Presek dveh implicitno danih ploskev

Matematično modeliranje, 3. domaca naloga

Tilen Ožbot

Julij 2022

1 Opis naloge

Namen naloge je poiskati presečišče dveh ploskev v $\mathbb{R}^3$. Ploskev v $\mathbb{R}$ opišemo z enačbo $f(\mathbf{x}) = 0$, kjer f prestavlja funkcijo treh spremenljivk, $\mathbf{x}$ pa točko v $\mathbb{R}^3$ ($\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$). Torej, če imamo dve ploskvi, je presečišče ploskev množica rešitev nelinearnega sistema

$$f_1(\mathbf{x}) = 0,$$
$$f_2(\mathbf{x}) = 0.$$

Če sta f_1 in f_2 gladki funkciji, potem je presečišče ploskev krivulja K. Naloga je poiskati to krivuljo.

2 Rešitev

Ideja rešitve je, da iz točke, ki je blizu iskani krivulji, pridobimo točko, ki leži na krivulji. Iz dobljene točke se potem premaknemo za majhen korak v smeri krivulje in postopek ponavljamo.

Če na enačbi $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$ gledamo kot enačbi nivojnic funkcij f_1 in f_2, je iskana krivulja K presek teh nivojnic. Gradient funkcij bo v vsaki točki iskane krivulje K pravokoten na samo krivuljo K. Vektorski produkt gradientov bo torej tangenten na krivuljo K. Vektorski produkt nam kaze smer v katero se premikamo.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{(grad\, f_1(\mathbf{x})) \times (grad\, f_2(\mathbf{x}))}{||(grad\, f_1(\mathbf{x})) \times (grad\, f_2(\mathbf{x}))||}, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Predpostavimo, da imamo točko $\mathbf{x}_0$, ki leži na krivulji K (torej na presečišču nivojnic). Velja $f_1(\mathbf{x}_0) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}_0) = 0$. Iz točke se v smeri tangentnega vektorja na K z majhnim korakom $\mathbf{h}$ premaknemo v novo točko $\mathbf{y}$, ki pa ne nujno leži na krivulji K.

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \quad ||\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 1||$$

Če označimo $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, sledi da je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$ enačba ravnine (z neznanko $\mathbf{x}$), ki je blizu normalni ravnini na krivuljo K. Točko na krivulji ($\mathbf{x}$) dobimo kot rešitev sistema nelinearnih enačb:

$$f_1(\mathbf{x}) = 0$$
$$f_2(\mathbf{x}) = 0$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = 0$$

Sistem resimo z Newtonovo metodo, kjer kot začetni približek vzamemo $\mathbf{y}$. Postopek nato ponavljamo, dokler ne dobimo željeno število točk.

Da dobimo začetno točko, s katero začnemo algoritem, lahko iz približka točke izračunamo dejansko točko na krivulji, tako da rešimo omenjen sistem enačb.

3 Implementacija v Octave

Najprej definiramo vse potrebno za rešitev omenjenega sistema nelinearnih enačb z začetno aproksimacijo **X0**:

```
% Vektor, ki je tangenten na iskano krivuljo K
F = @(x) [cross(gradf1(x), gradf2(x)) / norm(cross(gradf1(x), gradf2(x)))];

% Funkcija za aproksimacijo naslednje tocke
y = @(x) x + h * F(x);

% Matrika, ki predstavlja sistem nelinearnih enacb
f = @(x) [f1(x); f2(x); F(y(X0))' * x - F(y(X0))' * y(X0)];

% Njeno Jacobijevo matriko, ki jo potrebujemo za Newtonovo metodo
Df = @(x) [gradf1(x) gradf2(x) F(y(X0))]';
```

Iz zacetne aproksimacije dobimo tocko na krivulji in jo shranimo v matriko

```
tocka_na_krivulji = newton(f, Df, X0, tol, maxit);
X = [tocka_na_krivulji];
```

Iteriramo n-krat, kjer je n zeljeno stevilo tock

```
for i = 1:n
    tocka = y(X(:, i));

    f = @(x) [f1(x); f2(x); F(y(tocka))' * x - F(y(tocka))' * y(tocka)];
    Df = @(x) [gradf1(x) gradf2(x) F(y(tocka))]';

    tocka_na_krivulji = newton(f, Df, tocka, tol, maxit);
    X = [X, tocka_na_krivulji];
endfor
```

4 Testi

Vrnjene točke vstavimo v enačbe nivojnic in preverimo ali so vrednosti znotraj tolerance.

```
K = presekPloskev(...)
for i = 1:columns(K)
    assert(f1(K(:,i)), 0, 1e-12);
    assert(f2(K(:,i)), 0, 1e-12);
endfor
```

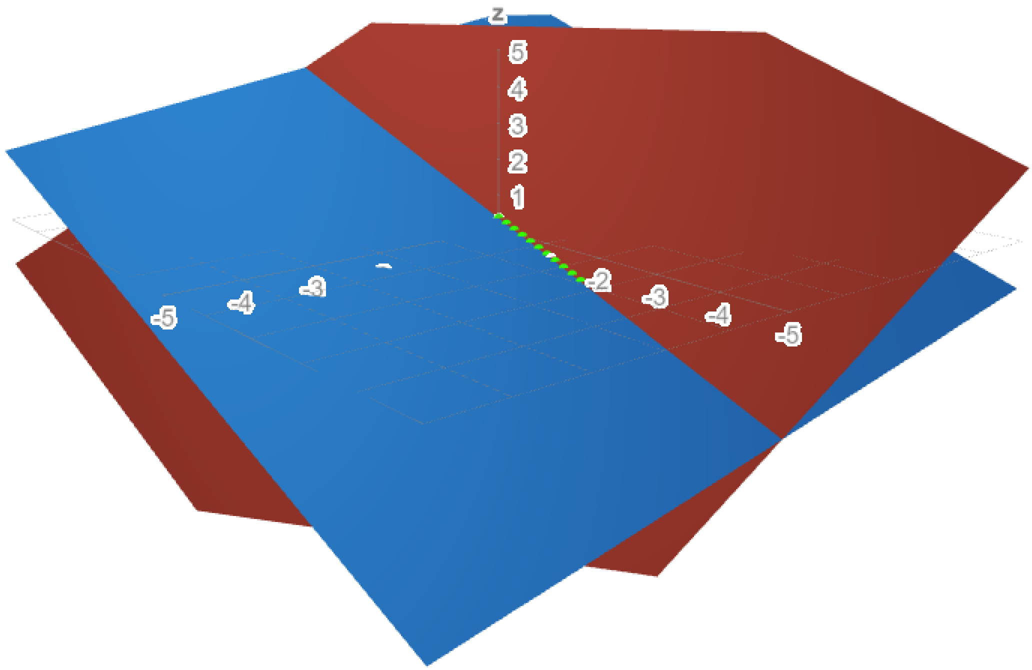
4.1 Test 1

Imamo dve ploskvi:

$$x + 2y - 3z + 1 = 0, \quad grad = [1, 2, -3]$$

$$3x + 2y - 3z + 1 = 0, \quad grad = [3, 2, -3]$$

Začetna aproksimacija točke: $[0; 0; 0.5]$
Korak: 0.1
Število vrnjenih točk: 11
Maksimalno število iteracij Newtonove metode: 50
Vrnjene točke prikažemo na grafu (zelena barva):



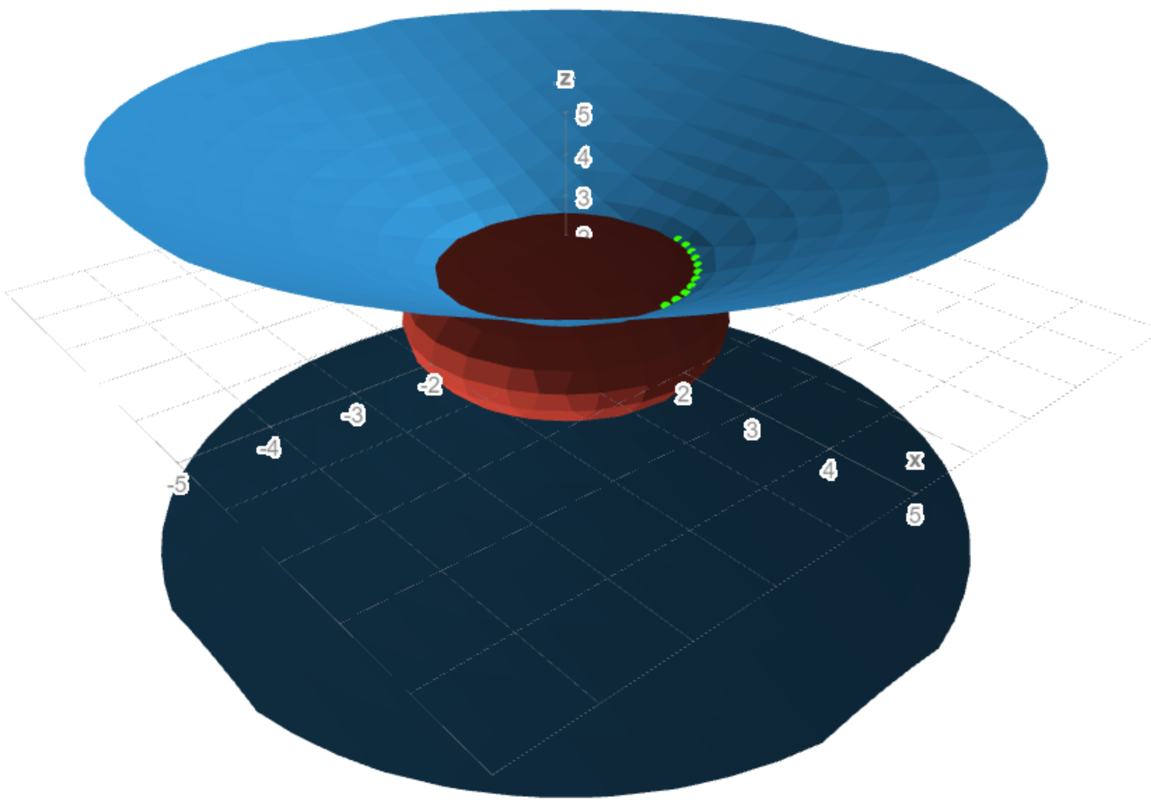
4.2 Test 2

Imamo dve ploskvi:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \quad grad = [2x, 2y, 2z]$$

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0, \quad grad = [2x, 2y, -2z]$$

Začetna aproksimacija točke: $[1.5; 0; 1.3]$
Korak: 0.1
Število vrnjenih točk: 11
Maksimalno število iteracij Newtonove metode: 50
Vrnjene točke prikažemo na grafu (zelena barva):



4.3 Test 3

Imamo dve ploskvi:

$$x + 5y - z^2 = 0, \quad grad = [1, 5, -2z]$$

$$x = 0, \quad grad = [1, 0, 0]$$

Začetna aproksimacija točke: $[0; 0; 0]$
Korak: 0.5
Število vrnjenih točk: 8
Maksimalno število iteracij Newtonove metode: 50
Vrnjene točke prikažemo na grafu (zelena barva):