

**ETH ZÜRICH  
ABTEILUNG FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK**

**KERNPHYSIK I**  
**VORLESUNG VON**  
**PROF. DR. P. MARMIER**

**AUSGEARBEITET VON**  
**DR. ERIC SHELDON UND**  
**ROLAND SZOSTAK**

**▼ VERLAG DER FACHVEREINE AN DER ETH/Z 1973**

### 3. WECHSELWIRKUNGEN ELEKTROMAGNETISCHER STRAHLUNG MIT MATERIE

#### 3.1. Einleitung

Elektromagnetische Strahlung wird je nach Entstehungsart verschieden bezeichnet:

- Emission aus den äusseren Elektronenschalen: Licht
- Emission aus den übrigen Elektronenschalen: Röntgen-Strahlung
- Emission aus dem Kern:  $\gamma$ -Strahlung
- Emission bei Abbremsung eines geladenen Teilchens: Bremsstrahlung.

Diese historisch bedingte Einteilung bedeutet jedoch keine fundamentale Wesensverschiedenheit.

Beim Durchgang durch Materie wird die Intensität elektromagnetischer Strahlung geschwächt.  $\gamma$ -Quanten treten dabei in Wechselwirkung mit

- (a) Atomelektronen
- (b) Kernen
- (c) elektrischen Feldern der Elektronen und Kerne
- (d) Mesonenfeldern der Kerne.

Dabei treten Energieverluste sowie Änderungen der Ausbreitungsrichtung und Polarisation auf. Die Beeinflussungen der  $\gamma$ -Strahlung lassen sich unterscheiden als

- (i) totale Absorption
- (ii) inelastische Streuung (inkohärent)
- (iii) elastische Streuung (kohärent).

Zwischen den beiden Gruppen (a) - (d) und (i) - (iii) gibt es folgende 12 Kombinationsmöglichkeiten (Tab. 3.1):

Tab. 3.1

	Absorption	Inelat. Streuung	Elast. Streuung
Elektronen	Photoeffekt	Compton-Effekt	Rayleigh-Streuung Thomson-Streuung
Kerne	Kernphotoeffekt	Kernresonanz-Streuung	
Elektr. Felder	Paarzeugung	—	Deutrock-Streuung Kernpot-Streuung
Mesonfelder	Mesonerzeugung	—	—

Die wichtigsten Prozesse von diesen sind  
der Photoeffekt,  
der Compton-Effekt,  
die Paarzeugung,  
während die übrigen Effekte verhältnismässig schwach sind und zumeist bei nicht zu hohen Energien vernachlässigt werden können.

#### 3.2 Photoeffekt

##### 3.2.1 Absorptionskanten

Atomelektronen können die Energie eines  $\gamma$ -Quants vollständig absorbieren. Dabei wird ein Elektron entweder auf einen gebundenen Zustand höherer Energie gehoben, oder es wird, wenn die Energie des Photons  $h\nu$  grösser ist als die Bindungsenergie  $B_e$  des Elektrons, mit der kinetischen Energie

$$T = h\nu - B_e \quad (3.1)$$

emittiert. Die Bindungsenergie eines Hüllenelektrons ist von der Kernladung  $Z$  abhängig und davon, in welcher Schale es sich befindet.

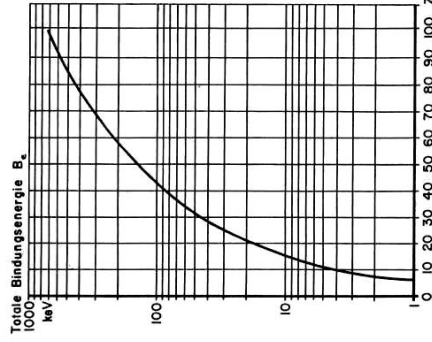


Fig. 3.1

Die Kernladung wird für die weiter ausen liegenden Schalen zunehmend durch die inneren abgeschirmt. Für die Bindungsenergien kann man folgende Näherungswerte benutzen:

$$\begin{aligned} \text{K-Elektronen} &: B_e = Ry (Z-1)^2 & (3.2) \\ \text{L-Elektronen} &: B_e = Ry (Z-5)^2 & (3.3) \\ \text{M-Elektronen} &: B_e = Ry (Z-13)^2 & (3.4) \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $Ry = 13.52 \text{ eV}$  die Ionisationsenergie des Wasserstoffatoms ist.

Ist die Energie des Photons kleiner als die Bindungsenergie des Elektrons, so reicht seine Energie nicht zur Ionisierung aus. Der Verlauf der Absorptionskurve zeigt bei  $h\nu = B_K$  einen scharfen Abfall, und zwar jeweils bei der Ionisationsenergie der K-, L-, M-, ... Schale. So kommt der abgestuften Verlauf zustande (Fig. 3.2).

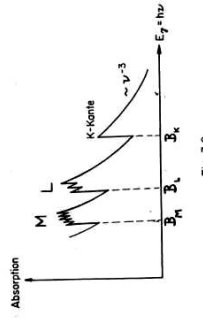


Fig. 3.2

energie. Durch die Spinbahnkopplung ( $J_s$ ) ist seine Bindungsenergie nochmals verschieden: Die Absorptionskanten sind entsprechend der Multiplizität von  $j$  aufgespalten, die L-Kante in drei, die M-Kante in fünf, etc.

### 3.2.2. Energieabhängigkeit:

Ein freies Elektron kann wegen des Impulserhaltungssatzes die Energie eines Photons nicht vollständig aufnehmen, indessen ist das bei Atomelektronen möglich, weil dann das Atom den restlichen Impuls als Rückstoß aufnimmt. Dementsprechend absorbieren die am festesten gebundenen Elektronen am stärksten; so ist der Wirkungsquerschnitt für die Absorption in der K-Schale 80% dessen für alle Schalen zusammen, vorausgesetzt dass  $h\nu$  grösser ist als die Bindungsenergie der K-Elektronen.

Ein Elektron erscheint umso weniger gebunden, je grösser  $h\nu$  gegenüber  $B_K$  (ist  $h\nu \gg B_K$ ). Indolgedessen nimmt der Wirkungsquerschnitt von jeder Absorptionskante (ist mit steigender Photonenenergie stetig ab (vgl. Sägesahform in Fig. 3.3).

Die theoretische Berechnung des Wirkungsquerschnittes  $\tau$  für den Photoeffekt bereitet Schwierigkeiten, weil man einerseits die Dirac-Gleichung für ein gebundenes Elektron lösen muss. Ausserdem ist man zumeist darauf angewiesen, die Abschirmung der Kernladung empirisch einzufügen. Analytisch ist  $\tau$  eine komplizierte Funktion von  $h\nu$ .

Sie werde für die beiden K-Elektronen in drei Bereichen betrachtet (Fig. 3.3):

- (a) in der Nähe der Kante
- (b) in hinreichender Entfernung von der Kante
- (c) im relativistischen Gebiet ( $h\nu \gg m_e c^2$ ).



Fig. 3.3

In dem mittleren Bereich (b) lautet sie für beide K-Elektronen zusammen (Heitler, Quantum Theory of Radiation 1956, p. 207):

$$\tau_K = \sigma_K \cdot 4\sqrt{2} \alpha^2 Z^2 \cdot E_T^{-7/2} \quad (3.5)$$

worin

- $\sigma_K = \frac{2}{3} \pi r_0^2$  der Thomson-Querschnitt,
- $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  die Feinstrukturkonstante und
- $E_T = \frac{h\nu}{m_e c^2}$  die "reduzierte"  $T$ -Energie

ist.

In logarithmischer Darstellung ergibt (3.5) eine Gerade der Steigung - 3,5 (Fig. 3.4):

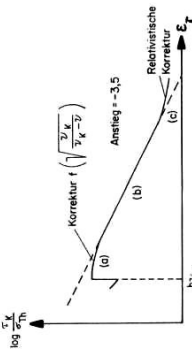


Fig. 3.4

In dem Bereich (a) nahe der Kante ist die  $T$ -Energie von gleicher Grössenordnung wie die Bindungsenergie des K-Elektrons. Man muss dann für die Berechnung von  $\tau_K$  genauere Wellenfunktionen benutzen, wodurch die Näherung (3.5) mit einem Korrekturfaktor der Form  $f\left(\sqrt{\frac{B_K}{h\nu}}\right)$  zu multiplizieren ist. Dieser zieht  $\tau_K$  in dem Bereich (a) herunter (Fig. 3.4).

Die relativistische Korrektur bewirkt, dass  $\tau_K$  in dem Bereich (c) weniger stark abfällt (Fig. 3.4) als gemäss (3.5).

Fig. 3.5 zeigt den Verlauf von  $\tau_K$  für verschiedene Elemente.

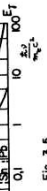


Fig. 3.5

### 3.2.3 Z-Abhängigkeit

Dass  $\tau_K$  nicht proportional  $Z$  ist, deutet an, dass die Wechselwirkung beim Photoeffekt nicht mit einem Atomelektron allein stattfindet. In der Näherung (3.5) ist  $\tau_K$  proportional  $Z^5$ , durch die erwähnten Korrekturen, die ihrerseits

Z-abhängig sind, wie man beispielsweise an  $\int \left( \sqrt{\frac{E_K}{E_K - E_L}} \right)$  sieht, wird  $\tau_K$  eine kompliziertere Funktion von  $Z$ , die sich als  $\tau_K \sim Z^n$  schreiben lässt. Der Exponent liegt etwa bei  $n \approx 4$ , ist aber energieabhängig, wie sich aus einer empirischen Zusammenstellung ersuchen lässt (Fig. 3.6).

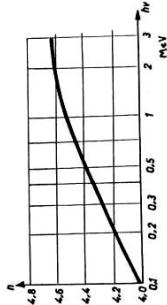


Fig. 3.6

In der Nähe der K-Kante ist näherungsweise

$$\tau_K \sim \frac{Z^4}{(4\pi)^2} \quad (3.6)$$

### 3.2.4 Winkelverteilung

Bei kleinem  $h\nu$  werden die Photoelektronen überwiegend in Richtung des elektrischen Vektors der einfallenden Welle, also senkrecht zur Einfallrichtung emittiert. Bei grossem  $h\nu$  geschieht die Emission bevorzugt in Vorwärtsrichtung (Fig. 3.7).

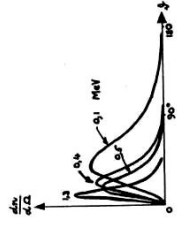


Fig. 3.7

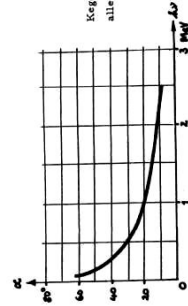


Fig. 3.8

Fig. 3.8 gibt den Winkel des Kegels an, innerhalb dessen die Hälfte aller Photoelektronen emittiert wird.

### 3.3 Auger-Elektronen

Im Grundzustand des Atoms sind alle Niveaus  $\sum$  von unten her besetzt. Wird durch Photoeffekt ein Elektron z.B. aus der K-Schale herausgeschlagen, so befindet sich das Atom im angeregten Zustand. Es kehrt dadurch in den Grundzustand zurück, dass ein Elektron von einem höheren Niveau z.B. aus der L-Schale in diese Lücke springt, wobei ein  $\gamma$ -Quant der Energie  $(E_K - E_L)$  emittiert wird. Die dabei freiwerdende Energie  $(E_K - E_L)$  kann von einem Photon fortgetragen werden ( $K_{\alpha}$ -Röntgenlinie) oder einem anderen Hüllenelektron, beispielsweise einem L-Elektron übertragen werden. Da dessen Bindungsenergie  $E_L < (E_K - E_L)$  ist, wird dieses als AUGER-ELEKTRON mit der diskreten Energie  $(E_K - E_L)$  emittiert (Fig. 3.9).

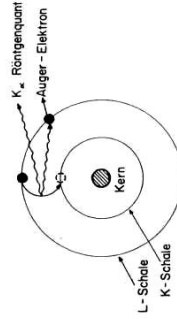


Fig. 3.9

Die Anzahl der emittierten Photonen  $N_{\gamma}$  pro Lücke in der K-Schale ( $K$  FLUORESCENCE YIELD) ist in seiner empirischen Abhängigkeit von  $Z$  in Fig. 3.10 wiedergegeben.

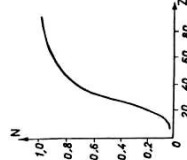


Fig. 3.10

Demnach überwiegen die Auger-Elektronen bei leichten Elementen.

Der Auger-Effekt kann als innerer Stoss zweiter Art bezeichnet werden. Stösse zweiter Art sind solche, bei denen sich einer der Stosspartner ursprünglich im angeregten Zustand befindet.

### 3.4 Thomson-Querschnitt

Die elastische Streuung einer elektromagnetischen Welle an einem geladenen Teilchen wurde klassisch von Thomson behandelt. Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess lässt sich nach folgenden Überlegungen herleiten:

Die in eine bestimmte Richtung pro Zeit strömende Energiedichte ist allgemein durch den Poynting'schen Vektor

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}| |\vec{B}| \quad (3.7)$$

gegeben. Für den Wirkungsquerschnitt (vgl. Definition (2.11)) ist dann der einfallende Energiestrom pro Zeit und Fläche

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \quad (3.8)$$

der durch die ebene Primärwelle (Fig. 3.11) auf ein einzelnes Elektron wirkt.

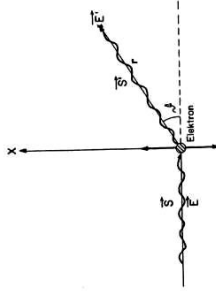


Fig. 3.11

Das Elektron oszilliert unter dem Einfluss dieses Feldes und emittiert dabei eine Dipolstrahlung, dessen Energiedichte pro Zeit in einer bestimmten Richtung  $\vec{S}'$

$$|\vec{S}'| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}'|^2 \quad (3.9)$$

ist. Die gesamte aus dem Primärstrom pro Zeit gestreute Energie  $\frac{dE'}{dt}$  ergibt sich durch Integration von  $S'$  über die Oberfläche  $F$  einer Kugel:

$$\frac{dE'}{dt} = \int_F |\vec{S}'| dF = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\vec{S}'| \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (3.10)$$

Zur Berechnung dieses Integrals muss  $|\vec{S}'|$ , d.h.  $|\vec{E}'|$  bekannt sein. Gemäss der Hertzischen Theorie ergibt sich im Abstand  $r$  für das Feld  $\vec{E}$  eines Dipols mit dem Moment  $M = ex$ , wobei  $x$  die Auslenkung des Elektrons aus der Ruhelage ist:

$$|\vec{E}'| = \frac{|\vec{M}|}{c^2 r} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi = \frac{e|\vec{x}|}{c^2 r} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \quad (3.11)$$

Dann ergibt sich durch Substitution von (3.11) und (3.9) in (3.10)

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^4 |\vec{x}|^2}{c^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{4\pi} \frac{e^4 |\vec{x}|^2}{c^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi \quad (3.12)$$

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^4}{c^3} \cdot |\vec{x}|^2$$

Dieses ist die von einem Teilchen der Ladung  $e$  infolge Beschleunigung bzw. Bremsung  $|\ddot{x}|$  ausgestrahlte Energie pro Zeit.

Für den THOMSON-QUERSCHNITT ist nach Definition (2.11) die Grösse

$$\sigma_{Th} = \frac{dE'}{dt} \cdot \frac{1}{|\vec{S}|} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^4}{c^3} \cdot \frac{1}{|\vec{S}|} \quad (3.13)$$

zu berechnen. Hierin ist  $|\vec{S}|$  durch (3.8) und  $|\ddot{x}|$  durch die Bewegungsgleichung des Elektrons in dem elektrischen Feld  $E$  der einfallenden Welle

$$m_e \ddot{x} = e \vec{E} \quad (3.14)$$

gegeben, so dass

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m_e^2 c^3} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (3.15)$$

wobei  $r_e$  der klassische Elektronenradius ist.

Man beachte, dass dieser Ausdruck  $\sigma_{Th}$  enthält, obwohl das Elektron bei dieser Ableitung stillschweigend als punktförmig angenommen wurde.

$\sigma_{Th}$  ist unabhängig von der Frequenz der einfallenden Strahlung und gilt nur für den Fall der elastischen Streuung.

### 3.5 Compton-Effekt

Der Compton-Effekt beschreibt die inelastische Streuung eines Photons an einem freien Elektron. Die inelastische Streuung an Atomelektronen kann als Compton-Effekt behandelt werden, wenn deren Bindungsenergie klein ist gegen die Energie  $h\nu$  des einfallenden Photons.

Dem Elektron wird bei dem inelastischen Stoss die kinetische Energie  $T$  bzw. der Impuls  $\vec{p}$  in der Richtung  $\vec{A}_2$  gegenüber der Einfallsrichtung des Photons erteilt, während das Photon mit der Energie  $h\nu'$  unter dem Winkel  $\theta'$  gestreut wird. Es werde angenommen, dass sich das Elektron vor dem Stoss in Ruhe befunden habe. Dann sind die drei Impulsvektoren  $\frac{h\nu}{c}$ ,  $\frac{h\nu'}{c}$  und  $\vec{p}$  komplanar (Fig. 3.12).

Der Impulserhaltungssatz ergibt für die Impulskomponenten parallel und senkrecht zur Einfallsrichtung

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta' + p \cos\theta \quad (3.16)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta' - p \sin\theta \quad (3.17)$$

und der Energiesatz

$$h\nu = h\nu' + T \quad (3.18)$$

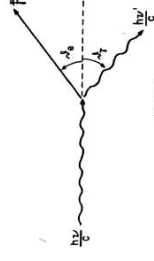


Fig. 3.12

Zwischen den relativistischen Größen  $p$  und  $T$  besteht die Beziehung (s. Anh. A):

$$pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}. \quad (3.19)$$

Daraus folgen einige allgemeingültige Beziehungen über Energie- und Winkelgrößen: (a) Für das gestreute Quant unabhängig von der Energie des einfallenden Photons die COMPTON-VERSCHIEBUNG (COMPTON-SHIFT)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\vartheta). \quad (3.20)$$

$\lambda, \lambda'$  sind die Wellenlängen des einfallenden und des gestreuten Photons und  $\lambda_c = \frac{h}{mc}$  die COMPTON-Wellenlänge des Elektrons.

Ferner gilt für die Energie des gestreuten Photons die Winkelbeziehung

$$\frac{h\nu'}{h\nu} = \frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos\vartheta)} = \left( \varepsilon + \frac{1}{\cos\vartheta} \right) \quad (3.21)$$

Für  $\lambda_c = 0$  ist  $\nu' = \nu$  bei allen Werten der "reduzierten"  $T$ -Energie  $\varepsilon$ . In Vorwärtsrichtung findet nur elastische Streuung statt.

(3.21) stellt eine Ellipse dar, die umso exzentrischer ist, je größer  $\varepsilon$ . Für den Fall  $\varepsilon \ll 1$  wird  $\nu' \approx \nu$  für alle Winkel  $\vartheta$ , also findet auch bei kleinen  $T$ -Energien nur elastische Streuung statt, und (3.21) nähert sich einem Kreis.

(b) Die Energie des Elektrons ist

$$T = h\nu - h\nu'. \quad (3.22)$$

Sie lässt sich als Funktion von  $\vartheta$  oder  $\lambda_c$  darstellen:

$$T = h\nu \cdot \frac{\varepsilon(1 - \cos\vartheta)}{1 + \varepsilon(1 - \cos\vartheta)} \quad (3.23)$$

$$T = h\nu \cdot \frac{2\varepsilon \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{(1 + \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.24)$$

(c) Zwischen den Winkeln  $\lambda_c$  und  $\vartheta$  besteht die Beziehung

$$\cos \lambda_c = (1 + \varepsilon) \cos \frac{\vartheta}{2}. \quad (3.25)$$

(d) Die maximale Energieübertragung ist

$$T_{\max} = \frac{h\nu}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon} \quad (3.26)$$

Dabei ist  $\lambda_c = 0$  und  $\vartheta = 180^\circ$ , d.h. das Elektron wird nach vorn und das Photon nach hinten gestreut.

### 3.5.1 Klein-Nishina Formel

Die klassische Behandlung der inelastischen Streuung einer elektromagnetischen Welle gilt nur für  $\varepsilon \ll 1$ . Für höhere Photonenenergien ist eine relativistische, quantenmechanische Berechnung erforderlich. Klein und Nishina haben 1929 aus der Dirac-Gleichung den Compton-Wirkungsquerschnitt abgeleitet. Er lautet (s. Heiser, Quantum Theory of Radiation 1954, p. 217):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_e^2 \left( \frac{\nu'}{\nu} \right)^2 \left( \frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu'}{\nu} - 2 + 4 \cos^2 \vartheta \right). \quad (3.27)$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$  ist der differentielle, auf ein Elektron bezogene Stossquerschnitt für eine linear polarisierte einfallende elektromagnetische Welle der Frequenz  $\nu$ .  $r_e$  ist der klassische Elektronenradius,  $\nu'$  die Frequenz des in den Raumwinkel  $d\Omega$  gestreuten Strahls und  $\vartheta$  der Winkel zwischen den elektrischen Vektoren der einfallenden und gestreuten Welle  $\vec{E}$  und  $\vec{E}'$ .

Bei der inelastischen Streuung ist es wichtig, die in der Definition des Wirkungsquerschnittes (2.11) verglichenen Größen genau zu beschreiben. In dieser Hinsicht besteht zwischen Stoss- und Streuquerschnitt ein wesentlicher Unterschied. Der STOSSQUERSCHNITT  $\sigma_c$  (COLLISION CROSS SECTION) entspricht der Wahrscheinlichkeit eines Stosses, wobei aus dem kollimierten einfallenden Strahl ein Photon der Energie  $h\nu$  verloren geht.  $\sigma_c$  bezieht sich also auf die Energie, um die der Primärstrahl geschwächt wird, und diese ist, wenn der Primärstrahl als monochromatisch angenommen wird, proportional der Zahl der Compton-Stöße. Der STREUQUERSCHNITT  $\sigma_s$  (SCATTERING CROSS SECTION) bezieht sich indes auf die gestreute  $T$ -Energie, die um den Faktor  $\frac{h\nu'}{h\nu}$  kleiner ist. Also besteht zwischen  $\sigma_c$  und  $\sigma_s$  die Beziehung

$$\sigma_s = \frac{h\nu'}{h\nu} \sigma_c. \quad (3.28)$$

Zur Beschreibung der Zahl der gestreuten Photonen ist wiederum der Stossquerschnitt massgebend.

Die restliche, den Elektronen übertragene Energie ist

$$T = h\nu - h\nu' \quad (3.29)$$

und der entsprechende Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_s = \sigma_c - \sigma_s'. \quad (3.30)$$

$\sigma_s$  kann insofern als ABSORPTIONQUERSCHNITT bezeichnet werden, als die kinetische Energie der Elektronen durch weitere inelastische Stöße und Ionisierungen im Material aufzehrt wird. Alle in dem streuenden Material selbst nachweisbaren physikalischen Effekte rühren von diesem Anteil her. Sie sind von Bedeutung für die Wilsonkammer, den Proportionalzähler, in Photoplaten, bei biologischen Effekten etc.

### 3.5.2 Winkelverteilungen

Die Winkelverteilung des gestreuten Strahls ist u. a. eine Funktion seiner Polarisation gegenüber der des einfallenden Strahles. Für den experimentellen Nachweis ist es zweckmässig, anstelle des Winkels  $\theta$  neuen Winkel einzuführen: Die Ebene, die durch die drei Impulsvektoren  $\vec{p}$ ,  $\vec{p}'$  und  $\vec{k}$  aufgespannt wird, werde die STREU-EBENE genannt, und  $\phi$  sei der Winkel der Streuebene gegen die Polarisationsebene des einfallenden Strahls (Fig. 3.13).



Fig. 3.13

Nach wie vor sei  $\phi_T$  der Winkel zwischen den Impulsrichtungen des einfallenden und des gestreuten Strahls. Nach Mittelung über alle Polarisationsrichtungen des gestreuten Strahls wird aus (3.27):

$$d_e \sigma' = \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega_T \left( \frac{p'}{p} \right)^2 \left( \frac{p'}{p} + \frac{p'}{p} - 2 \sin^2 \phi_T \cos^2 \phi \right). \quad (3.3)$$

Bei festem  $\phi_T$  ist die Zahl der gestreuten Photonen eine Funktion des Winkels  $\phi$ . Für  $\phi_T = 90^\circ$  ist sie in Fig. 3.14 dargestellt.

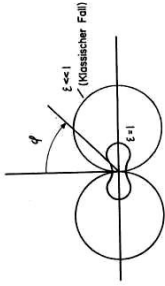


Fig. 3.14

Unter Ausnutzung dieser Charakteristik lässt sich die Polarisation von  $\gamma$ -Strahlen messen. Bei kleinen Energien ( $\epsilon \ll 1$ ) besteht die maximale  $\phi$ -Asymmetrie bei  $\phi_T = 90^\circ$ , während bei höheren Energien die Vorwärtsstreuung bevorzugt wird und sich dabei die maximale  $\phi$ -Asymmetrie auch zu kleineren Winkeln  $\phi_T$  hin verschiebt.

Für einen unpolarisierten einfallenden Strahl gilt folgende, von  $\phi$  unabhängige Winkelverteilung, die sich durch Integration von (3.31) über alle  $\phi$  ergibt:

$$d_e \sigma' = \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega_T \left( \frac{p'}{p} \right)^2 \left( \frac{p'}{p} + \frac{p'}{p} - \sin^2 \phi_T \right). \quad (3.32)$$

Dadurch, dass  $\frac{p'}{p}$  nochmals die Winkelgrösse  $\phi_T$  enthält (3.21), ist  $d_e \sigma'$  eine komplizierte Funktion von  $\phi_T$ . Fig. 3.15 zeigt diese Funktion in Abhängigkeit des Parameters  $\epsilon$ .

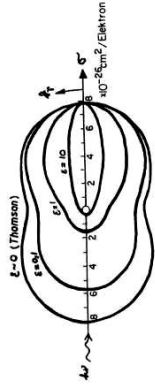


Fig. 3.15

Um die Winkelverteilung der Elektronen zu erhalten, muss man den Stossquerschnitt für die Photonen, die in das Raumwinkelement  $d\Omega_T$  unter dem Winkel  $\phi_T$  gestreut werden, mit Hilfe von

$$\frac{d_e \sigma'}{d\Omega_T} = \frac{d_e \sigma'}{d\Omega_T} \cdot \frac{d\Omega_T}{d\Omega_e} \quad (3.33)$$

umrechnen auf den Stossquerschnitt für die Elektronen, die in das Raumwinkelement  $d\Omega_e$  unter dem Winkel  $\phi_e$  gestreut werden. Dabei ist

$$\frac{d\Omega_T}{d\Omega_e} = \frac{(1-\epsilon)^2 (1-\cos \phi_T)^2}{\cos^2 \phi_e} \quad (3.34)$$

Die Funktion  $\frac{d_e \sigma'}{d\Omega_e}$  ist in Fig. 3.16 dargestellt.

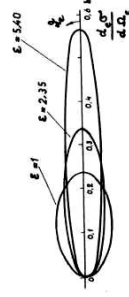


Fig. 3.16

## 3.5.3 Energieverteilungen

Die totalen Wirkungsquerschnitte ergeben sich durch Integration über den ganzen Raumwinkel:

$$\sigma_{\text{el}}^{\text{el}} = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2} \left[ \frac{2(1+\epsilon)}{1+2\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \ln(1+2\epsilon) \right] + \frac{1}{2\epsilon} \ln(1+2\epsilon) - \frac{1+3\epsilon}{(1+2\epsilon)^2} \right\} \quad (3.35)$$

$$\sigma_{\text{el}}^{\text{el}} = \pi r_e^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} \ln(1+2\epsilon) + \frac{2(1+\epsilon)(2\epsilon^2-2\epsilon-1)}{\epsilon^2(1+2\epsilon)^2} + \frac{8\epsilon^2}{3(1+2\epsilon)^3} \right\} \quad (3.36)$$

Der Absorptionsquerschnitt wird durch Differenzbildung

$$\sigma_{\text{el}}^{\text{el}} = \sigma_{\text{el}}^{\text{el}} - \sigma_{\text{el}}^{\text{el}} \quad (3.37)$$

gewonnen. Diese drei Wirkungsquerschnitte für Stoss, Streuung und Absorption sind in Fig. 3.17 als Funktionen von  $\epsilon$  dargestellt.

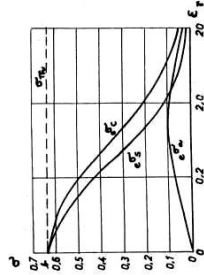


Fig. 3.17

Bei kleinen Energien herrscht die elastische Streuung vor.  $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$  und  $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$  werden für  $\epsilon \ll 1$  einander gleich und stimmen mit dem klassischen Wert des Thomson-Querschnittes überein. Das Maximum von  $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$  liegt bei  $\epsilon \approx 1$ .

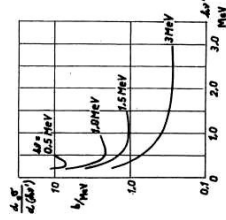


Fig. 3.18

Ferner sind die Energiespektren der gestreuten Photonen und der Rückstosselektronen von Interesse. Die Energieverteilung der gestreuten Photonen  $\frac{d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}}{d\Omega d\nu'}$ , gewinnt man durch Einsetzen von (3.21) in (3.32) und anschließende Differenzbildung. Die Funktion  $\frac{d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}}{d\Omega d\nu'}$  ist in Fig. 3.18 dargestellt.

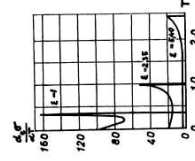


Fig. 3.19

Die Energieverteilung der Rückstosselektronen

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}}{dT} = \frac{d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}}{d\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dT} \quad (3.38)$$

ist durch getrennte Differentiation ebenfalls aus (3.24), (3.25) und (3.32) zu gewinnen. Die Funktion  $\frac{d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}}{dT}$  ist in Fig. 3.19 gezeigt.

## 3.5.4 Wirkungsquerschnitt pro Atom

Die Umrechnung der Compton-Wirkungsquerschnitte pro Elektron auf diejenigen pro Atom gemäss

$$\sigma_{\text{el}}^{\text{el}} = Z \cdot \sigma_{\text{el}}^{\text{el}} \quad (3.39)$$

ist nur für hohe Energien  $h\nu$  möglich, wo die Bindungsenergien der Elektronen vernachlässigt werden können. Bei kleineren Photonenenergien müssen die Verteilungen und Impulse der Elektronen im Atom berücksichtigt werden. Es bestehen zwischen diesen bestimmten Phasenbeziehungen. Bei  $h\nu = h\nu'$  ist die Streuung kohärent; es sind dann die Amplituden der Streuung - und nicht deren Intensitäten - für jedes einzelne Atomselektron zu addieren. Bei  $h\nu' < h\nu$  ist die Streuung inkohärent; dann sind die Intensitäten zu addieren. Der Compton-Wirkungsquerschnitt kann dann als Summe eines kohärenten und eines inkohärenten Anteils

$$d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}} = d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}} + d\sigma_{\text{el}}^{\text{el}} \quad (3.40)$$

dargestellt werden.

## 3.6 Paarerzeugung



Fig. 3.20

Wenn die  $\gamma$ -Energie  $h\nu$  grösser als die doppelte Ruheenergie des Elektrons  $2m_e c^2 = 1.02 \text{ MeV}$  ist, so kann das  $\gamma$ -Quant unter gleichzeitiger Bildung eines Elektrons und eines Positrons vernichtet werden. Die überschüssige Energie übernehmen die erzeugten Teilchen als kinetische Energie.

Der Prozess der Paarerzeugung ist nur im Gegenwart eines Stosspartners möglich, da in dem System Photon-Teilchenpaar die Erhaltungssätze für Energie und Impuls nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Die relativistischen Ausdrücke für Impuls und Energie lauten für



das Photon

$$p = \frac{\Delta v}{c} ; \quad E = \Delta v \quad (3.41)$$

und für das Teilchenpaar (s. Anh. A)

$$p' = 2 \gamma m_0 v ; \quad E' = 2 \gamma m_0 c^2 \quad (3.42)$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (3.43)$$

Aus der Energieerhaltung  $E = E'$  folgt

$$\Delta v = 2 \gamma m_0 c^2 = \beta' \cdot \frac{c^2}{\beta} \quad (3.44)$$

und

$$\beta' = \frac{\Delta v}{c} \cdot \frac{c}{\beta} = \beta \beta' \quad (3.45)$$

also

$$\beta' < \beta \quad (3.46)$$

d. h. das Photon besitzt einen Impulsüberschuss, der von einem Stosspartner als Rückstoss aufgenommen werden muss.

Als Stosspartner kann ein Kern oder ein Elektron dienen. Während die Energie, die der Stosspartner übernimmt, im Fall des Kernes infolge seiner grossen Masse verschwindend klein sein kann, ist der Rückstoss des Elektrons mit einer grossen Energieübernahme verknüpft; im Falle des Elektrons ist die Schwellenenergie für Paarerzeugung  $4 m_0 c^2$ .

Es fiel zuerst auf, dass die Wechselwirkung von Photonen hoher Energie bei höherem Z viel grösser ist, als nach den Photo- oder Compton-Effekt zu erwarten wäre. 1933 wurden von Anderson und Neddermeyer Elektron-Positronpaare identifiziert und 1935 gelang es Oppenheimer, die Paarerzeugung mit Hilfe der Dirac'schen Theorie des Elektrons zu deuten (s. Anh. C).

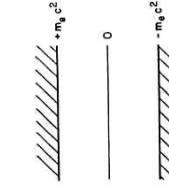


Fig. 3.2

Nach klassischen Gesichtspunkten könnte das Elektron diesen Bereich nicht durchqueren. quantenmechanisch besteht jedoch eine Übergangswahrscheinlichkeit.

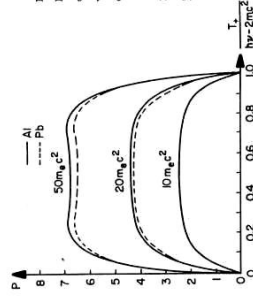
Für das im negativen Bereich befindliche Elektron ergeben sich paradoxe Eigenschaften, zu deren Überwindung Dirac folgende Hypothese vorschlug: Im Grundzustand nehmen die Elektronen die tiefsten Zustände ein, wobei für die Besetzungsmöglichkeiten das Pauli-Prinzip massgebend ist. Der Bereich der negativen Eigenwerte wird als

lückenlos mit Elektronen ausgefüllt angenommen, die indolentes nicht wahrgenommen werden. Wahrnehmbar dagegen sind die im positiven, nicht lückenlos besetzten Kontinuum befindlichen Elektronen. Übergänge vom positiven in den negativen Bereich finden deswegen nicht statt, weil ein Elektron dort keinen Platz finden kann. Übergänge von dem unteren in den oberen Bereich sind nicht in dieser Weise eingeschränkt.

Trifft nun ein  $T$ -Quant hinreichender Energie ein Elektron im Zustand negativer Energie und hebt es auf einen positiven Energiewert, so werden dieses Elektron und seine "Lücke" im Untergrund wahrnehmbar. Diese "Lücke" - ein POSITRON - benimmt sich wie ein Elektron mit positiver Ladung (und positiver Masse).

Der Wirkungsquerschnitt für die Entstehung eines Paares, wobei  $T_0$  die kinetische Energie des Positrons und  $T_+ = h\nu - 2m_0 c^2 - T_0$  die kinetische Energie des Elektrons ist, errechnet sich zu

$$dK = \sigma_0 Z^2 \gamma \frac{dT_+}{\Delta v - 2m_0 c^2} \quad (3.47)$$



Hierin ist  $\sigma_0 = \frac{1}{137} \pi r_0^2$  ( $r_0$  ist der klassische Elektronenradius) und  $P$  eine dimensionslose, komplizierte Funktion von  $h\nu$  und  $Z$ , die die Energieverteilung der erzeugten Teilchen angibt (Fig. 3.22).

Der totale Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung ist

$$K = \int dK = \sigma_0 Z^2 \int_0^{T_+} P \cdot d\left(\frac{T_+}{\Delta v - 2m_0 c^2}\right) \approx \sigma_0 Z^2 \cdot \bar{P} \quad (3.48)$$

Fig. 3.22

Die Berechnung ist nur im hohen relativistischen Energiebereich durchführbar, denn für kleine  $T$ -Energien verlieren die angeschriebenen Wellenfunktionen ihre Gültigkeit.

Für die  $T$ -Energien  $h\nu \gg m_0 c^2$  sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:  
(i) Für verhältnismässig kleine  $T$ -Energien,  $h\nu \ll m_0 c^2 \cdot \frac{137}{Z^2}$  findet die Paarerzeugung in der Nähe des Kernes statt und die Abschirmung des Coulomb-Feldes  $eZ$  durch die Hüllenelektronen ist vernachlässigbar. Dann gilt

$$K = \sigma_0 Z^2 \left( \frac{2}{9} \ln \frac{2h\nu}{m_0 c^2} - \frac{2}{27} \right) \quad (3.50)$$

Der Mittelwert  $\bar{P}$  in (3.48) ist hier näherungsweise proportional  $\ln \Delta v$ .

\* Für die Existenz dieses Elektronenuntergrundes spricht eine Reihe von Evidenzen, a. B. die Polarisation des Vakuums und das anomale magnetische Moment des Elektrons.

- (ii) Mit zunehmender  $\gamma$ -Energie kann die Paarzeugung auch ausserhalb der K-Schale stattfinden, die Abschirmung der Kernladung wird dann wesentlich. Im extrem relativistischen Fall,  $h\nu \gg m_e c^2$ , gilt bei vollständiger Abschirmung

$$K = \sigma_0 Z^2 \left[ \frac{23}{9} \ln \left( \frac{13}{2} \right) - \frac{2}{27} \right] \quad (3.51)$$

$K$  ist dann unabhängig von der  $\gamma$ -Energie und hängt nur von  $Z$  ab. Der Einfluss der Abschirmung, gegeben durch den logarithmischen Term in (3.51), ist aus Fig. 3.23 ersichtlich.

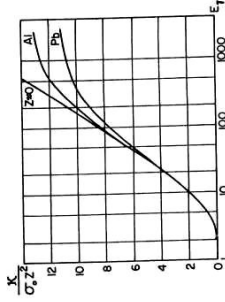


Fig. 3.23

Daneben findet Paarzeugung auch an Atomlektronen statt. Der Wirkungsquerschnitt für ein einzelnes Elektron

$$K(e) = \sigma_0 \left( \frac{23}{9} \ln \frac{2h\nu}{m_e c^2} - 11,3 \right) \quad (3.52)$$

ist dem in (3.50) sehr ähnlich. Anstelle des additiven Termes 11,3 (der allerdings etwas unsicher ist) stand dort  $\frac{218}{27} = 8,1$ . Erhebliche Schwierigkeiten für die Berechnung bereitete jedoch die Berücksichtigung der Coulomb-Abschirmung der Elektronen untereinander.

Bei kleinen  $\gamma$ -Energien ist der Anteil der Paarzeugung an Atomlektronen gering.

### 3.7 Annihilation

Das Positron wird in der Dirac'schen Theorie als Lücke im Elektronenuntergrund beschrieben. Diese Lücke kann dadurch wieder aufgefüllt werden, dass ein Elektron aus dem positiven Energiebereich dort hineinspringt. Dabei wird ein Energiebetrag  $\gamma_+ + \gamma_- + 2m_e c^2$  als  $\gamma$ -Energie emittiert, und die beiden Teilchen verschwinden. Dieser Prozess wird als ZERSTRAHLUNG bzw. ANNIHILATION bezeichnet.

Für die Erhaltung des Impulses ist ohne Gegenwart eines Stosspartners die Emission von mindestens zwei  $\gamma$ -Quanten erforderlich. Die grösste Wahrscheinlichkeit besitzen Übergänge vom unteren Rand des positiven Kontinuums zum oberen Rand

des negativen Kontinuums. In diesem Fall ist  $\gamma_+ \gamma_- = 4m_e^2 c^4$ , es werden zwei  $\gamma$ -Quanten von je 0,51 MeV unter  $180^\circ$  auseinander ausgestrahlt.

Die Annihilation unter Emission eines  $\gamma$ -Quants allein findet wegen Impulserhaltung nur in der Nähe eines Kerns statt.

Ferner existiert die Annihilation unter Emission von drei  $\gamma$ -Quanten. Das Spektrum dieser  $\gamma$ -Quanten ist kontinuierlich.

Abgebrumste Positronen können mit Elektronen einen metastabilen Zustand bilden. Dieses "Quasi-Wasserstoffatom" mit einem Positron anstelle eines Protons heisst POSITRONIUM. Das Termschema der angeregten Zustände dieses Systems ist dem des normalen Wasserstoffatoms ganz analog, nur mit einer entsprechend reduzierten Rydberg-Konstanten. Es gibt zwei Grundzustände, die sich durch Parallel- bzw. Antiparallelschaltung der beiden Spins unterscheiden. Der Zustand mit parallelen Spins heisst ORTHOPOSITRONIUM, der mit antiparallelen Spins PARAPPOSITRONIUM. Aus einfachen Überlegungen über die Erhaltung des Drehimpulses geht hervor, dass Orthopositronium unter Emission von drei Quanten und Parapositronium unter Emission von zwei Quanten zerfällt. Im ersten Fall ist die mittlere Lebensdauer ( $\tau \approx 1,4 \cdot 10^{-7}$  sec) wesentlich grösser als im zweiten ( $\tau \approx 1,25 \cdot 10^{-10}$  sec).

### 3.8 Totaler Absorptionsquerschnitt

Beim Durchgang eines  $\gamma$ -Strahles durch eine Materieschicht überlagern sich die drei beschriebenen Effekte. Die Abhängigkeit von der  $\gamma$ -Energie und von  $Z$  ist bei allen drei Effekten verschieden.

Die Energieabhängigkeit der Absorptions-Wirkungsquerschnitte für Photoeffekt ( $\tau$ ), Compton-Effekt ( $\sigma$ ), sowie Paarzeugung ( $\kappa$ ) und ihre Zusammensetzung zum TOTALEN ABSORPTIONS-WIRKUNGS-QUERSCHNITT

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa \quad (3.53)$$



Fig. 3.24

ist in Fig. 3.24 skizziert. Der Photoeffekt geht etwa mit  $\gamma^3$  und nimmt für kleine Energien sehr grosse Werte an, der Compton-Effekt fällt ebenfalls zu mittleren Energien hin monoton ab, während die Paarzeugung bei  $m_e c^2$  beginnend, als elastisch mit  $\log h\nu$  ansteigt.

Die  $Z$ -Abhängigkeit ist wie folgt: Der Photoeffekt geht mit  $Z^4$  bis  $Z^5$ , der Compton-Effekt bei nicht zu kleinen Energien mit  $Z$  und die Paarzeugung etwa mit  $Z^2$ .

Dementselbe überwiegt die Paarzeugung bei hohen Energien und hohen  $Z$ , der Compton-Effekt bei mittleren Energien und leichten Kernen und der Photoeffekt bei kleinen Energien und hohem  $Z$  (Fig. 3.25).

**ETH ZÜRICH  
ABTEILUNG FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK**

**KERNPHYSIK I**  
**VORLESUNG VON**  
**PROF. DR. P. MARMIER**

**AUSGEARBEITET VON**  
**DR. ERIC SHELDON UND**  
**ROLAND SZOSTAK**

**▼ VERLAG DER FACHVEREINE AN DER ETH/Z 1973**