

# Grafi z liho neodvisno množico velikosti 1

Mia Nardin, Tilen Žabkar

6. november 2025

## 1 Uvod

Naj bo  $G = (V, E)$  graf, kjer je  $V$  množica vozlišč in  $E$  množica povezav med njimi. Liho neodvisna množica  $S \subseteq V$  je posebna vrsta neodvisne množice, kar pomeni, da nobeni dve vozlišči iz  $S$  nista neposredno povezani. Poleg te lastnosti pa mora množica  $S$  izpolnjevati še dodatni pogoj, da za vsako vozlišče  $v$ , ki ne pripada množici  $S$  (vsak  $v \in V \setminus S$ ), mora veljati, da nima nobenega soseda v množici  $S$  ( $N(v) \cap S = \emptyset$ ), ali ima liho število sosedov v  $S$  ( $|N(v) \cap S| \equiv 1$ ). Tukaj  $N(v)$  označuje odprto množico vseh sosednjih vozlišč  $v$ . Največja močna moč takšne množice v grafu  $G$  se imenuje liho neodvisno število grafa in jo označimo z  $\alpha_{od}(G)$ .

Barvanje grafa je močno liho, če velja, da se med vsemi sosednjimi vozlišči, vsakega vozlišča vsaka barva pojavi liho mnogokrat. Močno liho kromatično število  $\chi_{so}(G)$  je najmanjše število barv, ki omogoča liho barvanje grafa  $G$ . Zveza ki povezuje  $\alpha_{od}(G)$  in  $\chi_{so}(G)$  je

$$\alpha_{od}(G) \cdot \chi_{so}(G) \geq |G|.$$

## 2 Opredelitev problema

V nadaljevanju obravnavamo le grafe za katere velja  $\alpha_{od}(G) = 1$ . Primeri takih grafov so:

- $K_2$ ,  $K_3$  in na splošno vsi  $K_n$  (polni grafi),
- $P_3$  (pot s tremi vozlišči),
- $C_4$  (cikel s štirimi vozlišči),  $C_5$  (cikle s petimi vozlišči).

Očitno se opazi, da mora imeti vsak tak graf premer največ 2, kar pomeni, da je razdalja med katerimkoli parom vozlišč največ 2. Povezana pogoja sta še:

- Če velja  $\alpha_{od}(G) = 1$ , potem velja tudi  $\chi_{so}(G + K_r) = 1$ .
- Če je graf claw-free, potem velja, da je  $\alpha_{od}(G) = 1$  natanko tedaj, ko ima graf premer največ 2.

### 3 Načrt dela