Geometry

Dmitry Tikhomirov

November 2018

Содержание

1 Векторная алгебра

Определение 1. **Вектор** — палочка со стрелочкой.

Определение 2. **Вектор** — направленный отрезок.

Определение 3. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ **равны** если

1. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$
2. $AB||CD$
3. AB и CD сонаправлены

Определение 4. Класс эквивалентности векторов в силу введённого равенства является **свободным вектором**.

Определение 5. **Свободный вектор** — это параллельный перенос.

Утверждение 1.1. *Свойства линейных операций над векторами*

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$
5. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Определение 6. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$

Определение 7. Пусть M — множество объектов в котором введены операции сложения и умножение объекта на число. Тогда для $a_1,\ a_2, \dots\ a_n\ \in M$ и $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots\ \alpha_n\ \in \mathbb{R}$ выражение

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

называется линейной комбинацией элементов $a_1,\ a_2, \dots\ a_n$ с коэффициентами $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots\ \alpha_n$

Определение 8. Система (набор) векторов $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \dots\ \vec{a}_n\}$ называется линейно независимой, если из того, что линейная комбинация этих векторов равна $\vec{0}$ следует, что все коэффициенты этой комбинации равны 0.

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Определение 9. (ненужное) Система $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \dots\ \vec{a}_n\}$ называется линейно зависимой, если $\exists \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n$ не все равные 0, такие что $\alpha_1\vec{a}_1 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$

Теорема 1.1. (Критерий линейной зависимости системы, состоящей из одного вектора) $\{\vec{a}_1\}$ линейно зависима $\Longleftrightarrow\ \vec{a}_1 = \vec{0}$

Доказательство.

$\longrightarrow$) $\{\vec{a}_1\}$ линейно зависима $\xrightarrow{def}\ \exists \alpha_1 \neq 0\ \ |\ \alpha_1\vec{a}_1 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{a}_1 = \vec{0}$

$\longleftarrow$) $\vec{a}_1 = \vec{0} \Longrightarrow 5 \cdot \vec{a}_1 = \vec{0}$, но $5 \neq 0 \Longrightarrow \{\vec{a}_1\}$ — линейно зависима. ♡

Теорема 1.2. (Критерий линейной зависимости системы из $n \geqslant 2$ векторов)
$\{\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \dots\ \overrightarrow{a_n}\}$ — линейно зависимы $\Longleftrightarrow$ хотя бы один из $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \dots\ \overrightarrow{a_n}$ является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. $\longrightarrow$) $\{\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \dots\ \overrightarrow{a_n}\}$ — линейно зависима $\Longrightarrow\ \exists\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ не все нули, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}$$

Пусть $\alpha_1 \neq 0$ тогда

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}\ +\ \alpha_2\overrightarrow{a_2}\ +\ \dots\ +\ \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}\quad | : \alpha_1 \neq 0$$

$$\overrightarrow{a_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{a_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{a_2} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overrightarrow{a_n}$$

$\longleftarrow$) $\overrightarrow{a_1} = k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} + \dots + k_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}\quad k_i \in \mathbb{R}$

$$1 \cdot \overrightarrow{a_1} - k_2\overrightarrow{a_2} + \dots + k_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$$

коэффициент при $\overrightarrow{a_1}$ равен 1 $\Longrightarrow$ система — линейно зависима. □

Теорема 1.3. Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой системой.

Теорема 1.4. Любая «надсистема» линейно зависимой системы являетмя линейно зависимой системой.

Теорема 1.5. На прямой любая система из $n \geqslant 2$ векторов линейно зависима.
На плоскости любая система из $n \geqslant 3$ векторов линейно зависима.
В пространстве любая система из $n \geqslant 4$ векторов линейно зависима.

Определение 10. Векторы называются коллинеарными, если все они параллельны друг другу или одной прямой.

Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Определение 11. Базисом в множестве векторов называется *упорядоченная*, максимальная (по числу векторов) линейно независимая система векторов в этом множестве.
На прямой любой ненулевой вектор — базис;
На плоскости любые два неколлинеарных вектора — базис;
В пространстве любые три некомпланарных вектора — базис;

Теорема 1.6. Любой вектор однозначно раскладывается по данному базису.

Доказательство. Пусть $\{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\}$ — базис, $\overrightarrow{a}$ — вектор. Рассмотрим $\{\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\}$ — линейно зависима, значит $\exists\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ не все нули, такие что $k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{e_1} + k_3\overrightarrow{e_2} + k_4\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$

Если $k_1 = 0$, то $k_2\overrightarrow{e_1} + k_3\overrightarrow{e_2} + k_4\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$, где $k_2,\ k_3,\ k_4$ — не все нули, тогда $\{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\}$ — линейно зависима, что невозможно, так как это — базис. Следовательно, $k_1 \neq 0 \longrightarrow \vec{a} = \dfrac{k_2}{k_1}\overrightarrow{e_1} + \dfrac{k_3}{k_1}\overrightarrow{e_2} + \dfrac{k_4}{k_1}\overrightarrow{e_3}$. $\vec{a}$ — линейная комбинация.

Докажем единственность!

Пусть не единтсвенно.

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{a} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 - \beta_3)\overrightarrow{e_3}$$

$\{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\}$ — базис $\Longrightarrow$

$$\begin{matrix} \alpha_1 - \beta_1 = 0 & & \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 & \Longrightarrow & \alpha_2 = \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 = 0 & & \alpha_3 = \beta_3 \end{matrix}$$

Противоречит единственности. □

Система координат — это набор «точка + базис»

Радиус вектор, как и любой вектор, по предыдущей теореме раскладывается по базису. Набор коэффициентов называется **координатами точки**.

Теорема 1.7. Координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, находятся по правилу: координаты конца минус координаты начала.

Доказательство.

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2}$$

Отсюда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

Из однозначного разложения по базису следует, что при действиях над векторами (сложение и умножение на число) надо делать те же действия над их координатами.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2,\ y_2,\ z_2) - (x_1,\ y_1,\ z_1) - = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

□

Упражнение 1. (Деление отрезка в заданном отношении)
Найти на отрезке AB точку M, такую что

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu},\ \lambda > 0,\ \mu > 0$$

Решение Требуется чтобы

$$\mu|\overrightarrow{AM}| = \lambda|\overrightarrow{MB}|$$

Пусть заданы точки $A\ (x_0,\ y_0,\ z_0),\ B\ (x_1,\ y_1,\ z_1),\ M\ (x,\ y,\ z)$ и $\mu\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$

Первая координата $\overrightarrow{AM}$ есть $\mu(x_1 - x_0) = \lambda(x_1 - x)$

Вторая координата $\overrightarrow{AM}$ есть $\mu(y_1 - y_0) = \lambda(y_1 - y)$

Третья координата $\overrightarrow{AM}$ есть $\mu(z_1 - z_0) = \lambda(z_1 - z)$

Тогда $x = \dfrac{\lambda x_1 + \mu x_0}{\lambda + \mu}$, $y = \dfrac{\lambda y_1 + \mu y_0}{\lambda + \mu}$, $z = \dfrac{\lambda z_1 + \mu z_0}{\lambda + \mu}$ □

Следствие. Координаты середины отрезка AB находятся по формулам: $x = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$, $y = \dfrac{y_0 + y_1}{2}$ $z = \dfrac{z_0 + z_1}{2}$

Замечание 1. Если λ и μ разных знаков, то то же можно говорить о делении в данном отношении, но тогда точка M здесь вне AB.

Ортоганальный $\equiv$ перепендикулярный.

Определение 12. Базис (и система координат) называются **ортоганальными**, если $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$. Базис называется **ортонормированным**, если он ортоганальный и $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ (нормированный).

Определение 13. Скалярным произведением $(\vec{a},\ \vec{b})$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется $\boxed{\text{ЧИСЛО}}$, определяемое формулой

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}$$

$$(\ ,\ ) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Теорема 1.8. (Свойства скалярного произведения)

1. $(\vec{a},\ \vec{b}) = (\vec{b},\ \vec{a})$
2. $(\vec{a},\ \vec{a}) = |a|^2 \Longrightarrow |a| = \sqrt{(\vec{a},\ \vec{a})}$
3. $(\vec{a},\ \vec{a}) = 0 \Longleftrightarrow |\vec{a}| = 0$
4. $(\vec{a},\ \vec{b}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$, или $\vec{a} \perp \vec{b}$

Теорема 1.9. Базис — ортонормированный $\Longleftrightarrow$ $(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},\quad i, j \in \{1,\ 2,\ 3\}$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера

$(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j) = \delta_{ij}$

Теорема 1.10. Координаты вектора $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ в ортоганальном базисе находятся по формулам

$$\alpha_1 = \frac{(\vec{a},\ \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2}, \quad i \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

Доказательство.

$$\alpha_1|\vec{e}_1| = |\vec{a}|\cos\varphi \quad | \cdot |\vec{e}_1|$$

$$\alpha_1|\vec{e}_1|^2 = |\vec{a}||\vec{e}_1|\cos\varphi$$

$\alpha_1 \cdot |\vec{e}_1|^2$ — скалярное произведение

$$\alpha_1 \cdot |\vec{e}_1|^2 = (\vec{a},\ \vec{e}_1) \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{\vec{a},\ \vec{e}_1}{|\vec{e}_1|^2}$$

□

Теорема 1.11. (Линейность скалярного произведения) $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ \vec{c}) = \alpha(\vec{a},\ \vec{c}) + \beta(\vec{b},\ \vec{c})$

Доказательство. 1) Пусть $\vec{c} = \vec{0}$, тогда очевидно;

2) $\vec{c} \neq \vec{0}$ Пусть $\vec{c}$ — первый базисный вектор, а остальные базисные вектора выберем, как хотим, но ортоганальными вектору $\vec{c}$ и между собой.

По предыдущей теореме первая координата вектора $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ есть $\dfrac{(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2}$

Первая координата вектора $\vec{a}$ есть $\dfrac{(\vec{a},\ \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2}$

Первая координата вектора $\vec{b}$ есть $\dfrac{(\vec{b},\ \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2}$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ — это линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому

$$\frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}{|\vec{e}_1|^2} = \frac{\alpha(\vec{a},\ \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2} + \frac{\beta(\vec{b},\ \vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|^2} \quad | \cdot |\vec{e}_1|^2$$

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\ \vec{e}_1) = \alpha(\vec{a},\ \vec{e}_1) + \beta(\vec{b},\ \vec{e}_1) \quad |\vec{e}_1 \equiv \vec{c}$$

□

Теорема 1.12. (Формула для вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе)

Доказательство. $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1) = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$
$\vec{b}(x_2,\ y_2,\ z_2) = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3,\ x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) = x_1x_2(\vec{e}_1,\ \vec{e}_1) + x_1y_1(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2) + x_1z_2(\vec{e}_1,\ \vec{e}_3) + \dots + z_1z_2(\vec{e}_3,\ \vec{e}_3) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z$$

Итак

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

□

Определение 14. Векторным произведением $[\vec{a},\ \vec{b}]$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой что

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
3. Тройка $\langle\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\rangle$ — правая

Определение 15. Упорядоченная тройка векторов называется **правой**, если глядя с концы вектора $\vec{c}$ (третьего) мы видим поворотот первого ко второму на наименьший угол как поворот против часой стрелки.

Теорема 1.13.

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = -[\vec{b},\ \vec{a}]$$

Доказательство. Правая тройка заменится на левую. □

Определение 16. Смешанным произведением векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ в указанном порядке называется $\boxed{\text{ЧИСЛО}}$ $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = (\vec{a},\ [\vec{b},\ \vec{c}])$

Теорема 1.14. (Геометрический смысл смешанного произведения)

$$|(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})| = V_{\text{параллилепипеда, построеного на } \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ с как на сторонах}}$$

Доказательство. $V = S_{\text{осн}} \cdot h = \left|[\vec{c},\ \vec{b}]\right| \cdot h = \left|[\vec{c},\ \vec{b}]\right| \cdot (|\vec{a}| \cos(\alpha)) = (\vec{a},\ [\vec{b},\ \vec{c}]) = (\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$

Для картинки всё верно, для второго случая, когда «вектор $\vec{a}$ вниз», то есть тройка $\langle \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a} \rangle$ — левая, получится знак « $-$ ». Чтобы это поправить в формулировке стоит модуль. $V = (\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ □

Теорема 1.15.

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ — компланарны}$$

Доказательство. Геометрическое □

Теорема 1.16.

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = (\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a}) = (\vec{c},\ \vec{a},\ \vec{b}) = -(\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}) = -(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c}) = -(\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a})$$

Доказательство. При циклической смене порядка сомножителей смешанное произведение не меняется, в противном случае меняет знак. □

Теорема 1.17. Смешанное произведение линейно.

Доказательство. $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\ \vec{b},\ \vec{c}) = (\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\ [\vec{b},\ \vec{c}]) = \lambda(\vec{a}_1,\ [\vec{b},\ \vec{c}])+\mu(\vec{a}_2,\ [\vec{b},\ \vec{c}]) = \lambda(\vec{a}_1,\ \vec{b},\ \vec{c})+\mu(\vec{a}_1,\ \vec{b},\ \vec{c})$ Таким образом линейность смешанного произведения по первому сомножителю доказано. Из предыдущей теоремы следует линейность по второму и третьему. □

Теорема 1.18. (Линейность векторного произведения)

$$[\lambda\vec{a} + \mu\vec{b},\ \vec{c}] = \lambda[\vec{a},\ \vec{c}] + \mu[\vec{b},\ \vec{c}]$$

Доказательство. Запишем линейность смешанного произведения по второму сомножителю:

$$(\vec{d},\ [\lambda\vec{a},\ \mu\vec{b},\ \vec{c}] = \lambda(\vec{d},\ [\vec{a},\ \vec{c}]) + \mu(\vec{d},\ [\vec{b},\ \vec{c}])$$

Пусть $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ — ортонормированный базис.

1) Положим $\vec{d} = \vec{e}_1$. Получаем $(\vec{e}_1,\ [\cdot\ ,\cdot\ ]$ — первая координата вектора. Таким образом для первой координаты получилась нужная линейность.

2) Забудем и положим $\vec{d} = \vec{e}_2$. Mutatis mutandis. Получим линейность для второй координаты.

3) Снова забудем и положим $\vec{d} = \vec{e}_3$. Mutatis mutandis. Получим линейность для третьей координаты.

Так как действиям сложения и умножения на число с векторами взаимно однозначно отвечают те же действия с координатами, то получаем, что теорема верна. □

Утверждение 1.2. *(Формула для вычисления векторного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе)*

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Таблица 1: Векторные произведения векторов ортонормированного базиса (столбец на строку)

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Утверждение 1.3. *(Формула для вычисления смешанного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе)*

$$(\vec{a},\ [\vec{b},\ \vec{c}]) = (\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Утверждение 1.4. *(Формула для вычисления длины вектора через координаты его концов)*

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(M_1M_2)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Геометрия

Соглашения

1) если ничего не сказано, то базис — ортонормированный
2) говорят, что $F(x,\ y)=0$ определяет линию S на плосоксти, если:

1. $\forall M(x_0,\ y_0)\in S$ имеем $F(x_0,\ y_0)=0$
2. $\forall M(x_0,\ y_0)\in S$ имеем $F(x_0,\ y_0)\neq 0$

2 Прямая на плоскости.

2.1 Векторное параметрическое уравнение

$\overrightarrow{M_0M}\ ||\ \vec{a}$ по построению.
$(\vec{a}\ ||\ L)\quad(\vec{a}\neq\vec{0})$ — направляющий вектор
$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{a}$

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}} \tag{1}$$

2.2 Параметрическое уравнение

$\vec{r}\ (x,\ y)\quad\vec{r}_0\ (x_0,\ y_0)\quad\vec{a}\ (a_1,\ a_2)$
$(x,\ y)=(x_0,\ y_0)+t(a_1,\ a_2)$ это — (1)

$$\boxed{\begin{cases}x=x_0+ta_1\\ y=y_0+ta_2\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}} \tag{2}$$

2.3 Школьное, с угловым коэффициентом

Исключаем из (2) параметр $t=\dfrac{x-x_0}{a_1},\quad$ если $a_1\neq 0$
$y=y_0+\dfrac{x-x_0}{a_1}a_2$
$y=\underbrace{\dfrac{a_2}{a_1}}_{k}x+\underbrace{y_0-\dfrac{a_2x_0}{a_1}}_{b}$

$$\boxed{y=kx+b} \tag{3}$$

$x=\operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона
При $x=0$ имеем $y=b$, где b — начальная ордината

Замечание 2. Так задаются все прямые, кроме вертикальных.

2.4 Каноническое уравнение

Уничтожим t в (2) по-другому:
Из первого $t=\dfrac{x-x_0}{a_1}$
Из второго $t=\dfrac{y-y_0}{a_2}$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}} \tag{4}$$

Замечание 3. *Соглашение:* разрешается писать: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{0}$, что означает, что и $y-y_0=0$, то есть $y=y_0$

2.5 Уравнение прямой через две точки

Считая начальной точкой M, напишем каноническое уравнение

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \tag{5}$$

2.6 Уравнение прямой «в отрезках»

Пусть прямая L не проходит через $O\ (0,\ 0)$. Следовательно, она пересекает обе оси, пусть в точках $(a,\ 0)$ и $(0,\ b)$. Запишем прямую L как прямую через две точки

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$$

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$$

$$-\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \tag{6}$$

2.7 Векторное уравнение

$\vec{n}\neq\vec{0}$
Вектор $(\vec{r}-\vec{r}_0)\perp\vec{n}\quad\forall\vec{r}(x,\ y),\ (x,\ y)\in L$

$$\boxed{(\vec{r}-\vec{r}_0,\ \vec{n})=0} \tag{7}$$

2.8 Общее уравнение прямой

Положим в (7) $\vec{n}=(A,\ B)$. Распишем (7) считая систему координат ортонормированной.

$$\left(\left((x-x_0),\ (y-y_0)\right),\ (A,\ B)\right)=(x-x_0)A+(y-y_0)B=Ax+By+\underbrace{(-1)\cdot(x_0A+y_0B)}_{C}=0$$

$$\boxed{\begin{cases}Ax+By+C=0\\A^2+B^2\neq 0\end{cases}} \tag{8}$$

Теорема 2.1. (Геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении прямой)
В уравнении прямой $Ax+By+C=0$ вектор $(A,\ B)$ — перпендикуляр к прямой, то есть $(A,\ B)=\vec{n}$.

Доказательство. Пусть $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ — точки на нашей прямой.

$$\left|\begin{aligned}&Ax_1+By_1+C=0 \text{ — верно}\\&Ax_2+By_2+C=0 \text{ — верно}\end{aligned}\right|$$

$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$ Если базис «хороший», то это расписано скалярное произведение $\left((A,\ B),\ (x_2-x_1,\ y_2-y_1)\right)$ по критерию ортогональности $(A,\ B)\perp(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$
$(A,\ B)\perp L$ □

Несколько стандартных задач про прямые на плоскости

Упражнение 2. Найти угол между двумя прямыми.
Решение а) Для школьных уравнений
1) $y=k_1x+b_1$
2) $y=k_2x+b_2$
$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$

Если $1+k_1k_2=0\Longrightarrow k_1=-\dfrac{1}{k_2}$ тогда $\operatorname{tg}\alpha$ не существует $\Longrightarrow\ \alpha=\dfrac{\pi}{2}$. Другими словами $k_1=-\dfrac{1}{k_2}\Longleftrightarrow$ прямые перпендикулярны.

б) Для общих уравнений
I) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
II) $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
$\angle(\text{I, II}) = \angle(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2)$

$\cos\angle(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2)) = \dfrac{(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

В «хорошей» системе получается

$\cos\angle(\vec{n}_1,\ \vec{n}_2)) = \dfrac{((A_1,\ B_1)\,,\ (A_2,\ B_2))}{|\,(A_1,\ B_1)\,|\,|\,(A_2,\ B_2)\,|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

в) Для канонических уравнений
I) $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{b_1}$
II) $\dfrac{x - x_0'}{a_2} = \dfrac{y - y_0'}{b_2}$

$\cos(\angle((a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2)) = \dfrac{((a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2))}{|(a_1,\ b_1)||(a_2,\ b_2)|} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ □

Упражнение 3. Найти расстояние от точки до прямой.
Решение Пусть прямая задана векторным уравнением. $[\vec{r} - \vec{r}_0,\ \vec{a}] = \vec{0}$. Найдём площадь двумя способами.

$S = d \cdot |\vec{a}| = \left|\left[\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r_0},\ \vec{a}\right]\right| = \left|\overrightarrow{R} - \vec{r}_0\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\alpha$

Пусть система координат «хорошая» и прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$
$(A,\ B) = \vec{n} \implies \vec{a} = (B,\ -A)$, так как $A \cdot B + B \cdot (-A) = 0$ то есть $(B,\ -A)\ \perp\ (A,\ B)$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{R} - \vec{r}_0,\ \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|} = \frac{|AX + BY + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{R} - \vec{r}_0 = (X - x_0,\ Y - y_0)$$

Числитель в (*) равен $|[(X - x_0,\ Y - y_0)\,,\ (-B,\ A)]| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X - x_0 & Y - y_0 & 0 \\ -B & A & 0 \end{vmatrix} = \left|\vec{k}\,((X - x_0)\,A + (Y - y_0)\,B)\right| =$
$|A\,(X - x_0) + B\,(Y - y_0)| = |AX + BY - (Ax_0 + By_0)| \overset{(x_0,\ y_0) \in L \quad Ax_0 + By_0 + C = 0}{=} |AX + BY + C|$

Таким образом, чтобы найти расстояние от точки до прямой, достаточно подставить координаты этой точки в общее уравнение прямой, взять полученное число по модулю и поделить на корень квадратный из суммы коэффициентов при x и y. □

2.9 Нормальное уравнение прямой

$$\boxed{\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0} \qquad (9)$$

Замечание 4. Проверить, что $d = \dfrac{|[\vec{R} - \vec{r}_0,\ \vec{n}]|}{|\vec{n}|}$

3 Уравнение плоскости в пространстве

3.1 Векторное параметрическое

Даны: $\vec{p} \parallel P, \quad \vec{q} \parallel P, \quad \vec{p} \nparallel \vec{q}, \quad M_0 \in P$

Векторы $\vec{r} - \vec{r}_0, \quad \vec{p}, \quad \vec{q}$ — линейно зависимы, а $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — линейно независимы. Поэтому $\vec{r} - \vec{r}_0$ есть линейная комбинация второго и третьего. $\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{p} + v\vec{q}$

$$\boxed{\vec{r} = u\vec{p} + v\vec{q} + \vec{r}_0 \quad u, v \in \mathbb{R}} \qquad (1)$$

3.2 Параметрическое уравнение

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + up_1 + vq_1 & \vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0) \\ y = y_0 + up_2 + vq_2 & \vec{p} = (p_1,\ p_2,\ p_3) \\ z = z_0 + up_3 + vq_3 & \vec{q} = (q_1,\ q_2,\ q_3) \end{cases}} \tag{2}$$

3.3 Векторное уравнение

Зададим плоскость нормальным вектором $\vec{n}$ и точкой M_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Значит $\vec{n} \perp \overrightarrow{MM_0}$ $\forall M \in P$. $\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0)$ $\forall \vec{r}$ — радиус-вектор точки плоскости

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0,\ \vec{n}) = 0} \tag{3}$$

3.4 Общее уравнение плоскости

Пусть система координат «хорошая». Распишем последнее скалярное произведение.
$((x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0),\ (A,\ B,\ C)) = Ax + By + Cz + \underbrace{(-1) \cdot (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{D} = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 > 0 \end{matrix}} \tag{4}$$

3.5 Уравнение плоскости через 3 точки

Пусть $M,\ M_1,\ M_2,\ M_3 \in P$. Векторы $\overrightarrow{MM_1},\ \overrightarrow{M_2M_1},\ \overrightarrow{M_3M_1}$ — компланарны по построению $\iff$ $(\overrightarrow{MM_1},\ \overrightarrow{M_2M_1},\ \overrightarrow{M_3M_1}) = 0$

$$\boxed{(\overrightarrow{MM_1},\ \overrightarrow{M_2M_1},\ \overrightarrow{M_3M_1}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0} \tag{5}$$

3.6 Уравнение плоскости в отрезках

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (x - a)bc + abz + acy = 0$$

$$x\underline{bc} + y\underline{ac} + z\underline{ab} - \underline{abc} = 0 \quad | : abc \neq 0$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \tag{6}$$

3.7 Второй вид векторного уравнения

Пусть $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ — направляющие векторы плоскости
$\vec{n} = [\vec{p},\ \vec{q}]$, из первого вида имеем:
$(\vec{r} - \vec{r}_0,\ [\vec{p},\ \vec{q}]) = 0$

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0,\ \vec{p}, \vec{q}) = 0} \tag{7}$$

Упражнение 4. Найти расстояние от точки до плоскости.

Решение 1 $V_\Pi = \left|\left(\overrightarrow{R} - \vec{r}_0,\ \vec{p},\ \vec{q}\right)\right| = h \cdot S_{\text{осн}}$

$\left|\left(\overrightarrow{R} - \vec{r}_0,\ \vec{p},\ \vec{q}\right)\right| = h \cdot |[\vec{p},\ \vec{q}]|$

$h = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{R} - \vec{r}_0,\ \vec{p},\ \vec{q}\right)\right|}{|[\vec{p},\ \vec{q}]|}$. Пусть теперь P задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ $\vec{n} = (A,\ B,\ C)$, $\quad \vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, оказывается: $h = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{R} - \vec{r}_0,\ \vec{n}\right)\right|}{|\vec{n}|}$. Пусть система координат «хорошая».

$$h = \frac{|((X - x_0,\ Y - y_0,\ Z - z_0)\,,\ (A,\ B,\ C))|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|(X - x_0)\,A + (Y - y_0)\,B + (Z - z_0)\,C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ = \frac{|AX + BY + CZ\,(Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (1)$$

Замечание 5. $(x_0,\ y_0,\ z_0) \in P \Longrightarrow D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

$$\boxed{h = \frac{|AX + BY + CZ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Расстояние найдено! □

3.8 Нормальное уравнение плоскости

$$\boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0} \qquad (8)$$

$\cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
$\cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
$\cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + d = 0}$$

Направляющие косинусы нормального вектора.

4 Прямая в пространстве

4.1 Векторное параметрическое уравниние

$(\vec{r} - \vec{r}_0) \parallel \vec{a} \iff \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} \quad t \in \mathbb{R}} \qquad (1)$$

4.2 Параметрическое уравнение

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}} \qquad (2)$$

4.3 Векторное уравнение

$$\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{a} \Longleftrightarrow \boxed{[\vec{r} - \vec{r}_0,\ \vec{a}] = \vec{0}} \qquad (3)$$

4.4 Каноническое уравнение

Из (2) получаем t:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}} \qquad (4)$$

$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — начальная точка
$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ — направляющий вектор

Замечание 6. Сколько здесть уравнений?
Здесь два (независимых) уравнения.

4.5 Уравнение через две точки

Здесь можно считать, что направляющий вектор $\vec{a}=\vec{r}_1-\vec{r}_0$:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}} \qquad (5)$$

4.6 Общее уравнение

$$\boxed{\begin{array}{c}\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\\(A_1,\ B_1,\ C_1)\nparallel(A_2,\ B_2,\ C_2)\end{array}} \qquad (6)$$

То есть $[(A_1,\ B_1,\ C_1)\,,\ (A_2,\ B_2,\ C_2)]\neq\vec{0}$
Если система координат ортонормированна, это условие имеет вид:
$\vec{0}\neq\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_1&B_2&C_2\end{vmatrix}\Longrightarrow 0\neq\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}A_1&C_1\\A_2&C_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}^2$

Упражнение 5. Переход от общего уравнения и обратно.
Решение 1 Каноническое –> Общее. Тривиально.
Если дано: $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$, то пишем

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}\\\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{z-z_0}{a_3}\end{cases}$$

□

Решение 2 В качестве направляющего вектора $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ можно взять $[\vec{n}_1,\ \vec{n}_2]=[(A_1,\ B_1,\ C_1)\,,\ (A_2,\ B_2,\ C_2)]$
Точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ подбирается. Например: пусть $z_0=const$, подставим в (6) и решим систему относительно x и y. □

5 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Упражнение 6. Найдём расстояние.
Решение осчитаем объём параллилепипеда разными способами. Рассмотрим параллилепипед на векторах $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{r}_2-\vec{r}_1$:

$$V_{\Pi(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{r}_2-\vec{r}_1)}=hS_{\text{осн}}=|(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{r}_2-\vec{r}_1)|$$

$$h=\frac{|(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{r}_2-\vec{r}_1)|}{|[\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]|}$$

Замечание 7. Равенство нулю числителя в последней формуле (при условии неравенства нулю знаменателя) — критерий пересечения прямых в пространстве. $(|(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{r}_2-\vec{r}_1)|)=0$

Замечание 8. Даны две скрещивающиеся прямые:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ &(2) \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \end{aligned}$$

Требуется написать уравнение плоскости, содержащей прямую (1) и паралельную прямой (2).
Ответ: $((\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1)) = 0$

□

Упражнение 7. Найти угол между прямой и плоскостью.
Решение $\alpha = 90° - \beta$, где α — угол между прямой и плоскостью $\alpha = \angle(l,\ \omega)$. β — угол между двумя прямыми. Найдём через скалярное произведение. □

Упражнение 8. Написать уравнение общего перепендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

$$\begin{aligned} &(1) \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ &(2) \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \end{aligned}$$

Решение аправляющий вектор общего перпендикуляра $\vec{p} = [\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]$. Плоскость $(\vec{r} - \vec{r}_1,\ \vec{a}_1,\ [\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]) = 0$. Значит эти векторы компланарны.
$\vec{a}_1 \parallel$ плоскости;
$[\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]\ \parallel$ общий перепендикуляр;
Это плоскость Π_1;
Аналогично $(\vec{r} - \vec{r}_2,\ \vec{a}_2,\ [\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]) = 0$ — уравнение плоскости Π_2 **Ответ:** $\begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_1,\ \vec{a}_1,\ [\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]) = 0 \\ (\vec{r} - \vec{r}_2,\ \vec{a}_2,\ [\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]) = 0 \end{cases}$
для всех систем координат. □

6 Пучки и связки

Определение 17. Пучком прямых на плоскости называется множество всех прямых этой плоскости, проходящих через заданную точку, которая называется центром пучка.

$y - y_0 = k(x - x_0)$ $\forall k$ такая прямая проходит через точку $(x_0,\ y_0)$. Таким образом, первый вид задания пучка прямых такой:
пучок = множество прямых
Пучок $= \{y - y_0 = k(x - x_0) \mid k \in \mathbb{R}\} \cup \{x = x_0\}$
Рассмотрим вторую форму уравнения пучка прямых на плоскости:
Центр пучка (то есть сам пучок) задаётся парой прямых, которые не параллельны.

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1) \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(A_1,\ B_1) \nparallel (A_2,\ B_2)$$

$\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2} \Longleftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \Longleftrightarrow [(A_1,\ B_1),\ (A_2,\ B_2)] \neq \vec{0}$

Теорема 6.1. Уравнение пучка, определяемого парой пересекающихся прямых — это

$$(*) \quad \lambda\,(A_1x + B_1y + C_1) + \mu\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 > 0$$

Доказательство. 1) (*) — уравнение степени 1, то есть при любых λ и μ определяет прямую.
2) При любых λ и μ прямая (*) проходит через центр пучка $(x_0,\ y_0)$, так как $(x_0,\ y_0)$ каждую круглую скобку в (*) обращает в нуль.
Если (*) при каких-то λ и μ вдруг получилось степени 0, то это означает, что $\lambda A_1 + \mu A_2 = 0$ и $\lambda B_1 + \mu B_2 = 0$, это — однородная система. $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \Longrightarrow$ единственное решение — $\lambda = \mu = 0$, но это невозможно в (*)
3) Надо доказать, что <u>любая</u> прямая из нашего пучка задаётся уравнением (*) при подходящих λ и μ.
Пусть $M_1\ (x_1,\ y_1)$ — любая точка плоскости отличная от $M_0(x_0,\ y_0)$. Прямая M_0M_1 принадлежит пучку. Покажем, как выбрать нужные λ и μ в (*). Подставим координаты точки M_1 в (*):

$$\lambda\,(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \mu\,(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$$

Так как $M_1 \neq M_0$, то $(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)^2 + (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)^2 > 0$. Положим

$$\begin{gathered}\lambda = -\left(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2\right)^2 \\ \mu = \left(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1\right)^2\end{gathered}$$

(*) примет вид $-\left(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2\right)\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \left(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1\right)\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0$

Точка M_1 удовлетворяет этому уравнению. Точка M_0 тоже удовлетворяет. □

Замечание 9. Если прямые (1) и (2) выбраны параллельно осям координат, то уравнение пучка будет проще:

$$\boxed{\lambda(y - y_0) = \mu(x - x_0)}$$

Определение 18. Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Теорема 6.2. Уравнение пучка:

$$\begin{cases}\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 > 0 \\ [\vec{n}_1,\ \vec{n}_2] \neq \vec{0}\end{cases}$$

Доказательство. Аналогично. □

Определение 19. Связка плоскостей в пространстве — это множество всех плоскостей, проходящих через данную точку.

Пусть точка (центр связки) задаётся пересечением трёх плоскостей:

$$\begin{matrix}A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0\end{matrix} \qquad \begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix} \neq 0$$

Определитель системы не равен 0. $\iff$ Векторы (нормальные) некомпланарны.

Теорема 6.3. Уравнение связки:

$$\begin{gathered}\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) + \gamma\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3\right) = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0\end{gathered}$$

Доказательство. Аналогично. □

7 Замены базиса и пересчёт координат

Пусть $\begin{matrix}\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\} \text{ — «старый» базис} \\ \{\overrightarrow{e_1}',\ \overrightarrow{e_2}',\ \overrightarrow{e_3}'\} \text{ — «новый» базис}\end{matrix}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_1}' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{e_2}' = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{e_3}' = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3\end{cases} \tag{1}$$

Пусть $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ — произвольный вектор.

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3} \text{ в старом} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1'\overrightarrow{e_1}' + \alpha_2'\overrightarrow{e_2}' + \alpha_3'\overrightarrow{e_3}' \text{ в новом} \tag{3}$$

Подставим в (3) выражение (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} = \alpha_1'(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}) + \alpha_2'(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3}) + \\ + \alpha_3'(a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}) = (\alpha_1'a_{11} + \alpha_2'a_{12} + \alpha_3'a_{13})\overrightarrow{e_1} + \\ + (\alpha_1'a_{21} + \alpha_2'a_{22} + \alpha_3'a_{23})\overrightarrow{e_2} + (\alpha_1'a_{31} + \alpha_2'a_{32} + \alpha_3'a_{33})\overrightarrow{e_3}\end{aligned} \tag{2}$$

В силу единственности разложения по данному базису (здесь по «старому») имеем:

$$\begin{cases}\alpha_1 = a_{11}\alpha_1' + a_{12}\alpha_2' + a_{13}\alpha_3' \\ \alpha_2 = a_{21}\alpha_1' + a_{22}\alpha_2' + a_{23}\alpha_3' \\ \alpha_3 = a_{31}\alpha_1' + a_{32}\alpha_2' + a_{33}\alpha_3'\end{cases} \tag{4}$$

Определение 20. Матрица

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

k-й $\boxed{\text{столбец}}$ которой составлен из координат k-ого нового базисного вектора в старом базисе, называется **матрицей перехода от старого базиса к новому**.

Определение без слов:

$$(\overrightarrow{e_1}',\ \overrightarrow{e_2}',\ \overrightarrow{e_3}') = (\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}) \cdot T \tag{1}$$

Пересчёт координат векторов:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{pmatrix} \tag{4}$$

8 Замена системы координат

8.1 Общий случай

$\{O,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2,\ \overrightarrow{e_3}}\}$ — «старая» система координат
$\{O',\ \overrightarrow{e_1}',\ \overrightarrow{e_2}',\ \overrightarrow{e_3}'\}$ — «новая$>$ система координат

Пусть M — произвольная точка. Её координаты — координаты её радиус-вектора. Пусть в «старой» радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, обозначим $(x,\ y,\ z)$, а в «новой» радиус-вектор $\overrightarrow{O'M}$ обозначим $(x',\ y',\ z')$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Пусть O' имеет координаты $(a_1^0,\ a_2^0,\ a_3^0)$ в старой системе координат.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'\overrightarrow{e_1'} + y'\overrightarrow{e_2'} + z'\overrightarrow{e_3}' \tag{5}$$

В (5) разложим все векторы по исходному базису $\{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2,\ \overrightarrow{e_3}}\}$

$$\begin{cases} x = a_1^0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y = a_2^0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z = a_3^0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases} \tag{7}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{старые}} = T \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\text{новые}} + \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ a_3^0 \end{pmatrix}$$

8.2 Поворот прямоугольной системы на плоскости. (Важный частный случай)

$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ — матрица поворота

$$\overrightarrow{e_1}' = \cos\alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \sin\alpha \cdot \overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e_2}' = -\sin\alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \cos\alpha \cdot \overrightarrow{e_2}$$

Пересчёт координат при повороте:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

9 Кривые степени два. (Кривые второго порядка)

Определение 21. Кривой степени два называется множество точек с координатами $(x,\ y)$, удовлетворяющих уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0 \tag{1}$$

Теорема 9.1. С помощью поворота системы координат коэффициент при произведении переменных в (1) можно сделать равным нулю.

Доказательство. Будем подбирать в формулах поворота угол φ так, чтобы коэффициент при $x'y'$ был равен нулю.

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

$$A(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2B(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + C(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 \cdots + F = 0$$

Выпишем коэффициенты при $x'y'$ $(x'y' = 0)$

$$-2A\cos\varphi\sin\varphi + 2B(\cos^2\varphi)\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$2B' = 2B\cos 2\varphi - (A - C)\sin 2\varphi = 0$$

$$2B\cos 2\varphi = (A - C)\sin 2\varphi$$

- Если $B = 0$, то можно взять $\varphi = 0$
- Если $A = C$, то можно взять $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$
- Если $A \neq C$, то $\cos 2\varphi \neq 0$, можно делить $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2B}{A - C}$, то есть $\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2B}{A - C}$

□

Теорема 9.2. Если в уравнении

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

коэффициент при квадрате переменной не нуль, то коэффициент при первой степени этой переменной можно сделать нулём с помощью сдвига начала координат.

Доказательство. Пусть $A \neq 0$ и $D \neq 0$. Выделим из $Ax^2 + Dx$ полный квадрат:

$$Ax^2 + 2Dx = A\left(x^2 + 2\frac{D}{A}x\right) = A\left(x^2 + 2x\frac{D}{A} + \left(\frac{D}{A}\right)^2\right) - \left(\frac{D}{A}\right) = A\left(\underbrace{x + \frac{D}{A}}_{x'}\right)^2 - \left(\frac{D}{A}\right)^2 = A(x')^2 - \left(\frac{D}{A}\right)^2$$

□

1. В силу теоремы 9.1 будем считать, что $B = 0$. Имеем:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{2}$$

2. Пусть $AC \neq 0$ в (2). Тогда в силу теоремы 9.2 можно считать, что $D = 0$ и $E = 0$. Уравнение примет вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

2.1 $A > 0, \quad ACF < 0$. Для определённости пусть $A > 0, \quad C > 0, \quad F < 0$. Тогда поделим:

$$Ax^2 + C^y 2 = -F \quad | \ : (-F)$$

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1$$

$\dfrac{-F}{A} > 0$ можем обозначить $\dfrac{-F}{A} = a^2$
$\dfrac{-F}{C} > 0$ можем обозначить $\dfrac{-F}{C} = b^2$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{3}$$

Определение 22. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (3) называется **эллипсом**, а уравнение (3) — **каноническим уравнением эллипса**.

2.2 $AC > 0, \quad ACF > 0$ все одного знака. Для определённости $A > 0, \quad C > 0, \quad F > 0.$

$$Ax^2 + Cy^2 = -F \quad | : (-F)$$

$$\frac{x^2}{\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{\frac{F}{C}} = -1$$

$\dfrac{F}{A} = a^2 > 0$
$\dfrac{F}{C} = b^2 > 0$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1} \tag{4}$$

Определение 23. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (4) называется **мнимым эллипсом**, а уравнение (4) — **каноническим уравнением мнимого эллипса**.

2.3 $AC > 0, \quad F = 0$

$$Ax^2 + Cy^2 = 0$$

Всегда можно считать, что A и C положительными, иначе умножим уравнение на -1. Переобозначим $A = a^2, \quad C = b^2$, имеем:

$$\boxed{a^2x^2 + b^2y^2 = 0} \tag{5}$$

Определение 24. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (5) называется **парой мнимых пересекающихся прямых**, а уравнение (5) — **каноническим уравнением пары мнимых пересекающихся прямых**.

2.4 $AC < 0$ (A и C имеют разные) и $F \neq 0$. Для определённости пусть $AF < 0, \quad CF > 0$, имеем

$$Ax^2 + Cy^2 = -F \quad | : (-F)$$
$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1$$

$-\dfrac{F}{A} = a^2$
$-\dfrac{F}{C} = -b^2$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{6}$$

Определение 25. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (6) называется **гиперболой**, а уравнение (6) — **каноническим уравнением гиперболы**.

2.5 $AC < 0, \quad F = 0$. Пусть $A > 0, \quad C < 0$, тогда обозначим $A = a^2 > 0, \quad C = -b^2 < 0$, имеем:

$$\boxed{a^2x^2 - b^2y^2 = 0} \tag{7}$$

$(ax - by)(ax + by) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} ax - by = 0 \\ ax + by = 0 \end{array}\right.$

Определение 26. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (7) называется **парой пересекающихся прямых**, а уравнение (7) — **каноническим уравнением пары пересекающихся прямых**.

3. $AC = 0$, только один из них равен 0 $\quad \big(A^2 + C^2 > 0\big)$. Будем считать, что $A = 0$, а $C \neq 0$. Так как $C \neq 0$, то по теореме 9.2 слагаемого y в первой степени нет. Имеем:

$$Cy^2 + 2Dx + F = 0$$

3.1 $D \neq 0$

$$Cy^2 + 2D\underbrace{\left(x + \frac{F}{2D}\right)}_{\text{сдвиг } \widetilde{w}} = 0$$

$$C\widetilde{y}^2 + 2D\widetilde{x} = 0 \quad | : C$$

$y = \widetilde{y}$. Обозначим $\dfrac{D}{C} = -p$. И перестанем писать волну:

$$\boxed{y^2 = 2px} \tag{8}$$

Определение 27. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (8) называется **параболой**, а уравнение (8) — **каноническим уравнением параболы**.

3.2 $D = 0, \quad F \neq 0$

$$Cy^2 + F = 0$$

3.2.1 $CF < 0$

$$Cy^2 + F = 0 \quad | : C$$
$$y^2 = -\frac{F}{C}$$

Обозначим $-\dfrac{F}{C} = a^2$

$$\boxed{y^2 = a^2} \tag{9}$$

$(y - a)(y + a) = 0$

Определение 28. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (9) называется **парой параллельных прямых**, а уравнение (9) — **каноническим уравнением пары параллельных прямых**.

3.2.2 $\dfrac{F}{C} > 0$. Пусть $\dfrac{F}{C} = a^2$.

$$\boxed{y^2 = -a^2} \tag{10}$$

$y^2 + a^2 = 0 \Longleftrightarrow (y + ia)(y - ia) = 0$

Определение 29. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (10) называется **парой мнимых параллельных прямых**, а уравнение (10) — **каноническим уравнением пары мнимых параллельных прямых**.

3.2.3 $F = 0, \quad A = 0, \quad C \neq 0, \quad D = 0.$

$$Cy^2 = 0 \quad | : C$$

$$\boxed{y^2 = 0} \tag{11}$$

Определение 30. Линия, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением (9) называется **двойной прямой**, а уравнение (9) — **каноническим уравнением двойной прямой**.

Теорема 9.3. Кривая, заданная в «хорошей» системе координат уравнением (1) с помощью подходящей замены «хороших» координат приводится к одному из девяти попарно-различных канонических видов, перечисленных в таблице.

Условие	Каноническое уравнение	Название	Картинка
$AC > 0,\ F < 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Эллипс	
$AC > 0,\ F > 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимый эллипс	
$AC > 0,\ F = 0$	$a^2x^2 + b^2y^2 = 0$	Пара мнимых пересекающихся прямых	
$AC < 0,\ F \neq 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Гипербола	
$AC < 0,\ F = 0$	$a^2x^2 - b^2y^2 = 0$	Пара пересекающихся прямых	
$AC = 0,\ D \neq 0,\ (A \neq 0)$	$y^2 = 2px$	Парабола	
$A = D = 0,\ FC < 0$	$y^2 = a^2$	Пара параллельных прямых	
$A = D = 0,\ FC > 0$	$y^2 = -a^2$	Пара мнимых параллельных прямых	
$C \neq 0,\ A = D = F = 0$	$y^2 = 0$	Двойная прямая	

10 Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geqslant b > 0$$

10.1 Зона картинки

Если $M(x, y)$ принадлежит эллипсу,то $|x| < a, |y| \leqslant b$, т.е. вся прямая лежит в прямоугольнике $-a < x < a, -b < y < b$ Вершинами эллипса называются точки $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b$ При этом a - называется большей полуосью, b называется меньшей полуосью.

10.2 Симметричность

Эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат, то есть если точка (x_0, y_0) принадлежит эллипсу, то точки $(-x_0, y_0), (-x_0, -y_0), (x_0, -y_0)$ тоже принадлежат эллипсу.

10.3 Внешний вид

При фиксировании $x, |x| < a$ получаем, что

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad y_{\text{элл}} = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

При $a = b$, т.е. при случае с окружностью

$$y_{\text{окр}} = \pm a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\forall x \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{\pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\pm a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{b}{a}$$

Таким образом эллипс результат равномерного сжатия окружности с центом $(0, 0)$

10.4 Фокусы

Определение 31. Факусами эллипса называются точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c^2 = a^2 - b^2, c \geqslant 0$

Отношения $\epsilon = c/a$ называется эксцентриситетом. Так как $c < a$, то для $\epsilon < 1$ Если эллипс выродился в окружность (т.е. $a = b$), то $c = 0$ и $\epsilon = 0$ для окружности.

10.5 Расстояние от точки эллипса до фокуса.

Теорема 10.1. Расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей в элллипсе, до каждого из фокусов вляется линейной функции от абсциссы x точки M и выражается формулами:

$$r_1 = |F_1M| = a - \epsilon x$$

$$r_1 = |F_2M| = a + \epsilon x$$

Доказательство.

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2cx + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{a^2b^2x^2 - b^2c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{(a - \frac{c}{a}x)^2} = |a - \epsilon x|$$

Т.к. $\epsilon < 1, a > x$ получаем, что

$$r_1 = a - \epsilon x$$

Для r_2 аналогично. ♡

10.6 Геометрические свойства эллипса.

Теорема 10.2. $M(x, y) \in$ элл $\Leftrightarrow$ сумма расстояний от M до фокусов величина постоянная и равная $2a$
Доказательство.

$\to$ Дано $M \in$ эллипс. Из п.5 $|F_2M| + |F_1M| = a + \epsilon x + a - \epsilon x = 2a$
$\leftarrow$ Дано: $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Надо доказать, что эта точка $M \in$ эллипс, т.е. удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2) + a^2y^2 = a^4 + 2a^2c^2x^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

♡

10.7 Способ рисования эллипса

(Надо просто послушать)

10.8 Фокально-директориальное свойство.

Определение 32. Прямые $x = \dfrac{a}{\epsilon}$ и $x = -\dfrac{a}{\epsilon}$ называются директрисами эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Теорема 10.3. $M(x, y) \in$ эллипс $\Leftrightarrow$ отношение расстояние от M до фокуса к расстоянию от M до директрисы величина постоянноя и равна ϵ.
Доказательство.

$\to$ Дано: $M \in$ эллипс.

$$|MK_2| = d_2 = x - \left(-\frac{a}{\epsilon}\right) = x + \frac{a}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}(x\epsilon + a) = \frac{r_2}{\epsilon}$$

$$\frac{|MF_2|}{|MK_2|} = \frac{r_2}{\frac{r_2}{\epsilon}} = \epsilon$$

$\leftarrow$ Дано: для точки $M(x, y)$выполнено соотношение$\dfrac{|MF_2|}{|MK_2|} = \epsilon$. Вывести отсюда каноническое уравнение эллипса.

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{x + \frac{a}{\epsilon}} = \epsilon \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = x\epsilon + a \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Последнее соотношение уже решалось в этой книжке и предлагается найти читателю это решение. ♡

10.9 Касательная к эллипсу в его точке.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ - это уравнение касательной к графику $y = f(x)$
Разобьем эллипс на два графика:

$$f_1(x) = b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};\ f_2(x) = -b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Пусть $y = f(x)$ - это либо $f1(x)$, либо $f_2(x)$ (вычисления одинаковые)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{[f(x)]^2}{b^2} = 1 \mid \cdot \frac{d}{dx}$$
$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2f(x) * f'(x)}{b^2} = 0$$
$$f'(x) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x}{2f(x)},\ f(x) \neq 0$$
$$f'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$
$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),\ \mid \cdot a^2 y_0$$
$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2,\ \mid : a^2 b^2$$
$$\frac{y y_0}{b^2} + \frac{x x_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$
$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Что и требовалось доказать.

10.10 Биссектриальное свойство касательной.

Теорема 10.4. Касательная - биссектриса внешнего угла факального треугольника. *Доказательство.*

Двадцатью разными способами. Например, через уравнения прямых. ♡

11 Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geqslant b > 0$$

11.1 Зона расположения.

Очевидно, что при $|x| < a$ точек гиперболы нет. Точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ принадлежат гиперболе и называются вершинами гиперболы. При чём a называется действительной полуосью, а b мнимой.

11.2 Гипербола симметрична относительно осей и начала координат.

Определение 33. Точка $(0, 0)$ - центр гиперболы.

11.3 Внешний вид.

Изучим точки пересечения гиперболы с прямыми, проходящими через начало координат

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$y = kx,\ k \geqslant 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1$$
$$b^2x^2 - k^2a^2x^2 = a^2b^2$$
$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - k^2a^2}$$

$x = \pm\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}$, если $b^2 - k^2a^2 > 0$, т.е. $k < \frac{b}{a}$.
x не существует, если $k \geqslant \frac{b}{a}$

Обозначим $\sqrt{b^2 - k^2a^2} = v$ (при $k < \frac{b}{a}$). Точки перечечения $(\dfrac{ab}{v}, \dfrac{abk}{v}$ и $(-\dfrac{ab}{v}, -\dfrac{abk}{v}$. Если $k = 0$, то $v = b$ и точка $(a, 0), (-a, 0)$. $k \to \dfrac{b}{a}$, тогда $v \to 0$ и абсциса точки на гиперболе $\to \infty$.

Определение 34. Прямые $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$ называются асимпотами гиперболы. ("Крайние"из прямых пучка $y = kx$, которые не пересекают гиперболу.

Определение 35. Точки $F_1(c, 0)$ и $f_2(-c, 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2$, $c > 0$, называются фокусами гиперболы.

Замечание 10. $c > a$

Определение 36. Число $\epsilon = \frac{c}{a}$ называется эксценстриситетом гиперболы. У гиперболы $\epsilon > 1$

11.4 Расстояние до фокусов.

Теорема 11.1. Расстояния от точки до на гиперболе до её фокусов считаются по формулам

Для правой ветви

$r_1 = |a - \epsilon x| = \epsilon x - a$, т.к. $\epsilon > 1, x \geqslant a$

$r_2 = |a + \epsilon x| = a + \epsilon x$

Для левой ветви: $e > 1, x \leqslant -a$

$r_1 = a - \epsilon x$

$r_2 = -a - \epsilon x$

11.5 Геометрическое свойство гиперболы

Теорема 11.2. Точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда , когда модуль разности расстояний от этой точки до фокусов величина постоянная и равная $2a$

Определение 37. Прямые $x = \dfrac{a}{\epsilon}$ и $x = -\dfrac{a}{\epsilon}$ называется директрисами гиперболы.

11.6 Как рисовать?

11.7 Фокльно-директориальное свойство гиперболы

Теорема 11.3. $M(x, y)$ принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию от точки до директрисы величина постоянная и равна ϵ

11.8 Уравнение касательной

Уравнение касательной к гиперболе в её точке (x_0, y_0):

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

11.9 Биссекториальное свойство касательной к гиперболе:

Касательной к гиперболе является биссектрисой угла, образованного фокальными радиусами этой точки.

12 Парабола

12.1 Уравнение

Общее уравнение параболы:

$$y^2 = 2px, p > 0$$

12.2 Симметричность

Парабола симметрична относительно оси OX

12.3 Фокус

Точка $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ называется фокусами параболы, а пряммая $x = -\dfrac{p}{2}$ называется директрисой параболы.

12.4 Расстояние до фокуса

Расстояние от точки $M(x,y)$ на параболе до фокуса равна $x+\frac{p}{2}$

$$r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2}$$

12.5 Фокально-директориальное свойство параболы

Теорема 12.1. Парабола - геометрическое место точек, равноудалённых от фокуса и от директрисы.

12.6 Касательная к параболе

Уравнение параболы $y^2=2px$. Если $y=f(x)$ - график, то касательная в точке $(x_0,y_0=f(x_0))$ к графику задаётся уравнением

$$(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Пусть $f_1(x)=\sqrt{2px}, f_2(x)=-\sqrt{2px}$ и $f(x)$ это либо $f_1(x)$, либо $f_2(x)$.

$$y^2=2px \mid \frac{d}{dx}$$

$$2yf'(x)=2p$$

$$f'(x)=\frac{2p}{2y}=\frac{p}{f(x)},\ f(x)\neq 0$$

$$f'(x_0)=\frac{p}{x_0}=\frac{p}{y_0}$$

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0),\ *y_0$$

$$yy_0-y_0^2=px-px_0$$

$$yy_0-2px_0=px-px_0$$

$$yy_0=p(x+x_0)$$

Если $x_0=0$, то $y_0=0$, то $0=px\Rightarrow x=0$

12.7 Биссектриальное свойство касательной к параболе

Теорема 12.2. Касательная к параболе в её точке (x_0,y_0) является биссектрисой между факальным радиусом этой точки, отложенный от этой точки, и направления параллельном оси OX *Доказательство.*

Выберем единичные векторы по данным направлениям и сложим их. Если сумма - направляющий вектор касательной, мы всё доказали. Если $\overline{e}=(1,0)$, то $\overline{r}=(x-\frac{p}{2},y-0)=(x_0-\frac{p}{2},y_0)$.

$$\frac{\overline{r}}{|\overline{r}|}=\frac{(x_0-\frac{p}{2},y_0)}{\sqrt{(x_0-\frac{p}{2})^2+y_0^2}}=\frac{(x_0-\frac{p}{2},y_0)}{\sqrt{x_0^2-x_0p+\frac{p^2}{4}+2px_0}}=\frac{(x_0-\frac{p}{2},y_0)}{\sqrt{x_0^2+px_0+\frac{p^2}{4}}}=\frac{(x_0-\frac{p}{2},y_0)}{x_0+\frac{p}{2}}$$

Сложим единичный вектор с $\overline{e_1}$

$$\frac{\overline{r}}{|\overline{r}|}+\overline{e_1}=(\frac{x_0-\frac{p}{2}}{x_0+\frac{p}{2}},\frac{y_0}{x_0+\frac{p}{2}})+(1,0)=(\frac{2x_0}{x_0+\frac{p}{2}},\frac{y_0}{x_0+\frac{p}{2}})$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_0}{2x_0}=\frac{y_0}{\frac{y_0^2}{p}}=\frac{p}{y_0}$$

♡

13 Общая теория кривых второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \tag{1}$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0 \tag{1'}$$

Будем искать общие точки кривой (1) с прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad \alpha^2 + \beta^2 > 0 \tag{2}$$

Подставим (2) в (1)

$$a_{11}(x_0 + \alpha t)^2 + a_{12}(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + a_{22}(y_0 + \beta t)^2 + 2a_1(x_0 + \alpha t) + 2a_2(y_0 + \beta t) + a_0 = 0 \tag{3}$$

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \tag{4}$$

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 \tag{5}$$

$$Q = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)\alpha + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)\beta \tag{6}$$

$$Q = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x_0 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y_0 + a_1\alpha + a_2\beta \tag{7}$$

$$R = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 \tag{8}$$

Уравненеи (4) имеет в $\mathbb{R}$ не более двух корней:

- 2 корня - 2 точки пересечения с прямой
- 1 корень, то есть 2 равных корня - прямая касается кривой.
- 0 корней - нет точек пересечение

Исключительный случай: $P = 0 \Leftrightarrow a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$ (9)
Условие (9) не зависит от (x_0, y_0), а зависит только от направления (α, β)
Из (4) при условии (9) мы можем получить один из трех случаев.

- $Q \neq 0$ - один корень (для t) - одна точка пересечения, но не касания
- $Q = 0, R = 0$ - $0 = 0$ - бесконечно много точек пересечения, и вся прямая (2) принадлежит кривой (1)
- $Q = 0, R \neq 0$ - нет решений — нет точек пересечения

Определение 38. Направление (α, β), определеяется условием (9) (т.е. $P = 0$), называется асимптотическим направлением для кривой (1).

Определение 39. $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

Теорема 13.1. Кривая степени 2 имеет:
а) 2 ассимптоты направления, если $\delta < 0$
б) 1 ассимптоту направления, если $\delta = 0$
в) 0 ассимптот направлений, если $\delta > 0$
Доказательство.

Случай 1) $a_{11} = a_{22} = 0 \Rightarrow a_{12} \neq 0$, $\delta = || = -a_{12}^2 < 0$
Уравнение (9) имеет вид $2a_{12}\alpha\beta = 0$. Решения: $(\alpha, \beta) = (1, 0)$; $(\alpha, \beta) = (0, 1)$
Случай 2) $a_{22} \neq 0. \Rightarrow \alpha \neq 0$. Поделим (9) на α^2

$$a_{11} + 2a_{12}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + a_{22}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$$

$$a_{21}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + a_{11} = 0$$

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\delta$$

- Если $-\delta > 0$, то два решения

- Если $-\delta = 0$, то одно решение
- Если $-\delta < 0$, то нет решений

Случай 3) $a_{11} \neq 0$ - полный аналог случая 2). ♡

Определение 40. Кривые

- С $\delta > 0$ называются эллиптического типа
- С $\delta = 0$ называются прямыми параболического типа
- С $\delta < 0$ гиперболического типа.

13.1 Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2} > 0 \quad \text{— эллептического типа}$$

13.2 Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2b^2} < 0 \quad \text{— гиперболического типа}$$

13.3 Парабола

$$y^2 = 2px$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{— параболического типа}$$

Определение 41. Хордой кривой называется отрезок прямой, концы которого лежат на кривой, а остальные точки не лежат на кривой.

Следствие. Хорда не может содержать асимптотического направления

Пусть (α, β) - не асимпптотическое направления. Рассмотрим множество середин всех хорд этого направления. Путь $M_0(x_0, y_0)$ - начальные точки прямой (2) - середина хорды.⇒ общие точки кривой (1) и кривой (2) симметричны относительно точки M_0. ⇒ корни $t_{1,2}$ обладают свойством $t_1 = -t_2 \neq 0 \Rightarrow Q = 0$ по теореме Виета. То есть середины хорд направления (α, β) удовлетворяют уравнению $(7) = 0$

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x_0 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y_0 + a_1\alpha + a_2\beta = 0$$

Следовательно на прямой

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + a_1\alpha + a_2\beta = 0 \tag{10}$$

лежат середины всех хорд направления (α, β)

Определение 42. Прямая, определеяемая уравнением (10), называется **диаметром кривой** (1), сопряженным направлению (α, β)

Теорема 13.2. Определение диаметра корректно. (То есть уравнение (10) действительно определяет прямую)

Доказательство. (10) не прямая, если $\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0 \mid \cdot \alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0 \mid \cdot \beta \end{cases}$

$$a_{11}\alpha^2 + 2_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$$

Следовательно, (α, β) это асимптотическое направление (см. (9)) - не может быть по условию. □

Перепишем (10) «в виде (6)»:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1)\alpha + (a_{12}x + a_{22}y + a_2)\beta = 0 \tag{11}$$

(11) определеяет пучок прямых, если

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}, \text{ то есть прямые } a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \text{ и } a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0$$

пересекаются, то это пучок с центром в точке, определяемой системой

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

.
А если $\dfrac{a_{11}}{a12} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$, то (11) печок параллельных прямых.
Если обычный пучок, то $\delta \neq 0$, если пучок параллельных прямых, то $\delta = 0$

Пусть (α, β) не асимптотические направления. Таким образом, при $\delta = 0$ все диаметры параллельны друг другу. а при $\delta \neq 0$ все диаметры пересекаются в точке решения системы (12). В этом пучке могут быть прямые асимптотических направлений.

Теорема 13.3. (Теорема А.) Решение системы (12) является центром симметрии кривой.

Доказательство. Путь решение системы 12 - точка O. Примем эту точку за начальную точку прямой (2).
Случай а). Пусть (2) имеет не асимптотическое направление, значит $P \neq 0$. $Q = 0$, в силу (6). Уравнение (4) принимает вид $Pt^2 + R = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{R}{P}}$, т.е. либо
$t_1 = -t_2$, т.е. 2 точки пересечения, симметричные относительно точки O, либо
$t_1 = t_2$ т.е. точка O симметрична самой себе относительно себя, либо
корни мнимые - $\varnothing$ симметрично $\varnothing$
Случай б) Пусть (2) имеет асимптотическое направление. В этом случае $P = 0$, $Q = 0$ в силу (6). Значит (4) принимает вид $R = 0(*)$.
Если $R = 0 - True$, то (*) верно при любых t.
Если $R = 0 - False$, то (*) всегда неверно, но $\varnothing$ симметрично $\varnothing$ □

13.4 Определение каноническиого вида по инвариантам.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$$

Ортогональный инвариант: S = t $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} + a_{22}$
1) $\delta > 0$ - эллипс или пара мнимых прямых или мнимый эллипс
2) $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1$ и λ_2 разных знаков.
  2.1) Если при этом $\Delta = 0$, то $\tau = 0 \Rightarrow \alpha^2x^2 - \beta^2y^2 = 0$ - пара пересекающих прямых
  2.2) Если при этом $\Delta \neq 0$, то $\tau \neq 0 \Rightarrow \alpha^2x^2 - \beta^2y^2 + \tau = 0$ - гипербола
Вывод для Вида I: $\delta > 0,\ \Delta = 0 \Rightarrow$ пара мнимых пересекающихся прямых
  $\delta > 0\ S_\Delta < 0 \Rightarrow$ эллипс
  $\delta > 0\ S_\Delta > 0 \Rightarrow$ мнимый эллипс
  $\delta < 0\ \Delta = 0 \Rightarrow$ пара пересекающихся прямых
  $\delta < 0\ \Delta \neq 0 \Rightarrow$ гипербола
Вид (II). $F = \lambda_2y^2 + 2b_1x = 0,\ \lambda_2b_1 \neq 0$

$$\delta = 0\ S = \lambda_2 \neq 0\ \Delta = -b_!^2\lambda_2 \neq 0$$

$$b1 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda^2}} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\ (\Delta S = -b_1^2\lambda_2 * \lambda_2 = -b_1^2\lambda_2^2$$

Ясно, что $F = 0$ определяет параболу $y^2 = -\frac{2b_1}{\lambda_2}x$;

$$p = \frac{b_1}{\lambda_2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{-\Delta}{3}}}{\lambda_2} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}$$

Всегда можно брать $p = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}$ - направление оси OX можно сменить на противоположное
Вывод II. $\delta = 0, \Delta \neq 0$ - парабола
Вид III. $F = \lambda_2 y^2 + \tau,\ \lambda_2 \neq 0$

$$\delta = 0, \Delta = 0, S = \lambda_2 \neq 0 \tau \text{ через } \Delta \text{ и } \delta \text{ выразить нельзя!}$$

Определение 43. $K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_22 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$

Лемма 13.1. Корни характеристического многочлена $_A(\lambda)$ матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ не меняются при замене прямоугольной системы координат без переноса начала. *Доказательство.*

В этом случае матрица D имеет вид $D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C - ортогональный по условию, но тогда и D в нашем случае ортогональная матрица.

$$_A(\lambda) = |A - \lambda E|,\ _{A'}(\lambda) = |A' - \lambda E| = |D^T AD - \lambda E| = |D' AD - \lambda D^T ED| =$$

$$= |D^T (A - \lambda E) D| = |D^T||D||A - \lambda E| = |E||A - \lambda E| = |A - \lambda E|$$

♡

Теорема 13.4. Если $\delta = \Delta = 0$, то K - ортогональный инвариант. Он называется полуинвариантом (семиинвариантом) *Доказательство.*
$_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_0)\lambda^2 - (\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} * \lambda + \Delta =$
$-\lambda^3 + (a_0 + S)\lambda^2 - (K + \delta)\lambda + \Delta$

а) В силу лемммы, K сразу инвариант, если нет сдвига начала координат.

б) Пусть $\delta = \Delta = 0$ (условие теоремы). a_{12} можно считать равным нулю, поскольку он уничтожается с помощью поворота независимо от того, где выбрано начало.

Пусть $a_{12} = 0 \Rightarrow \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} = 0$. Пусть $A_{11} = 0$, но $a_{22} \neq 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = -a_1^2 a_{22} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$. Тогда F имеет вид:

$$F = a_{22} y^2 + 2a_2 y + a_0$$

Сделаем замену координат: $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$

$$F' = F(x(x', y'), y(x', y')) = a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_2(y' + y_0) + a_0 = a_{22} y'^2 + 2(a_{22} y_0 + a_2) y' + (a_{22} y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0$$

$$a'_{22} = a_{22}$$

$$a'_2 = a_{22} + a_2$$

$$a'_0 = a_{22} y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_2 \\ 0 & a'_2 & 2'_0 \end{pmatrix}$

$$K = 0 + a_{22} a_0 - a_2^2$$

$$K' = 0 + a'_{22} a'_0 - a_2'^2 = a_{22}(a_{22} y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0) - (a_{22} y_0 + a_2)^2 = a_{22} a_0 - a_2^2$$

♡

Вернёмся к квадрика вида III: $F = \lambda_2 y^2 + \tau = 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$, $S = \lambda_2 \neq 0$, $\delta = \Delta = 0$, $K = \lambda_2 \tau \Rightarrow \tau = \frac{K}{\lambda_2} = \frac{K}{S}$

Итак, если $\delta = \Delta = 0$, то

При $K > 0 \Rightarrow \lambda_2$ и τ одного знака $\Rightarrow$ мнимые параллельные прямые

При $K < 0 \Rightarrow \lambda_2$ и τ разных знаков $\Rightarrow$ параллельные прямые

При $K = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ двойная прямая

Название	Инварианты	Инвариант	Картинка
1) Эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta < 0$	Эллиптический тип, центральные
2) Мнимый эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta < 0$	Эллиптический тип, центральные
3) Пара мнимых переекающихся прямых.	$\delta > 0$	$\Delta = 0$	Эллиптический тип, центральные
4) Гипербола	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Гиперболический тип, центральные
5) Пара пересекающихся прямых	$\delta < 0$	$\Delta = 0$	Гиперболический тип, центральные
6) Парабола	$\delta = \Delta 0$	$\Delta \neq 0$	Параболический тип, нецентральные
7) Пара параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K < 0$	Параболический тип, нецентральные
8) Пара мнимых параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K > 0$	Параболический тип, нецентральные
9) Двойная прямая	$\delta = \Delta = 0$	$K = 0$	Параболический тип, нецентральные

Теорема 13.5. Эта таблица даёт необходимое и достаточное условие принадлежности кривой степени 2 тому или иному типу.

Доказательство.

$\leftarrow$ Доказательство - это наш вывод типов по инвариантам

$\rightarrow$ Проверка, достаточно её сделать для каноническигого уравнения

Пример: Пусть кривая - эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\delta > 0$, $\Delta S < 0$

♡

Теорема 13.6. Существует и единственная кривая степени два, проходящая через 5 точек, если никакие 4 из них не лежат на одной прямой. *Доказательство.*

Пусть $P_i(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., 5$ - такие 5 данных точек. Подставим каждой из них в общее уравнение кривой степени 2, мы получим линейное уравнение для коэффициентов.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0$$

$$F(x, y) = F(P_1) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0$$

Пишем это 5 раз для $P_1, P_2, ..., P_5$. Уравнение однородное, решений бесконечно много. Нам нужно решение только с точностью до постоянно ненулевого множителя, поэтому не страшно, что неизвестных 6, а уравнений 5. докажем, что уравнение этой системы линейно независимо. Доказывать будем от противного. Пусть, для определенности, 5-ое есть линейная комбинация остальных 4-ёх уравнений. Тогда любая кривая степени 2, проходящие через первые 4 точки P_1, P_2, P_3, P_4, проходят и через P_5

Случай 1). Три точки из P_1, P_2, P_3, P_4 лежат на одной прямой "l". Через P_4 порведем прямую $m \neq l$ и не проходящую через P_5 Рассмотрим прямую $m \cup l$ - кривая степени 2. Не проходит через P_5 - противоречение.

Случай 2) Никакие три точки из множества P_4 не лежат на одной прямой.

$q_1 = (P_1 P_2) \cup (P_3 P_4)$ - кривая степени 2

$q_2 = (P_1 P_4) \cup (P_2 P_3)$ - кривая степени 2

По предложению от противного $P_5 \in q_1$, $P_5 \in q_2 \Rightarrow P_5 \in q_1 \cup q_2 \Rightarrow P_5 \in \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ - противоречие. ♡

Определение 44. Шестивершниником называется упорядоченный набор шести точек на плоскости, при условии, что никакие три из них не лежат на одной прямой.

Определение 45. Если $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ шестивершинник, то стороны (A_1A_2) и (A_4A_5), (A_2A_3) и (A_5A_6), (A_3A_4) и (A_6, A_1) называется парами противоположных сторон.

Определение 46. Коникой называется либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, либо маленький конь.

Теорема 13.7. Теорема Паскаля. Точки пересечений продолжений противоположных сторон шестивершинника, вписанного в конику, лежат на одной на одной прямой.

Теорема 13.8. Теорема о мистическом шестивершиннике.