решение

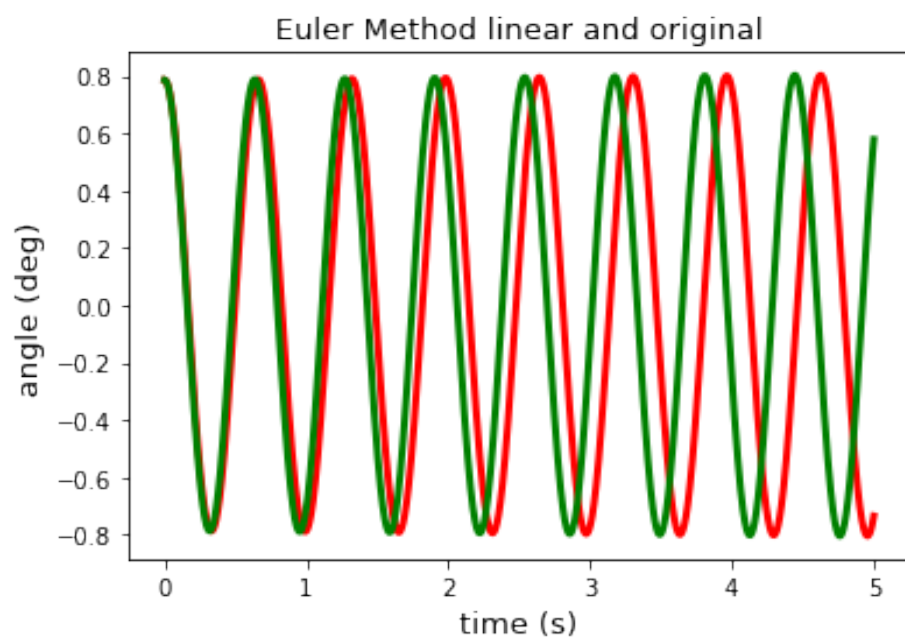
Для решения задачи подберем такие N и η , чтобы решение задачи было устойчивым, проверим устойчивость на графике. Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.01$, $N = 500$. Зеленый график для линейного случая, красный график для обычного.



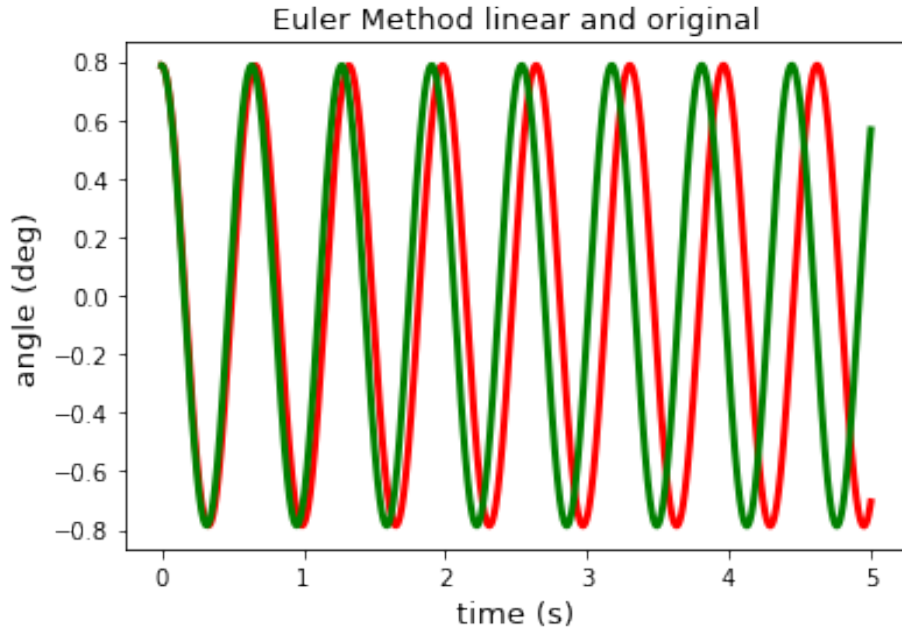
Из-за большого шага по времени возникает погрешность определения производной, решение становится неустойчивым. Для исправления этого уменьшим шаг η и увеличим число шагов, чтобы получить на графике результаты нескольких полных колебаний. Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.001$, $N = 5000$.



Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.0001$, $N = 50000$.



Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.00001$, $N = 500000$.



(с) Обобщение результатов

Из графиков видно, что при уменьшении шага η решение становится устойчивым, так как уменьшается ошибка нахождения производной. Решение в линейном случае (зеленый) почти совпадает с обычным решением задачи (красный), но со временем ошибка все больше увеличивается, это связано с тем, что $u \approx \sin(u)$ только при малых значениях u .

3. Метод средней точки

(а) Краткая теория

Метод средней точки похож на метод Эйлера, так как также пытаемся приблизиться к значению первой производной за счет уменьшения шага η . Также, как и в предыдущем методе, используя значения $u_0 = u(0)$ и $\omega_0 = \frac{du}{dt}(0)$, ищем значения u_n и ω_n для любого времени t на выбранном к исследованию промежутке времени:

$$t_{n+1} = t_n + \eta \quad (10)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\eta(\omega_n + \omega_{n+1}) \quad (11)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \eta\alpha_n, \omega_{n+1} = \omega_n + \eta\beta_n, \quad (12)$$

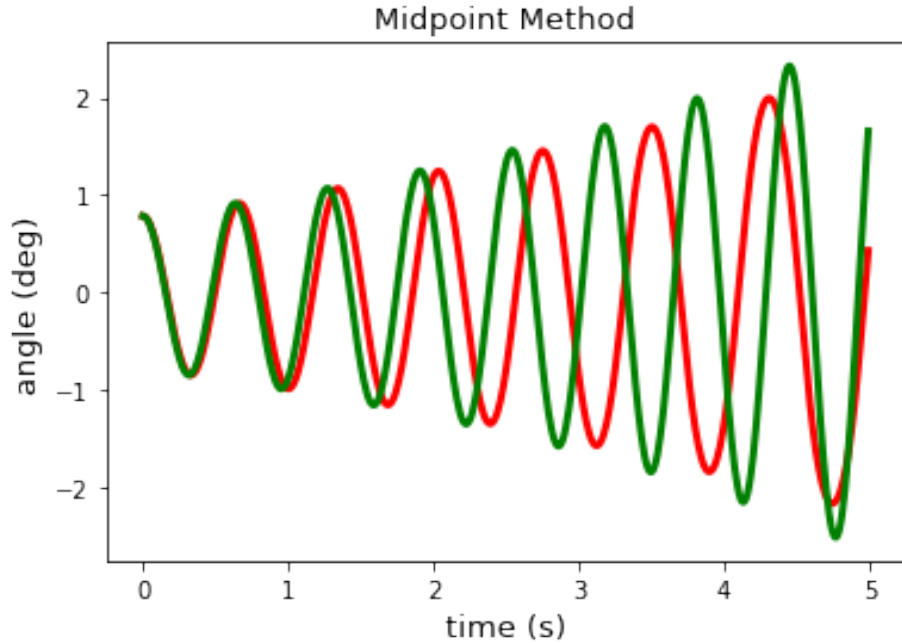
где η — шаг по времени, $n \in \overline{1, N}$, N — число шагов. Единственное отличие от метода Эйлера состоит в том, что для нахождения u_{n+1} нужно знать не только ω_n , но и ω_{n+1} .

Программа заполняет массив, длины N для времени, начиная с 0 секунд, шагом η , строит массивы для $u' = \omega$ и u для линейного и обычного случая в соответствии с формулами (11) и (12). По полученным данным строятся графики.

(b) Решение

Аналогично решению методом Эйлера, подберем такие N и η , чтобы решение задачи было устойчивым, проверим устойчивость на графике. Возьмем следующие

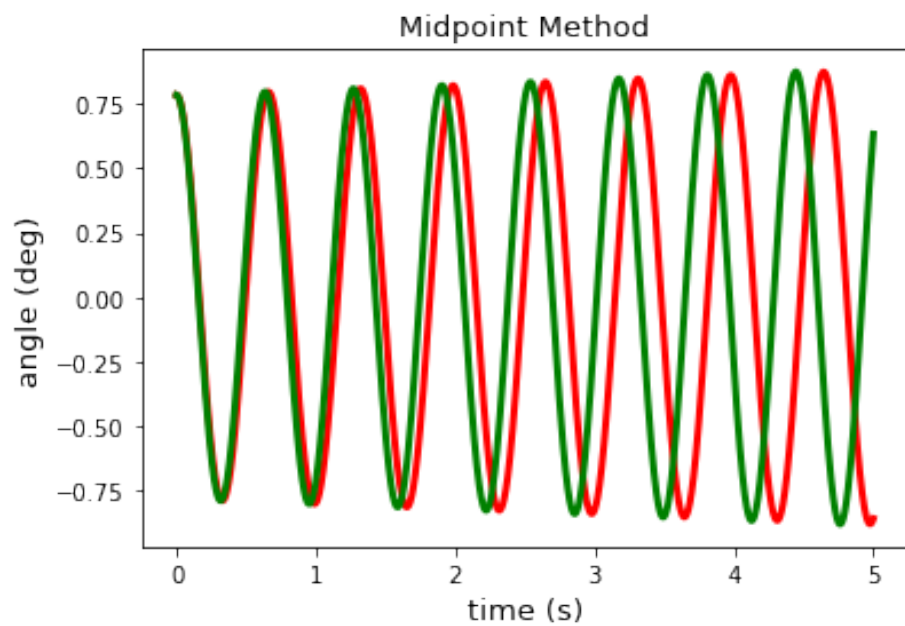
параметры: $\eta = 0.01, N = 500$. Зеленый график для линейного случая, красный график для обычного.



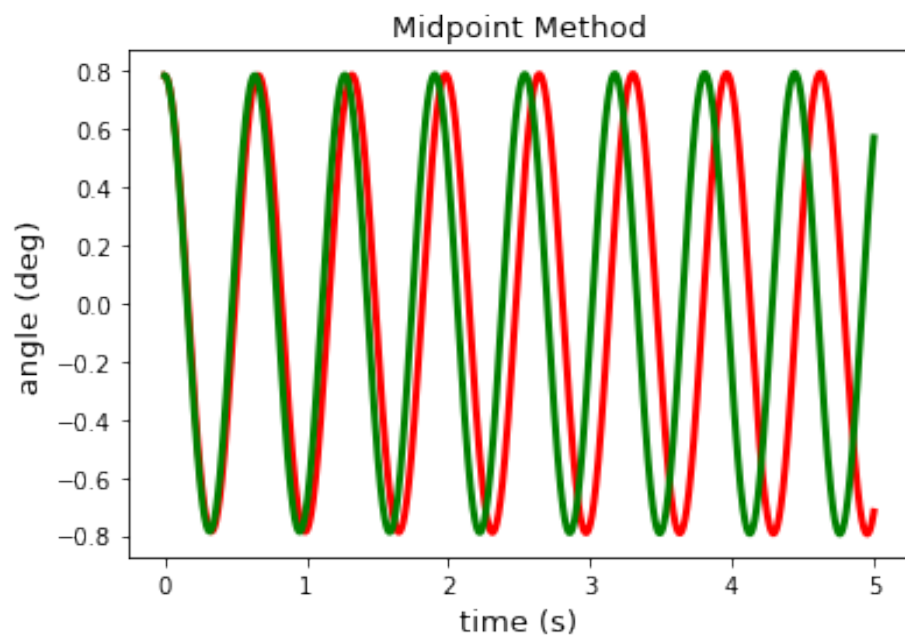
Из графика видно, что метод средней точки строит график намного точнее метода Эйлера при одинаковых значениях η и N .

В методе Эйлера касательная кривой в точке (t_n, u_n) вычисляется как $f(t_n, u_n)$. Значение u_{n+1} вычисляется как пересечение этой кривой и вертикальной прямой $t = t_{n+1}$. При этом, если вторая производная функции u между точками t_n и t_{n+1} всюду положительна или всюду отрицательна, то кривая будет все больше отклоняться от касательной. Метод средней точки является улучшенным методом Эйлера. Касательная строится не в точке (t, u_n) , а в средней точке $(\frac{t_n+t_{n+1}}{2}, \frac{u_n+u_{n+1}}{2})$, что с большей долей вероятности дает лучшее приближение на отрезке (t_n, t_{n+1}) . Улучшенный тангенс касательной используется для нахождения u_{n+1} , отсюда получаем улучшение точности построения графика функции.

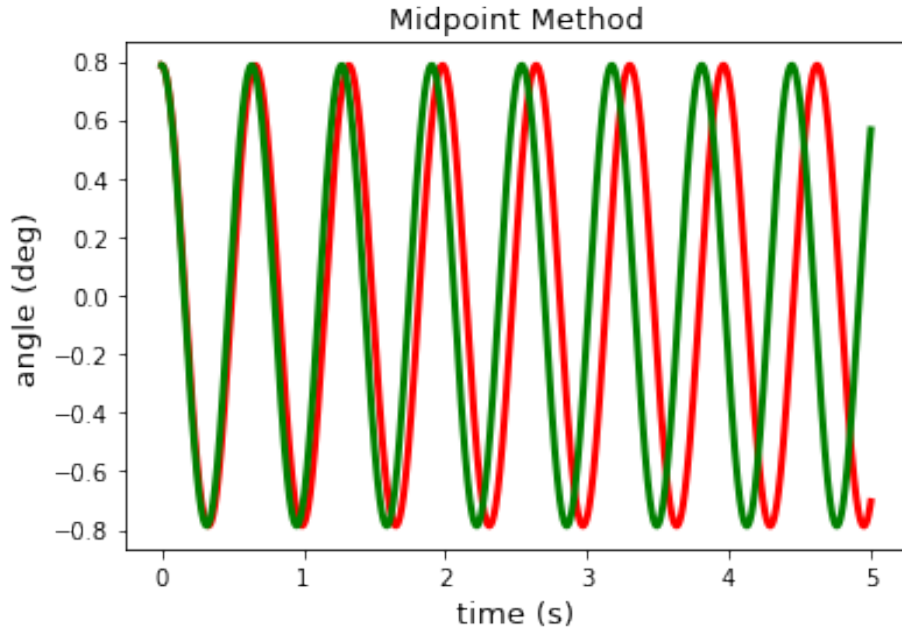
При этом решение все равно остается неустойчивым. Поступим также, как и в прошлом случае: увеличим N и уменьшим η . Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.001, N = 5000$.



Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.0001$, $N = 50000$.



Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.000001$, $N = 500000$.



(с) **Обобщение результатов**

Аналогично решению в случае метода Эйлера, при уменьшении шага η решение становится устойчивым, так как уменьшается ошибка нахождения производной. При этом решение методом средней точки показывает более точные результаты, даже при малых η , в отличие от метода Эйлера. Решение в линейном случае (зеленый) почти совпадает с обычным решением задачи (красный), но со временем ошибка все больше увеличивается, это связано с тем, что $u \approx \sin(u)$ только при малых значениях u .

4. Метод Верле

(а) **Краткая теория**

Как и в рассмотренных выше методах, в методе Верле нужно знать значения $u_0 = u(0)$ и $\omega_0 = \frac{du}{dt}(0)$. Вычислим u_1 по следующим формулам:

$$u_1 = u_0 + \eta \cdot \omega_0 + \frac{1}{2}\eta^2\alpha_0, u_1 = u_0 + \eta \cdot \omega_0 + \frac{1}{2}\eta^2\beta_0 \quad (13)$$

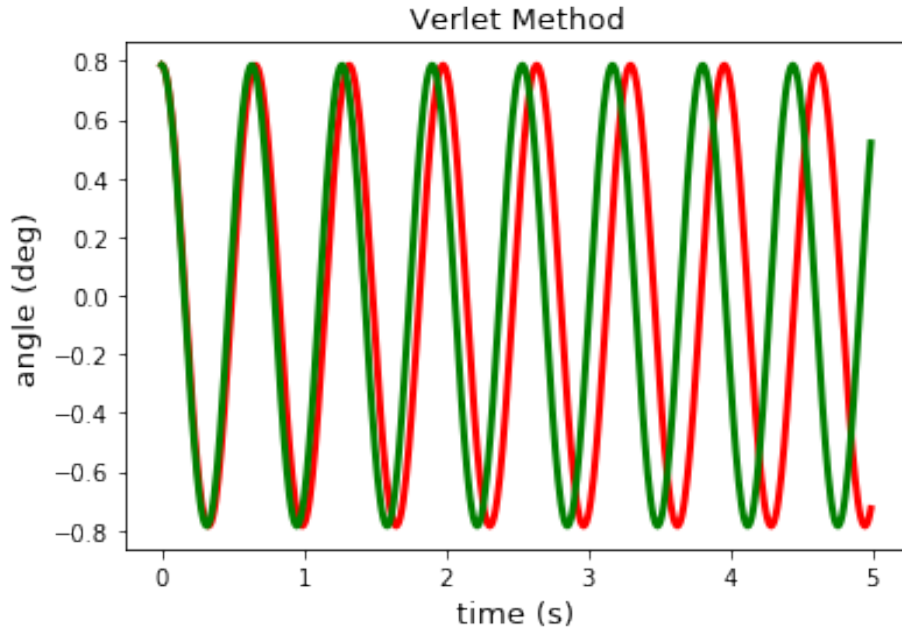
Имея u_0 и u_1 найдем все остальные значения u_n , где $n \in \overline{1, N}$:

$$u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} - u_n + \eta^2\alpha_{n+1}, u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} - u_n + \eta^2\beta_{n+1} \quad (14)$$

Программа заполняет массив, длины N для времени, начиная с 0 секунд, шагом η , находит значения u_1 в соответствии с формулами (13) и строит массив для u для линейного и обычного случая в соответствии с формулами (14). По полученным данным строятся графики.

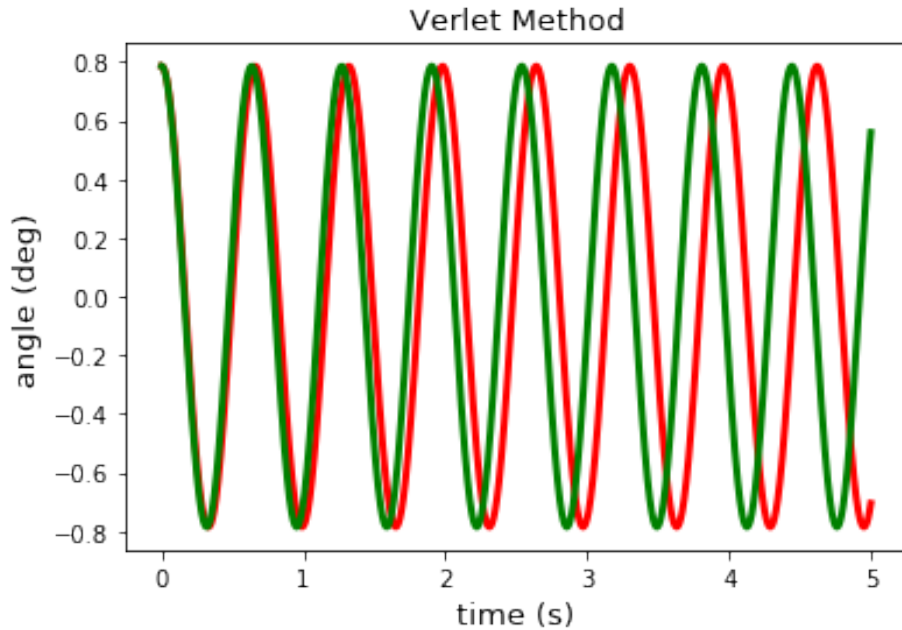
(b) **Решение**

Подберем такие N и η , чтобы решение задачи было устойчивым, проверим устойчивость на графике. Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.01, N = 500$. Зеленый график для линейного случая, красный график для обычного.

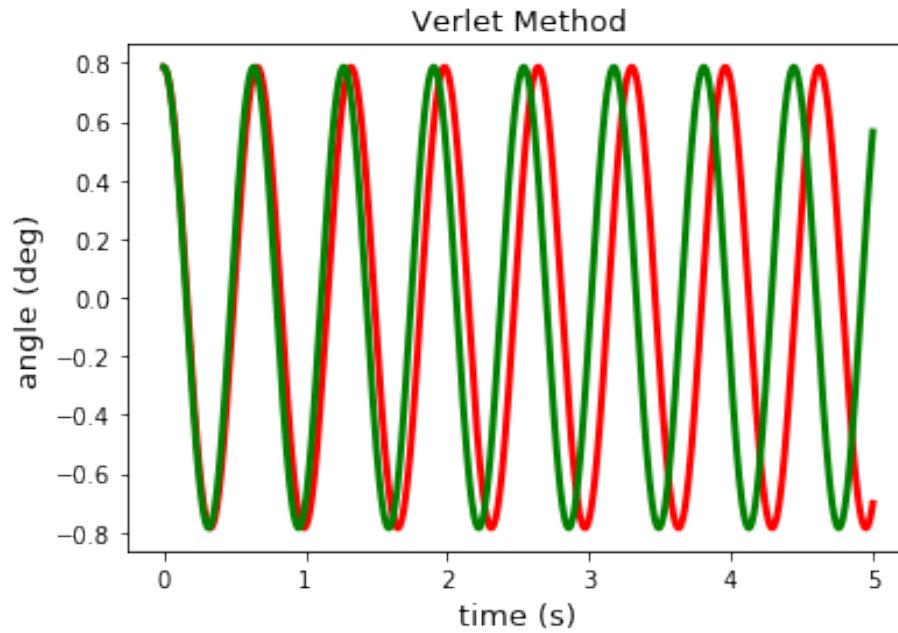


Из графика видно, что решение устойчиво, что не показывают рассмотренные выше методы при таких же значениях η и N . В методе Эйлера и в методе средней точки используется приближение forward difference $\{\Delta_h[f](x) = f(x + h) - f(x)\}$ к первой производной в дифференциальных уравнениях первого порядка, тогда как в методе Верле рассматривается приближение central difference $\{\delta_h[f](x) = f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)\}$ ко второй производной, из-за этого ошибка в методе Верле минимальна, в сравнении с двумя другими методами.

Рассмотрим еще несколько значений η и N , чтобы посмотреть, насколько сильно меняется график функции. Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.001, N = 5000$.



Возьмем следующие параметры: $\eta = 0.0001, N = 50000$.



Случай с параметрами $\eta = 0.00001$, $N = 500000$ воспроизвести не удалось, так как мощности вычислительной машины сильно ограничены. Стоит заметить, что даже при малых η и N метод показывает достаточно точный по сравнению с описанными ранее методами результат, так что нет необходимости продолжать уменьшать шаг η .

(с) Обобщение результатов

Метод Верле, в отличие двух предыдущих методов, при $\eta = 0, 1$ показывает устойчивое решение. Уменьшение шага не приводит к видимым изменениям построения функции, так как на первом шаге уже получено достаточно точное решение. Решение в линейном случае (зеленый) почти совпадает с обычным решением задачи (красный), но со временем ошибка все больше увеличивается, это связано с тем, что $u \approx \sin(u)$ только при малых значениях u .

5. Заключение

В ходе решения задачи было показано, как можно использовать *Python* для реализации трех основных методов решения однородного дифференциального уравнения второго порядка. Также были представлены некоторые примеры выходных данных в виде графиков. Основываясь на этом анализе, можно заключить, что метод Верле является вычислительно наиболее эффективным методом, поскольку он использует central difference, которая является более симметричным определением производной по сравнению с forward difference и, соответственно, дает меньшую ошибку при вычислении.