Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Grafi z liho neodvisno množico velikosti 1

Avtorja:

Mia Nardin
Tilen Žabkar

Januar 2026

Kazalo

1 Uvod

V projektu preučujemo povezane grafe, za katere velja $\alpha_{od}(G) = 1$, kjer $\alpha_{od}(G)$ označuje velikost največje lihe neodvisne množice v grafu. Liha neodvisna množica S mora izpolnjevati naslednja dva pogoja:

1. S je neodvisna množica (elementi znotraj S niso povezani med seboj).
2. Za vsako vozlišče $v \in V \setminus S$ velja, da je $N(v) \cap S = \emptyset$ ali $|N(v) \cap S| \equiv 1 \pmod 2$.

Ti grafi tvorijo zanimiv in izrazito restriktiven razred, saj lahko S vsebuje natanko eno vozlišče.

Iz literature je znano, da:

1. Vsi taki grafi imajo premer največ 2.
2. Če velja $\alpha_{od}(G) = 1$, potem velja tudi $\chi_{so}(G + K_r) = 1$.
3. Če je graf claw-free, potem velja, da je $\alpha_{od}(G) = 1$ natanko tedaj, ko ima graf premer največ 2.

2 Opis problema

2.1 Cilj naloge

Cilj naloge je poiskati pogoste lastnosti grafov z lastnostjo $\alpha_{od}(G) = 1$ prek potrebnih in zadostnih pogojev. To pomeni, da smo iskali pogoje, ki pomenijo majhno število protiprimerov.

2.2 Generiranje grafov

Za $n \leqslant 9$ smo generirali vse neizomorfne grafe in obdržali le tiste z $\alpha_{od}(G) = 1$. Rezultati so zbrani v tabeli 1. Slike primerov najdenih grafov z lastnostjo $\alpha_{od}(G) = 1$ so zbrane v poglavju Priloga na strani 13.

n	Število grafov z $\alpha_{\mathrm{od}}(G) = 1$
1	1
2	1
3	2
4	4
5	11
6	43
7	266
8	3 042
9	69 645

Tabela 1: Število povezanih grafov z lastnostjo $\alpha_{\mathrm{od}}(G) = 1$ za majhne n.

Za $n \geqslant 10$ je popolni pregled neizvedljiv, saj je takih grafov preveč, da bi lahko $\alpha_{od}(G)$ preverili za vsakega posebej. Zato smo se lotili iskanja takih grafov na dva različna načina.

V prvem načinu smo v vsaki iteraciji naključno generirali nov graf, ga popravili, da ima premer $\leqslant 2$ in šele nato poračunali $\alpha_{od}(G)$. Popravil smo ga tako, da smo poiskali dve vozlišči, ki sta oddaljeni za premer grafa, in naključno izbrali dve vozlišči, ki sta na tej poti. Nato smo med tema dvema vozliščema dodali povezavo. To smo ponavljali, dokler ni bil premer manjši ali enak 2. Nato pa smo s spreminjanjem tega grafa, dobili nov graf. Za vsak n od 10 do 30 vključno smo izvedli 500 poskusov.

V drugem načinu smo samo v prvi iteraciji naključno generirali graf. Nato smo v vsaki iteraciji namesto nove neodvisne generacije grafa vzeli že obstoječ graf, izbrali dve naključni povezavi v grafu in ju zamenjali v naključno izbrani smeri. Ponovno smo preverili in popravili graf, če smo z zamenjavo povezav povečali premer. Za vsak n od 10 do 30 vključno, smo s tem pristopom izvedli 1000 poskusov. Na sliki **??** lahko vidimo prvi in zadnji graf iteracije pri tem postopku pri $n = 10$ in $n = 11$.

tukaj še slike! za $n = 10$ prvi graf je ``IamqYf`^g``, zadnji pa `I|knsLPr?` za $n = 11$ prvi graf je `JhfJrNtIqZ_`, zadnji pa `JTrtBQwov@?`

Skupno smo zbrali 94456 grafov z lastnostjo $\alpha_{od}(G) = 1$.

3 Metode in implementacija

3.1 Izračun $\alpha_{od}(G)$

Funkcijo `alpha_od(G)` smo implementirali s celoštevilskim lineranim programom (CLP), ki sledi definiciji lihe neodvisne množice. Funkcija vrne velikost največje lihe neodvisne množice v grafu G. Testiranje na majhnih grafih je potrdilo pravilnost implementacije:

- $\alpha_{od}(P_4) = 2$,
- $\alpha_{od}(C_4) = 1$,
- $\alpha_{od}(C_5) = 1$.

3.2 Izračun $\chi_{so}(G)$

Implementirali smo še CLP za določanje najmanjšega števila barv za krepko liho barvanje grafa G. Testiranje na majhnih grafih nam je vrnilo naslednje rezultate:

- $\chi_{so}(P_4) = 3$,
- $\chi_{so}(C_4) = 4$,
- $\chi_{so}(C_5) = 5$,
- $\chi_{so}(K_{3,4}) = 3$.

Rezultati izpolnjujejo neenačbo $\alpha_{od}(G) \cdot \chi_{so}(G) \geqslant |V|$.

3.3 Testiranje hipotez

Za vsako hipotezo $H(G)$ smo testirali:

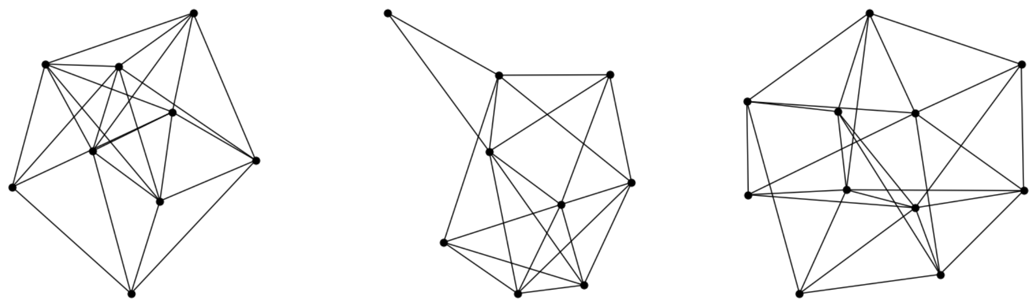
- nujnost: $\alpha_{od}(G) = 1 \Rightarrow H(G)$.
- zadostnost: $H(G) \Rightarrow \alpha_{od}(G) = 1$.

Teste nujnosti smo izvedeli na vseh 94456 grafih, teste zadostnosti pa smo zaradi časovne zahtevnosti izvedli le na grafih do $n \leqslant 8$.

4 Rezultati

H: Radij grafa je 1.

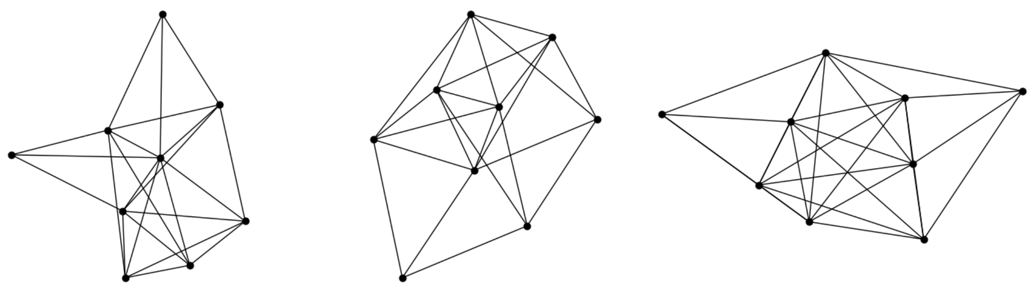
Radij grafa 1 pomeni, da imamo eno osrednje vozlišče, ki je povezano z vsemi ostalimi. Zanimalo nas je, če imajo grafi z $\alpha_{od}(G) = 1$ pogosto osrednje vozlišče. Pri testu nujnosti smo dobili 86019 protiprimerov. To pomeni, da ima le relativno majhen delež teh grafov vozlišče, ki je neposredno povezano z vsemi ostalimi. Rezultat je smiselen, saj pogoj $\alpha_{od}(G) = 1$ zagotavlja premer največ 2, ne vsiljuje pa obstoja izrazito centralnega vozlišča. Vidimo, da je radij 1 prej izjema kot tipična lasnost.



Slika 1: Protiprimer hipoteze: Radij grafa je 1.

H: Graf je regularen.

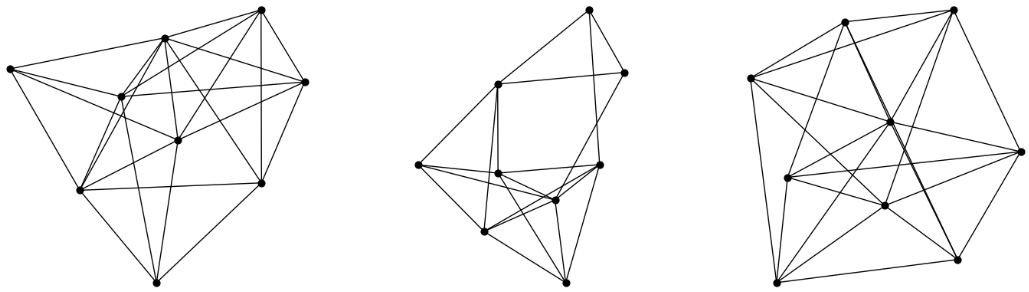
Graf je regularen, če imajo vsa vozlišča enako stopnjo. Pri testu nujnosti smo dobili 94416 protiprimerov. To kaže da pogoj $\alpha_{od}(G) = 1$ ne vsiljuje simetrije stopenj grafa. Razlog za to je v tem, da je paritetni pogoj v definiciji lihe neodvisne množice lokalen in občutljiv na strukturo sosedstev, ne pa na enakomerno porazdelitev stopenj po celotnem grafu. Regularnost torej ni tipična niti nujna lastnost grafov z $\alpha_{od}(G) = 1$. Velja pa, da večina regularnih grafov ima lastnost $\alpha_{od}(G) = 1$, namreč od 33 preverjenih grafov smo našli le 11 protiprimerov.



Slika 2: Protiprimer hipoteze: Graf je regularen.

H: Graf nima dvojčkov.

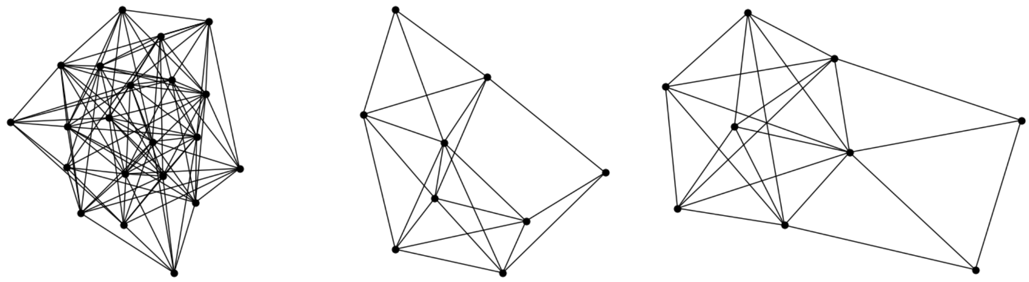
Graf nima dvojčkov (angl. is twin-free), če ne obstajata dve vozlišči z enakim sosedstvom. Pri testu nujnosti smo dobili 13406 protiprimerov. Odsotnost dvojčkov namreč pomeni, da ob povečanju lihe neodvisne množice hitro kršimo pogoj lihosti. Torej lahko trdimo, da večina grafov z $\alpha_{od}(G) = 1$ nima dvojčkov.



Slika 3: Protiprimer hipoteze: Graf nima dvojčkov.

H: Graf je claw-free.

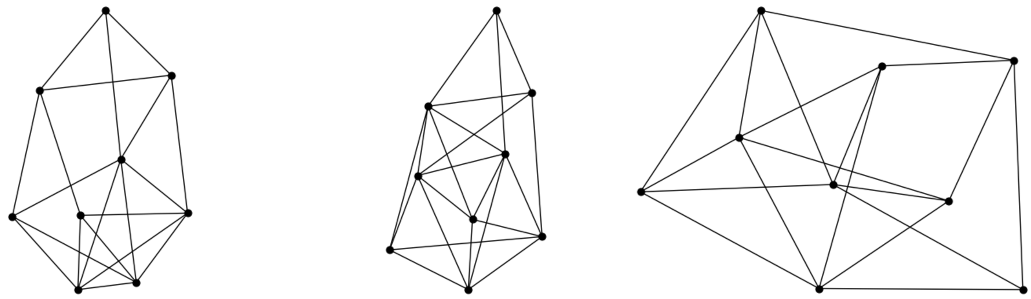
Graf je claw-free, če ne vsebuje $K_{1,3}$ kot induciran podgraf. Pri testu nujnosti smo dobili 91595 protiprimerov. To pomeni, da grafi z $\alpha_{od}(G) = 1$ zelo pogosto niso claw-free. Prisotnost claw strukture pomeni, da ima neko vozlišče tri med seboj nepovezane sosede, kar lokalno omogoča večjo razpršenost sosedstva. Rezultat potrjuje, da pogoj $\alpha_{od}(G) = 1$ ne omejuje lokalnih struktur v tolikšni meri, da bi izključeval claw-free grafe, temveč dopušča precejšnjo strukturno raznolikost grafov. Pri testu zadostnosti smo iz 1145 grafov dobili 564 protiprimerov, kar kaže na to, da claw-free ni dovolj strog pogoj, da bi za take grafe veljalo $\alpha_{od}(G) = 1$.



Slika 4: Protiprimer hipoteze: Graf je claw-free.

H: Graf je triangle-free.

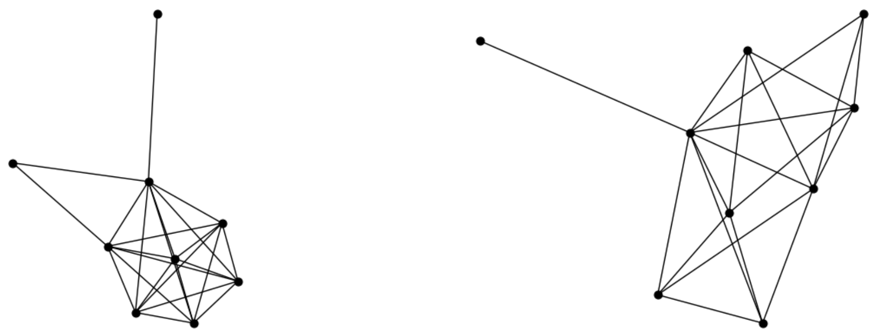
Graf G je triangle-free, če ne vsebuje trikotnikov, tj. podgrafov izomorfnih K_3. Pri testu nujnosti smo dobili 94442 protiprimerov, kar pomeni, da odsotnost trikotnikov ni nujna lastnost tega razreda grafov. Trikotniki so lokalni kazalnik gostote in močne povezanosti med vozlišči, vendar njihova prisotnost sama po sebi še ne omogoča konstrukcije večje lihe neodvisne množice.



Slika 5: Protiprimer hipoteze: Graf je triangle-free.

H: $\lambda(G) \geqslant 2$

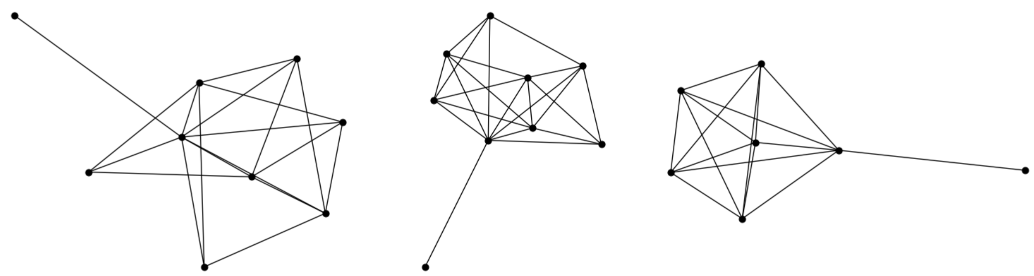
Povezanost grafa G, označena z $\lambda(G)$, je najmanjše število povezav, katerih odstranitev graf razdeli na več komponent. Če velja $\lambda(G) \geqslant 2$, potem graf nima mostov, kar pomeni, da odstranitev katerekoli povezave ne prekine povezanosti grafa. Pri testu nujnosti smo našli 313 protiprimerov. Vsi ti protiprimeri se pojavijo pri majhnih velikostih grafa, medtem ko za $n \geqslant 10$ ni bilo nobenega protiprimera z $\lambda(G) = 1$. Tukaj je znova pomembno omeniti, da lahko takih grafov zaradi konstrukcije nismo našli pri večjih n. Če ima graf most, ta povezava ločuje graf na dva dela, ki sta povezana le prek ene povezave. Takšna konstrukcija običajno omogoča konstrukcijo lihe neodvisne množice večje od 1. Zato bi tudi pričakovali, da grafi z $\alpha_{od}(G) = 1$ praviloma nimajo mostov. Vendar rezultati pokažejo, da pri manjših grafih obstajajo izjeme, kjer kljub prisotnosti mostu globalna struktura grafa še vedno prepreči obstoj večje lihe neodvisne množice.



Slika 6: Protiprimer hipoteze: $\lambda(G) \geqslant 2$

H: $\kappa(G) \geqslant 2$

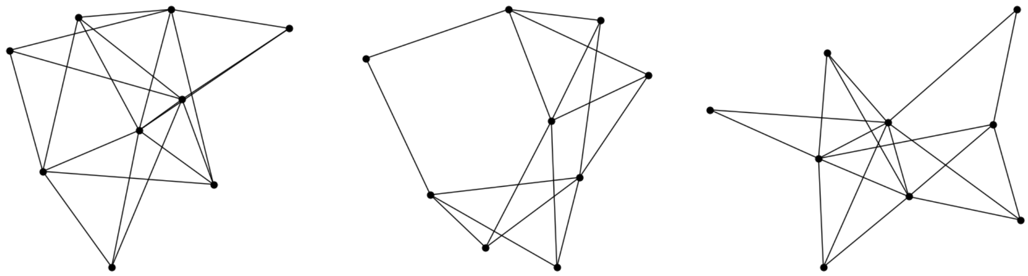
Povezanost vozlišč grafa $\kappa(G)$ je najmanjše število vozlišč, katerih odstranitev graf razdeli na več komponent. Pri testu nujnosti dobili 434 protiprimerov. Majhno število protiprimerov kaže, da je ta lastnost za grafe z $\alpha_{od}(G) = 1$ zelo tipična, čeprav ni strogo nujna. Vozliščna povezanost $\kappa(G) \geqslant 2$ pomeni, da graf nima artikulacijskih vozlišč, kar nakazuje na močno globalno povezanost. Ker imajo grafi z $\alpha_{od}(G) = 1$ majhen premer in so praviloma gosti, je pričakovano, da odstranitev enega samega vozlišča pogosto ne razbije grafa. Kljub temu pri manjših ali specifično strukturiranih grafih obstajajo izjeme, kjer lokalna struktura še vedno prepreči obstoj večje lihe neodvisne množice, čeprav graf vsebuje artikulacijsko vozlišče.



Slika 7: Protiprimer hipoteze: $\kappa(G) \geqslant 2$

H: $\alpha(G) \leqslant \frac{n}{2}$

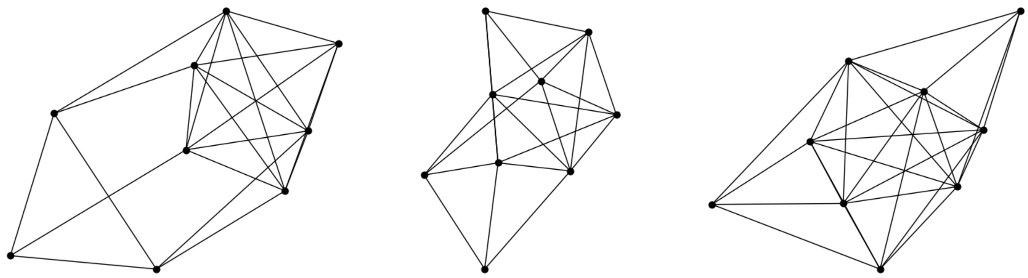
Z $\alpha(G)$ je označena velikost največje neodvsine množice vozlišč. Pri testu nujnosti smo dobili le 243 protiprimerov. To kaže, da je ta pogoj v veliki večini primerov izpolnjen in zato dobro opisuje tipično strukturo grafov z $\alpha_{od}(G) = 1$ čeprav ni strogo nujen. Majhno število protiprimerov je skladno z dejstvom, da so ti grafi praviloma gosti in imajo majhen premer, kar omejuje velikost neodvisnih množic. Kljub temu obstajajo izjeme, kjer globalna gostota grafa še vedno dopušča relativno veliko neodvisno množico, ki pa zaradi paritetnega pogoja ne vodi do večje lihe neodvisne množice. Rezultat tako ponovno poudarja razliko med lastnostima $\alpha(G)$ in $\alpha_{od}(G)$.



Slika 8: Protiprimer hipoteze: $\alpha(G) \leqslant \frac{n}{2}$

H: $\alpha(G) = 1$

Pri tej hipotezi, smo pri testu nujnosti dobili 94447 protiprimerov, kar pomeni, da ta pogoj v veliki večini primerov ni izpolnjen. To jasno pokaže, da lastnost $\alpha_{od}(G) = 1$ nikakor ne implicira trivialne neodvisne strukture grafa. Čeprav gre pogosto za zelo goste grafe z majhnim premerom, ti lahko še vedno vsebujejo večje neodvisne množice, ki pa zaradi paritetnega pogoja ne ustrezajo definiciji lihe neodvisne množice.



Slika 9: Protiprimer hipoteze: $\alpha(G) = 1$

H: $\alpha(G^2) = 1$

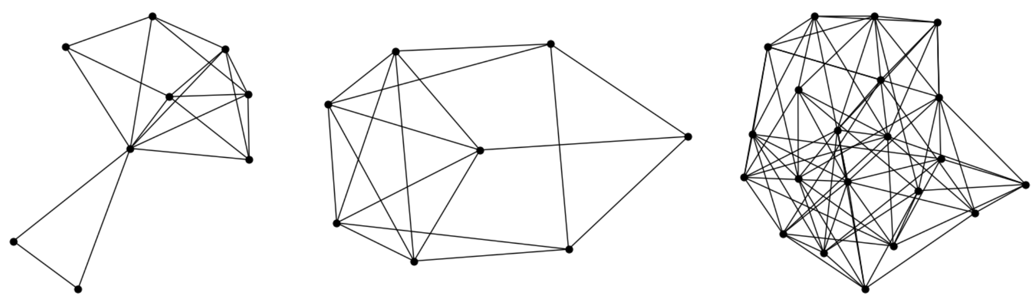
Kvadrat grafa G^2 je graf na isti množici vozlišč kot G, kjer sta dve vozlišči povezani, če je njuna razdalja v G največ 2. Pogoj $\alpha(G^2) = 1$ pomeni, da v G^2 ne obstajata dve nepovezani vozlišči, torej je G^2 poln graf. Ekvivalento to pomeni, da ima graf G premer največ 2. Pri testiranju nujnosti smo dobili le en protiprimer in to je graf z enim samim vozliščem, pri katerem je kvadrat grafa enak samemu sebi.

H: $\chi_{so}(G) = n$

$\chi_{so}(G)$ je najmanjše število barv, s katerimi lahko graf G pobarvamo tako, da sosednja vozlišča nimajo iste barve in da za vsako vozlišče v in vsako uporabljeno barvo velja, da se ta barva v sosedstvu vozlišča v pojavi liho mnogokrat ali pa se sploh ne. Naš pogoj tako zahteva, da mora vsako vozlišče imeti svojo barvo. Zaradi časovne zahtevnosti CLP, smo testiranje za nujnost in zadostnost izvedeli le na grafih do 6 vozlišč. V obeh primerih nismo dobili nobenega protiprimera. Torej za grafe z $n \leqslant 6$ velja $\alpha_{od}(G) = 1$ natanko tedaj, ko $\chi_{so}(G) = n$. Vemo, da velja neenačba $\alpha_{od}(G) \cdot \chi_{so}(G) \geqslant |V|$, kar pa nam pove, da če je $\alpha_{od}(G) = 1$, potem nujno velja $\chi_{so}(G) \geqslant |V|$. Ker pa je $|V|$ očitno zgornja meja za $\chi_{so}(G)$ sledi $\chi_{so}(G) = |V|$.

H: Povprečna stopnja grafa je vsaj $0{,}7 \cdot n$.

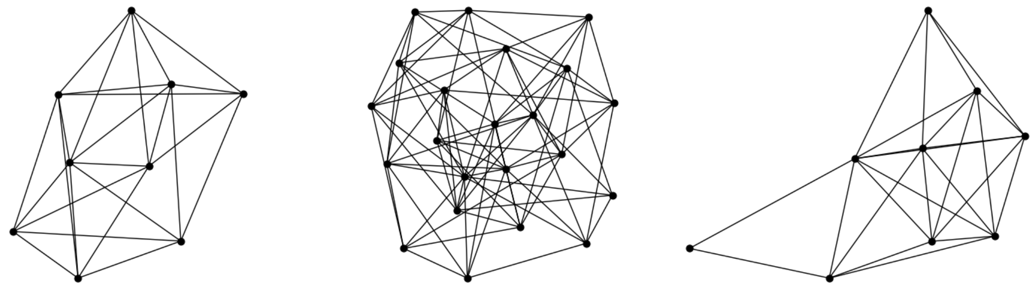
Povprečna stopnja grafa je $\overline{d}(G) = \frac{2|E|}{|V|}$. Pri testu nujnosti smo dobili 94177 protiprimerov. Večina grafov je torej dovolj povezana, da ohranijo majhen premer in preprečijo obstoj večje lihe neodvisne množice, hkrati pa imajo nižjo povprečno stopnjo, kot bi zahtevala meja $0,7 \cdot n$.



Slika 10: Protiprimer hipoteze: Povprečna stopnja grafa je vsaj $0,7 \cdot n$.

H: Gostota grafa je med 0,4 in 0,6.

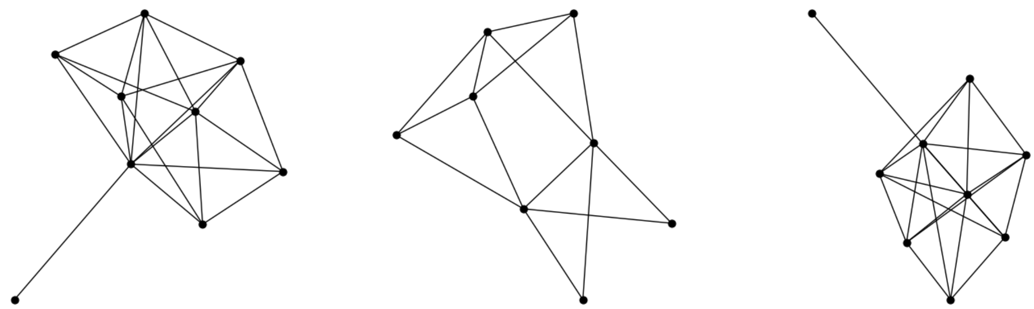
Gostota grafa je definirana kot $2|E| \,/\, n(n-1)$.Pri hipotezi, da ima graf z lastnostjo $\alpha_{od}(G) = 1$ gostoto med 0,4 in 0,6, smo pri testu nujnosti dobili 37632 protiprimerov. To pomeni, da tak interval gostote ni nujna lastnost tega razreda grafov, je pa zelo pogost. Čeprav so grafi z $\alpha_{od}(G) = 1$ praviloma razmeroma gosti in imajo majhen premer, se njihova gostota lahko precej razlikuje in ni omejena na ozek interval. Obstajajo tako grafi, ki so bistveno redkejši, kot tudi grafi, ki so skoraj polni, pa kljub temu izpolnjujejo pogoj $\alpha_{od}(G) = 1$. Rezultat kaže, da lastnost $\alpha_{od}(G) = 1$ določa predvsem strukturne in paritetne omejitve grafa, ne pa njegove natančne gostote.



Slika 11: Protiprimer hipoteze: Gostota grafa je med 0,4 in 0,6.

H: Graf ima Hamiltonov cikel.

Graf G ima Hamiltonov cikel, če vsebuje cikel, ki obišče vsako vozlišče natanko enkrat. Pri testu nujnosti smo našli 961 protiprimerov. Odsotnost protiprimerov za večje grafe je lahko posledica konstrukcije. Hamiltonskost zahteva zelo močno globalno povezanost grafa. Ker smo že pokazali, da imajo grafi z $\alpha_{od}(G) = 1$ premer največ 2 in so praviloma zelo gosti, je pričakovano, da večina takih grafov vsebuje Hamiltonov cikel. Gostota in majhne razdalje namreč ustvarijo veliko alternativnih poti med vozlišči, kar olajša obstoj cikla, ki obišče vsa vozlišča. Kljub temu Hamiltonskost ni nujna lastnost, saj obstajajo grafi, ki so sicer dovolj gosti in imajo majhen premer, vendar zaradi lokalnih strukturnih ovir ne vsebujej Hamiltonovega cikla. Takšni primeri se pojavijo predvsem pri manjših grafih.



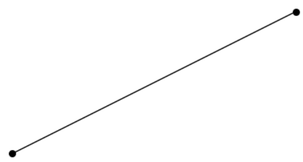
Slika 12: Protiprimer hipoteze: Graf ima Hamiltonov cikel.

Zanimivo je, da se lastnost, da je graf Eulerjev, pri testu nujnosti obnaša bistveno slabše, saj smo našli kar 93853 protiprimerov. Graf je Eulerjev, če vsebuje Eulerjev cikel, torej zaprt sprehod, ki vsako povezavo obišče natanko enkrat. Za povezan graf je to ekvivalentno pogoju, da imajo vsa vozlišča sodo stopnjo. Razlog za veliko večje število protiprimerov je v naravi obeh lastnosti. Hamiltonskost je globalna lastnost, ki zahteva obstoj cikla skozi vsa vozlišča, kar je povezano z lastnostmi kot je gostota grafa in majhen premer. Eulerjevost pa je povsem lokalna paritetna lastnost, saj je odvisna izključno od sode stopnje vozlišč. Graf je lahko zelo gost in močno povezan, pa kljub temu ni Eulerjev, če ima le nekaj vozlišč lihe stopnje.

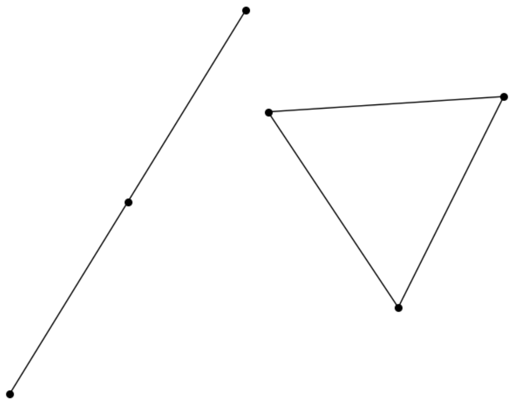
5 Zaključek

V nalogi smo preučili nekaj strukturnih lastnosti grafov z lastnostjo $\alpha_{od}(G) = 1$ ter testirali vrsto hipotez. Rezultati kažejo, da gre za razred grafov z zelo omejenimi globalnimi lastnostmi, kot sta majhen premer in praviloma visoka povezanost, vendar hkrati z veliko lokalno in stopenjsko raznolikostjo. Večina klasičnih lastnosti, kot so regularnost, odsotnost trikotnikov ali claws, ter natančno določena gostota, se je izkazala za ne nujne. Po drugi strani majhno število protiprimerov pri hipotezah o povezljivosti, odsotnosti dvojčkov in velikosti neodvisne množice potrjuje, da te lastnosti dobro opisujejo tipično strukturo grafov z $\alpha_{od}(G) = 1$.

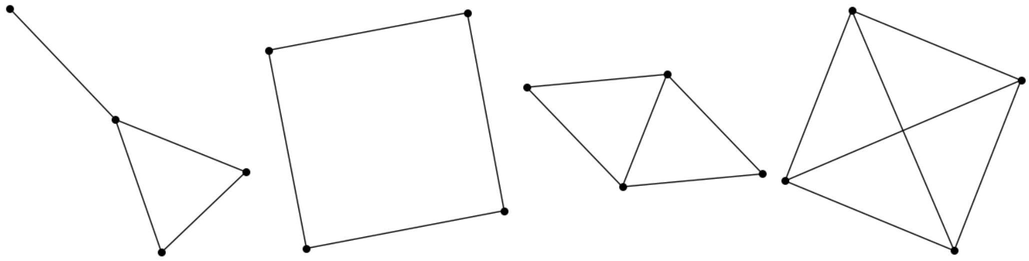
6 Priloga



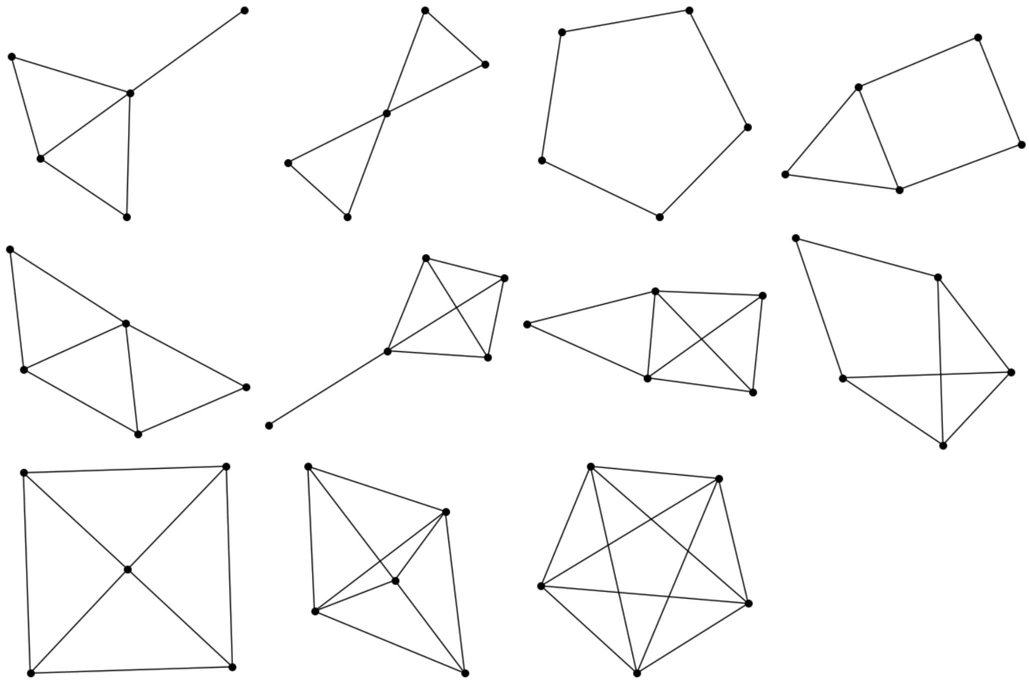
Slika 13: Primer grafa za n = 2.



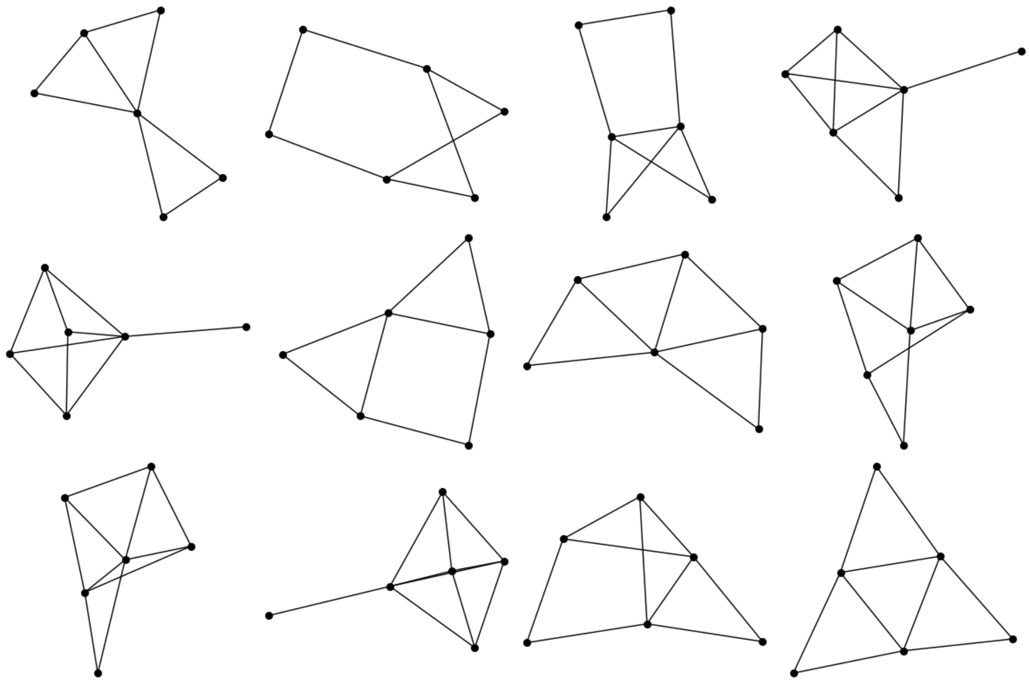
Slika 14: Primera grafov za n = 3.



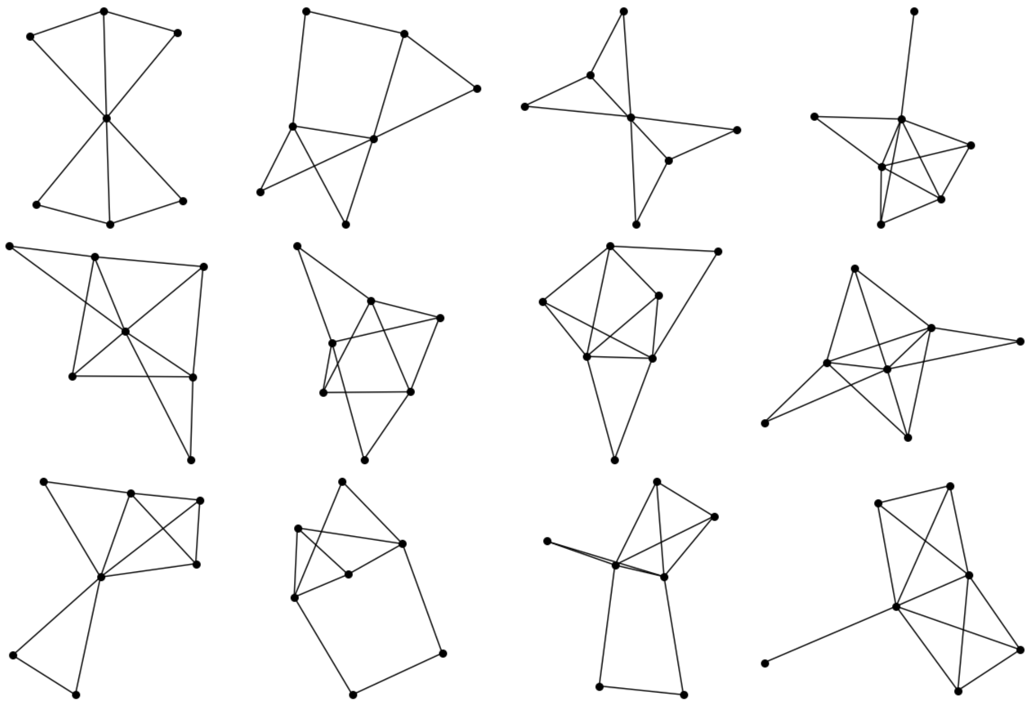
Slika 15: Primeri grafov za n = 4.



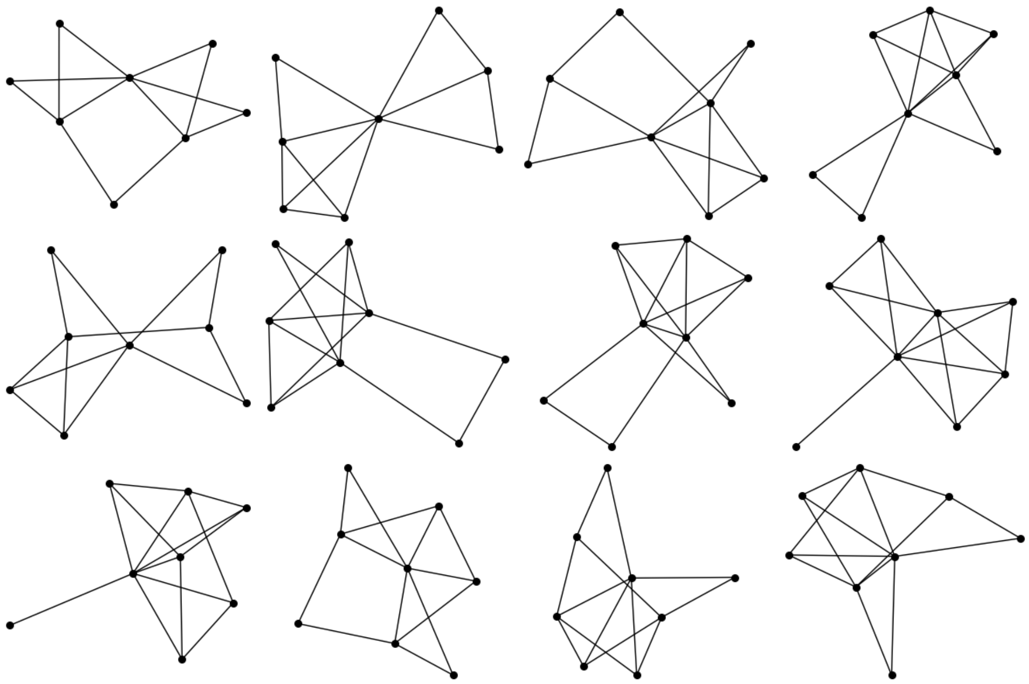
Slika 16: Primeri grafov za n = 5.



Slika 17: Primeri grafov za n = 6.



Slika 18: Primeri grafov za n = 7.



Slika 19: Primeri grafov za n = 8.