Проект

Антонина Тихонова, Сафина Эльмира

May 2019

Аннотация

В данной работе рассматривается уравнение Пуассона для задачи Дирихле

$$-\nabla^2 u = f \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(x,y)|_\Gamma = g(x,y) \tag{2}$$

Описание решения задачи Дирихле

В уравнении нет начального условия, так как нет зависимости от времени. Найдем решение задачи Дирихле (1) на области $D = (a,b) \times (c,d)$. Для этого покроем всю область сеткой с шагом $h_x \times h_y$.

Генерируем сетку как $x_i = a + i \cdot h_x, i = \overline{0, M}, h_x = \frac{b-a}{M}$, $y_i = c + i \cdot h_y, i = \overline{0, N}, h_y = \frac{d-c}{N}$.

Находим значение второй производной u_{xx}и u_{yy} в точках (x_i, y_k):

$$u_{xx} \approx \frac{u(x_{i-1}, y_k) - 2u(x_i, y_k) + u(x_{i+1}, y_k)}{h_x^2}, i = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N-1} \tag{3}$$

$$u_{yy} \approx \frac{u(x_i, y_{k-1}) - 2u(x_i, y_k) + u(x_i, y_{k+1})}{h_y^2}, i = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N-1} \tag{4}$$

Подставим полученные данные в (1):

$$-(\frac{u(x_{i-1}, y_k) - 2u(x_i, y_k) + u(x_{i+1}, y_k)}{h_x^2} + \frac{u(x_i, y_{k-1}) - 2u(x_i, y_k) + u(x_i, y_{k+1})}{h_y^2}) = f(x_i, y_k) + T(x_i, y_k) \tag{5}$$

Где $T(x_i, y_k) -$ ошибка вычисления второй производной, для которой должно выполняться условие $\lim_{h \to 0} T = 0$. Считаем, что $h_x = h_y = h$.

Отсюда

$$4u(x_i, y_k) - u(x_{i-1}, y_k) - u(x_i, y_{k-1}) - u(x_{i+1}, y_k) - u(x_i, y_{k+1}) = h^2 f(x_i, y_k). \tag{6}$$

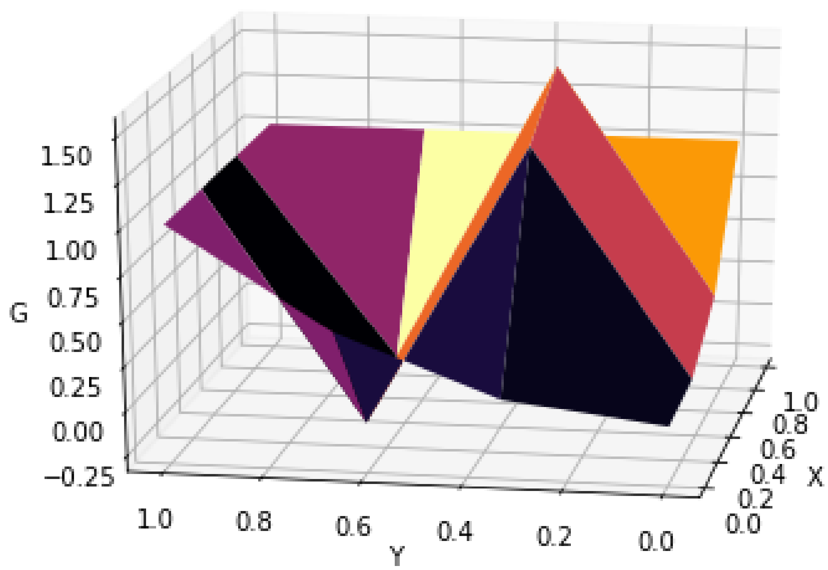
Решаем СЛУ (6) и получаем приблизительное решение на всех точках. Таким образом получаем систему $AU = F$, где $U -$ двумерный массив.

Решение задачи Дирихле

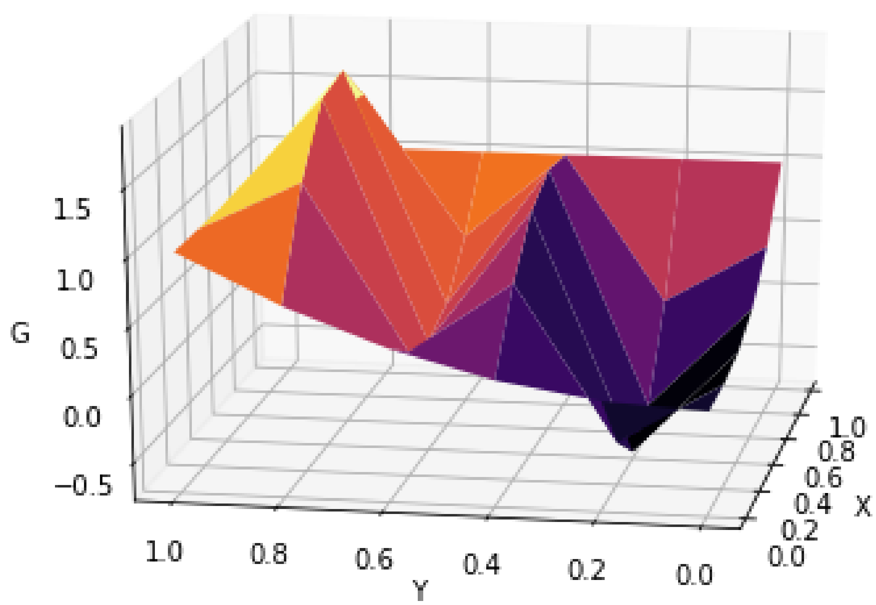
Расммотрим решение задачи на отрезке $(a,b) = (c,d) = (0,1)$ при различных значениях M.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле: $-\nabla^2 u = 8\pi^2 \cos(\pi x)\sin(\pi x)$. Граничные условия: $u(0,y) = y^2, u(1,y) = 1, u(x,1) = 1, u(0,x) = x^3$.

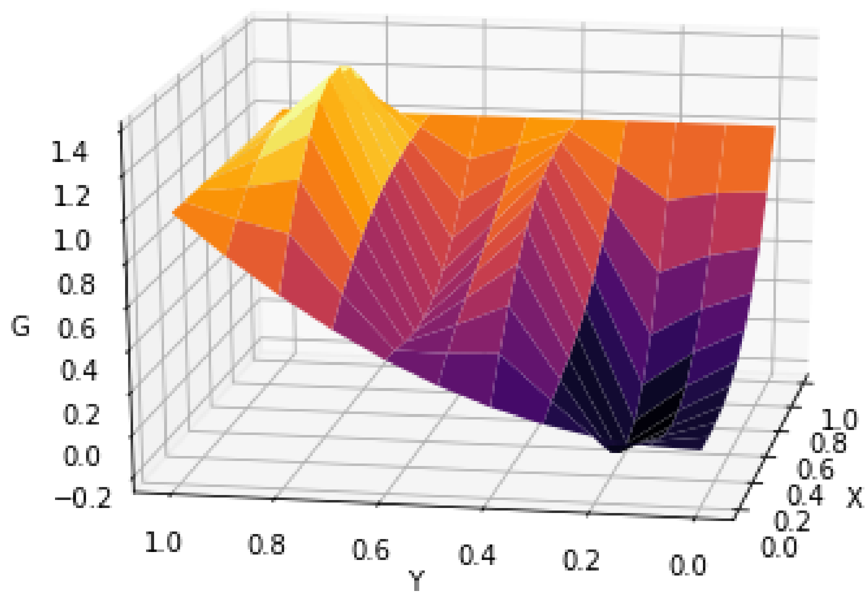
$M = 3:$



$M = 5:$

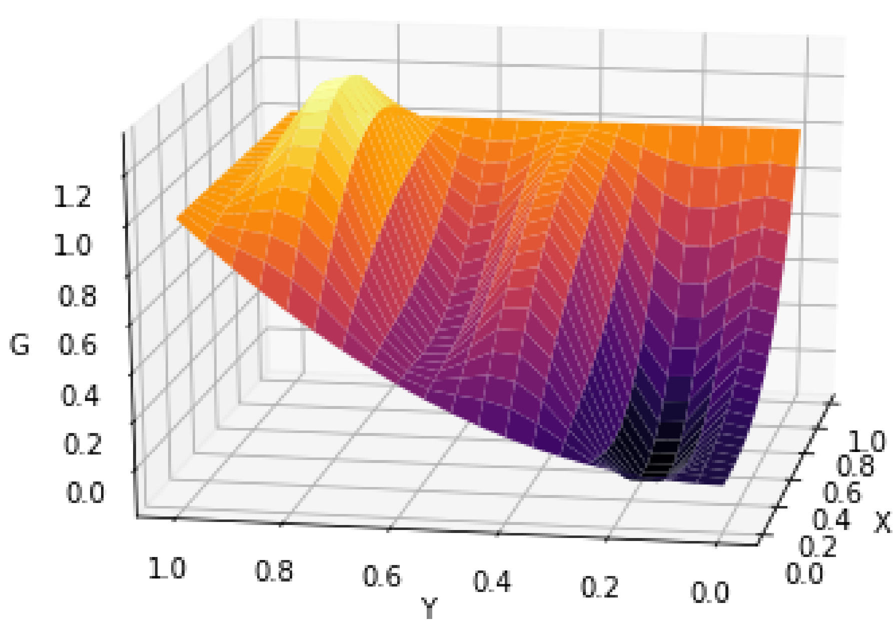


$M = 10:$



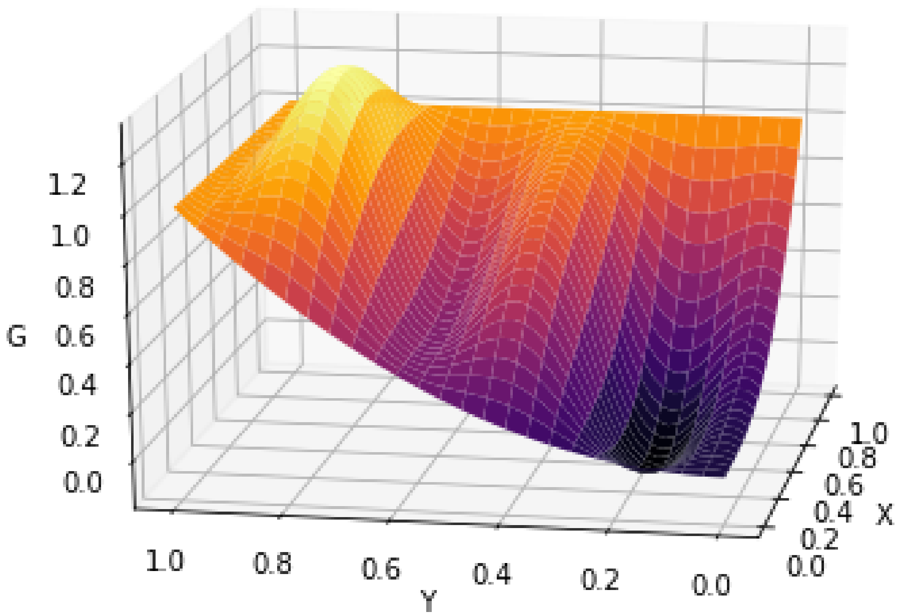
G
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
Y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
X
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0

$M = 20:$



G
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
X
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0

$M = 50$:



Описание решения задачи Неймана В данном случае мы рассматриваем решение уравнения Пуассона (1) в прямоугольной области $D = (0, a) \times (0, b)$ с граничными условиями Неймана:

$\partial_n u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \Gamma$, где $\partial_n u(x, y)$ определяет производную по внешней нормали. Считаем, что нормаль задана только с некоторой точностью на границах области, а функция $g(x, y)$ - непрерывна в ней. Для того, чтобы получить конечную разностную аппроксимацию задачи, воспользуемся методами, которые были применены к уравнению Пуассона для задачи Дирихле.

На "верхних"границах области, где $\partial_n = \pm\partial_x$, при разложении в ряд Тейлора получим:
$u(x + h, y) = u + hu_x + \frac{1}{2}h^2 u_{xx} + \frac{1}{6}h^3 u_{xxx} + O(h^4)$
$u(x - h, y) = u - hu_x + \frac{1}{2}h^2 u_{xx} - \frac{1}{6}h^3 u_{xxx} + O(h^4)$.
Тогда $u(x + h, y) - u(x - h, y) = 2hu_x + O(h^2)$.
Получаем, что

$$u_x(x, y) = \frac{1}{2h}(u(x + h, y) - u(x - h, y) + O(h^2) \tag{7}$$

На границе с $x = 0$ $\partial_n = -\partial_x$, так как рассматриваем внешнюю нормаль при применении разложения к точке $(0, y_k)$ получим:
$\frac{1}{2h}(U_{0-1,k} - U_{0+1,k}) = g_{0,k}, k = 0, 1, \cdots, N$, или

$$\frac{1}{2h}(U_{-1,k} - U_{1,k}) = g_{0,k} \tag{8}$$

Эта аппроксимация требует, чтобы были известны значения данных массива U в фиктивных точках массива $(-1, k)$, которые находятся вне области D.
Перепишем аппроксимацию из выражения в граничных точках:

$$4U_{0,k} - U_{-1,k} - U_{1,k} - U_{0,k+1} - U_{0,k-1} - U_{0,k-1} = h^2 f_{0,k}. \tag{9}$$

Можно выразить $U_{-1,k}$ из (8) и (9):

$$U_{-1,k} = U_{1,k} + 2hg_{0,k}. \tag{10}$$

и подставить в (9), тогда получим

$$2U_{0,k} - U_{1,k} - \frac{1}{2}U_{0,k-1} = \frac{1}{2}h^2 f_{0,k} + hg_{0,k}, k = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{11}$$

При $x = a$ (то есть для $i = M$) внешняя нормальположительна (то есть $\partial_n = \partial_x$):

$$\frac{1}{2h}(U_{M+1,k} - U_{M-1,k}) = g_{M,k} \tag{12}$$

Где индексы находятся в фиктивных точках $(M+1, k)$

$$U_{M+1,k} = U_{M-1,k} + 2hg_{M,k}. \tag{13}$$

Отсюда имеем

$$U_{M,k} - U_{M-1,k} + \frac{1}{2}U_{M,k+1} - \frac{1}{2}U_{M,k-1} = \frac{1}{2}h^2 f_{M,k} + hg_{M,k} \tag{14}$$

Выражение (11) при $k = N$ на отрезке $(0, b)$, где $\partial_n u(x, y) = g(x, y)$ аппроксимируется как

$$\frac{1}{2h}(U_{0,N+1} - U_{0,N-1}) = g_{0,N} \tag{15}$$

Из (11) и (15) получаем при $k = N$

$$2U_{0,N} - U_{1,N} - U_{0,N-1} = 2hg_{0,N} + \frac{1}{2}h^2 f_{0,N} \tag{16}$$

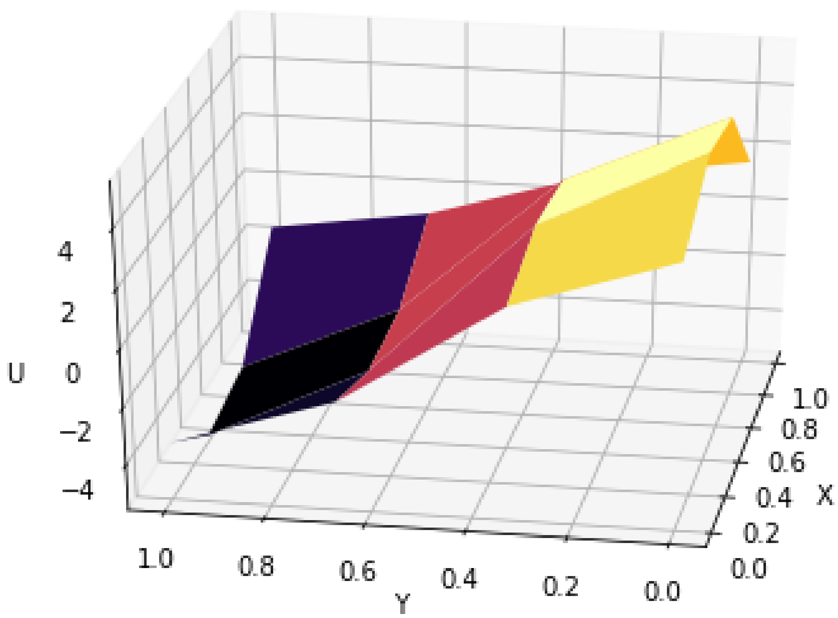
Выполняя вышеперечисленные вычисления, мы получаем систему $(M+1)^2$ линейных уравнений. Тогда мы получаем уравнение $AU = h^2F + hG$. Решая данную СЛУ получаем решение задачи Неймана.

Решение задачи Неймана

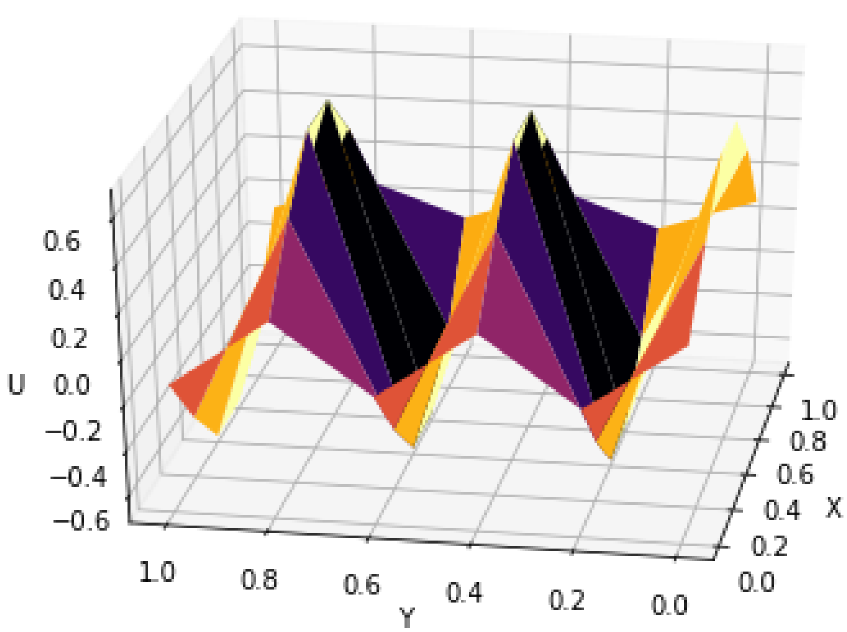
Расммотрим решение задачи на отрезке $(a, b) = (c, d) = (0, 1)$ при различных значениях M.

Рассмотрим следующую задачу Неймана: $-\nabla^2 u = 8\pi^2 \cos(\pi x)\sin(\pi x)$. Граничные условия: $u(0, y) = 0, u(1, y) = 0, u(x, 1) = 0, u(0, x) = 0$.

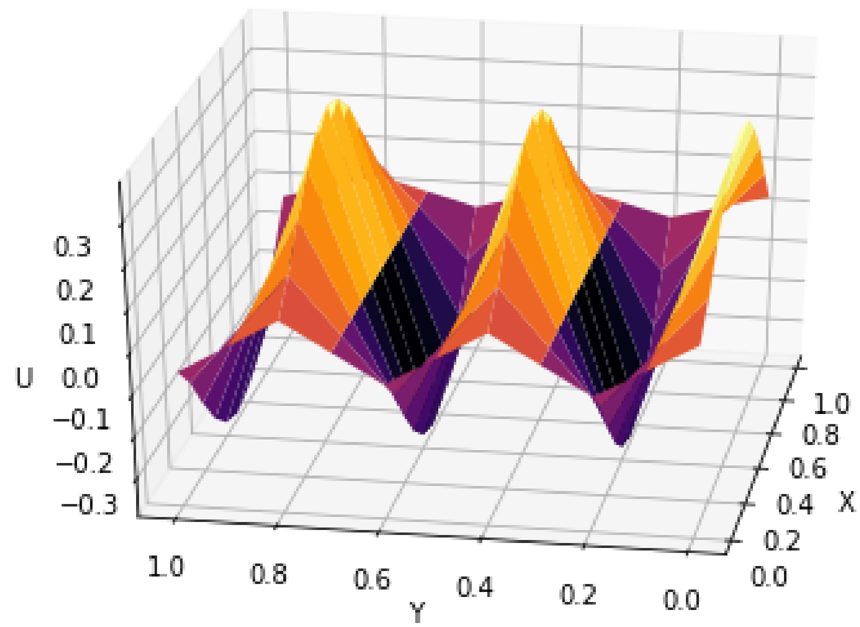
$M = 3:$


4
2
U
0
−2
−4
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Y
1.0
0.8
0.6
0.4
X
0.2
0.0

$M = 5:$

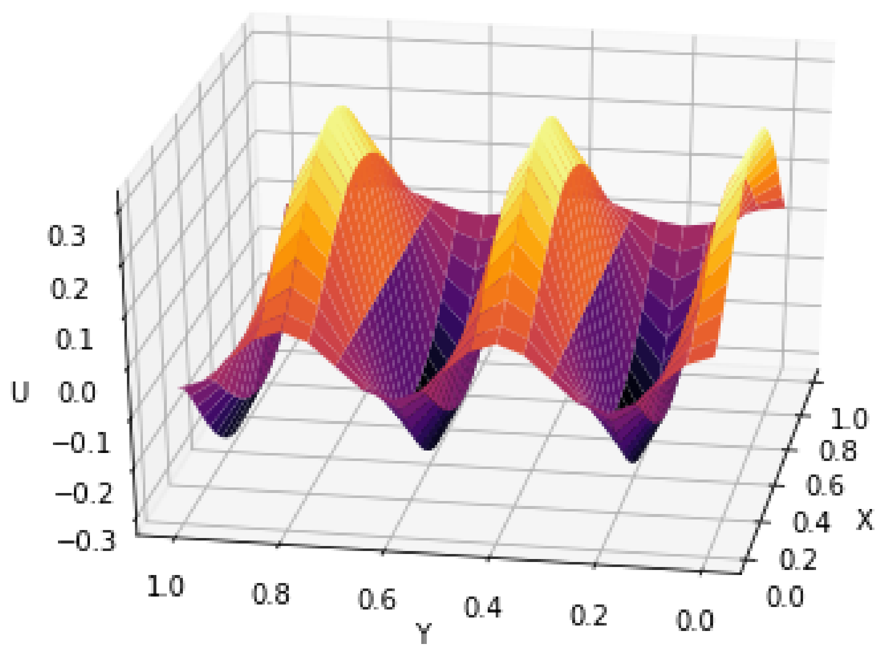

0.6
0.4
0.2
U
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Y
1.0
0.8
0.6
0.4
X
0.2
0.0

$M = 10$:



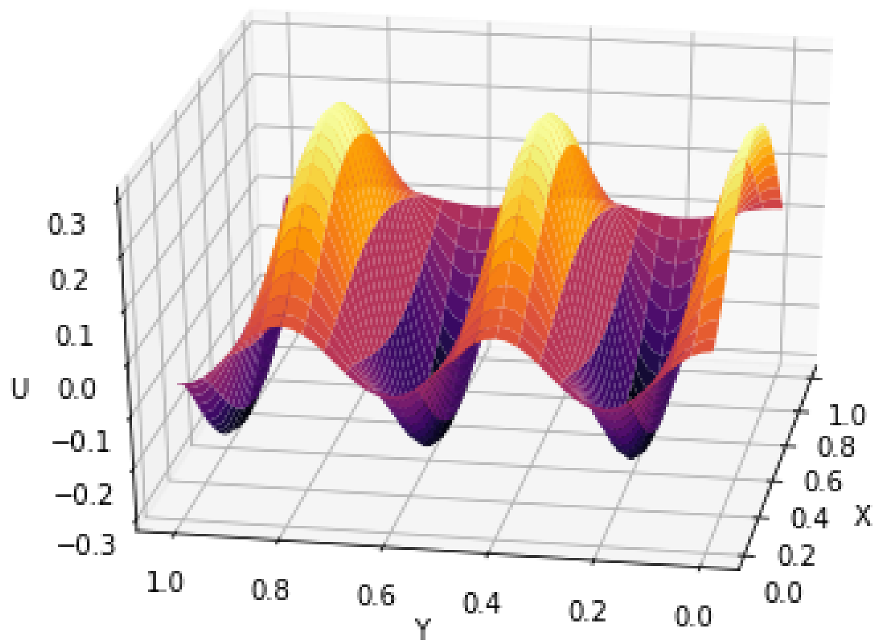
0.3
0.2
0.1
U 0.0
−0.1
−0.2
−0.3
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
X

$M = 20$:



0.3
0.2
0.1
U 0.0
−0.1
−0.2
−0.3
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
X

$M = 50 :$



Вывод

Для данных двух примеров удобно было представить системы линейных уравнений в матрично-векторной форме. Уже при $M = 5$, то есть деления отрезка $(0, 1)$ на 5 частей, график показывал правильную форму, а при дальнейшем увеличении M его общий вид почти не менялся, но показываемые значения становились более прибиженными к решению, ошибка вычисления уменьшалась.

Системы линейных алгебраических уравнений удобно представлять в матрично-векторной форме, это не всегда необходимо. Матрично-векторный формат полезен для пояснительных целей и необходим, если должен использоваться решатель прямых линейных уравнений. Для особенно больших систем итерационные методы решения более эффективны, и они обычно разрабатываются таким образом, чтобы не требуют построения матрицы коэффициентов, но работают непосредственно с приближением (6).