Дискретная математика, модуль 1 из 4

Danił Szubin

12 февраля 2019 г.

Содержание

1 Математическая скоропись. Начала логики.

1.1 Высказывания и предикаты

Определение 1. Высказывание – осмысленное утверждение, про которое можно однозначно судить: истинно оно или ложно.

Высказывания	Не высказывания
$2+1=3$	$x^2=2$
"Волга впадает в Каспийское море"	"погода хорошая"
$1=0$	

Пример 1.1. Проблема с "погода хорошая" в том, что это слишком расплывчатая фраза, нет чётких критериев, чтобы решить, хорошая погода или нет. Проблема с "$x^2 = 2$" в том, что не указано, что такое x.

Определение 2. Предикат (логическая функция) — высказывание, зависящее от параметра (т.е. содержащее букву), и указано, что именно можно подставлять вместо буквы. При этом при каждом возможном значении параметра (буквы) должно быть можно сказать: верно это высказывание или нет.

Пример 1.2. Например, ($x^2 = 2$, где x пробегает множество студентов нашей группы) - это не предикат, потому что не указано, как возводить студента в квадрат и как потом результат этой операции сравнивать с числом, т.е. при подстановке вместо буквы любого из разрешённых значений мы не получаем высказывание (см. определение 2 высказывания выше).

$P(x) = (x^2 = 1), x = \mathbb{R}$ – предикат; логическая функция от одного вещественного переменного x

$P(x) = (1 = 0)$ – предикат; логическая функция от нуля переменных, т.е. константа. Причём в данном случае это константа 0, поскольку высказывание 1=0 ложно.

1.2 Кванторы

Определение 3. Кванторы - это значки, которые пишутся перед предикатом. Иногда их можно писать и после предиката, если это не вызывает путаницы при записи нескольких предикатов рядом. Если есть цель полностью избежать путаницы, то надо поставить все кванторы на стандартное для них место — перед теми предикатами, к которым они относятся. Бывает два квантора: $\forall$ и $\exists$.

Квантор всеобщности $\forall$
$\forall x : P(x)$ – для всех/любого/каждого x верно $P(x)$

Квантор существования $\exists$
$\exists x : P(x)$ – существует такой x, что верно $P(x)$

Обратите внимание: если в предикате каждую из переменных связать квантором, то получится константа.

1.3 Логические константы

0 (ложь); 1 (истина);

1.4 Общеупотребительные логические функции

Название	Значок	Прочтение	Таблица истинности
Конъюнкция	$\wedge$, &,	$x \wedge y$, "x и y"	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline x \wedge y & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$
Дизъюнкция (Неисключающее "или")	$\vee$, or	$x \vee y$, "x или y"	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x \vee y & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$
Исключающее "или"	$\oplus$, xor	$x \oplus y$, "x либо y"	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x \oplus y & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$
Импликация	$\to$	$x \to y$, "из x следует y"	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x \to y & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$
Эквивалентность	$\leftrightarrow, \Leftrightarrow$	$x \leftrightarrow y$, "x логически эвивалентноно y"	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x \leftrightarrow y & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$
Отрицание	$\neg$, $\bar{x}$	$\bar{x}$, "не верно, что x"	$\begin{array}{c\|c\|c} x & 0 & 1 \\ \hline \bar{x} & 1 & 0 \end{array}$

Замечание 1.1. Запись $a \longrightarrow b$ означает «из a следует b». Эта связь между a и b может быть равносильно выражена так:
a – достаточное условие для b;
b – необходимое условие для a;

2 Множества и операции с ними

Неформальное описание: **Множество** – набор, неупорядоченный список, куча, семейство каких-либо объектов, отличимых друг от друга и от всех остальных объектов материального и интеллектуального мира, называемых **элементами**.

Замечание 2.1. 1. В множестве все элементы разные, не повторяются.

2. Множество — одно из основных понятий математики. При современном подходе каждый новый вводимый в рассмотрение объект определяется как некоторое множество.

3. Подходы к теории множеств

   - наивный (нет аксиом, интуитивное понимание множества через описание)
   - аксиоматический

Неформальное описание: **Функция (в широком смысле)**, определённая на множестве A и принимающая значения в множестве B — это правило, способ, по которому каждому элементу x множества A сопоставлен ровно один элемент $f(x)$ множества B.
$f : A \longrightarrow B$ – функция f отображает A в B
$y = f(x)$ – значение функции f на элементе x равно элементу y
$f : x \mapsto f(x)$ – f переводит элемент x в элемент $f(x)$
$f = [x \mapsto f(x)]$ – f – это та функция, которая x переводит в $f(x)$

Неформальное описание: **Функция (в узком смысле)** – функция в широком смысле, заданная на числовом множестве и принимающая числовые значения, т.е. A и B – некоторые множества чисел. Если $f : A \longrightarrow B$, то A называется областью определения функции ($D(f), D_f, Dom(f)$, а B – множеством значений. (Не путать с множеством всех принимаемых значений)

Пример 2.1. $A = B = \mathbb{R}, f(x) = sin(x)$

$D(f) = A = \mathbb{R}$ – область определения

$B = \mathbb{R}$ – множество значений

$E(f) = [-1; 1]$ – множество всех принимаетмых значений

$x \in A$ – "x лежит в A"

$A \ni x$ – "A содержит x"

Если из $x \in A$ следует $x \in B$, то говорят, что A является **подмножеством** в множестве B, это записывается как $A \subset B$ и $B \supset A$. При этом B называется **надмножеством** для A.

$\varnothing$ – **пустое множество**, т.е. множество, в котором нет элементов

2.1 Способы задания множеств

1. Явное перечисление (годится для небольших множеств)
   $A = \{1, 2, a, *\}$ –"множество A содержит элементы $1, 2, a, *$ и не содержит других элементов"

2. Задание с помощью свойства или правила (предиката)
   $A = \{x : P(x)\}$ – "A состоит из тех x, для которых верно $P(x)$". Внимание! Должно быть явно указано, что можно подставлять в качестве x. Иначе могут возникнуть парадоксы, об этом будет сказано в конце курса.
   $\{x : x^2 \leq 4, x \in \mathbb{R}\} = [-2; 2]$

3. Множество можно выразить через уже известные множества и операции над множествами.

4. Множество можно задать с помощью характеристической функции

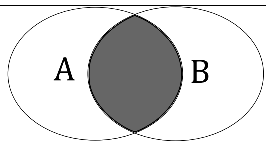
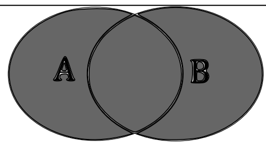
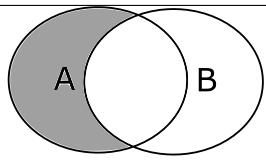
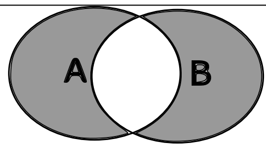
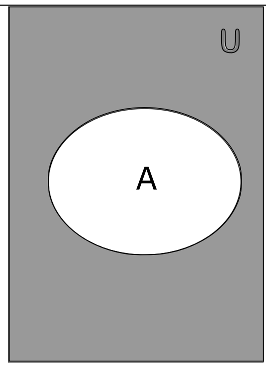
Замечание 2.2. Будем считать, что все рассматриваемые нами множества содержатся в каком-то одном большом множестве U. То есть мы не рассматриваем сколь угодно большие множества, а оперируем только подмножествами множества U.

Определение 4. Характеристической функцией χ_A множества $A (A \subset U)$ называется функция, принимающая значение 1 на элементах множества A и значение 0 на остальных элементах множества U.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_A : U \longrightarrow \{0, 1\}$$

2.2 Операции над множествами

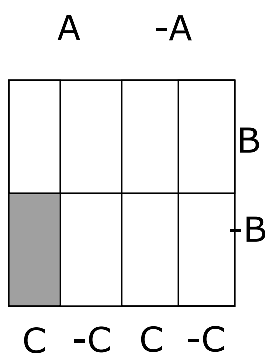
Обозначение	Название	Определение	Диаграмма Эйлера	Характеристическая функция
$A \cap B$	пересечение	$x \in A \cap B \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$		$\chi_{A \cap B} = \chi_A(x)\chi_B(x)$
$A \cup B$	объединение A и B	$x \in A \cup B \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$		$\chi_{A \cup B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$
$A \setminus B$	A без B	$x \in A \setminus B \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$		$\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$
$A \triangle B$	Симметрическая разность A и B	$x \in A \triangle B \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (x \in A) \oplus (x \in B)$		$\chi_{A \triangle B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)$
$\neg A, A^C$	Дополнение (complementary) мн-а A	$x \in \neg A \leftrightarrow$ $\leftrightarrow x \notin A$		$\chi_{\neg A}(x) = 1 - \chi_A(x)$

2.3 Круги Эйлера, диаграммы Венна

1)Как обойтись совсем без картинок при сравнении множеств?

	A	$\overline{A}$	B	$\overline{B}$	C	$\overline{C}$
$A \setminus B$	1	0	0	1	1	1
$(A \setminus B) \cap C$	1	0	0	1	1	0

2)Как нарисовать картинку для $n \geqslant 3$ множеств?



Определение 5. Если A — множество, то символами 2^A и $\mathcal{P}(A)$ и $\mathscr{P}(A)$ обозначается множество всех подмножеств множества A, т.е. $2^A = \mathcal{P}(A) = \mathscr{P}(A) = \{B : B \subset A\}$.

Замечание 2.3. Почему используется обозначение 2^A? Если A — конечно, то в множестве 2^A ровно 2^n элементов. Обозначая количество элементов в конечном множестве M символом $|M|$, получаем равенство $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Теорема 2.1. Если в множестве A ровно n элементов, то у множества A ровно 2^n подмножеств.

Доказательство. 1 способ: $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Тогда каждое множество $B \subset A$ однозначно задаётся своей характеристической функцией $\chi_B : A \leftarrow \{0, 1\}$.

$\chi_B(a_1), ..., \chi_B(a_n)$ — строка из 0 и 1 длины n. Сколько таких строк, столько и возможных характеристических функций, столько и существует подмножеств у множества A. Всего строк 2^n, так как эти строки задают двоичное разложение целых чисел от 0 (строка из всех нулей) до $2^n - 1$ (строка из всех единиц).
2 способ:
База: $n = 0, A = \varnothing$, $2^A = \{\varnothing\}$ — множество из одного элемента, этот элемент — $\varnothing$.
$2^n = 2^0 = 1$ - верно
Предположение: У множества из n элементов ровно 2^n подмножеств.
Шаг: Пусть в множестве B ровно $n + 1$ элементов. Докажем, что у B ровно 2^{n+1} подмножеств.
т. к. $B \neq \varnothing$, то выберем любой элемент $b \in B$. Тогда все подмножества множества B распадаются на 2 типа:
1. Не содержащие b, т. е. подмножества множества $B \setminus \{b\}$, в котором n (2^n подмножеств).
2. Содержат b, т.е. $(\{b\} \cup C, C \subset B \setminus \{b\}$. Поэтому их тоже 2^n штук.
Все подмножества множества B:
$2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1})$ □

Определение 6. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B дизъюнктные. Выражение $A \sqcup B$ называют дизъюнктной суммой (дизъюнктным объединением) множеств A и B, то есть

$$C = A \sqcup B \Longleftrightarrow \begin{cases} C = A \cup B \\ A \cap B \neq \varnothing \end{cases}$$

2.4 Формула включений-исключений

Обозначение: Если A — конечное множество, то символы $|A|$, $\#A$, $Card(A)$ обозначают количество элементов в множестве A.
Пример: $|\{1, a, *\}| = \#\{1, a1*\} = Card(\{1, a, *\}) = 3$
$|\varnothing| = 0$
Формула включений-исключений для двух множеств

$|A \cup B = |A| + |B| - |A \cap B|$

Формула включений-исключений для трёх множеств
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
Формулу включений-исключений можно записать для любого конечного числа множеств, подробнее см. Википедию.

3 Бинарные отношения

Общество - это множество людей
и отношений между ними.

И. Ремизов 2006г.

Определение 7. Если $x \neq y$, то множество $\{x,\ y\}$ называется **неупорядоченной парой** x и y.

Замечание 3.1. Все множества первоначально предполагаются не имеющими никакой внутренней структуры: их нельзя складывать, сравнивать, какой из них больше, и так далее. Сложение, порядок и так далее должны быть специально определены, поэтому между множествами $\{x,\ y\}$ и $\{y,\ x\}$ нет разницы (то есть $\{x,\ y\} = \{y,\ x\}$), так как обе эти записи говорят лишь, какие элементы входят в множество. У множеств $\{x,\ y\}$ и $\{y,\ x\}$ одни и те же элементы, поэтому множества $\{x,\ y\}$ и $\{y,\ x\}$ равны. Если $x = y$, то неупорядоченная пара $\{x,\ y\}$ содержит по факту только один элемент (так как x и y — один и тот же элемент), поэтому $\{x,\ x\} = \{x\}$.

Определение 8. Упорядоченной парой называется множество $\langle x,\ y\rangle = \{\{x,\ y\},\ \{x\}\}$. Элемент x здесь называется первым элементом пары, а y — вторым.

Замечание 3.2. Если $x \neq y$, то $\langle x,\ y\rangle = \{\{x,\ y\},\ \{x\}\} \neq \{\{x,\ y\},\ \{y\}\} = \langle y,\ x\rangle$.

Определение 9. Пусть A и B - множества. **Декартовым произведением** A и B называют множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент из A, а второй — из B. $\langle a, b\rangle$ - упорядоченная пара $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A, b \in B\}$

Определение 10. Бинарным отношением на $A \times B$ (другой термин — **соотношение** из A в B) называется подмножество в $A \times B$.

$R \subset A \times B$, R — соотношение из A в B.
R — те пары $\langle a, b\rangle$, которые состоят в отношении R
Обозначение: $\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow aRb$
Графиком отношения R называют отношение R

3.1 Свойства бинарных отношений

Определение 11. Отношение R на множестве A называется

- **рефлексивным**, если $aRa \forall a \in A$. Геометрический смысл: диагональ принадлежит бинарному отношению.
- **антирефлексивным**, если $a\overline{R}a \forall a \in A$. Геометрический смысл: диагональ не пересекается с графиком отношения.

- **симметричным**, если $xRy \iff yRx \quad \forall x \in A, \quad y \in A$. Геометрический смысл: график симметричен относительно диагонали.
- **антисимметричным**, если $(xRy \wedge yRx) \Longrightarrow y = x$. Геометрический смысл: симметричные относительно диагонали точки графика могут лежать только на диагонали.
- **связным**, если $xRy \vee yRx \quad \forall x \in A, \quad y \in A$.
- **транзитивным**, если $xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz \quad \forall x \in A, \quad y \in A, \quad z \in A$

Определение 12. Отножение R на множестве A называется **отношением предпочтения**, если оно связно и транзитивно. Пример: пусть A — непустое множество, и дана функция (называемая функцией полезности) $f\colon A \to \mathbb{R}$, тогда можно положить $xRy \iff f(x) \leq f(y)$. Проверьте, что R — отношение предпочтения.

Замечание 3.3. Оказывается, что не каждое отношение предпочтения можно задать с помощью функции полезности.

3.2 Отношение эквивалентности

Определение 13. R называется **отношением эквивалентности** если и только если оно рефлексивно, симметрично и транзититвно.

Определение 14. **Разбиением множества** A на A_ω $\omega \in \Omega$ называется представление A в виде дизъюнктной суммы множеств A_ω, то есть $A = \bigsqcup\limits_{\omega \in \Omega} A_\omega$, по использованному обозначению см. раздел 4.3.

Определение 15. M — множество и R — отношение эквивалентности на M. **Классом эквивалентности элемента** $x \in M$ называется множество $K_x = [x] = \{y \in M \mid xRy\}$

Теорема 3.1. $[x] \cap [y] \neq \varnothing \Longrightarrow [x] = [y]$
Доказательство .
Если $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, то $\exists z \in M : (z \in [x]) \wedge (z \in [y])$

$$w \in [x] \Leftrightarrow xRw$$

$$zRx$$

$$zRy \Leftrightarrow yRz$$

$yRw \iff wRy \iff w \in [y]$ Следовательно

$$yRx$$

$$zRyRxRw$$

Значит $[x] \subseteq [y]$, аналогично $[y] \subseteq [x]$ Следовательно $[x] = [y]$. $\square$

Теорема 3.2. Каждое отношение эквивалентности R на множестве A однозначно задаёт разбиение множества A. При этом разбиения с различным порядком слагаемых считаем одинаковыми. Обратно, по каждому разбиению множества A можно единственным образом построить отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности будут совпадать с множествами, на которые разбито A

Доказательство .

1) Пусть R — отношение эквивалентности на A. Рассмотрим множества K_x, где $x \in A$. Так как xRx, получаем, что $A = \bigcup\limits_{x \in A} K_x$.

Докажем, что $\omega_1 \overline{R} \omega_2 \Rightarrow A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2} = \varnothing$.

$A_{\omega_1} = K_{\omega_1}$, $A_{\omega_2} = K_{\omega_2}$ причем $\omega_1 \overline{R} \omega_2$ т. к. из семейства K_x, $x \in A$ мы убрали повторяющиеся множества и в каждом из оставшихся выбрали ровно один элемент ω_3, который мы использовали в обозначении A_ω того множества в котором $\omega \in A_\omega$.

Если $K_{\omega_1} \cap K_{\omega_2} \neq \varnothing$, то по ранее доказанному утверждению было бы $K_{\omega_1} = K_{\omega_2}$, а это бы влекло $\omega_1 R \omega_2$, но это не так. Противоречие с тем, что $\omega_1 \overline{R} \omega_2$.

2) Пусть $A = \bigsqcup\limits_{\omega \in \Omega} A_\omega$ положим $xRy \Leftrightarrow \exists \omega_0 \in \Omega : (x \in A_{\omega_0}) \wedge (y \in A_{\omega_0})$.

Докажем, что R - отношение эквивалентности.

1. Рефлексивность. $(xRx) \Leftrightarrow \exists \omega_0 \in \Omega$.

$(x \in A_{\omega_0}) \wedge (x \in A_{\omega_0})$ верно, т.к. $A = \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} A_\omega$, то $\exists A_{\omega_0} \ni x$ по определению объединения множеств.

2. Симметричность. $xRy \Leftrightarrow (\exists A_{\omega_0} : (x \in A_{\omega_0} \wedge y \in A_{\omega_0})) \Leftrightarrow (\exists A_{\omega_0} : (y \in A_{\omega_0}) \wedge (x \in A_{\omega_0})) \Leftrightarrow yRx$

3. Транзитивность.$(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$

$xRy \Longrightarrow \exists A_{\omega_1} : (x \in A_{\omega_0}) \wedge (y \in A_{\omega_1})$

$yRz \Longrightarrow \exists A_{\omega_2} : (y \in A_{\omega_2}) \wedge (z \in A_{\omega_2})$

$(y \in A_{\omega_1}) \wedge (y \in A_{\omega_2}) \Longrightarrow A_{\omega_1} = A_{\omega_2} \Longrightarrow \omega_1 = \omega_2$

(т.к. $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$ по определению разбиения) $\Longrightarrow A_{\omega_1} = A_{\omega_2}$

Положим $\omega_3 = \omega_2 = \omega_1$

$x \in A_{\omega_1} \Rightarrow x \in A_{\omega_3}$

$z \in A_{\omega_2} \Rightarrow z \in A_{\omega_3}$

$\exists A_{\omega_3} : (x \in A_{\omega_3}) \wedge (y \in A_{\omega_3}) \Rightarrow xRz$ □

Замечание 3.4 (О терминологии). $K_x = \{y \mid y \in M,\ xRy\}$, где R — отношение эквивалентности на M.

K_x — класс эквивалентности x,

x — представитель класса K_x,

Но у одного класса может быть много представителей. Выбор представителя не диктуется самим отношением R. По предыдущему утверждению R однозначно определяет только разбиение на классы. Поэтому часто говорят не о классах элементов, а о классах самого отношения R.

Определение 16. Процесс разбиения множества на классы эквивалентности называется **факторизацией**. Множество полученных классов называется **фактор-множеством**.

Обозначение: $A_{/R}$, где A - множество, R - отношение эквивалентности.

3.3 Отношение порядка

Определение 17. R называется **отношением порядка** если и только если R обладает тремя свойствами:

1)рефлексивность $\forall x \in M \ : \ xRx$

2)симметричность $\forall x, y \in M \ : \ xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y$

3)транзитивность $\forall x, y, z \in M \ : \ (xRy) \wedge (yRz) \Longrightarrow xRz$

Определение 18. Пусть $(M, \preccurlyeq)$ — упорядоченное множество, т.е. $\preccurlyeq$ — отношение порядка.

Пусть $A \subset M$. Тогда элемент $b \in M$ назывется **верхней гранью** для A, если $\forall x \in A:$ $x \preccurlyeq b$.

Если в множестве всех верхних граней множества A есть наименьший элемент, то он называется **точной верхней гранью** множества A, и обозначается $\sup A$, читается: супремум A.

Пусть $(M, \succcurlyeq)$ — упорядоченное множество, т.е. $\succcurlyeq$ — отношение порядка. Пусть $A \subset M$. Тогда элемент $b \in M$ называется **нижней гранью** для A, если $\forall x \in A : x \succcurlyeq b$.

Если в множестве всех нижних граней множества A есть наибольший элемент, то он называется **точной нижней гранью** множества A, и обозначается $\inf A$, читается: инфимум A.

Определение 19. Упорядоченной суммой упорядоченных множеств $\langle A, \leqslant_A\rangle$ и $\langle B, \leqslant_B\rangle$ (не ограничивая общности, считаем, что $A \cap B = \varnothing$, иначе можно развести множества A и B, рассмотрев вместо них $A_1 = \{\langle a, 1\rangle : a \in A\}$ и $B_1 = \{\langle b, 2\rangle : b \in B\}$, тогда $A_1 \cap B_1 = \varnothing$) называется пара $\langle C, \leqslant_C\rangle$, где $C = A \cup B$ и

$$x \leqslant_C y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant_A y & x, y \in A \\ x \leqslant_B y & x, y \in B \\ x \leqslant_C y & x \in A \wedge y \in B \end{cases}$$

то есть каждый элемент $x \in A$ меньше или равен каждого $y \in B$, а внутри A и B элементы упорядочены, как в A и B.

Замечание 3.5. В упорядоченной сумме A и B всегда каждый элемент из A сравним с каждым элементом из B.

Замечание 3.6. Сумма упорядоченных множеств не коммутативна, в общем случае $A + B \neq B + A$

Определение 20. Упорядоченным произведением $\langle A, \leqslant_A\rangle$ и $\langle B, \leqslant_B\rangle$ называется упорядоченное множество $\langle C, \leqslant_C\rangle$, где :
$C = A \times B$, а

$$\langle x_1, y_1\rangle <_C \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 <_A x_2, & y_1 = y_2 \\ y_1 <_B y_2, & y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

4 Функции

4.1 Определение и свойства

Определение 21. Пусть A и B - непустые множества, и $R \subset A \times B$ — соответствие (бинарное отношение). Тогда по определению:
$D(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B : xRy\}$ — проекция на первую координату;
$E(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A : xRy\}$ — проекция на вторую координату;
$R^{-1} = \{\langle y,\ x\rangle \mid \langle x,\ y\rangle \in R\} \subset B \times A$ — обратное соответствие.
Непосредственно из этих определений вытекает, что
$(R^{-1})^{-1} = R,\ D(R^{-1}) = E(R),\ E(R^{-1}) = D(R)$

Определение 22. Функцией $f : A \longrightarrow B$ называется такое соответствие f, что $D(f) = A$ и для каждого $x \in A$ существует не более одного такого $y \in A$, что $\langle x,\ y\rangle \in f$. (Первое условие называется условием определённости всюду на A, а второе — условие однозначности).
Вместо $\langle x,\ y\rangle \in f$ пишут $y = f(x)$.

Определение 23. Функция f называется **обратимой**, если соответствие f^{-1} - функция.

Определение 24. Если f — функция, то $D(f)$ называется **областью определения** функции f. А $E(f)$ - **множеством принимаемых значений**.

Определение 25. Функция $f : A \longrightarrow B$ называется:

- **инъективной (инъекцией), теоретико-множественным вложением**, если $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, то есть разные элементы множества A переходят в разные элементы множества B.

- **сюръективной (сюръекцией), теоретико-множественным наложением, отображением** A ***на*** B, если
$E(f) = B$, то есть в каждый элемент множества B перейдёт какой-то элемент множества A.

- **биективной (биекцией)**, если она одновременно инъективна и сюръективна.

Пример 4.1. $A = B = \mathbb{R}, f(x) = x^2$ — не инъективна, не сюръективна

Утверждение 4.1 (Принцип Дирихле)**.** *Пусть* $f : \{a_1, \ldots, a_n\} \longrightarrow \{b_1, \ldots, b_m\}$ *тогда*

1) если $n > m$, *то* $\exists b^*$ *такой, что под действием* f *в* b^* *перейдёт не менее* $\dfrac{n}{m}$ *элементов. В частности,* f *— не инъективна;*

2) если $n < m$, *то* $\exists b_*$ *такой, что под действием* f *в* b_* *перейдёт не более* $\dfrac{n}{m}$ *элементов. В частности,* f *— не сюръективна;*

Доказательство .
1) Пусть в каждый из m элементов перешло меньше, чем $\dfrac{n}{m}$ элементов, тогда всего переходило меньше, чем $m\dfrac{n}{m} = n$ элементов. Противоречие!
2) усть в каждый из m элементов перешло больше, чем $\dfrac{n}{m}$ элементов, тогда всего переходило больше, чем $m\dfrac{n}{m} = n$ элементов. Противоречие! □

Утверждение 4.2. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *и* $f : A \longrightarrow A$. *Тогда следующие условия равносильны:*
1) f *— биекция;*
2) f *— инъекция;*
3) f *— сюръекция;*

Доказательство .
$1 \to 2$ По определению биекции;
$2 \to 3$
Так как f — инъективна, то среди элементов $f(a_1),\ f(a_2), \ldots,\ f(a_n)$ нет повторяющихся, при этом все они являются элементами A. Если $\exists x \in A$ такой, что $\nexists a \in A : x = f(a)$, то f — инъективное отображение $A \longrightarrow A \setminus \{x\}$ множества из n элементов в множество из не более чем $n-1$ элементов, что невозможно по принципу Дирихле (1).
$3 \to 1$
Если $\exists a_1 \neq a_2 : f(a_1) = f(a_2)$, то среди элементов $f(a_1), \ldots,\ f(a_n)$ есть не более $n-1$ различных, однако для каждого $f(a_i)$ существует a_j такой, что $f(a_i) = a_j$ так как $f(A) = A$. Тогда положим $g : f(a_j) \longmapsto a_j$. Тогда g —сюръективное отображение множества $\{f(a_1), \ldots,\ f(a_{n-1}\}$ из не более, чем $n-1$ элементов в множество $\{a_1, \ldots,\ a_n\}$ из n элементов, что невозможно по принципу Дирихле (2). □

4.2 Свойства биекции

Утверждение 4.3. *(f — обратима, то есть f^{-1} — функция) $\Longleftrightarrow$ f — биекция.*

Доказательство .
1) f^{-1} - функция, значит $D(f^{-1}) = B \Longleftrightarrow E(f) = B$, а это значит, что f — сюръективна. Так как f^{-1} — функция, то она удовлетворяет условию однозначности, то есть для каждого $b \in B$ существует не более одного такого $a \in A$, что $\langle b,\ a\rangle \in f^{-1}$, но $\langle a,\ b\rangle \in f$ поэтому f — инъективна.
2) Доказательство получается прочтением доказательства пункта 1) снизу вверх. □

Следствие 4.1. Обратная к биекции функция - тоже биекция.
Доказательство .
f — биекция $\longrightarrow f^{-1}$. По определению обратного отношения $(f^{-1})^{-1} = f \Longrightarrow (f^{-1})^{-1}$ — функция $\Longrightarrow f^{-1}$ — биекция. □

Замечание 4.1. Биекцию называют также взаимно-однозначным соответствием или "1-1 соответствием" потому что запись «$f\colon A \longrightarrow B$ — биекция» означает, что для каждого $a \in A$ существует ровно один такой (поставленный ему в соответствие) элемент $b \in B$, что $b = f(a)$.

Утверждение 4.4. *Композиция биекций — биекция.*

Доказательство . Пусть $f\ :\ A \longrightarrow B$ и $g\ :\ B \longrightarrow C$ — биекции. Докажем, что $h\ =\ g \circ f\ (h(x) = g(f(x)))\quad (h\ :\ A \longrightarrow C$ — биекция.
1) h — инъекция так как f переводит разные элементы A в разные элементы B, а g переводит разные элементы B в разные элементы C.
2)h — сюръекция, потому что $f(A)\ =\ B$, так как f – сюръекция, а $g(B)\ =\ C$, так как g —сюръекция, поэтому $h(A)\ =\ g(f(A))\ =\ g(B)\ =\ C$
□

4.3 Индексирование

Говорят, что элементы множества B (или ещё говорят, что само множество B) проиндексированы (проиндексировано) с помощью множества индексов A, если существует биекция $f\ :\ A \longrightarrow B$, при этом пишут, что $B = \{f(\alpha)\ |\alpha \in A\}$ или $B = \{b_\alpha\ |\ \ \alpha \in A\}$, полагая, что $f(\alpha) = b_\alpha$.

Замечание 4.2. Множество индексов непусто, это единственное его свойство. Может быть $A = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},\ A = \mathbb{N},\ A = \mathbb{R},\ A = [0,\ 2]$ и т. д.

Примеры: (использование индексов)
I Пусть элементами множества B являются множества, и A — множество индексов, т.е. $B = \{\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in A\}$, $(B)_\alpha$ — множество. Тогда:
$$\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha = \{x \mid \forall\alpha \in A,\ x \in B_\alpha\}$$
$$\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha = \{x \mid \exists\alpha \in A,\ x \in B_\alpha\}$$
II Любое множество можно проиндексировать его собственными элементами, взяв в качестве индексирующей биекции тождественное отображение $f(\alpha) = \alpha)$ *Запись:* $A = \{\alpha\ , \alpha \in A\}$, здесь $a_\alpha = \alpha$

Определение 26. III Декартово произведение.

Пусть $B = \{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и при каждом $\alpha \in A$, B_α — множество. Положим $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$. Тогда $\prod\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$ — это[1] множество всех таких функций $f : A \longrightarrow \mathscr{B}$, что $\forall\alpha \in A$ верно $f(\alpha) \in B_\alpha$ (как и ранее, считаем, что множества B_α между собой не пересекаются, иначе мы можем их развести).

$$\prod_{\alpha\in A} B_\alpha = \left\{ f : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha \mid \forall\alpha \in A \ : \ f(\alpha) \in B_\alpha \right\}$$

Пример:

$$A = \{1, \ 2, \ 3\}, \ B = \{B_1, \ B_2, \ B_3\}$$

$$B_1 = \{1, \ 2\} \quad B_2 = \{0\} \quad B_3 = \{6, \ 7, \ 8\}$$

Тогда, с одной стороны:

$$\begin{gathered} B_1 \times B_2 \times B_3 = \{\langle b_1, \ b_2, \ b_3\rangle \ : b_1 \in B_1, \ b_2 \in B_2, \ b_3 \in B_3\} \ = \\ = \ \{\langle 1, \ 0, \ 6\rangle, \ \langle 2, \ 0, \ 6\rangle, \ \langle 1, \ 0, \ 7\rangle, \ \langle 2, \ 0, \ 7\rangle, \ \langle 1, \ 0, \ 8\rangle, \ \langle 2, \ 0, \ 8\rangle, \} \end{gathered}$$

с другой стороны все функции f:

$$\prod_{\alpha\in A} B_\alpha = \prod_{\alpha=1}^{3} B_\alpha$$

$$f : \{1, \ 2, \ 3\} \longrightarrow B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{1, \ 2, \ 0, \ 6, \ 7, \ 8\}$$

где $f(1) \ \in \{1, \ 2\}, \ f(2) \ \in \{0\}, \ f(3) \ \in \{6, \ 7, \ 8\}$
Всего всех без исключений функций $f \ \ \{1, \ 2, \ 3\} \longrightarrow \{1, \ 2, \ 0, \ 6, \ 7, \ 8\} \quad 6 \times 6 \times 6 \ = \ 6^3$ штук. Но они нам нужны не все.
$f(1) \ \in \{1, \ 2\}$
$f(2) \ \in \{0\}$
$f(3) \ \in \{6, \ 7, \ 8\}$
Таких будет $2 \times 1 \times 3 \ = \ 6$ штук. f — бинарное отношение

$$f \ = \ \{\langle x, \ f(x)\rangle, \ x \in D(f)\}$$

Заменим в этом виде функцию f, у которой $f(1) = 1, \ f(2) = 0, \ f(3) = 6$

$$f_1 \ = \ \{\langle 1, \ 1\rangle, \ \langle 2, \ 0\rangle, \ \langle 3, \ 6\rangle\}$$

этой функции соответствует тройка $\langle 1, \ 0, \ 3\rangle$

4.4 Аксиома выбора (Choice axiom)

Аксиома 4.1. Пусть $\{B_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ — некоторое множество непустых множеств. Тогда существует множество B^*, содержащее ровно по одной точке в каждом из множеств B_α, $\alpha \in A$, то есть можно из каждого множества B_α выбрать по одному элементу и совокупность этих элементов является множеством.

[1] Если верить Википедии принято именно это обозначение $\left(\prod\right)$, и для него нашлось обозначение в LaTeX

Утверждение 4.5. *Аксиома выбора равносильна тому, что декартово произведение непустого множества непустых дизъюнктных множеств непусто.*

Доказательство .

Выбрать по одному элементу из каждого множества B_α это то же самое, что для каждого $\alpha \in A$ задать такое $f(\alpha)$, что $f(\alpha) \in B_\alpha$. То есть $\exists f \in \prod\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$, значит $\prod\limits_{\alpha\in A} B_\alpha \neq \varnothing$, так как содержит элемент f. Импликация в обратную сторону получается прочтением этого рассуждения снизу вверх. □

4.5 Бесконечные множества

Утверждение 4.6. *Для множества $A \neq \varnothing$ следующие утверждения равносильны:*

1) $\exists A_1 \subsetneq A \ \ \exists f$ — биекция $\mid f \ : \ A \longrightarrow A_1$;

2) $\exists B \subset A \ \ \exists g$ — биекция $\mid g \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow B$;

3) $\nexists n \in \mathbb{N} \ : \ \exists\ h$ — биекция $\mid h \ : \ \{1,\ 2, \ldots,\ n\} \longrightarrow A$.

Определение 27. При выполнении любого из этих условий множество A называется **бесконечным**.

Доказательство . $1 \longrightarrow 2$

Так как $A_1 \neq A$, то $A_2 = A \setminus A_1 \neq \varnothing$, и $A \ = \ A_1 \sqcup A_2$. Тогда $\exists b_1 \in A_2$. Так как f — биекция ($f \ : \ A \longrightarrow A_1$). $A_2 \subset A$; $f(A_2) = A_1$, но $A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ f(b_1) \in A_1,\ b_1 \in A_2$ поэтому $b_1 \neq f(b_1)$. Положим $b_2 = f(b_1)$.
Построим $b_3 = f(b_2) = f(f(b_1))$

$$b_n = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n})(b_1)$$

Докажем, что если $i \neq j$, то $b_i \neq b_j$ От противного. Пусть $\exists i \neq j$, что $b_i = b_j$. Пусть (для определённости, но не ограничивая точности (с точностью до симметрии)) $i < j$, то есть $j = i + k,\ k > 0$.

$$b_i = b_j = b_{i+k}$$

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i-1}(b_1) \ = \ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i-1+k}(b_1) \ \ \mid \underbrace{f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{i-1}$$

$$A_2 \ni b_1 = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k}(b_1) \in A_1$$

$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k-1}(b_1) \ = \ y \ \in \ A$, но $f \ : \ A \ \longrightarrow \ A_1$ поэтому $f(y) \ \in \ A_1$. Противоречие с тем, что $A_2 \cap A_1 = \varnothing$. Таким образом построили $b_1,\ b_2, \ldots$ все различные. Положим $B = \{b_1, \ldots\}$.
Положим $g \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow B, \ \ g(s) = b_s, g$ — биекция.

$2 \longrightarrow 1$

Пусть $B \subset A, \ \ g \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow B$ — биекция. Построим такое $A_1 \subsetneq A$, и биекцию $f \ : \ A \longrightarrow A_1$. Положим

$$B_2 = \{g(2k),\ k \in \mathbb{N}\} \subset B = \{g(l),\ g \in \mathbb{N}\}$$

Тогда $A_1 = (A \setminus B) \cup B_2,\ A \setminus A_1 \neq \varnothing$, так как $g(1) \in A \setminus A_1$. Построим

$$f(x) \ = \ \begin{cases} x, & x \in A \setminus B \\ g(2k) = b_{2k}, & x = g(k) \in B \end{cases}$$

$f \ : \ A \longrightarrow A_1$.

Докажем, что f — инъекция:
Пусть $x_1 \neq x_2$ тогда

- $x_1 \in B$ $x_2 \in A \setminus B$, то $f(x_2) = x_2 \in A \setminus B$, а $f(x_1) \in B$. Значит $f(x_1) \neq f(x_2)$✓
- $x_1 \in A \setminus B,\ x_2 \in A \setminus B$, то $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$✓
- $x_1 \in B,\ x_2 \in B$, то $x_1 = g(i),\ x_2 = g(j)$
  $f(x_1) = f(g(i)) = g(2i) \neq g(2j) = f(g(j)) = f(x_2)$✓

Докажем, что f — сюръекция $A \longrightarrow A_1$.
В самом деле $A_1 = (A \setminus B) \sqcup B_2$.

- Если $y \in A \setminus B$, то в y перейдёт $y \in A \setminus B$✓
- Если $y \in B_2$, то $y = b_{2k}$ в y перейдёт $b_k \in B \subset A$✓

f — биекция!
$2 \longrightarrow 3$
От противного. Пусть $\exists n \in \mathbb{N}$ и биекция $h\ :\ \{1,\ 2, \dots,\ n\} \longrightarrow A$. Тогда согласно (2) $\exists g\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow B \subset A$ — биекция, и среди элементов $\{g(1), \dots,\ g(n),\ g(n+1)\}$ ровно $n+1$ разлиных. Так как $h\ :\ \{1,\ 2, \dots,\ n\} \longrightarrow A$, то h — сюръекция и в частности $h\ :\ \{1,\ 2, \dots,\ n\} \longrightarrow \{g(1), \dots,\ g(n),\ g(n+1)\}$ — тоже сюръекция, что не возможно по принципу Дирихле (2).
$3 \longrightarrow 2$
Так как $A \neq \varnothing$ $\exists a_1 \in A$. Если в A был только один элемент a_1, то существовала бы биекция $h\ :\ \{1\} \longrightarrow A = \{a_1\}$. Значит в A более 1 элемента, $\exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Но если бы в A было два элемента, то существовала бы биекция $h\ :\ \{1, 2\} \longrightarrow A = \{a_1, a_2\}$, что невозможно по (3). Значит неверно, что в A 0, 1, 2 элементов, их больше, чем 2, поэтому $\exists a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$.
На n-ом шаге построены $a_1, \dots,\ a_n$. Если бы в A было n элементов, существовала бы биекция, что невозможно по (3). Значит неверно, что в A 0, 1, 2, ..., n элементов, их больше, чем n, поэтому $\exists\ a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.
Положим $g(k) = a_k,\ g\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \{a_1, \dots,\ a_n, \dots\} = \{a_k | k \in \mathbb{N}\} \subset A$ — биекция.
g — сюръекция, так как в a_k переходит $k \in \mathbb{N}$.
g — инъекция, так как по построению все $a_1,\ a_2, \dots$ различны. □

Определение 28. Множество называется конечным, если оно пусто или не является бесконечным. В частности на основании предыдущей теоремы множество $A \neq \varnothing$ называется конечным, если выполняется любое из условий:
1') $\nexists$ биекции A на некоторое собственное подмножество A;
2') A не имеет счётного подмножества;
3') $\exists n \in \mathbb{N}$, что $\exists$ биекция $h : \{1,\ 2, \dots,\ n\} \longrightarrow A$, то есть $A = \{h(1), \dots,\ h(n)\}$

Определение 29. Множество A называется счётным, если существует биекция $\mathbb{N} \longrightarrow A$. Множество называется не более, чем счётным, если оно конечно или счётно.

4.6 Мощности множеств

Определение 30. Говорят, что множества A и B равномощны (синоним: имеют одинаковую мощность) если существует биекция между A и B. Пишут $|A| = |B|$

Утверждение 4.7. *Для множеств A и B следующие три утверждения равносильны.*
1)$\exists$ инъекция $f : A \longrightarrow B$
2)$\exists B_1 \in B$ $\exists$ биекция $g : A \longrightarrow B_1$
3)$\exists$ сюръекция $h : B \longrightarrow A$

Определение 31. При выполнении любого из этих условий говорят, что мощность A не больше мощности B (запись $|A| \leqslant |B|$) и мощность B не меньше мощности A (запись $|B| \geqslant |A|$)

Доказательство .

$1 \longrightarrow 2$

Положим $B_1 = f(A), g(x) = f(x)$. Тогда g — инъективно так как f — инъективно и сюръективно (так как $B_1 = f(A) = \{y \in B \ : \ \exists x \in A \ y = f(x) = g(x)\}$

$2 \longrightarrow 3$

$$h(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & y \in f(A) \\ a_0 & A \neq \varnothing \ \wedge \ y \in \backslash(f(A)) \end{cases}$$

Здесь a_0 — некоторый выбранный элемент в A. h — сюръекция так как $h(B) = f^{-1}(f(A)) = A$, где f — биекция.

$3 \longrightarrow 1$

Так как h — сюръекция. Каждое из множеств $h^{-1}(\{x\})$ не пусто для каждого $x \in A$. С помощью аксиомы выбора из множеств $\{h^{-1}(\{x\}) \ : \ x \in A\}$ выберем по одному элементу $y_x = h^{-1}(\{x\})$. Положим $f(x) = y(x)$. Функция f задана для каждого $x \in A$. Кроме того f — инъективна, так как если $x_1 \neq x_2$, то множество $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \varnothing$, поэтому $h^{-1}(\{x_1\}) \cap h^{-1}(\{x_2\}) = \varnothing$, но

$f(x_1) \in h^{-1}(\{x_1\})$ и $f(x_2) \in h^{-1}(\{x_2\})$, значит $f(x_1) \neq f(x_2)$ □

Определение 32. Если $|A| \leqslant |B|$, но $|A| \neq |B|$, то говорят, что $|A| < |B|$ (строго меньше). То есть из A в B есть инъекция, но нет биекции.

Определение 33. Если A и B — множества, то A^B — **множество всех функций**, отображающих B в A, то есть

$$A^B = \{f \mid f : B \longrightarrow A\}.$$

Утверждение 4.8. *Если A — множество, то*

$$|P(A)| = |\{0,1\}^A| = |\{x,y\}^A|$$

где $x \neq y$. Здесь x, y — любые объекты.

Существует биекция:

$$P(A) \ni A_1 \longmapsto \chi_{A_1}(h) = \begin{cases} 1, & h \in A_1 \\ 0, & h \in A \setminus A_1 \end{cases} \longrightarrow f(h) = \begin{cases} x, & h \in A_1 \\ y, & h \in A \setminus A_1 \end{cases}$$

По построению:

$$\chi_{A_1} \in \{0, \ 1\}^A \quad f \in \{x, \ y\}^A$$

Существует биекция между множеством всех подмножеств $P(A)$ множества A и множеством всех характеристических функций χ_{a_i} подмножеств множества A. Тогда по определению $|P(A)| = |\{0,1\}^A|$

Определение 34. Последовательностью точек множества A называется функция $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Часто пишут $f(n) = a_n = f_n$.

Теорема 4.1 (Кантора)**.** Пусть A — множество. Тогда $|A| < |P(A)|$

Доказательство .

$\exists\ f : A \longrightarrow P(A)$, такая, что $f : a \mapsto \{a\} \quad \{a\} \subset A$. f — инъекция по построению.

Докажем, что не существует биекции $\psi : A \longrightarrow P(A)$. Зададим множество M так:

$$M = \{b \in A : b \notin \psi(b)\}$$

Так как ψ — биекция, то ψ^{-1} — тоже биекция, и $\exists \psi^{-1}(M) \in A$.

Вопрос: $\psi^{-1}(M)? \in ?M$ ($b = \psi^{-1}(M)$ то есть $b \in A$, тот же вопрос: $a? \in ?M$)

1) Если $\psi^{-1}(M) \in M$, то по определению множества M верно, что $\psi^{-1}(M) = b \notin \psi(b) = \psi(\psi^{-1}(M)) = M$

2) Если $\psi^{-1}(M) \notin M$, то по определению множества верно, что $\psi^{-1}(M) \in M$.

Таким образом, построили $b \in A,\ b = \psi^{-1}(M)$ и $B \subset A,\ B = M$, что $b \in B \Longleftrightarrow b \notin B$. Противоречие! Значит биекции ψ не существует. $\square$

Лемма 4.1. О двух теоретико-множественных милиционерах

Пусть $A_2 \subset A_1 \subset A$ и $\exists f : A \longrightarrow A_2$ — биекция. Тогда $\exists g : A \longrightarrow A_1$ — биекция.

Доказательство .

Шаг 1.

Определение: Назовём множество X **хорошим**, если $A \setminus A_1 \subset X$ и $f(X) \subset X$ (то есть $A \setminus A_1 \sqcup f(X) \subset X$) так как $X \subset A \Longrightarrow f(X) \subset f(A) = A_2 \subset A_1$, то $f(X) \cap (A \setminus A_1) \neq \varnothing$

Шаг 2.

Свойство (что ещё хорошего): Пересечение всего семейства хороших множеств — хорошее множество.

Докажем это: Пусть множества $X_\gamma \quad \forall\gamma \in \Gamma$ — хорошие. Тогда $\forall\gamma \in \Gamma\ A \setminus A_1 \subset X_\gamma$, поэтому $A \setminus A_1 \subset \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$

Докажем, что $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma) \subset \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. В самом деле $\forall\gamma \in \Gamma : f(X_\gamma) \subset X_\gamma$ по определению **хорошего** множества.

Значит $f(X_\gamma) \subset \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, то есть каждое множество $f(X_\gamma)$ входит в это пересечение, а значит

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$$

Но f — биекция (из формулировки леммы), поэтому

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$$

Итак, $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(X_\gamma)$ — хорошее.

Замечание 4.3. ($f : A \longrightarrow B$ — биекция) $\Longleftrightarrow$ ($F : 2^A \longrightarrow 2^B$ — биекция), где $\forall H \subset A$ обозначено $F(H) = f(H) = \{f(a) : a \in H\}$

Шаг 3.

Положим $M = \bigcap\limits_{B\subset A} B$, где B — **хорошее**. Согласно **шагу 2** M — хорошее. То есть, по определению:

$$(A \setminus A_1) \sqcup f(M) \subset M$$

Заметим, что M — **наименьшее хорошее множество**, то есть оно содержится в каждом хорошем множестве.

Шаг 4.

Докажем, что $Y = (A \setminus A_1) \sqcup f(M)$ — хорошее.

Во-первых, $A \setminus A_1) \subset Y$✓

Во-вторых, *докажем*, что $f(Y) \subset Y$.

$A \setminus A_1 \subset M$, а $f(A \setminus A_1) \subset f(M)$ по определению **хорошего** множества (M — хорошее по построению в **шаге 3**. $f(f(M)) \subset f(M)$ по определению **хорошего** множества.

$$f(Y) = f((A \setminus A_1) \sqcup f(M)) = f(A \setminus A_1) \sqcup f(f(M)) \subset f(M) \subset Y$$

То есть $f(Y) \subset Y$. Y — **хорошее** по определению.✓

Шаг 5.

Согласно **шагу 3** M лежит в каждом **хорошем** множестве.

Согласно **шагу 4** Y — хорошее.

Значит $M \subset Y$

Имеем: $M \subset Y = (A \setminus A_1) \sqcup f(M) \subset M$

Значит: $M = (A \setminus A_1) \sqcup f(M)$

$$f(M) \subset A_2 \subset A_1 \subset A$$

Шаг 6.

Построим биекцию между A и A_1 так:

$$g(a) = \begin{cases} f(a), & a \in M \\ a, & a \in A \setminus M \end{cases}$$

Функция $g : A \longrightarrow A$ задана равенством корректно. Покажем, что $g(A) = A_1$, то есть что $g : A \longrightarrow A_1$ — сюръекция.

$g(A) = g(M \sqcup (A \setminus M)) = g(M) \sqcup g(A \setminus M) = f(M) \sqcup (a \setminus M)$

$Z = f(M) \sqcup (A \setminus (A \setminus A_1) \sqcup f(M))$

Рассмотрим $A \setminus M = A \setminus ((A \setminus A_1) \sqcup f(M)) = (A \setminus (A \setminus A_1)) \cap (A \setminus f(M)) = A_1 \cap (A \setminus f(M)) = A_1 \setminus f(M)$

Тогда $Z = f(M) \sqcup (A_1 \setminus f(M)) = A_1$. То есть $g(A) = f(M) \sqcup (A \setminus M) = Z = A_1$

Покажем, что g — инъекция. От противного: пусть $\exists a_1 \in A,\ a_2 \in A : a_1 \neq a_2$, но $g(a_1) = g(a_2)$

Если $a_1 \in M,\ a_2 \in M$, то $g(a_1) = f(a_1) \neq f(a_2) = g(a_2)$ так как f — инъекция.✓

Если $a_1 \in A \setminus M,\ a_2 \in a \setminus M$, то $g(a_1) = a_1 \neq a_2 = g(a_2)$✓

Если $a_1 \in M,\ a_2 \in A \setminus M$, то $g(a_1) \in g(M) \subset M$, а $g(a_2) = a_2 \in A \setminus M$. $g(a_1)$ и $g(a_2)$ лежат в непересекающихся множествах, а значит не могут совпадать.✓

g — сюръекция. g — инъекция. g — инъекция. Что и пытались построить.

□

Следствие 4.2. Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна

Если A и B — множества, $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$ и $\exists\ f : A \longrightarrow B_1,\ \ g : B \longrightarrow A_1$ — биекции, то $\exists h : A \longrightarrow B$. (То есть $((|A| \leqslant |B|) \wedge (|A| \geqslant |B|)) \iff (|A| = |B|)$. Это значит, что на всём множестве множеств отношение $\leqslant$ антисимметрично)

Доказательство . Рассмотрим $A_2 = g(B_1)$, тогда $\psi : A \longrightarrow A_2$ такая, что $\psi(a) = g(f(a))$ — биекция, так как $\psi = g \circ f$ — композиция биекций. По **лемме о двух теоретико-множественных милиционерах** $\exists \varphi : A \longrightarrow A_1$.

Тогда положим $h(x) = g^{-1}(\varphi(x))$, $h : A \longrightarrow B$ — биекция, так как $h = g^{-1} \circ \varphi$ — композиция биекций. □

5 Вполне упорядоченные множества

Определение 35. Пусть $(A, \leqslant_A)$ и $(B, \leqslant_B)$ — упорядоченные множества. Функция $f: A \longrightarrow B$ называется **монотонной**, если $x \leqslant_A y \Longrightarrow f(x) \leqslant_B f(y)$.

Определение 36. Упорядоченные множества $(A, \leqslant_A)$ и $(B, \leqslant_B)$ называются **изоморфными в смысле порядка**, если $\exists f : A \longrightarrow B$ такая, что f — биекция, f — монотонна, f^{-1} — монотонна.

То есть $x \leqslant_A y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant_B f(y)$. В этом случае говорят, что $(A, \leqslant_A)$ и $(B, \leqslant_B)$ имеют **одинаковый порядковый тип**.

Определение 37. Порядковым типом множества $(A, \leqslant_A)$ называется класс всех тех упорядоченных множеств, которые изоморфны $(A, \leqslant_A)$ в смысле порядка.

Замечание 5.1. Пусть $(A, \leqslant_A)$ — упорядоченное множество. B — множество (без структуры) и пусть $\exists f : A \longrightarrow B$, тогдана B можно задать отношение порядка $\leqslant_B$, "перетащив" порядок из $(A, \leqslant_A)$, то есть положив по определению $x \leqslant_B y \Longleftrightarrow f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(y)$.

Определение 38. Множество $(A, \leqslant_A)$ называется **вполне упорядоченным**, если:

1) A — линейно упорядоченно, то есть $\leqslant_A$ — отношение линейного порядка;

2) $B \neq \varnothing$ и $B \subset A \Longrightarrow \exists b_* \in B : \forall b \in B$ верно $b_* \leqslant_A b$ то есть каждое непустое множество A имеет наименьший элемент.

Определение 39. Ординалы — это порядковые типы вполне упорядоченных множеств.

Пример 5.1. Пусть $C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ A = \mathcal{P}(C)$. Положим $A_1RA_2 \overset{def}{\Longrightarrow} A_1 \subset A_2$

1) A_1RA_1 — верно (рефликсивность)

2) $A_1\overline{R}A_2$ — неверно (антирефлексивность)

3) $A_1RA_2 \Longleftrightarrow A_2RA_1$ — неверно (симметричность)

4) $A_1RA_2 \ \wedge\ A_2RA_1 \Longrightarrow A_2 = A_1$ — верно (антисимметричность)

5) $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ — верное (транзитивность)

6) $(\{1,2,3\}\ R\ \{1,4\}) \vee (\{1,4\}\ R\ \{1,2,3\})$ — неверно (связность)

Определение 40. Пусть α и β — ординалы, и $(A, \leqslant_A)$ — упорядоченное множество, имеющее порядковый тип α, а $(B, \leqslant_B)$ — β, $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\alpha + \beta$ — порядковый тип упорядоченного множества $A + B$, $\alpha \cdot \beta$ — порядковый тип упорядоченного множества $A \cdot B$.

Доказательство коректности. Нужно доказать:

1) Порядковые типы $\alpha + \beta$ и $\alpha \cdot \beta$ не зависят от выбора множеств A и B.

2) $\alpha + \beta$ и $\alpha \cdot \beta$ — ординалы.

Итак, 1). Пусть $(A_1, \leqslant_{A_1})$ и $(B_1, \leqslant_{B_1})$ — упорядоченные множества типов α и β соответственно. Покажем, что множества $A_1 + B_1$ и $A + B$ имееют одинаковый порядковый тип (то есть $Ord(A \sqcup B, \leqslant_{A+B}) = Ord(A_1 \sqcup B_1, \leqslant_{A_1+B_1})$). Так как $Ord(A, \leqslant_A) = Ord(A_1, \leqslant_{A_1})$, то существует порядковый изоморфизм:

$$\psi : A \longrightarrow A_1$$

такой, что (по определению) ψ — биекция, и

$$\forall x, y \in A : x \leqslant_A y \Longleftrightarrow \psi(x) \leqslant_{A_1} \psi(y)$$

так как $Ord(B, \leqslant_B) = Ord(B_1, \leqslant_{B_1})$, то существует порядковый изоморфизм:

$$\varphi : B \longrightarrow B_1$$

такой, что φ — биекция, и

$$\forall x, y \in B : x \leqslant_B y \Longleftrightarrow \varphi(x) \leqslant_{B_1} \varphi(y)$$

Построим биекцию $\pi : A \sqcup B \longrightarrow A_1 \sqcup B_1$ и докажем, что она сохраняет порядок.

$$\pi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in A \\ \varphi(x), & x \in B \end{cases}$$

π — инъективно, так как если $\exists x_1, x_2 \in A \sqcup B$ такие, что $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, то логически возможны три случая:

1) $x_1 \in A,\ x_2 \in B$. Тогда $\pi(x_1) \in A_1$ и $\pi(x_2) \in B_1$; противоречие с тем, что $A_1 \cup B_1 = \varnothing$;

2) $x_1 \in A,\ x_2 \in A$. Тогда $\pi(x_1) = \psi(x_1)$, а $\pi(x_2) = \psi(x_2)$; противоречие с тем, что ψ — инъекция;

3) $x_1 \in B,\ x_2 \in B$. Тогда $\pi(x_1) = \varphi(x_1)$, а $\pi(x_2) = \varphi(x_2)$; противоречие с тем, что φ — инъекция;

π — сюръективноб так как $\pi(A \cup B) = \pi(A) \cup \pi(B) = \psi(A) \cup \varphi(B) = A_1 \cup B_1$.

Другое доказательство сюрьективности: Пусть $y \in A_1 \sqcup B_1$ найдём такой $x \in A \sqcup B$, что $y = \pi(x)$.

$$x = \begin{cases} \psi^{-1}(y), & y \in A_1 \\ \varphi^{-1}(y), & y \in B_1 \end{cases}$$

Покажем, что π сохраняет порядок.

$$x \leqslant_{A+B} y \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant_A y, & x \in A,\ y \in A \\ x \leqslant_B y, & x \in B,\ y \in B \\ x \leqslant_{A+B}, & x \in A,\ y \in B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(x) \leqslant_{A_1} \psi(y), & x \in A,\ y \in A \\ \varphi(x) \leqslant_{B_1} \varphi(y), & x \in B,\ y \in B \\ \psi(x) \leqslant \varphi(y), & x \in A,\ y \in B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(x) \leqslant_{A_1} \psi(y), & \psi(x) \in A_1\ \psi(y) \in A_1 \\ \varphi(x) \leqslant_{B_1} \varphi(y), & \varphi(x) \in B_1,\ \varphi(y) \in B_1 \\ \psi(x) \leqslant_{A_1+B_1} \varphi(y), & \psi(x) \in A_1,\ \varphi(y) \in B_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \pi(x) \leqslant_{A_1+B_1} \pi(y)$$

Итак, мы доказали, что упорядоченные множества $(A \cup B,\ \leqslant_{A+B})$ и $(A_1 \cup B_1,\ \leqslant_{A_1+B_1})$ имеют один порядковый тип (так как существует изоморфизм порядков π) Поэтому $\alpha + \beta$ не зависит от выбора A и B.Докажем теперь, что $\alpha + \beta$ — ординал.Для этого докажем, что если множества $(A,\ \leqslant_A)$ и $(B,\ \leqslant_B)$ — вполне упорядоченно, то $(A \cup B,\ \leqslant_{A+B})$ — тоже вполне упорядоченно

Из определения суммы упорядоченных множеств следует, что упорядоченная сумма линейно упорядочена. В самом деле, пусть $K \subset A \sqcup B,\ K \neq \varnothing$. Покажем, что в K есть наименьший элемент

1) если $K_A = K \cap A \neq \varnothing$, то так как A вполне упорядоченно, то $\exists a_* \in K_A$ — наименьший элемент в K_A; то есть $a_* \leqslant x\ \forall x \in K_A$. Но из определения упорядоченной суммы следует, что $a_* \leqslant x\ \forall x \in B$ в частности и для всех $x \in K \cap B$. Поэтому $a_* \leqslant x$ для всех $x \in K$, то есть a_* — наименьший элемент в K.

2) если $K_A = K \cap A = \varnothing \Longrightarrow K \subset B$, а так как $K \neq \varnothing$ и B — вполне упорядоченно, то в K существует наименьший элемент.

Таким образом $\alpha + \beta$ — ординал (по определению). $\square$

Упражнение 1. Привести аналогичные рассуждения для $\alpha \cdot \beta$.

Определение 41. Пусть $(M, \leqslant)$ — упорядоченное множество, $\varnothing \neq A \subset M$, $\varnothing \neq B \subset M$. Говорят, что A **плотно в** B **в смысле порядка**, если $\forall b_1 \in B$, $b_2 \in B$, что $b_1 < b_2$ найдётся такой $a \in A$, что $b_1 < a < b_2$.

Пример 5.2. 1) $\mathbb{Q}$ — плотно в $\mathbb{Q}$ с обычным порядком.

2) Дроби со знаменателем кратным 2 плотны в дробях со знаменателем кратным 3 с обычным порядком.

Определение 42. Ординалы, соответствующие порядкам на бесконечных множествах, называют **трансфинитами** или **трансфинитными числами**.

Обозначение: порядковый тип множества $\mathbb{N}$ с обычным порядком обозначается ω; порядковый тип упорядоченного множества $1 < 2 < \ldots < n$ обозначается n.

Пример 5.3. $Ord(2 < 3 < \ldots < 1) = \omega + 1$
$Ord(1 < 3 < 5 < 7 \ldots < 2 < 4 < 6 \ldots) = \omega + \omega$

Упражнение 2. Построив изоморфизм порядков, обосновать предыдущие равентсва и доказать:

1) $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$
2) $\omega + \omega = \omega \cdot 2$
3) $n + \omega = \omega \ \forall n \in \mathbb{N}$
4) $2 \cdot \omega = \omega$

Построить упорядоченное множество, имеющее тип $\omega \cdot \omega$. Например, такой порядковый тип будет у множества $\{n + \frac{1}{m+1} \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$, в котором точки сравниваются, как обычные рациональные числа.

5.1 Математическая индукция

Три равносильных вида математической индукции:

1. Если
а) $1 \in M$ (база);
б)$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \in M \Longrightarrow (p+1) \in M$;
то $\mathbb{N} \subset M$

2. Если
а) $1 \in M$;
б') $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k < n: \ k \in M \Longrightarrow n \in M$
то $\mathbb{N} \subset M$

3. $\mathbb{N}$ — вполне упорядочено.

Доказательство этого утверждения - необязательное упражнение. ... □

Определение 43. Пусть A — вполне упорядоченное множество. **Начальным отрезком** в множестве A называется такое подмножество $M \subset A$, что $\exists x \in A: \ M$ представимо в виде $M = \{a \in A: \ a < x\}$.

Теорема 5.1. (О сравнении ординалов) Пусть $(A, \leqslant_A)$ и $(B, \leqslant_B)$ — вполне упорядоченные множества, тогда верно ровно одно из трёх:

1. $Ord(A) = Ord(B)$
2. A изоморфно некоторому, не совпадающему с B, начальному отрезку множества B и $Ord(A) \neq Ord(B)$ (в этом случае будем считать, что $Ord(A) \prec Ord(B)$)

3. B изоморфно некоторому, не совпадающему с A, начальному отрезку множества A и $Ord(A) \neq Ord(B)$ (в этом случае будем считать, что $Ord(B) \prec Ord(A)$)

Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{A}$ — любое множество ординалов, тогда введённое выше отношение $\prec$ превращает $\mathcal{A}$ во вполне упорядоченное множество.

Следствие 5.1. $\forall$ ординала α верно $\alpha \prec \alpha + 1$

Доказательство .

Если множество A упорядочено по типу α, то A изоморфно начальному отрезку в множестве, упорядоченном по типу $\alpha + 1$ по построению (смотри определение упорядоченной суммы упорядоченных множеств).

То, что порядковые типы не равны примем без доказательства. □

Определение 44. Нулевой ординал — это порядковый тип $Ord(\varnothing, \varnothing)$ — пустое множество с пустым бинарным отношением.

Теорема 5.3. (О стандартном представлении ординала) Каждый ординал α можно записать в виде $\alpha = \{\beta : \beta \in \mathcal{A},\ \ \beta \in \mathcal{A} \prec \alpha\}$. Без док-ва.

Пример 5.4. $0 = Ord(\varnothing, \varnothing) = \{\beta : \beta \in \mathcal{A},\ \ \beta \in \mathcal{A} \prec 0\} = Ord(\varnothing, \varnothing)$

$1 = \{\beta : \beta \in \mathcal{A},\ \ \beta \in \mathcal{A} \prec 1\} = \{0\}$

$2 = \{\beta : \beta \in \mathcal{A},\ \ \beta \in \mathcal{A} \prec 2\} = \{0,\ 1\}$

$3 = \{0,\ 1,\ 2\}$

$n = \{1,\ 2, \ldots,\ n-1\}$

$\omega = \{0,\ 1, \ldots, n, \ldots\}$ — наименьший ординал, который больше всех конечных

$\omega + 1 = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \omega\}$ — наименьший ординал, который больше всех конечных и больше ω. В самом деле, между фигурных скобок перечислены как раз все конечные ординалы и ω.

Определение 45. Стандартное представление ординала $\alpha = \{\beta :\ \ \beta \in \mathcal{A},\ \beta \prec \alpha\}$ — это множество всех ординалов, меньших, чем он.

Теорема 5.4. (О сравнении множеств по мощности) Если принять аксиому выбора, то любые два множества можно сравнить по мощности.

Доказательство .

Пусть A и B — множества. По теореме Цермелло, которая эквивалентна аксиоме выбора, на A и B можно ввести полные порядки $\leqslant_A$ и $\leqslant_B$, тогда порядковый тип $Ord(A,\ \leqslant_A)$ и $Ord(B,\ \leqslant_B)$ — ординалы. Все ординалы сравнимы между собой по теореме выше. Но порядковый изоморфизм — биекция, поэтому верно одно из трёх:

1. $\exists$ биекция $A \longrightarrow B$ (в этом случае $|A| = |B|$)
2. $\exists$ биекция $A \longrightarrow B_1,\ B_1 \subset B$ (в этом случае $|A| \leqslant |B|$)
3. $\exists$ биекция $B \longrightarrow A_1,\ A_1 \subset A$ (в этом случае $|A| \geqslant |B|$)

□

Определение 46. Говорят, что ординал α — **предельный**, если не существует ординал $\beta :\ \ \alpha = \beta + 1$. В противном случае говорят, что ординал α — **непредельный**.

Пример 5.5. 4 — не предельный ординал, так как $4 = 3 + 1$

$\omega + 5$ — не предельный, так как $\omega + 5 = (\omega + 4) + 1$

ω — предельный

$\omega + \omega$ — предельный

$\omega \cdot \omega$ — предельный

Замечание 5.2. У каждого ординала α есть следующий за ним $\alpha+1$. У некоторых ординалов (у непредельных) есть предшествующие. У предельных нет предшествующего.

Замечание 5.3. Ординал 0 — непредельный по договорённости.

5.2 Трансфинитная индукция

Теорема 5.5. Принцип трансфинитной индукции

Пусть A — бесконечное вполне упорядоченное множество и P – предикат на A, то есть $\forall a \in A$ сформулировано высказывание $P(a)$.

Пусть a_* — наименьший элемент A. Пусть $P(a_*)$ — верно. (база)

Пусть $(\forall b \in A \;\; P(a) \; \forall a < b) \Longrightarrow P(b)$.

Тогда $P(a)$ — верно $\forall a \in A$.

Доказательство . От противного. Пусть множество тех a, что $P(a)$ — ложно, непусто $A_1 = \{a: \;\; P(a) = 0\} \neq \varnothing$. Тогда $\varnothing \neq A_1 \subset A$, но A вполне упорядочено, значит в A_1 $\exists$ наименьший элемент m, то есть $P(a)$ — верно для всех $a \prec m$, но $P(m)$ — ложно. Это невозможно в силу шага индукции (в качестве b взять m). □

5.3 Трансфинитная рекурсия

Определение 47. Трансфинитная рекурсия — это построение объекта по трансфинитной индукции.

Пример 5.6. Построение объектов по математической индукции. Построим функцию факториал.

База: $1! = 1$

Шаг: $(n+1)! = n! * (n+1)$

Таким образом функция $n \longmapsto n!$ построена по математической индукции. Такие построения называют рекурсивными.

Определение 48. Пусть α — трансфинит, $\beta_0 \prec \alpha$, и ординал β_0 — предельный. Пусть α записан в стандартном виде: $\alpha = \{\beta : \;\; \beta < \alpha\} = Ord(A)$ то есть $Ord(A) = \alpha$. Пусть $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ — числовая функция на A, и f_0 — число. Тогда

$$f_0 = \lim_{\beta \to \beta_0, \; \beta < \beta_0} f(\beta) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \beta' < \beta_0 : \; \forall \beta : \beta' < \beta < \beta_0 \Longrightarrow |f(\beta) - f_0| < \varepsilon$$

Упражнение 3. Доказать, что любое вполне упорядоченное непустое подмножество прямой — не более, чем счётно.

Пример 5.7. $A = (1 < 3 < 5 < \cdots < 2 < 4 < 5 < \cdots < 0)$ тогда $Ord(A) = \omega + \omega + 1$ Выберем $B_0 = \mathbb{N}$ $\quad Ord(B_0) = \beta_0 = \omega + \omega$ — предельный трансфинит. Зададим функцию $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

$$\lim_{\beta \to \omega + \omega} f(\beta) = 0$$

так как $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K'$ — чётное число такое, что при $K : K' < K$ $|f(K) - 0| = \frac{1}{K} < \varepsilon$ В самом деле можно взять $K' = [\frac{1}{\epsilon} + 1] * 2$

Ещё раз!

Пусть A — вполне упорядоченное множество, B_0 — его начальный отрезок (тоже вполне упорядоченное) то есть для некоторого $b_0 \in A$ верно $B_0 = \{x \in A : \; x < b_0\}$. Пусть $Ord(B_0)$ — предельный трансфинит. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$. Пусть $f_0 \in \mathbb{R}$. Говорят, что

$$f_0 = \lim_{\beta \to \beta_0, \; \beta < \beta_0} f(\beta) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists b' \in A : \; \forall b \in A : b' < b < b_0 \Longrightarrow |f(b) - f_0| < \varepsilon$$

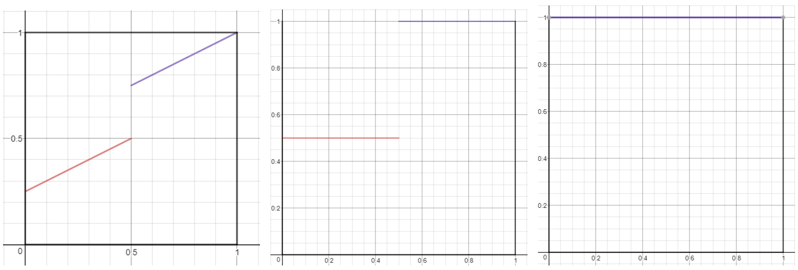
Замечание 5.4. Пусть A — ординал, записанный в виде $A = \{X : X\text{— ординал}, X < A\}$ Пусть B_0 — такое же как и раньше, тогда $B_0 = Ord(B_0) = \beta_0$ — предельный трансфинит. Тогда определение можно записать заменяя b на β

Пример 5.8. Определение функции с помощью трансфинитной рекурсии.

Пусть $f : [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$. Тогда $f^2 = f \circ f,\ f^2(x) = f(f(x))$
$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$

Ординалы $0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \omega < \omega + 1 < \cdots < \omega + \omega < \cdots <$ ординалы мощности континиум $<$ ординалы мощности $2^{\text{контиинум}} < \ldots$

$$f^0 \quad f^\omega \quad f^{\omega+\omega}$$



Пример 5.9. Пусть α — ординал. Как определеить f^α, то есть композицию f с собой α раз? В этом поможет трансфинитная рекурсия.

Согласно принципу трансфинитной индукции достаточно определить, f^0 и $\forall \beta < \alpha$ из определения f^γ вывести определение f^β. Тогда будет определено f^α.

Пусть $f^0 = id$. Пусть α — ординал, и $\beta < \alpha$ Тогда

$$f^\beta(x) = \begin{cases} f(f^{\beta_1}(x)) & \beta \text{ — непредельный} \\ f(\lim_{\gamma \to \beta,\ \gamma < \beta} f^\gamma(x)) & \beta \text{ — предельный, и существует предел} \end{cases}$$

Если для некоторого x предел не существует, то x изымается из области определения, и функция становится частичной. Пример $f(x) = 1 - x$

Если n — конечный ординал, то

$$f^n(x) = \begin{cases} f(x) = 1 - x & 2|x \\ x & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдём $f^\omega(x)$. В самом деле

$$f^n(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 1/2 \\ \text{не определена} & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 49. Пусть α — ординал, $f\colon [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$. Точка x называется точкой периода α, если $x = f^\alpha(x)$, но все точки $f^\beta(x)$ разные для всех $\beta < \alpha$.

Теорема 5.6. Теорема Шарковского.

На $\mathbb{N}$ можно ввести такой порядок $<$, что если $f : [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ — непрерывна и имеет точку периода $n \in \mathbb{N}$, то f имеет также точку всех таких периодов $m \in \mathbb{N}$, что $n < m$

Пример 5.10. $3 < 5 < 7 < \cdots < 2 * 3 < 2 * 5 < 2 * 7 < \cdots < 2^2 * 3 < 2^2 * 5 < \cdots < 2^n * 3 < 2^n * 5 < \cdots < 2^k < 2^{k-1} < \cdots < 2 < 1$

Обозначим порядковый тип $(\cdots < -n < -n + 1 < \cdots < -3 < -2 < -1) = \omega^*$. Тогда $\mathbb{N}$ имеет тип $\omega \cdot \omega + \omega^*$.

5.4 Утверждения, эквивалентные аксиоме выбора

Определение 50. **Цепью** в упорядоченном множестве называется его подмножество, все элементы которого сравнимы между собой (то есть **цепь** — линейно упорядоченное подмножество).

Теорема 5.7. (Теорема Цермело)
Каждое множество можно вполне упорядочить.

Теорема 5.8. (Теорема Хаусдорфа о цепях)
В каждом упорядоченном множестве каждая цепь содержится в некоторой максимальной цепи.

Теорема 5.9. (Лемма Цорна)
Если в упорядоченном множестве для каждой цепи имеется верхняя грань, то оно содержит максимальный элемент.

Теорема 5.10. Теорема Цермело, теорема Хаусдорфа о цепях и лемма Цорна эквивалентны аксиоме выбора.

6 Кризис наивной теории множеств: парадоксы

6.1 Парадоксы

Парадоксы возникают как следствие неаккуратного обращения с коллективизирующим свойством, то есть не для каждой логической формулы P запись $\{x : P(x) = 1\}$ задаёт множество.

1. **Парадокс Кантора** $V = \{X : X$ — множество$\}$ — класс всех множеств. Если считать, что V — множество, то у него есть множество всех подмножеств $2^V = \{X : X \subset V\}$ Но $2^V \in V$. Более того: $2^V \subset V$, так как $\forall x \in 2^V : \ x \in V$. В чём парадокс? С одной стороны, из $2^v \subset V$ следует $|2^V| \leqslant |V|$. С другой стороны, по теореме Кантора $|V| < |2^V|$.

2. **Парадокс Рассела** $R = \{x : x$ — множество $x \notin x\}$. Тогда $R \in R \iff R \notin R$, что невозможно, поскольку утверждения $R \in R$ и $R \notin R$ являются отрицаниями друг друга.

3. **Парадокс Буралли-Форти** $B = \{x : x$ — ординал $\}$. Противоречие основано на том, что, с одной стороны, для каждого ординала α существует следующий за ним ординал $\alpha + 1$ и $\alpha < \alpha + 1$, с другой стороны, отправляясь от B, можно построить такой ординал β, что будет $\beta + 1 < \beta$.

Почему парадокс — это плохо для математики? Потому что в математике с парадоксами сами понятия истинности и ложности теряют смысл. Должно быть: из истины следует истина. Но получится: из истины (при добавлении парадокса) следует ложь.

Пример 6.1. Как извлечь из истины ложь? Пусть 2*2 $= 4$ — истина. Положим $R = \{x : x$ – множество, $x \notin x\}$. Тогда $R \in R \iff R \notin R$, но $R \in R \iff R \notin R$ — ложно.

Ответ математического сообщества на открытие парадоксов:

Открытие аксиоматической теории множеств

Аксиомы ограничивают математика при построении построении новых множест из уже имеющихся таким образом, что приводящии к парадоксам "множества" V, R, B и другие построить нельзя, то есть $V,\ R,\ B$ существуют как классы, а не как множества. К классам не применимы понятия мощность и другие, поэтому парадоксов при обращении с настоящими множествами, построенными на аксиомах теории множеств, не возникает, все парадоксы остались с классами (как угодно построенными семействами объектов, которые использовать в строгих доказательствах запретили).

6.2 Аксиомы теории множеств (аксиомы Цермело-Френкеля)

Замечание 6.1. Теория множеств говорит только о множествах, то есть все объекты — множества. В частности, элементами множеств могут быть **только** множества! Кроме множеств ничего нет.

Аксиома 6.1. Объёмности, равенства

1. Объёмности. Множества A и B равны $\Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$
2. Равенства. Равные множества x и y являются элементами одних и тех же множеств, то есть $x = y \Longleftrightarrow (\{z : x \in z\} = \{w : y \in w\})$

Аксиома 6.2. Аксиома пары. Для любых множеств x и y $\exists\{x,\ y\}$ — множество, единственными элементами которого являются x и y. В частности, если $x = y$ $\exists\{x,\ y\} = \{x,\ x\} = \{y,\ y\} = \{y\} = \{x\}$.

Аксиома 6.3. Схема аксиома выделения. $\forall$ свойства $\varphi(x)$ и множества X $\exists Y$ — множество, $Y = \{x \in X : \varphi(x)\}$ содержащее те и только те точки $x \in X$, для которых верно $\varphi(x)$.

Замечание 6.2. φ — предикат, так как в выражение $\varphi(x)$ переменная x пробегает указанное множество X.

Замечание 6.3. Схема аксиома позволяет определить пересечение множеств: $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$

Аксиома 6.4. Аксиома объединения. Если X — множество, то $\exists \bigcup X = \{x : \exists y \in X :\ x \in y\}$

Замечание 6.4. Из аксиомы пары и аксиомы объединения можно определить объединение двух множеств. Если A и B — множества, то по аксиоме пары $\{A,\ B\}$ — множество, и по аксиоме объединения $\exists \bigcup\{A,\ B\} = A \cup B$

Аксиома 6.5. Аксиома степени. $\forall X$ $\exists\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X

Определение 51. Множество S называется **индуктивным**, если выполняются два условия:
1) $\varnothing \in S$
2) $x \in S \Longrightarrow (x \cup \{x\}) \in S$

Аксиома 6.6. Аксиома бесконечности, она же аксиома индуктивного множества. Существует индуктивное множество (хотя бы одно).

Пример 6.2. $\varnothing \in S \Longrightarrow \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \in S$
$\{\varnothing\} \in S \Longrightarrow \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\} \in S$
$\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\} \in S \Longrightarrow \{\ \ \varnothing,\ \ \{\varnothing\},\ \ \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\ \ \} \in S$

Аксиома 6.7. Аксиома регулярности. Если $x \neq \varnothing$, то $\exists a \in x : \ \forall y \in x$ верно $y \notin a$

Следствие 6.1. Никакое множество не является своим элементом, то есть $\forall x$ верно $x \notin x$

Доказательство. По аксиоме пары существует множество $\{x, x\}$, которое равно $\{x\}$ по аксиоме объёмности, так как $\{x, x\}$ и $\{x\}$ имеют одни и те же элементы. Применим к x аксиому регулярности. Тогда в $\{x\}$ должен найтись такой a, что $y \notin a$ для всех $y \in \{x\}$. Но в {x} только один элемент - это x, поэтому $a = y = x$, то есть $x \notin x$ □

Аксиома 6.8. Схема аксиом подстановки. Пусть $\varphi(x,\ y)$ при любых $x,\ y$ истинно или ложно. Пусть $\forall x\ \exists$ не более одного такого y, что верно $\varphi(x,\ y)$. Тогда $\forall A\ \exists B = \{y : \exists x \in A$ что верно $\varphi(x,\ y)\}$.

Аксиома 6.9. Аксиома выбора. Если S — непустое множество непустых множеств, то $\exists f$ — функция $f\colon S \to \cup S$ такая ($\cup S$ существует по аксиоме объединения), что $f(x) \in x$ для всех $x \in S$

Замечание 6.5. Аксиомы 1 – 8 вместе обозначаются ZF (Цермело-Френкеля), а 1–9 вместе обозначаются ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice).

Теорема 6.1. Пересечение любого непустого множества индуктивных множеств является индуктивным множеством.

Доказательство. Пусть $A \neq \varnothing$, $\forall x \in A\ x$ — индуктивное. Пусть $B = \bigcap_{x \in A} x$. Тогда:
1) $\forall x \in A : \varnothing \in x$. Значит, $\varnothing \in B$.
2) Пусть $y \in B$. Тогда $y \in x\ \forall x \in A$. Но x — индуктивно, поэтому $y \cup \{y\} \in x$. Поэтому (B — пересечение всех $x \in A$)$y \cup \{y\} \in B$. □

Следствие 6.2. Существует и единственно такое индуктивное множество N, что $N \subset X$ — для любого индуктивного X. (Неформально говоря, существует наименьшее по включению индуктивное множество N).

Доказательство. Существование. По аксиоме бесконечности существует индуктивное множество S. По аксиоме степени существует $\mathcal{P}(S)$. По аксиоме выделения $\exists\{x \in \mathcal{P}(S) : x$— индуктивно$\} = A$. Так как $S \in \mathcal{P}(S)$ и S — индуктивное, верно, что $A \neq \varnothing$. Пусть $B = \bigcap_{x \in A} x$. По только что доказанной теореме о пересечении индуктивных множеств B — индуктивное. Пусть теперь G — любое индуктивное множество. Тогда $G \cap S$ — индуктивное по той же теореме. Но $G \cap S \subset S$, поэтому $(G \cap S) \in \mathcal{P}(S)$.

$$\left.\begin{array}{c} G \cap S\text{— индуктивное} \\ G \cap S \in \mathcal{P}(S) \end{array}\right\} \Longrightarrow G \cap S \in A$$

Тогда в пересечении $\bigcap_{x \in A} x = B$ какой-то x равен $G \cap S$, поэтому $B \subset G \cap S$. Получаем, что $B \subset (G \cap S) \subset G$, то есть $B \subset G$ для любого индуктивного множества G.

Единственность. Пусть N_1 и N_2 — два таких множестваю Но оба они индуктивные и лежат в каждом индуктивном, поэтому $N_1 \subset N_2,\ N_2 \subset N_1$. Отсюда по аксиоме объёмности следует, что $N_1 = N_2$. □

7 Натуральные числа и их свойства

Замечание 7.1. Все свойства натуральных чисел (и всех объектов, построенных только из натуральных чисел) полностью могут быть выведены из:
1) Двух неопределяемых понятий: первое натуральное число (обозначаемое 0 или 1 в зависимости от договорённости), следующее натуральное число (имеется в виду следующее за данным натуральным числом).
2) Пяти постулатов (аксиом) Пеано.

7.1 Аксиомы Пеано

Обозначим множество всех натуральных чисел буквой N, первое натуральное число 0, следующее за x натуральное число символом x'.

Тогда аксиомы Пеано записываются так:

Аксиома 7.1. $0 \in N$

Аксиома 7.2. $\forall x \in N\ \exists! x' \in N$. Единственность означает, что из $x = y$ следует $x' = y'$.

Аксиома 7.3. $\forall x \in N : x' \neq 0$

Аксиома 7.4. $(x' = y') \Longrightarrow (x = y)$

Аксиома 7.5. (аксиома индукции) Пусть $A \subset N$ и верно следующее:
1)$0 \in A$
2)$(x \in A) \Longrightarrow (x' \in A)$.
Тогда $A = N$

7.2 Определение натуральных чисел и вывод аксиом Пеано из ZF

Определение 52. Положим:
N = наименьшее по включению индуктивное множество, его существование и единственность были доказаны выше;
$0 = \varnothing$;
$x' = x \cup \{x\}$.

Докажем постулаты (аксиомы) Пеано, опираясь на эти опеределения для $N, 0, x'$ и аксиомы ZF.

Доказательство. 1) По определению индуктивного множества (часть 1) $\varnothing \in N$, но $0 = \varnothing$, значит $0 \in N$.

2) По определению индуктивного множества (часть 2) из $x \in N$ следует $x \cup \{x\} = x' \in N$ по аксиоме объёмности множество $x \cup \{x\}$ строится по x однозначно, то есть если $x = y$, то $x' = x \cup \{x\} = y \cup \{y\} = y'$.

3) Если $y = x'$ для некоторого x, то $y = x \cup \{x\} \neq \varnothing$, так как $x \in y$. Но $0 = \varnothing$, поэтому $x' = y \neq \varnothing = 0$, то есть $x' \neq 0$.

4) От противного. Пусть $x' = y'$, но $x \neq y$. Рассмотрим цепочку импликаций $x' = y' \Longleftrightarrow$

$$x \cup \{x\} = y \cup \{y\} \Longrightarrow \begin{cases} x \subset y \cup \{y\} \\ y \subset x \cup \{x\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in y \cup \{y\} \longrightarrow \begin{cases} x \in \{y\} \text{ — невозможно, так как } x \neq y \\ x \in y \end{cases} \\ y \in x \cup \{x\} \longrightarrow \begin{cases} y \in \{x\} \text{ — невозможно, так как } x \neq y \\ y \in x \end{cases} \end{cases}$$

Получили, что верны оба утверждения: $x \in y$ и $y \in x$, так как остальные возможности уже исключены в силу того, что $x \neq y$. Это порождает бесконечную вправо и влево цепочку принадлежности $\cdots \in x \in y \in x \in y \in x \in \dots$. Аксиома регулярности позволяет показать, что невозможна (см. следствие 6.1) не только цепочка $\cdots \in x \in x \in x \in x \in x \in \dots$, но и только что возникшая цепочка из x и y.

В самом деле, по аксиоме пары существует множество $\{x,\ y\}$, элементы которого различны, так как $x \neq y$. Применим к $\{x,\ y\}$ аксиому регулярности: $\exists a \in \{x,\ y\} : \begin{cases} x \notin a \\ y \notin a \end{cases}$

Но в $\{x,\ y\}$ два элемента, поэтому $a = x$ или $a = y$.

Если $a = x$, то $\begin{cases} x \notin x \text{ — невозможно по следствию 6.1} \\ y \notin x \text{ — противоречит } y \in x \end{cases}.$

Если $a = y$, то $\begin{cases} y \notin y \text{ — невозможно по следствию 6.1} \\ x \notin y \text{ — противоречит } x \in y \end{cases}.$

Таким образом, стартовав с $x' = y'$ и $x \neq y$, мы пришли к тому, что $x \in y \in x$, что невозможно. Постулат 4 доказан.

5) если $0 \in A$ и $x \in A \implies x' \in A$, то A — индуктивно $(0 = \varnothing,\ x' = x \cup \{x\}$ Но N — наименьшее по вложению индуктивное множество, поэтому $N \subset A$. Но по условию $A \subset N$, значит $A = N$ по аксиоме объёмности. $\square$

8 Список вопросов к экзамену

1. Сформулируйте определение высказывания. Приведите примеры фраз, являющихся и не являющихся высказываниями.

2. Сформулируйте определение предиката. Приведите примеры фраз, являющихся и не являющихся предикатами.

3. Что такое логические константы 0 и 1? Приведите примеры высказываний, равных 0; равных 1. Может ли высказывание быть одновременно равно 0 и 1, почему (когда)?

4. Что такое кванторы? Какие два квантора обсуждались в курсе? Приведите примеры их использования: сформулируйте несколько предикатов и сделайте из них константы с помощью кванторов.

5. Приведите примеры логических функций с их таблицами истинности.

6. Что такое множество (дайте неформальное описание)? Назовите подходы к теории множеств и скажите, в чём они состоят. Какие существуют способы задания множеств?

7. Дайте неформальное описание функции в широком и в узком смысле.

8. Что называется характеристической функцией множества? Какие значения она может принимать?

9. Какие существуют операции над множествами? Приведите их определения и и задание через характеристические функции.

10. Нарисуйте круги Эйлера для основных операций над множествами.

11. Сколько существует подмножеств у множества из n элементов? Сформулируйте и двумя способами докажите теорему 2.1 о количестве подмножеств у конечного множества (сложность 2)

12. Сформулируйте формулу включений-исключений для случая двух и трёх множеств.

13. Сформулируйте определение неупорядоченной пары

14. Сформулируйте определение упорядоченной пары

15. Что называют декартовым произведением множества A на множество B?

16. Что называют бинарным отношением на множестве?

17. Какое отношение на множестве называется рефлексивным, а какое антирефлексивным? В чём состоит геометрический смысл рефлексивности и антерефлексивности отношения на множестве?

18. Какое отношение на множестве называется симметричным, а какое антисимметричным?

19. Какое отношение на множестве называется транзитивным?

20. Какое отношение называют связным (в другой терминологии — полным)?

21. Какое отношение называют отношением предпочтения? Объясните, как отношение предпочтения задаётся с помощью функции полезности. Каждое ли отношение предпочтения можно задать с помощью функции полезности?

22. Что называют отношением эквивалентности на множестве? Что называют классом эквивалентности элемента по отношению эквивалентности? Что называют факторизацией?

23. Что называют классом эквивалентности элемента по отношению эквивалентности? Докажите, что классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают (Теорема 3.1).(сложность 1)

24. Что называют разбиением множества? Докажите, что каждое отношение эквивалентности на множестве однозначно задаёт разбиение множества. Сформулируйте и докажите обратное утверждение 3.2.(сложность 3)

25. Что называют отношением порядка? Что называют отношением строгого порядка?

26. Что называют верхней гранью упорядоченного множества? Что называют точной верхней гранью упорядоченного множества?

27. Что называют нижней гранью упорядоченного множества? Что называют точной нижней гранью упорядоченного множества?

28. Что называют упорядоченной суммой упорядоченных множеств? Коммутативна ли сумма упорядоченных множеств?

29. Что называют упорядоченным произведением упорядоченных множеств?

30. Что называют функцией? Что называют областью определения, множеством принимаемых значений?

31. Какая функция называется инъективной?

32. Какая функция называется сюръективной?

33. Какая функция называется биективной?

34. Какая функция называется обратимой?

35. Что называется функцией? Какая функция называется биективной? Какая функция называется обратимой? Докажите, что функция биективна тогда и только тогда, когда она обратима (Теорема 4.3).(сложность 1)

36. Какая функция называется биективной? Докажите, что обратная к биекции функция — тоже биекция (Следствие 4.1).(сложность 1)

37. Какая функция называется биективной? Докажите, что композиция биекций — биекция (Утверждение 4.4).(сложность 1)

38. В каком случае говорят, что множество B проиндексировано с помощью множества индексов A? Приведите примеры.

39. Объясните, как развести пересекающиеся множества.

40. Сформулируйте аксиому выбора.

41. Сформулируйте аксиому выбора. Сформулируйте определение декартова произведения семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, проиндексированных некоторым множеством A, т.е. произведение всех A_α по $\alpha \in A$. Докажите, что аксиома выбора равносильна тому, что декартово произведение непустого множества непустых дизъюнктных множеств непусто (Утверждение 4.5). (сложность 2)

42. Сформулируйте и докажите принцип Дирихле в двух частях (Утверждение 4.1). (сложность 2)

43. Пусть функция отображает конечное множество в себя. Пусть известно, что если она обладает любым из трёх свойств — инъективность, сюръективность, биективность; что можно сказать о том, обладает ли она двумя другими из этих свойств? Докажите соответствующую теорему. (Утверждение 4.2). (сложность 2)

44. Сформулируйте три определения бесконечного множества. Докажите их эквивалентность (Утверждение 4.6).(сложность 3)

45. Сформулируйте три определения конечного множества. Докажите их эквивалентность со ссылкой на аналогичный факт про бесконечные множества.(сложность 1)

46. Какое множество называется счётным? Не более, чем счётным?

47. Когда говорят, что два множества равномощны? Что называют мощностью (кардинальным числом, кардиналом) множества?

48. Когда говорят, что мощность B не больше мощности A? Сформулируйте три определения и докажите их эквивалентность (Утверждение 4.7).(сложность 2)

49. Когда говорят, что мощность B строго больше мощности A?

50. Пусть A и B — множества. Что обозначается символом A^B? Символом $P(A)$? Докажите теорему, устанавливающую соотношение между мощностями $|P(A)|$, $|\{0,1\}^A|$, $|\{x,y\}^A|$, где $x \neq y$ — любые различные объекты (Утверждение 4.8).(сложность 2)

51. Что называют последовательностью точек множества?

52. Сформулируйте и докажите теорему 4.1 Кантора о соотношении между мощностью множества и мощностью множества всех его подмножеств.(сложность 3)

53. Сформулируйте «лемму о двух теоретико-множественных милиционерах». На сколько шагов в курсе разбито доказательство этой леммы? Что в доказательстве было названо «хорошим множеством»?

54. Сформулируйте и докажите «лемму о двух теоретико-множественных милиционерах». (Лемма 4.1). (сложность 3)

55. Сформулируйте и докажите теорему 4.2 Кантора-Шрёдера-Бернштейна.(сложность 1)

56. Какая функция называется монотонной?

57. Какие множества называются изоморфными в смысле порядка? Что называют порядковым типом множества?

58. Когда говорят, что одно множество плотно в другом в смысле порядка? Приведите примеры.

59. Какое множество называют вполне упорядоченным?

60. Что назыают ординалами (ординальными числами)?

61. Что называют цепью?

62. Сформулируйте правило 5 сложения и умножения ординалов. Сформулируйте утверждения о том, что эти правила корректны.

63. Докажите корректность правила 5 сложения ординалов.(сложность 3)

64. Что называют трансфинитами (трансфинитными числами)?

65. Сформулируйте три вида математической индукции. Равносильны ли они?

66. Что называют начальным отрезком в линейно упорядоченном множестве?

67. Сформулируйте теорему 5.1 о сравнении ординалов в терминах начальных отрезков.

68. Пусть α — ординал. Определите ординал $\alpha + 1$. Объясните, как вводится стандартное отношение порядка на любом множестве ординалов. Линейный ли это порядок? Докажите теорему, утверждающую, какой из ординалов α и $\alpha + 1$ больше в смысле этого отношения порядка. (Теорема 5.1). (сложность 1)

69. Что называют нулевым ординалом?

70. Что называют стандартным представлением ординала? Сформулируйте теорему 5.3 о стандартном представлении ординала.

71. Сформулируйте и докажите теорему о сравнении множеств по мощности (Теорема 5.4).(сложность 1)

72. Какой ординал называют предельным; непредельным?

73. Сформулируйте и докажите принцип трансфинитной индукции (Теорема 5.5).(сложность 2)

74. Объясните, что такое трансфинитная рекурсия.

75. Сформулируйте определение того, что $f_0 = \lim_{\beta\to\beta_0,\ \beta<\beta_0} f(\beta)$, где f_0 — число, β_0 — предельный ординал, а $f\colon \beta_0 \to \mathbb{R}$.

76. Как определить f^α, где α — ординал, а функция f отображает отрезок $[a, b]$ в себя?

77. Приведите пример такой функции $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, что функции $f, f^2, f^3, \dots, f^\omega, f^{\omega+1}, f^{\omega+2}, \dots, f^{\omega+\omega}$ все различны.

78. Что называют точкой периода α функции $f : [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$, где α — ординал?

79. Сформулируйте теорему Цермело.

80. Сформулируйте теорему Хаусдорфа о цепях.

81. Сформулируйте лемму Цорна.

82. Сформулируйте теорему о непустоте декартова произведения.

83. Сформулируйте утверждения, эквивалентные аксиоме выбора (5 шт. вместе с самой аксиомой выбора).

84. В чём состоит парадокс Кантора в наивной теории множеств?

85. В чём состоит парадокс Рассела в наивной теории множеств?

86. На чём основан парадокс Буралли-Форти в наивной теории множеств?

87. Сформулируйте аксиомы объёмности и равенства в системе аксиом ZF.

88. Сформулируйте аксиому пары в системе аксиом ZF.

89. Сформулируйте схему аксиом выделения в системе аксиом ZF.

90. Сформулируйте аксиому объединения в системе аксиом ZF.

91. Сформулируйте аксиому степени в системе аксиом ZF.

92. Какое множество называется индуктивным? Сформулируйте аксиому индуктивного множества (она же аксиома бесконечности).

93. Сформулируйте аксиому регулярности в системе аксиом ZF. Докажите, что никакое можество не является своим элементом (Следствие 6.1).(сложность 1)

94. Сформулируйте схему аксиом подстановки в системе аксиом ZF.

95. Сформулируйте аксиому выбора (в формулировке ZFC 6.2).

96. Перечислите названия всех аксиом ZF. Объясните, в чём состоит отличие ZFC от ZF.

97. Докажите, что пересечение любого непустого множества индуктивных множеств является индуктивным множеством(Теорема 6.1).(сложность 2)

98. Докажите, что существует и единственно такое индуктивное множество N, что $N \subset X$ — для любого индуктивного X (Следствие 6.2). Как связаны N и $\mathbb{N}$? (сложность 3)

99. Какие два неопределяемых понятия задают натуральные числа в аксиоматике Пеано? Сформулируйте аксиомы Пеано.

100. Докажите, что аксиомы Пеано являются следствием аксиом ZF (Доказательство 7.2). (сложность 3)

9 Задачи к экзамену

Тема 1. Записать утверждение с помощью логических функций и кванторов. Обратная задача: прочитать такую запись.

Тема 1. Задача сложности 1.
$p(x) = x$ скачет по болоту
$q(y) = y$ является лягушкой
Записать утверждение «все лягушки скачут по болоту»
Прочитать запись «$\exists y : \overline{q(y)} \wedge p(y)$»

Тема 1. Задача сложности 2.
$p(x) = x$ скачет по болоту
$q(y) = y$ является лягушкой
$w =$идёт дождь
Записать утверждение «если по болоту скачут не только лягушки, то дождя нет»
Прочитать запись «$\exists y : (p(y) \to w) \to p(y)$»

Тема 2. С помощью диаграмм Эйлера или Венна сравнить два множества.

Тема 2. Задача сложности 1. Сравнить $A \cap B$ и $A \setminus (B \setminus (A \cap B))$

Тема 2. Задача сложности 2. Сравнить $(A \cup B) \setminus C$ и $(A \setminus C)\Delta(B \setminus (A \cap B))$

Тема 3. Переход от записи множества в виде операций над известными множествами к записи в виде множества всех элементов, для которых выполняется некоторое условие. И обратно.

Тема 3. Задача сложности 1. Представить $(A \cap B) \setminus C$ в виде $\{x : \ \dots\}$

Тема 3. Задача сложности 2. Выразить с помощью операций над множествами A, B, C множество $\{x : \ (x \in A) \vee ((x \notin B) \wedge (x \notin C))\}$

Тема 4. Задача на формулу включений-исключений.

Тема 4. Задача сложности 1. В классе 10 учеников, и каждый любит хотя бы один предмет из списка: физика, математика. Физику любят 5 человек, математику – 8 человек. Сколько учеников любят одновременно физику и математику?

Тема 4. Задача сложности 2. В классе 20 учеников, и каждый любит хотя бы один предмет из списка: литература, биология, история. Литературу любят 10 человек, биологию – 20, историю – 13. Одновременно литературу и биологию – 10, литературу и историю – 10, историю и биологию – 10. Сколько учеников любят все три предмета?

Тема 5. Исследовать свойства бинарного отношения.

Тема 5. Задача сложности 1. Отношение R на $\mathbb{N}$ задано так: $xRy \iff$ число x/y является целым числом. Исследовать свойства отношения R.

Тема 5. Задача сложности 2. Отношение R на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ задано так: $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff$ число x_1/y_2 является целым числом. Исследовать свойства отношения R.

Тема 6. Исследовать отношение порядка - найти минимальные, максимальные элементы, ответить на другие вопросы.

Тема 6. Задача сложности 1. Пусть A — множество из четырёх элементов, и B — множество всех подмножеств множества A, состоящих из не более, чем 3 элементов. Отношение R на B задано так: $A_1 R A_2 \iff (A_1 \subset A_2)$. Является ли R отношением порядка, строгого порядка, линейного порядка, частичного порядка? Нарисовать диаграмму Хассе, указать: наибольшие, наименьшие, максимальные, минимальные элементы. Применить к B теорему Хаусдорфа, теорему Цермело, указать результат применения. Применима ли к B лемма Цорна? Если применима, то указать результат применения.

Тема 6. Задача сложности 2. Построить бесконечное упорядоченное множество, к которому не применима лемма Цорна и имеющее три максимальных элемента и наименьший элемент.

Тема 7. Исследовать отношение эквивалентности. Описать классы, при возможности — составить рисунок.

Тема 7. Задача сложности 1. Определим на $\mathbb{R}$ отношение R так: $xRy \iff x^2 = y^2$. Проверить, что R является отношением эквивалентности. Найти классы эквивалентности. Указать мощность классов эквивалентности. Указать мощность фактор-множества.

Тема 7. Задача сложности 2. Определим на $\mathbb{R}^2$ отношение R так: $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Проверить, что R является отношением эквивалентности. Найти классы эквивалентности. Указать мощность классов эквивалентности. Указать мощность фактор-множества.

Тема 8. Исследовать функцию на инъектианость, сюръективность, биективность, монотонность. В случае обратимости найти обратную функцию и исследовать её.

Тема 8. Задача сложности 1. Исследовать функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin(x)$ на инъектианость, сюръективность, биективность, монотонность (порядок на $\mathbb{R}$ зададим так: $x \le y \iff (x^3 \le y^3)$). В случае обратимости найти обратную функцию и исследовать её.

Тема 8. Задача сложности 2. Исследовать функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x^5)$ на инъектианость, сюръективность, биективность, монотонность (порядок на $\mathbb{R}^2$ зададим так: $(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \iff (x_1 \le x_2) \wedge (y_1 \le y_2)$). В случае обратимости найти обратную и исследовать её.

Тема 9. Сравнить мощности двух множеств или найти мощность множества.

Тема 9. Задача сложности 1. Найти мощность множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Тема 9. Задача сложности 2. Найти мощность множества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Тема 10. Сложить и умножить ординалы.

Тема 10. Задача сложности 1. Пусть $\alpha = \omega, \beta = 3$. Привести примеры множеств, упорядоченных по типам α и β. Построить множества, упорядоченные по типам $\alpha + \beta, \beta + \alpha, \alpha \cdot \beta, \beta \cdot \alpha$, предложить наиболее простые записи для их порядковых типов.

Тема 10. Задача сложности 2. Пусть $\alpha = \omega \cdot 2, \beta = 3 \cdot \omega$. Привести примеры множеств, упорядоченных по типам α и β. Построить множества, упорядоченные по типам $\alpha + \beta, \beta + \alpha, \alpha \cdot \beta, \beta \cdot \alpha$, предложить наиболее простые записи для их порядковых типов.

Тема 11. Определить, по какому типу упорядоченно множество. Обратная задача: построить множество, упорядоченное по данному типу.

Тема 11. Задача сложности 1. Обозначим порядковый тип множества всех отрицательных целых чисел с обычным порядком символом ω^*. Привести пример множества, упорядоченного по типу $\omega + \omega^*$. Выразить через конечные ординалы, ω, ω^* порядковый тип подмножества всех натуральных чисел, состоящего из 1 и всех натуральных степеней чисел 2,3,5, упорядоченного так:

$$2 < 4 < 8 < 16 < ... < 3 < 9 < 27 < 81 < ... < 1 < ... < 125 < 25 < 5$$

Тема 11. Задача сложности 2. Обозначим порядковый тип множества всех отрицательных целых чисел с обычным порядком символом ω^*. Привести пример множества, упорядоченного по типу $\omega + (\omega^* \cdot \omega^*)$. Выразить через конечные ординалы, ω, ω^* порядковый тип множества $A = \{m + \frac{1}{n+1} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, где $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$, а множество A наследует порядок с обычного порядка на вещественной оси.

Тема 12. Доказать равенство или неравенство с помощью метода математической индукции.

Тема 12. Задача сложности 1. Начиная с какого $n_0 \in \mathbb{N}$ начинает выполняться неравенство $2^n \geq n^2$? Докажите это неравенство по индукции, приняв n_0 за базу индукции.

Тема 12. Задача сложности 2. Начиная с какого $n_0 \in \mathbb{N}$ начинает выполняться равенство $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$? Докажите это равенство по индукции, приняв n_0 за базу индукции.