Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Krepka liha barvanja grafov

Živa Artnak, Tilen Šlibar in Živa Kurež

December 2024

1 Uvod

Tema našega projekta so krepka liha barvanja grafov. Projektna naloga bo izvedena v programu SageMath, za osnovno literaturo pa bomo uporabili članek On strong odd colorings of graphs.

2 Osnovne definicije

Definicija 2.1. Graf je k-***obarvljiv***, če obstaja taka preslikava

$$c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$$

da velja $c(u) \neq c(v)$ za poljubni sosednji točki u in v grafa G. Tako preslikavo imenujemo ***barvanje*** oziroma k-***barvanje*** grafa. ***Kromatično število*** $\chi(G)$ grafa G je najmanjše število k, za katero je G k-obarvljiv.

Definicija 2.2. Barvanje grafa je ***liho barvanje***, če gre za pravilno barvanje, kjer se v sosedstvu vsakega vozlišča neka barva pojavi liho mnogo krat.

Definicija 2.3. ***Krepko liho barvanje*** preprostega grafa G je pravilno barvanje vozlišč G, tako da za vsako vozlišče v in vsako barvo c velja da se bodisi barva c pojavi liho mnogo krat v odprtem sosedstvu $N_G(v)$, bodisi noben sosed v ni obarvan s c.

Krepko liho kromatično število grafa G je najmanjše število barv, potrebnih za takšno barvanje. Označimo ga z $\chi_{so}(G)$.

Definicija 2.4. Naj bosta grafa $G = (V_G, E_G)$ in $H = (V_H, E_H)$. Množica vozlišč v vseh vrstah produktov, obravnavanih tukaj, je definirana kot:

$$V_G \times V_H := \{(g, h) \mid g \in V_G, h \in V_H\}$$

(standardni kartezični produkt ustreznih množic vozlišč).

Množice povezav so definirane na naslednji način:

(i) **Kartezični produkt**, $G \square H$:

$$E(G \square H) := \{(g, h)(g', h') \mid (g = g' \wedge hh' \in E_H) \vee (gg' \in E_G \wedge h = h'), g, g' \in V_G, h, h' \in V_H\}.$$

(ii) **Direktni produkt**, $G \times H$:

$$E(G \times H) := \{(g, h)(g', h') \mid gg' \in E_G \wedge hh' \in E_H, g, g' \in V_G, h, h' \in V_H\}.$$

(iii) **Krepki produkt**, $G \boxtimes H$:

$$E(G \boxtimes H) := \{(g, h)(g', h') \mid g' \in N[g] \wedge h' \in N[h], g, g' \in V_G, h, h' \in V_H, (g, h) \neq (g', h')\}.$$

3 Naloge in načrt dela

Naloge v tem projektu so naslednje:

1. Napisati postopek, ki določi $\chi_{so}(G)$ za dani graf G.
2. Določiti, kdaj ima enociklični graf krepko liho kromatično število enako 1, 2, 3 ali 4. Znano je, da je za enociklične grafe, ki niso C_5, krepko liho kromatično število omejeno z 4.
3. Generirati zunajplanarne grafe in preučiti, ali imajo kateri od njih krepko liho kromatično število večje od 7.
4. Poiskati grafe, za katere je vrednost $\chi_{so}(G)/\Delta^2(G)$ čim večja (pri čemer je $\Delta(G)$ maksimalna stopnja grafa).

5. Pokazati veljavnost neenačbe:
$$\chi_{so}(G)\chi_{so}(H) \leq \chi_{so}(G \circ H)$$
za $\circ \in \{\times, \Box, \boxtimes\}$ (tj. za direktni, kartezični in krepki produkt grafov) in najti čim več grafov, pri katerih velja enakost.

Prve točke smo se najprej lotili tako, da smo napisali CLP, ki poišče krepko liho kromatično število grafa. V naslednjih točkah želimo ta CLP implementirati v SageMath in ga uporabiti na manjših grafih, za večje grafe pa bi uporabili metaheuristični pristop.

4 Celoštevilski linearni program

- $x_{v,c} \in \{0,1\}$: $x_{v,c} = 1$, če vozlišče $v \in V$ barve c in $x_{v,c} = 0$ sicer.
- $y_{v,c} \in \{0,1\}$: $y_{v,c} = 1$, če je v odprti okolici $N_G(v)$ vozlišča v liho število vozlišč barve c in $y_{v,c} = 0$ sicer.
- $z_c \in \{0,1\}$: $z_c = 1$, če je barva c uporabljena.
- $k \in \mathbb{R}$: število uporabljenih barv.

$$\text{Min } k$$
$$\sum_{c=1}^{k} x_{v,c} = 1, \quad \forall v \in V.$$
$$y_{v,c} = \left(\sum_{u \in N_G(v)} x_{u,c} \right) \bmod 2, \quad \forall v \in V, \forall c \in \{1, \dots, k\}.$$
$$\sum_{u \in N_G(v)} x_{u,c} \leq |N_G(v)| \cdot y_{v,c}, \quad \forall v \in V, \forall c \in \{1, \dots, k\}.$$
$$\sum_{v \in V} x_{v,c} \geq z_c, \quad \forall c \in \{1, \dots, k\}.$$
$$k \geq \sum_{c=1}^{k} z_c.$$