Opis sprememb koncentracije CO2 v atmosferi

Matematično modeliranje, 1. domača naloga

Tilen Ožbot

April 2022

1 Opis problema

Zaradi pereče teme o globalnem segrevanju in emisij CO_2, želimo poiskati model, ki nam bo pomagal pri razumevanju pojava spremembe koncentracije CO_2 v ozračju v prihodnosti in sicer v letu 2050. Koncentracijo CO_2 lahko matematično opišemo kot funkcijo y = CO_2(t) v odvisnosti od časa t. Prav tako je model funkcija časa t ter parametrov $\mathbf{p} =$ [p$_1, p_2, ..., p_k$] :

$$\mathrm{CO_2} = F(p,t) = F(p_1, p_2, ..., p_k, t).$$

Iskani matematični model lahko sestavimo iz kvadratne funkcije ter periodičnega dela:

$$\mathrm{CO_2}(t) = p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + p_4 \sin(2\pi t) + p_5 \cos(2\pi t).$$

Kvadratni del opisuje naraščanje, periodnični del pa letne oscilacije.
Cilj je poiskati parametre p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, ki se bomo čim bolj prilagajali podatkom, ki jih pridobimo iz observatorija Mauna Loa na Havajih.

S pomočjo modela, bomo odgovorili na podana vprašanja:

1. Kolikšno povprečno letno koncentracijo napove model za leto 2050?
2. Kolikšna je amplituda letnega nihanja koncentracije?
3. Kolikšen letni prirastek koncetracije napove model za leto 2050?

2 Rešitev

2.1 Postopek reševanja

Imamo linearni model

$$F(\mathbf{p}, t) = p_1 f_1(t) + p_2 f_2(t) + ... + p_k f_k(t).$$

Cilj je, za dane podatke, poiskati parametre p_i z metodo najmanjših kvadratov. Parametre nam bo dala rešitev enačbe

$$A\vec{p} = \vec{y},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & ... & f_p(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & ... & f_p(t_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(t_m) & f_2(t_m) & ... & f_p(t_m) \end{bmatrix}, \vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ ... \\ p_p \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_p \end{bmatrix}.$$

x_i prestavlja neodvisno spremenljivko, y_i odvisno, p_i pa so v enačbi neznanke.

Enačba opisana zgoraj nima vedno rešitve. Rešitev ima samo, če je $\vec{v}$ v stolpičnem prostoru matrike A.

V primeru, ko $\vec{v}$ ni v stolpičnem prostoru matrike A, hočemo tako rešitev $\vec{p'}$, tako da je $||\vec{y} - A\vec{p'}|| \leq ||\vec{y} - A\vec{p}||$ za vse druge vektorje $\vec{p}$.
Rešitev lahko aproksimiramo z pomočjo metode najmanjših kvadratov, tako da rešimo enačbo

$$A^T A\vec{p} = A^T \vec{y}.$$

Posamezna komponenta v matriki A predstavlja vrednost enega člena linearnega modela pri določenem parametru t (npr. $f_3(t_2)$ dobimo tako, da izracunamo vrednost linearnega modela, s vsemi parametri 0, razen $p_3 = 1$, v vrednosti $t = t_2$).

2.2 Primer

Imamo funkcijo f(x) = $\frac{x^2}{x^2+1}$, ki jo hočemo aproksimirati s linearnim modelom drugega reda p(x) = $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ v točkah x_0 = -1, x_1 = 0 ter x_2 = 1.

Torej rešimo enačbo

$$A\vec{p} = \vec{y}.$$

$\vec{y}$ je vrednost funkcije v točkah -1, 0 in 1 ($[\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}]^T$). $\vec{p}$ je vektor neznank ($[a_0, a_1, a_2]^T$).

Matriko A zgradimo po postopku opisanem zgoraj.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resimo:

$$A^T A\vec{p} = A^T \vec{y}.$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2| & 1 \\ 0 & 2 & 0| & 0 \\ 2 & 0 & 2| & 1 \end{bmatrix}$$

Naredimo Gaussovo eliminacijo:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 1 & 0| & 0 \\ 0 & 0 & 1| & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}$$

2.3 Implementacija v octave

V octave-u rešitev poiščemo z uporabo operatorja \. Najprej zgradimo matriko A primerne velikosti in potem vrnemo vrednost A\y.

```
function p = parameters(x, y, model, k)
% function p = parameters(x, y, model, k) za dani linearni model
% izracuna optimalne parametre po metodi najmanjsih kvadratov,
% x in y sta stolpca vrednosti neodvisne in odvisne spremenljivke
% model je funkcija, ki opisuje model (y = model(p, t) vrne
% vrednosti y, ki jo predvideva model s parametri p v tocki t),
% k je stevilo parametrov v modelu

st_podatkov = size(x)(1);

% zgradimo matriko A
A = zeros(st_podatkov, k);

for i = 1:k
    % pripravimo vektor, ki ima enico samo na i-tem mestu
    % s tem izracunamo potrebne komponente matrike A
    v = zeros(k, 1);
    v(i) = 1;

    for j = 1:st_podatkov
        A(j, i) = model(v, x(j));
    endfor
endfor

p = A\y;
```

2.3.1 Primer

Pripravimo podatke:

```
octave:1> model = @(p, x) p(1) + p(2)*x + p(3)*(x.^2)
octave:2> x = [-1; 0; 1]
octave:3> y = [1/2; 0; 1/2]
```

Poklicemo funkcijo parameters:

```
octave:4> p = parameters(x, y, model, 3) % [0, 0, 1/2]^T
```

3 Model za podatke iz laboratorija

Podatki uporabljeni v tem razdelku so pridobljeni iz strani laboratorija Mauna Loa (https://gml.noaa.gov/obop/mlo/). Podatki so bili filtrirani, da smo se izognili neveljavnim vrednostim (npr. -999.99, kar pomeni, da podatka ni). Uporabljena so bila dnevna povprečja.

Za neodvisno spremenljivko vzamemo čas (merjen v letih), za odvisno pa koncentracijo CO_2.

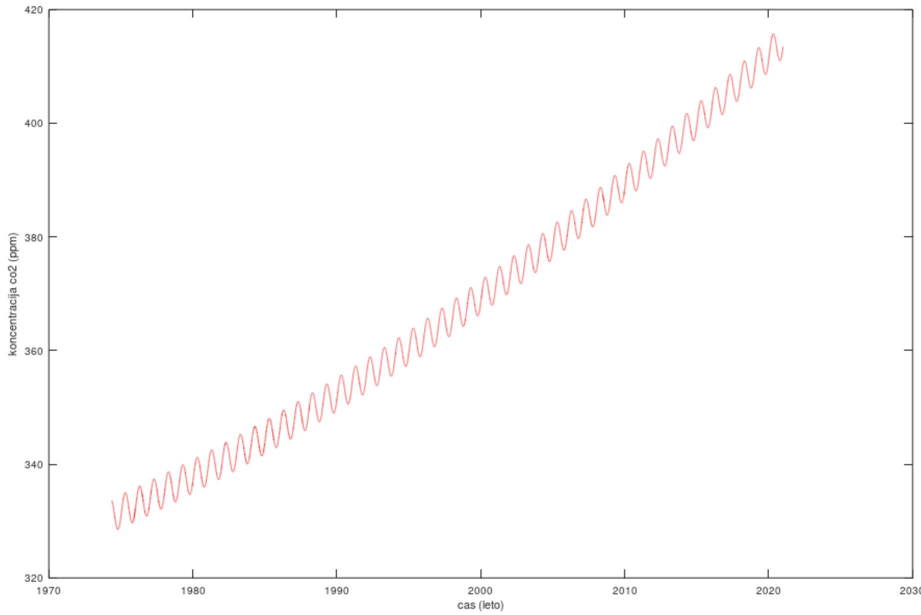
```
octave:1> x_cas = % preberemo cas iz datoteke
octave:2> y_co2 = % preberemo koncentracijo co2 iz datoteke
octave:3> model = @(p, x) p(1) + p(2) + p(3)*(x.^2)
                + p(4)*sin(2*pi.*x) + p(5)*cos(2*pi.*x)
octave:> p = parameters(x_cas, y_co2, model, 5)
```

V tem primeru dobimo vrednosti parametrov:

$$p = \begin{bmatrix} 5.1897e+04 \\ -5.3382e+01 \\ 1.3809e-02 \\ 2.8061e+00 \\ -9.2501e-01 \end{bmatrix}$$

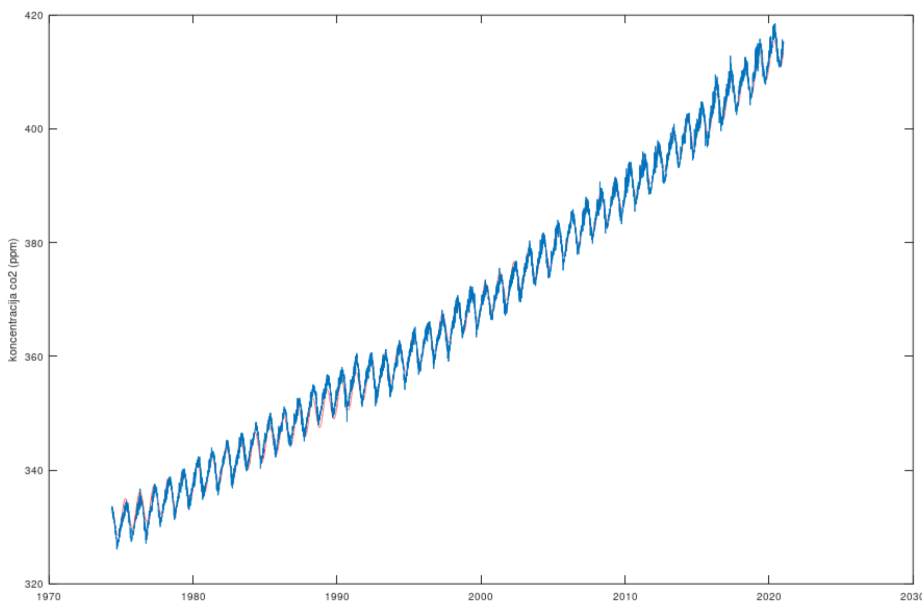
S parametri lahko izracunamo vrednosti nasega modela in narisemo graf.

```
octave:4> napovedi = model(p, x_casi)
octave:5> plot(x_cas, napovedi, "r")
octave:6> xlabel("cas␣(leto)")
octave:7> ylabel("koncentracija␣co2␣(ppm)")
```



Ce na graf narisemo se prvotne vrednosti, se vidi, da grafa skoraj sovpadata.

```
octave:8> hold on
octave:9> plot(x_cas, y_co2)
```



4 Napovedi

S dobljenimi parametri lahko odgovorimo na zastavljena vprašanja.

4.1 Koliksno povprečno letno koncentracijo napove model za leto 2050?

Vrednosti za leto 2050 pridobimo s ukazom ‘linspace‘.

```
octave:1> casi_za_napoved = linspace(2050,2051,365)
```

Vrednosti vstavimo v model.

```
octave:2> napovedi_za_leto_2050 = model(p, casi_za_napoved)
```

Dobimo povprečje dobljenih vrednosti, ki znaša 498.28 ppm.

```
octave:3> povprecje_za_2050 = sum(napovedi_za_leto_2050)/365
```

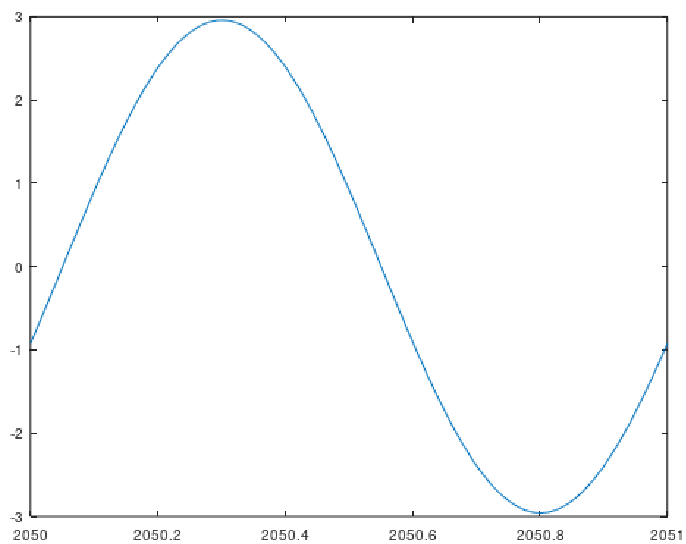
4.2 Kolikšna je amplituda letnega nihanja koncentracije?

Na amplitudo vplivata samo 4. in 5. clen modela, ostale clene postavimo na 0.

```
octave:4> p_za_amplitudo = p
octave:5> p_za_amplitudo(1:3) = 0
```

Za amplitudo vzamemo maksimum vrednosti, ki jih dobimo, če parametre vstavimo v model, saj je funkcija v obliki podobna sinusoidi. Amplituda znaša 2.95.

```
octave:6> v_amplituda = model(p_za_amplitudo, casi_za_napoved)
octave:7> max(v_amplituda)
octave:8> plot(casi_za_napoved, v_amplituda)
```



4.3 Kolikšen letni prirastek koncetracije napove model za leto 2050?

Prirastek pa je v večini odvisen od prestalih treh parametrov. 4. in 5. parameter postavimo na 0. Prirastek nato izračunamo tako, da vrednosti na koncu leta odštejemo vrednost na začetku leta 2050.

```
octave:9> p_prirastek = p
octave:10> p_prirastek(4:5) = 0
octave:11> vrednosti_prirastek = model(p_prirastek, casi_za_napoved)
octave:12> odgovor_prirastek = vrednosti_prirastek(365)
                              - vrednosti_prirastek(1)
```

Model napove letni prirastek 3.249 ppm.