

Grafi z liho neodvisno množico velikosti 1

Mia Nardin, Tilen Žabkar

6. november 2025

1 Uvod

Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer je V množica vozlišč in E množica povezav med njimi. Liho neodvisna množica $S \subseteq V$ je posebna vrsta neodvisne množice, kar pomeni, da nobeni dve vozlišči iz S nista neposredno povezani. Poleg te lastnosti pa mora množica S izpolnjevati še dodatni pogoj, da za vsako vozlišče v , ki ne pripada množici S (vsak $v \in V \setminus S$), mora veljati, da nima nobenega sosedu v množici S ($N(v) \cap S = \emptyset$), ali ima liho število sosedov v S ($|N(v) \cap S| \equiv 1$). Tukaj $N(v)$ označuje odprto množico vseh sosednjih vozlišč v . Največja možna moč takšne množice v grafu G se imenuje liho neodvisno število grafa in jo označimo z $\alpha_{od}(G)$.

Barvanje grafa je močno liho, če velja, da se med vsemi sosednjimi vozlišči, vsakega vozlišča vsaka barva pojavi liho mnogokrat. Močno liho kromatično število $\chi_{so}(G)$ je najmanjše število barv, ki omogoča liho barvanje grafa G . Zveza ki povezuje $\alpha_{od}(G)$ in $\chi_{so}(G)$ je

$$\alpha_{od}(G) \cdot \chi_{so}(G) \geq |G|.$$

2 Opredelitev problema

V nadaljevanju obravnavamo le grafe za katere velja $\alpha_{od}(G) = 1$. Primeri takih grafov so:

- K_2 , K_3 in na splošno vsi K_n (polni grafi),
- P_3 (pot s tremi vozlišči),
- C_4 (cikel s štirimi vozlišči), C_5 (cikle s petimi vozlišči).

Očitno se opazi, da mora imeti vsak tak graf premer največ 2, kar pomeni, da je razdalja med katerinkoli parom vozlišč največ 2. Povezana pogoja sta še:

- Če velja $\alpha_{od}(G) = 1$, potem velja tudi $\chi_{so}(G + K_r) = 1$.
- Če je graf claw-free, potem velja, da je $\alpha_{od}(G) = 1$ natanko tedaj, ko ima graf premer največ 2.

3 Načrt dela