

Matematično-fizikalni praktikum

1. Izračun Airyjevih funkcij

Tilen Šket, 28221057

Navodila:

Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij A_i in B_i na vsej realni osi z absolutno napako, manjšo od 10^{-10} . Enako naredi tudi z relativno napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10} . Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z Mathematico in/ali paketi `mpmath` in `decimal` v programskem jeziku Python.

October 9, 2024

Airyjevi funkciji Ai in Bi se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljivi v integralni obliki

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt) dt, \quad \text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-t^3/3 + xt} + \sin(t^3/3 + xt) \right] dt.$$

1 Postopek

1.1 Taylorjev razvoj

Za majhne x lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\text{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x), \quad \text{Bi}(x) = \sqrt{3} \left[\alpha f(x) + \beta g(x) \right],$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \text{Ai}(0) = \text{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\text{Ai}'(0) = \text{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

kjer je

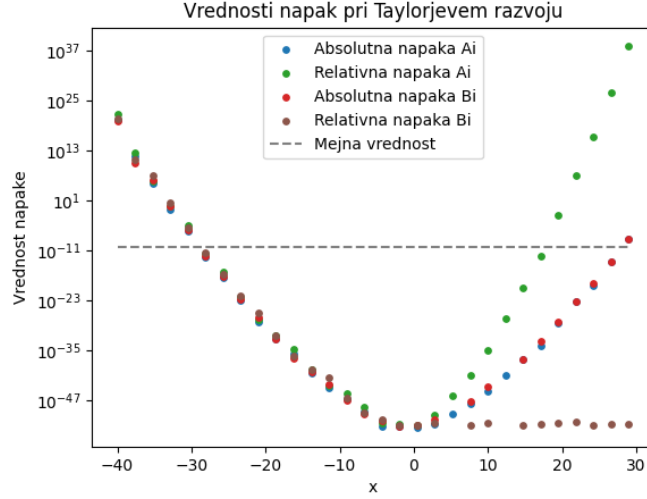
$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \quad (z)_0 = 1.$$

Zapišimo Maclaurinovi seriji za naši funkciji rekurzivno. Za $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Velja

$$a_k = a_{k-1} \frac{(k-2)x^3}{3k}; \quad a_0 = 1, \quad (1)$$

$$b_k = b_{k-1} \frac{(k-1)x^3}{3k+1}; \quad b_0 = x. \quad (2)$$

Z izraženima rekurzivnima enačbama lahko funkcijo dobro aproksimiramo v okolici izhodišča. To sem naredil in prikazal na sliki (1). Iz tega grafa vidimo približno območje, kjer lahko za naša željeno natančnost še vedno uporabljamo Taylorjev razvoj, jaz sem si za to območje izbral med -28 in 10 za Ai in med -28 in 26 za Bi.



Slika 1: Vrednosti absolutne in relativne napake nekaterih točk med -40 in 40. Opazimo, da aproksimacija res dobro deluje le v okolici izhodišča, kot pričakovano. Le relativna napaka funkcije Bi ostane majhna, kar je posledica tega, da funkcija raste preko vseh meja v pozitivni neskončnosti.

1.2 Asimptotski razvoj

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojem. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{z^s}, \quad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}, \quad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}},$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s! \Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(-\xi), \quad \text{Bi}(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(\xi),$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

$$\begin{aligned}\text{Ai}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[\sin(\xi - \pi/4) Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) P(\xi) \right], \\ \text{Bi}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[-\sin(\xi - \pi/4) P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) Q(\xi) \right].\end{aligned}$$

Ponovno zapišemo člene naših vrst rekurzivno in dobimo:

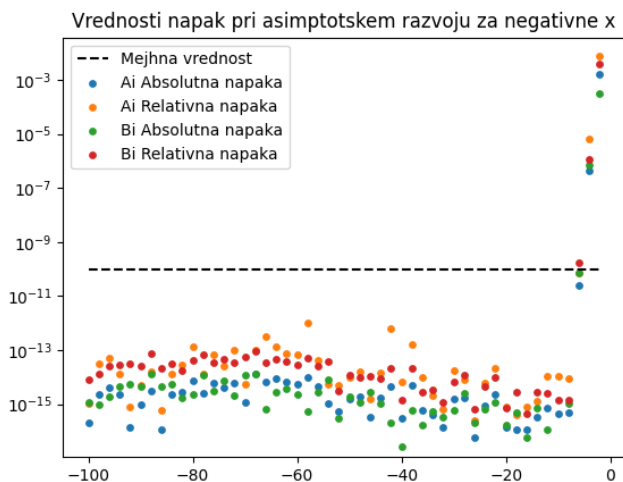
$$\begin{aligned}L : a_k &= a_{k-1} \frac{(3k - 0.5)(3k - 2.5)}{18kx} \\ P : b_{2k} &= -b_{2k-2} \frac{(6k - 0.5)(6k - 1.5)(6k - 2.5)(6k - 3.5)(6k - 4.5)(6k - 5.5)}{54^2 2k(2k - 1)(2k - 0.5)(2k - 1.5)x^2} \\ Q : c_{2k+1} &= -c_{2k-1} \frac{(6k + 2.5)(6k + 1.5)(6k + 0.5)(6k - 0.5)(6k - 1.5)(6k - 2.5)}{54^2 (2k + 1)2k(2k + 0.5)(2k - 0.5)x^2} \\ a_0 &= 1, b_0 = 1, c_0 = \frac{5}{72x}\end{aligned}$$

Te enačbe lahko uporabimo pri implementaciji aproksimacije naših funkcij daleč od izhodišča. Za negativne in pozitivne vrednosti se razlikujejo, zato sem napake izrisal na vsak graf za svoj predznak na slikah (2) in (3). Rezultati tukaj zgledajo dobri, posebej bi poudaril le prelom pri modeliranju funkcije Bi pri visokih vrednostih x , saj tam absolutna napaka ponovno narašča, za kar menim, da je krivo dejstvo, da sama funkcija močno narašča in zato tudi napaka, saj ni dovolj mest za natančno računanje. Več o tem v delu z zlepkami.

1.3 Zlepki

Tri dele aproksimacije nato zlepimo skupaj, tako da napako na celotnem (oz. vsaj čim večjem) območju omejimo pod 10 decimalno mesto. Za točke zlepka sem se sam odločil pri -28 za obe funkciji in 10 za Ai ter 26 za Bi. Dobljenima funkcijama sem nato izračunal napaki pri treh različnih decimalne natančnosti, in sicer pri 100, 200 in 500 mestih natančnosti pri računanju. To vidimo na sliki (4). Opazimo, da se koleno premika proti višjim vrednostim x pri višji uporabljeni natančnosti.

Dodajam še graf modeliranih Airyevih funkcij na območju med -30 in 3 na sliki (5). Dodal bi tudi še nekaj optimizacijskih podatkov. Za optimizacijo mislim, da bi se lahko še precej bolj potrudil, vendar je bilo za namene izračuna potrebovane natančnosti kar sem dosegel dovolj. In sicer traja izračun 200 točk med -100 in 100 posamezne funkcije nekaj stotink pod 3 s.

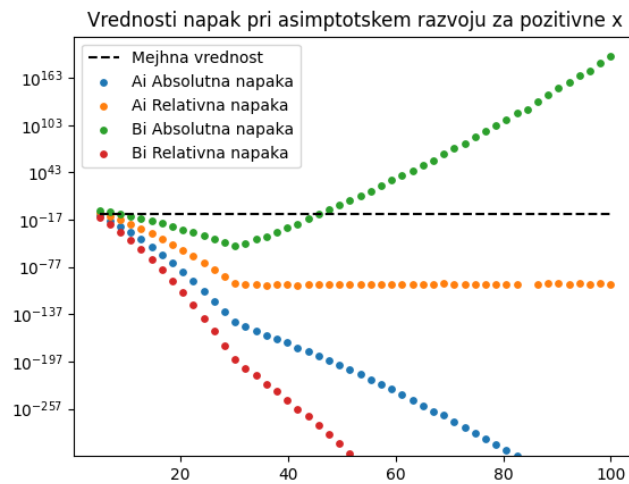


Slika 2: Vrednosti absolutne in relativne napake nekaterih točk med -100 in 5. Opazimo, da aproksimacija deluje dobro, dokler je x dovolj negativen, v okolici izhodišča pa napake močno narastejo.

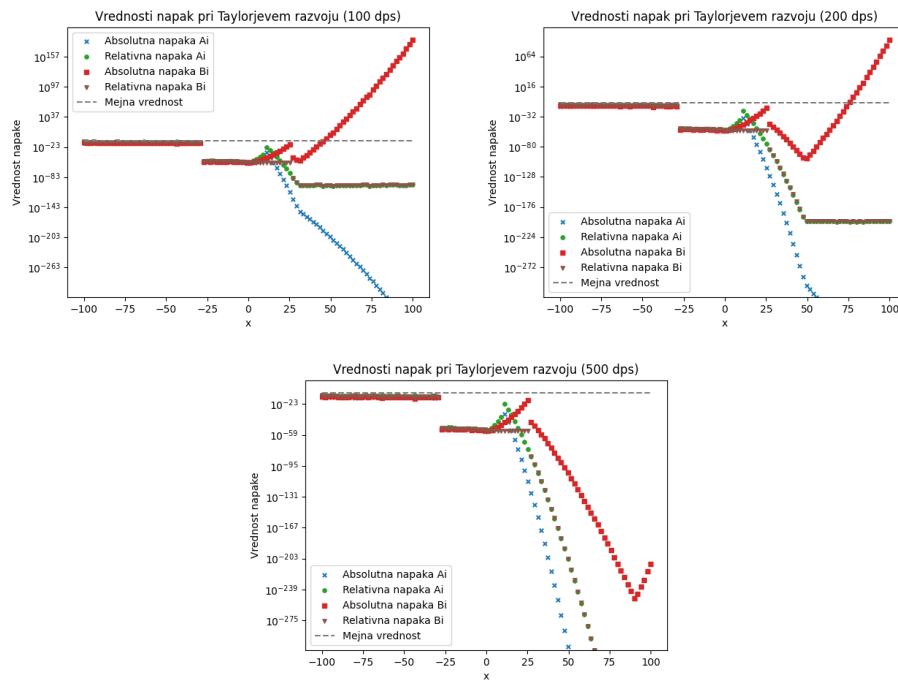
2 Zaključek

Najtežji del te naloge bi rekel, da se je bilo znova in znova izmakniti napakam pri relativno enostavnih korakih. Gledano celotno mislim, da sem uspel nalogo rešiti s precej malo teh napak, najbolj očitni pa sta bili večkratne napačne izpeljave rekurzivnih zvez in zgrešena absolutna vrednost pri primerjavi velikosti členov asimptotske vrste.

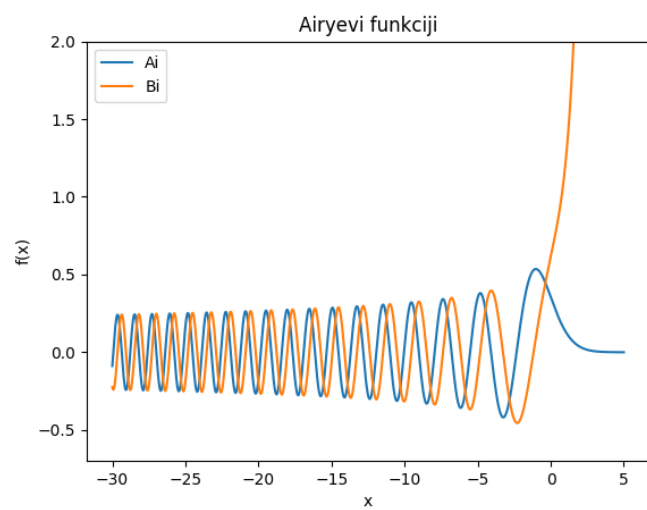
Še nekaj časovnih statistik. Nalogo sem pričel reševati v petek in ob uspehu, da sem imel, vsaj iz moje takratne perspektive, po 4 urah dela že polovico naloge narejene, kasneje sem ugotovil, da uspešen Taylorjev razvoj ni polovica naloge, sem optimistično in podzavestno zmanjšal nivo nujnosti dela in zato pišem tale zaključek v sredo popoldne v naglici pred odhodom na rojstnodnevno zabavo. Drugi del naloge, vsaj po moji naivni predpostavki, mi je vzel 6 ur intenzivnega dela, kar ne zveni hudo, vendar je bil poleg tega še čas razglabljanja o mojem in postopku drugih. Nadaljno uro sem porabil še za zapis tega poročila, tako da bi ocenil moj skupen čas porabljen za prvo nalogo na dobrih 12 ur dela.



Slika 3: Vrednosti absolutne in relativne napake nekaterih točk med 5 in 100. Aproximacija izgleda, da deluje dobro na dovoljšnji oddaljenosti od 0, dokler ne pridemo do preloma pri absolutni napaki Bi, za kar je kriva narava funkcije, ki raste preko vseh meja in pri izračunu numam dovolj mest, da bi absolutna napaka ostala majhna. Več o tem v delu o zlepkih.



Slika 4: Napake modeliranih funkcij in značilno koleno pri visokih vrednostih x za funkcijo Bi. Uporabljena natančnost pri računanju je bila 100, 200 in 500 decimalnih mest. Opazimo premikanje kolena pri različnih natančnostih.



Slika 5: Graf modeliranih Airyevih funkcij.