

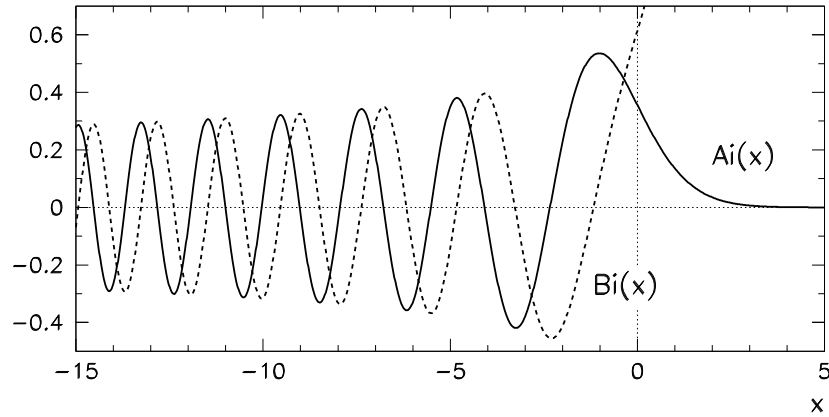
1. naloga: Airyjevi funkciji

Airyjevi funkciji Ai in Bi (slika 1) se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki [1]. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljeni v integralni obliki

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt) dt, \quad \text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-t^3/3+xt} + \sin(t^3/3 + xt) \right] dt.$$



Slika 1: Graf Airyevih funkcij Ai in Bi za realne argumente. Funkcija Ai je povsod omejena, medtem ko Bi divergira na pozitivni polosi. Ničle imata le na negativni polosi.

Za majhne x lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\text{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x), \quad \text{Bi}(x) = \sqrt{3} \left[\alpha f(x) + \beta g(x) \right],$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \text{Ai}(0) = \text{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\text{Ai}'(0) = \text{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \quad (z)_0 = 1.$$

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojem. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{z^s}, \quad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}, \quad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}},$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s! \Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(-\xi), \quad \text{Bi}(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(\xi),$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[\sin(\xi - \pi/4) Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) P(\xi) \right], \\ \text{Bi}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[-\sin(\xi - \pi/4) P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) Q(\xi) \right]. \end{aligned}$$

Naloga: Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od 10^{-10} . Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10} . Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z MATHEMATICO in/ali paketi MPMATH in DECIMAL v programskem jeziku PYTHON.

Dodatna naloga: Ničle funkcije Ai pogosto srečamo v matematični analizi pri določitvi intervalov ničel specialnih funkcij in ortogonalnih polinomov [2] ter v fiziki pri računu energijskih spektrov kvantno-mehanskih sistemov [3]. Poišči prvih sto ničel $\{a_s\}_{s=1}^{100}$ Airyjeve funkcije Ai in prvih sto ničel $\{b_s\}_{s=1}^{100}$ funkcije Bi pri $x < 0$ ter dobljene vrednosti primerjaj s formulama

$$a_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-1)}{8}\right), \quad b_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-3)}{8}\right), \quad s = 1, 2, \dots,$$

kjer ima funkcija f asimptotski razvoj [4]

$$f(z) \sim z^{2/3} \left(1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-4} + \frac{77125}{82944} z^{-6} - \frac{108056875}{6967296} z^{-8} + \dots \right).$$

Literatura

- [1] O. Vallée, M. Soares, *Airy functions and applications to physics*, Imperial College Press, London 2004.
- [2] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, AMS, Providence 1939.
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course in theoretical physics, Vol. 3: Quantum mechanics*, 3rd edition, Pergamon Press, Oxford 1991.
- [4] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, 10th edition, Dover Publications, Mineola 1972.