

# Kalman

tilian bourachot

April 2025

## 1 Introduction

Dans cette partie, nous introduisons un **filtre de Kalman** afin d'estimer de manière dynamique la valeur sous-jacente d'un stablecoin à partir de ses prix observés. Ce type de filtre est particulièrement utile pour lisser les séries temporelles bruitées et suivre l'évolution latente d'un actif en temps réel.

Pour ajuster les paramètres du modèle de Kalman, nous nous appuyons sur un événement marquant de l'histoire des stablecoins : le **crash du TerraUSD (UST)** et de son token de stabilisation associé, **Luna**, survenu en mai 2022. Le TerraUSD était un stablecoin algorithmique censé maintenir une parité à 1 dollar en régulant la quantité de Luna en circulation.

Ce mécanisme n'a cependant pas résisté à une crise de liquidité massive, qui a provoqué une perte de confiance généralisée. En quelques jours, la valeur de l'UST s'est effondrée, perdant totalement sa parité, et Luna a connu une chute de plus de 99 %.

Nous exploitons cet événement extrême pour tester et calibrer notre filtre de Kalman. L'objectif est de mieux comprendre comment un tel outil réagit dans un contexte de crise et s'il peut permettre de détecter ou suivre efficacement une perte de stabilité.



Figure 1: Filtre de Kalman appliqué au LUNA

## 2 Formulation du filtre de Kalman unidimensionnel

Le filtre de Kalman est un algorithme récursif permettant d'estimer l'état latent d'un système dynamique en utilisant une série d'observations bruitées. Dans

notre cas, nous modélisons l'évolution du prix vrai d'un stablecoin comme un processus latent  $x_t$ , que nous cherchons à estimer à partir d'observations bruitées  $y_t$ .

Le modèle utilisé ici est un filtre de Kalman **linéaire unidimensionnel**, régi par les deux équations suivantes :

- **Équation d'état (modèle de transition) :**

$$x_t = Fx_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim \mathcal{N}(0, Q)$$

- **Équation d'observation :**

$$y_t = Hx_t + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, R)$$

où :

- $x_t$  est l'état latent (prix réel estimé à l'instant  $t$ ) ;
- $y_t$  est l'observation (prix mesuré sur le marché) ;
- $F$  est le facteur de transition d'état (ici fixé à 1) ;
- $H$  est le facteur d'observation (également fixé à 1) ;
- $Q$  est la variance du bruit de processus ;
- $R$  est la variance du bruit d'observation.

Le filtre s'applique récursivement selon deux étapes principales :

1. **Prédiction :**

$$\begin{aligned}\hat{x}_t^- &= F\hat{x}_{t-1} \\ P_t^- &= FP_{t-1}F^\top + Q\end{aligned}$$

2. **Mise à jour (correction) :**

$$\begin{aligned}K_t &= \frac{P_t^- H^\top}{HP_t^- H^\top + R} \\ \hat{x}_t &= \hat{x}_t^- + K_t(y_t - H\hat{x}_t^-) \\ P_t &= (1 - K_t H)P_t^-\end{aligned}$$

où :

- $\hat{x}_t^-$  est la prédiction de l'état avant observation ;
- $\hat{x}_t$  est l'estimation corrigée ;
- $P_t$  est la variance estimée de l'état ;
- $K_t$  est le **gain de Kalman**, déterminant l'influence relative de l'observation.

**Dans notre cas**, le système est unidimensionnel : toutes les variables ( $x_t, y_t, P_t, K_t$ ) sont des scalaires. Cela simplifie considérablement les calculs, car les transposées et multiplications matricielles deviennent de simples produits, ce qui rend l'implémentation particulièrement efficace et intuitive.



Figure 2: Filtre de Kalman appliqué au LUNA

### 3 Rôle des paramètres $Q$ et $R$ dans le filtre

Le comportement du filtre de Kalman repose en grande partie sur deux hyperparamètres clés : la variance du bruit de processus  $Q$  et la variance du bruit d'observation  $R$ . Ces deux quantités contrôlent la manière dont le filtre pondère l'information issue de la prédiction par rapport à celle issue de l'observation.

- $Q$  représente l'**incertitude sur l'évolution du processus latent**, autrement dit sur la façon dont le prix réel est supposé évoluer au fil du temps. Une valeur élevée de  $Q$  signifie que l'on s'attend à ce que le prix puisse changer de manière rapide ou erratique d'un instant à l'autre, ce qui rend le filtre plus réactif aux nouvelles observations.
- $R$  représente l'**incertitude sur les observations**, c'est-à-dire la qualité des mesures issues du marché. Une valeur élevée de  $R$  indique que les observations sont peu fiables ou fortement bruitées ; dans ce cas, le filtre aura tendance à faire davantage confiance à sa propre estimation qu'aux nouvelles données.

L'équilibre entre  $Q$  et  $R$  est crucial :

- si  $Q$  est trop petit, le filtre devient trop lent à réagir ;
- si  $R$  est trop petit, il sur-réagit au bruit des observations ;
- si les deux sont mal ajustés, le filtre peut diverger ou se comporter de manière instable.

Dans notre implémentation, nous avons utilisé des **curseurs interactifs** dans le notebook pour ajuster visuellement les valeurs de  $Q$  et  $R$ . Cette approche permet d'observer immédiatement l'impact de ces paramètres sur la trajectoire estimée. Après plusieurs essais, nous avons retenu les valeurs affichées dans le notebook, qui offrent un bon compromis entre lissage et réactivité dans le cas du stablecoin Luna, notamment durant sa phase de crash.

## 4 Détection de depeg à l'aide du filtre de Kalman

Dans cette partie, nous exploitons le **filtre de Kalman** dans une nouvelle perspective : celle de la **détection automatique d'un épisode de depeg** à partir d'une série de prix d'un stablecoin. Cette approche repose sur l'idée que le filtre, en fournissant une estimation lissée du prix réel sous-jacent, permet de repérer les écarts significatifs entre cette estimation et les observations bruitées issues du marché.

Nous concentrons notre attention sur le **cas de l'USDT en 2022**, car contrairement à d'autres stablecoins comme l'USDC ou le DAI, l'USDT a connu des tensions ponctuelles durant cette période. L'épisode le plus marquant a eu lieu en **mai 2022**, dans un contexte de panique provoquée par l'effondrement du stablecoin algorithmique TerraUSD (UST).

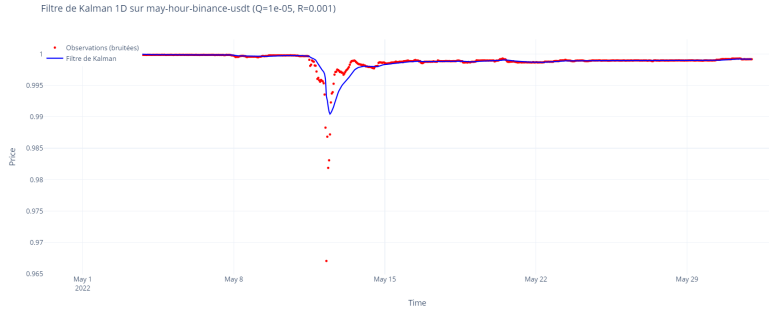


Figure 3: Filtre de Kalman appliqué à l'USDT en mai 2022

L'objectif de cette section est donc de tester si notre filtre de Kalman peut, à lui seul, **révéler un signal de rupture ou de décrochage** susceptible de correspondre à un *depeg*, sans qu'il soit nécessaire de fixer arbitrairement un seuil sur le prix observé.

## 5 Méthode de détection du depeg via Kalman

Une fois le filtre de Kalman appliqué à la série de prix de l'USDT, nous utilisons l'estimation  $\hat{x}_t$  du prix réel ainsi que la variance estimée  $P_t$  pour construire une **bande d'incertitude** autour de la trajectoire lissée. Cette bande représente l'intervalle dans lequel les observations sont censées se trouver en l'absence de rupture de régime.

Plus précisément, nous définissons les bornes supérieure et inférieure comme :

$$\text{Bornesupérieure} = \hat{x}_t + \alpha \cdot \sqrt{P_t}, \quad \text{Borneinférieure} = \hat{x}_t - \alpha \cdot \sqrt{P_t}$$

où  $\alpha$  est un coefficient d'échelle choisi empiriquement (dans notre cas,  $\alpha = 0,1$ ) pour contrôler la largeur de la bande.

Nous détectons un **depeg** à chaque fois qu'une observation  $y_t$  dépasse ces bornes :

$$Depegsi y_t > \hat{x}_t + \alpha \cdot \sqrt{P_t} \quad \text{ou} \quad y_t < \hat{x}_t - \alpha \cdot \sqrt{P_t}$$

Cette approche présente plusieurs avantages :

- Elle s'adapte dynamiquement à l'incertitude estimée par le filtre : lorsque la variance est élevée, la bande est élargie ; en période calme, elle se resserre automatiquement.
- Elle ne repose pas sur un seuil absolu fixé à l'avance (comme un prix ; 0,99 \$), mais sur un écart relatif à l'évolution attendue du prix.
- Elle permet de distinguer des variations normales (bruit de marché) de véritables ruptures, telles qu'un *depeg*.

Dans notre implémentation, les points de *depeg* sont visualisés sur le graphique à l'aide d'un marqueur orange, tandis que les observations normales sont affichées en rouge. La bande d'incertitude est représentée en bleu clair autour de la trajectoire estimée par le filtre.

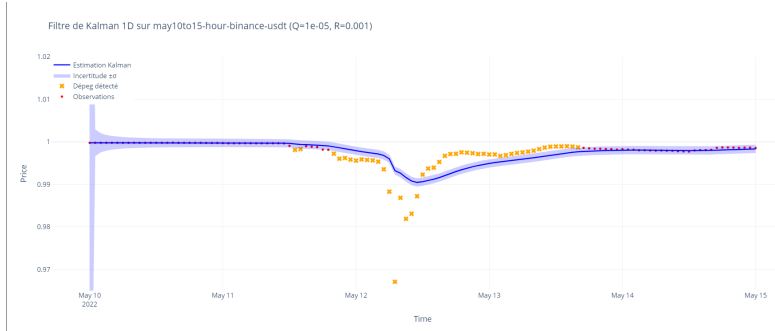


Figure 4: Detecteur de depeg utilisant Kalman

## 6 Conclusion

Cette approche permet de transformer un simple filtre de Kalman en un véritable **outil de surveillance de la stabilité d'un stablecoin**. En comparant dynamiquement le prix observé aux prédictions du filtre, et en tenant compte de l'incertitude estimée, il devient possible de **détecter automatiquement des épisodes de depeg** sans imposer de seuil fixe.

Dans le cas de l'USDT en mai 2022, cette méthode permet d'identifier clairement la phase de décrochage, en signalant des observations sortant de la bande de confiance calculée. Le filtre s'adapte progressivement au retour à la normale, en réduisant son incertitude au fur et à mesure que les prix redeviennent stables.

Cette stratégie est simple à implémenter, peu paramétrique, et facilement généralisable à d'autres stablecoins ou à des séries financières similaires. Elle constitue donc une solution prometteuse pour le **monitoring en temps réel de la stabilité des actifs numériques**.