Implementierung der Cut & Count-Technik am Beispiel Steiner tree

Levin von Hollen, Tilman Beck

{stu127560-, stu127568-}@informatik.uni-kiel.de

Christian-Albrechts Universität Kiel

7. November 2016

Überblick

1. Cut & Count-Technik
   - Allgemeines
   - (Nice) Tree Decomposition
2. Cut & Count mit Steiner Tree
   - Cut
   - Count
3. Implementierung

Cut & Count-Technik

Cut & Count-Technik

Cut & Count-Technik

- Technik um connectivity-type Probleme mithilfe von Randomisierung zu lösen(Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Johan van Rooij, Jakub Onufry Wojtaszczyk)

Cut & Count-Technik

- Technik um connectivity-type Probleme mithilfe von Randomisierung zu lösen(Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Johan van Rooij, Jakub Onufry Wojtaszczyk)
- angewendet auf viele verschiedene Probleme (z.B. Longest Path, Steiner Tree, Feedback Vertex Set, uvm.)

Cut & Count-Technik

- Technik um connectivity-type Probleme mithilfe von Randomisierung zu lösen(Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Johan van Rooij, Jakub Onufry Wojtaszczyk)
- angewendet auf viele verschiedene Probleme (z.B. Longest Path, Steiner Tree, Feedback Vertex Set, uvm.)
- Randomisierung durch Isolation-Lemma

Cut & Count-Technik

- Technik um connectivity-type Probleme mithilfe von Randomisierung zu lösen(Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Johan van Rooij, Jakub Onufry Wojtaszczyk)
- angewendet auf viele verschiedene Probleme (z.B. Longest Path, Steiner Tree, Feedback Vertex Set, uvm.)
- Randomisierung durch Isolation-Lemma
- als Ergebnis ein einseitiger Monte-Carlo-Algorithmus mit Laufzeit $c^{tw(G)}|V|^{\mathcal{O}(1)}$

Cut & Count-Technik

Theorem

There exist Monte-Carlo algorithms that given a tree decomposition of the (underlying undirected graph of the) input graph of width t solve the following problems:

- Steiner Tree in $3^t|V|^{\mathcal{O}(1)}$
- Feedback Vertex Set in $3^t|V|^{\mathcal{O}(1)}$
- ...

The algorithms cannot give false positives and may give false negatives with probability at most $1/2$.

Einschub: Tree Decomposition (1)

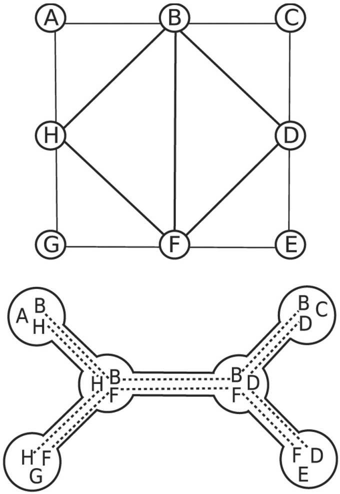
Tree Decomposition

A tree decomposition of a graph G is a tree $\mathbb{T}$ in which each vertex $x \in \mathbb{T}$ has an assigned set of vertices $B_x \subseteq V$ (called a bag) such that $\cup_{x \in \mathbb{T}} B_x = V$ with the following properties:

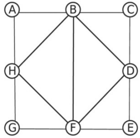
- for any $uv \in E$, there exists an $x \in \mathbb{T}$ such that $u, v \in B_x$
- if $v \in B_x$ and $v \in B_y$, then $v \in B_z$ for all z on the path from x to y in $\mathbb{T}$

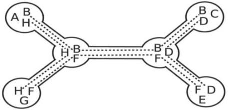
Kann in polynomieller Zeit berechnet werden (Beweis: Ton Kloks. Treewidth, Computations and Approximations, volume 842 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1994)

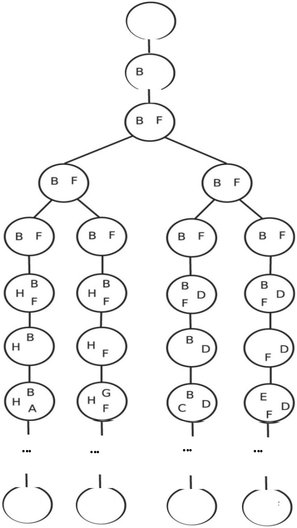
Einschub: Tree Decomposition (2)



Einschub: Nice Tree Decomposition (NTD)







Cut & Count mit Steiner Tree

Steiner Tree

Problem

Input: An undirected graph $G = (V, E)$, a set of terminals $T \subseteq V$ and an integer k.
Question: Is there a set $X \subseteq V$ of cardinality k such that $T \subseteq X$ and $G[X]$ is connected?

Cut (1)

Cut (1)

- definiere zufällige Gewichtsfunktion $\omega : V \to \{1, \ldots, N\}$

Cut (1)

- definiere zufällige Gewichtsfunktion $\omega : V \to \{1, \ldots, N\}$
- sei $\mathcal{R}_W$ die Menge aller Teilmengen von X aus V mit $T \subseteq X$, $\omega(X) = W$ und $|X| = k$

Cut (1)

- definiere zufällige Gewichtsfunktion $\omega : V \to \{1, \ldots, N\}$
- sei $\mathcal{R}_W$ die Menge aller Teilmengen von X aus V mit $T \subseteq X$, $\omega(X) = W$ und $|X| = k$
- sei $\mathcal{S}_W = \{X \in \mathcal{R}_W | G[X] \text{ ist zusammenhängend}\}$

Cut (1)

- definiere zufällige Gewichtsfunktion $\omega : V \rightarrow \{1, \ldots, N\}$
- sei $\mathcal{R}_W$ die Menge aller Teilmengen von X aus V mit $T \subseteq X$, $\omega(X) = W$ und $|X| = k$
- sei $\mathcal{S}_W = \{X \in \mathcal{R}_W | G[X] \text{ ist zusammenhängend}\}$
- $\cup_W \mathcal{S}_W$ ist die Menge der Lösungen

Cut (1)

- definiere zufällige Gewichtsfunktion $\omega : V \rightarrow \{1, \ldots, N\}$
- sei $\mathcal{R}_W$ die Menge aller Teilmengen von X aus V mit $T \subseteq X$, $\omega(X) = W$ und $|X| = k$
- sei $\mathcal{S}_W = \{X \in \mathcal{R}_W | G[X] \text{ ist zusammenhängend}\}$
- $\cup_W \mathcal{S}_W$ ist die Menge der Lösungen
- gibt es ein W für das die Menge nichtleer ist, so gibt der Algorithmus eine positive Antwort

Cut (2)

Cut (2)

- einen beliebigen Terminalknoten $v \in T$ als v_1 festlegen

Cut (2)

- einen beliebigen Terminalknoten $v \in T$ als v_1 festlegen
- sei $\mathcal{C}_W$ die Menge aller Subgraphen, die einen konsistenten Cut $(X, (X_1, X_2))$ bilden, wobei $X \in \mathcal{R}_W$ und $v_1 \in X_1$

Cut (2)

- einen beliebigen Terminalknoten $v \in T$ als v_1 festlegen
- sei $\mathcal{C}_W$ die Menge aller Subgraphen, die einen konsistenten Cut $(X, (X_1, X_2))$ bilden, wobei $X \in \mathcal{R}_W$ und $v_1 \in X_1$

Lemma 3.3

Let $G = (V, E)$ be a graph and let X be a subset of vertices such that $v_1 \in X \subseteq V$. The number of consistently cut subgraphs $(X, (X_1, X_2))$ such that $v_1 \in X_1$ is equal to $2^{cc(G[X])-1}$.

Cut (3) - wozu ω ?

Cut (3) - wozu ω ?

- der Algorithmus (ohne ω) ist korrekt, sofern es **genau eine** oder **keine** Lösung gibt

Cut (3) - wozu ω ?

- der Algorithmus (ohne ω) ist korrekt, sofern es **genau eine** oder **keine** Lösung gibt

Isolation Lemma: Definition 2.4

A function $\omega : U \rightarrow \mathbb{Z}$ isolates a set family $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ if there is a unique $S' \in \mathcal{F}$ with $\omega(S') = min_{S \in \mathcal{S}} \omega(S)$

Cut (3) - wozu ω ?

- der Algorithmus (ohne ω) ist korrekt, sofern es **genau eine** oder **keine** Lösung gibt

Isolation Lemma: Definition 2.4

A function $\omega : U \rightarrow \mathbb{Z}$ isolates a set family $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ if there is a unique $S' \in \mathcal{F}$ with $\omega(S') = min_{S \in \mathcal{S}} \omega(S)$

Isolation Lemma: Lemma 2.5

Let $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ be a set family over a universe U with $|\mathcal{F}| > 0$. For each $u \in U$, choose a weight $\omega(u) \in 1, 2, ..., N$ uniformly and independently at random. Then

$$prob[\omega \text{ isolates } \mathcal{F}] \geq 1 - \frac{|U|}{N}$$

Cut (3) - wozu ω ?

- der Algorithmus (ohne ω) ist korrekt, sofern es **genau eine** oder **keine** Lösung gibt

Isolation Lemma: Definition 2.4

A function $\omega : U \to \mathbb{Z}$ isolates a set family $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ if there is a unique $S' \in \mathcal{F}$ with $\omega(S') = min_{S \in \mathcal{S}} \omega(S)$

Isolation Lemma: Lemma 2.5

Let $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ be a set family over a universe U with $|\mathcal{F}| > 0$. For each $u \in U$, choose a weight $\omega(u) \in 1, 2, ..., N$ uniformly and independently at random. Then

$$prob[\omega \text{ isolates } \mathcal{F}] \geq 1 - \frac{|U|}{N}$$

- mithilfe des Isolation Lemma kann mit hoher Wahrscheinlichkeit eine große Lösungsmenge auf eine einzige reduziert werden

Count (1)

Count (1)

- aus Lemma 3.3 ist bekannt: $|\mathcal{C}| = \sum_{X \in \mathcal{R}} 2^{cc(G[X])-1}$

Count (1)

- aus Lemma 3.3 ist bekannt: $|\mathcal{C}| = \sum_{X \in \mathcal{R}} 2^{cc(G[X])-1}$
- wir legen W fest und ignorieren die Indices:
  $|\mathcal{C}| \equiv |\{X \in \mathcal{R} | cc(G[X]) = 1\}| = |\mathcal{S}|$

Count (1)

- aus Lemma 3.3 ist bekannt: $|\mathcal{C}| = \sum_{X \in \mathcal{R}} 2^{cc(G[X])-1}$
- wir legen W fest und ignorieren die Indices: $|\mathcal{C}| \equiv |\{X \in \mathcal{R} | cc(G[X]) = 1\}| = |\mathcal{S}|$

Lemma 3.4

Let G, ω, $\mathcal{C}_W$ and $\mathcal{S}_W$ be as defined above. Then for every W, $|\mathcal{S}_W| \equiv |\mathcal{C}_W|$.

Count (2)

Count (2)

- $|\mathcal{C}_W|$ modulo 2 kann mit dynamischen Programm auf der NTD $\mathbb{T}$ berechnet werden

Count (2)

- $|\mathcal{C}_W|$ modulo 2 kann mit dynamischen Programm auf der NTD $\mathbb{T}$ berechnet werden
- für jeden Bag $x \in \mathbb{T}$, integers $0 \leq i \leq k, 0 \leq w \leq kN$ und Färbung $s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}$ definiere:

Count (2)

- $|\mathcal{C}_W|$ modulo 2 kann mit dynamischen Programm auf der NTD $\mathbb{T}$ berechnet werden
- für jeden Bag $x \in \mathbb{T}$, integers $0 \leq i \leq k, 0 \leq w \leq kN$ und Färbung $s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}$ definiere:
  - $\mathcal{R}_x(i, w) = \{X \subseteq V_x | (T \cap V_x) \subseteq X \wedge |X| = i \wedge \omega(X) = w\}$

Count (2)

- $|\mathcal{C}_W|$ modulo 2 kann mit dynamischen Programm auf der NTD $\mathbb{T}$ berechnet werden
- für jeden Bag $x \in \mathbb{T}$, integers $0 \leq i \leq k, 0 \leq w \leq kN$ und Färbung $s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}$ definiere:
  - $\mathcal{R}_x(i, w) = \{X \subseteq V_x | (T \cap V_x) \subseteq X \wedge |X| = i \wedge \omega(X) = w\}$
  - $\mathcal{C}_x(i, w) = \{(X, (X_1, X_2)) | X \in \mathcal{R}_x(i, w) \wedge (X, (X_1, X_2))$ is a consistently cut subgraph of $G_x \wedge (v_1 \in V_x \Rightarrow v_1 \in X_1\}$

Count (2)

- $|\mathcal{C}_W|$ modulo 2 kann mit dynamischen Programm auf der NTD $\mathbb{T}$ berechnet werden
- für jeden Bag $x \in \mathbb{T}$, integers $0 \leq i \leq k, 0 \leq w \leq kN$ und Färbung $s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}$ definiere:
  - $\mathcal{R}_x(i, w) = \{X \subseteq V_x | (T \cap V_x) \subseteq X \wedge |X| = i \wedge \omega(X) = w\}$
  - $\mathcal{C}_x(i, w) = \{(X, (X_1, X_2)) | X \in \mathcal{R}_x(i, w) \wedge (X, (X_1, X_2))$ is a consistently cut subgraph of $G_x \wedge (v_1 \in V_x \Rightarrow v_1 \in X_1\}$
  - $\mathcal{A}_x(i, w, s) = |\{(X, (X_1, X_2)) \in \mathcal{C}_x(i, w) | (s(v) = 1_j \Rightarrow v \in X_j) \wedge (s(v) = 0 \Rightarrow v \notin X\}|$

Count (2)

- $|\mathcal{C}_W|$ modulo 2 kann mit dynamischen Programm auf der NTD $\mathbb{T}$ berechnet werden
- für jeden Bag $x \in \mathbb{T}$, integers $0 \leq i \leq k, 0 \leq w \leq kN$ und Färbung $s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}$ definiere:
  - $\mathcal{R}_x(i, w) = \{X \subseteq V_x | (T \cap V_x) \subseteq X \land |X| = i \land \omega(X) = w\}$
  - $\mathcal{C}_x(i, w) = \{(X, (X_1, X_2)) | X \in \mathcal{R}_x(i, w) \land (X, (X_1, X_2))$ is a consistently cut subgraph of $G_x \land (v_1 \in V_x \Rightarrow v_1 \in X_1\}$
  - $\mathcal{A}_x(i, w, s) = |\{(X, (X_1, X_2)) \in \mathcal{C}_x(i, w) | (s(v) = 1_j \Rightarrow v \in X_j) \land (s(v) = 0 \Rightarrow v \notin X\}|$
- Färbung $s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}$ der Knoten aus B_x bzgl. der Menge C_x
  - $s[v] = 0 \Rightarrow v \notin X$
  - $s[v] = 1_1 \Rightarrow v \in X_1$
  - $s[v] = 1_2 \Rightarrow v \in X_2$

Count (3)

Count (3)

- $\mathcal{A}_x(i, w, s)$ zählt verschiedenen Färbungen $\mathcal{C}_x(i, w)$, die entsprechend gefärbt sind

Count (3)

- $\mathcal{A}_x(i, w, s)$ zählt verschiedenen Färbungen $\mathcal{C}_x(i, w)$, die entsprechend gefärbt sind
- $\sum_{s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}} A_x(i, w, s) = |C_x(i, w)|$

Count (3)

- $\mathcal{A}_x(i, w, s)$ zählt verschiedenen Färbungen $\mathcal{C}_x(i, w)$, die entsprechend gefärbt sind
- $\sum_{s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}} A_x(i, w, s) = |C_x(i, w)|$
- für die Lösung nur $A_r(k, W, \emptyset) = |C_r(k, W)| = |C_W|$ interessant (für alle $0 \leq W \leq kN$)

Count (3)

- $\mathcal{A}_x(i, w, s)$ zählt verschiedenen Färbungen $\mathcal{C}_x(i, w)$, die entsprechend gefärbt sind
- $\sum_{s \in \{0, 1_1, 1_2\}^{B_x}} A_x(i, w, s) = |C_x(i, w)|$
- für die Lösung nur $A_r(k, W, \emptyset) = |C_r(k, W)| = |C_W|$ interessant (für alle $0 \leq W \leq kN$)
- ausgehend von Wurzel-Knoten rekursiver Abstieg zu den Blatt-Knoten der NTD

Zusammenfassung

Theorem 3.6

There exists a Monte-Carlo algorithm that given a tree decomposition of width t solves STEINER TREE in $3^t|V|^{\mathcal{O}(1)}$ time. The algorithm cannot give false positives and may give false negatives with probability at most 1/2.

Zusammenfassung

Theorem 3.6

There exists a Monte-Carlo algorithm that given a tree decomposition of width t solves STEINER TREE in $3^t |V|^{\mathcal{O}(1)}$ time. The algorithm cannot give false positives and may give false negatives with probability at most 1/2.

- 3^t kommt von 3 Färbungen im dynamischen Programm

Zusammenfassung

Theorem 3.6

There exists a Monte-Carlo algorithm that given a tree decomposition of width t solves STEINER TREE in $3^t|V|^{\mathcal{O}(1)}$ time. The algorithm cannot give false positives and may give false negatives with probability at most 1/2.

- 3^t kommt von 3 Färbungen im dynamischen Programm
- $|V|^{\mathcal{O}(1)}$ kommt aus k und N als Input

Zusammenfassung

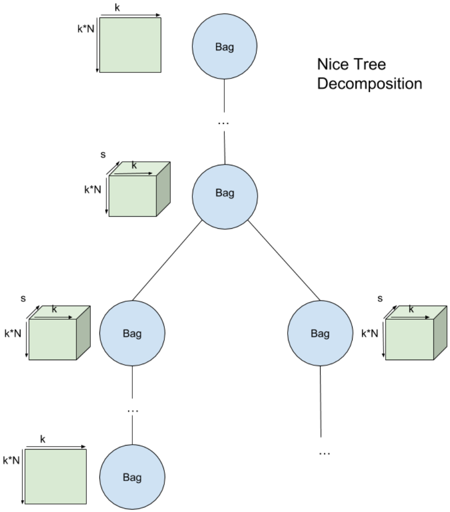
Theorem 3.6

There exists a Monte-Carlo algorithm that given a tree decomposition of width t solves STEINER TREE in $3^t|V|^{\mathcal{O}(1)}$ time. The algorithm cannot give false positives and may give false negatives with probability at most 1/2.

- 3^t kommt von 3 Färbungen im dynamischen Programm
- $|V|^{\mathcal{O}(1)}$ kommt aus k und N als Input
- Wahrscheinlichkeit 1/2 durch Gewichtsfunktion $\omega : V \rightarrow 1, \ldots, N$ und Isolation Lemma

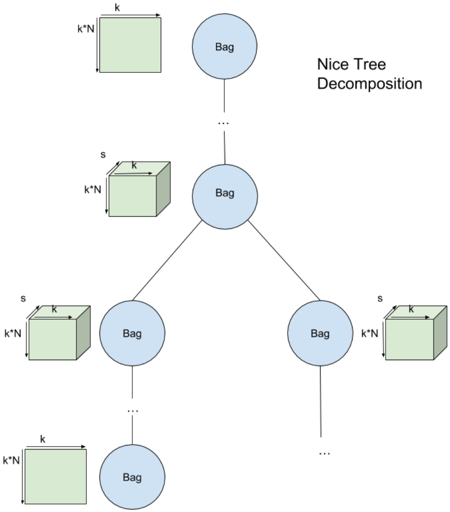
Implementierung

Implementierung (1)



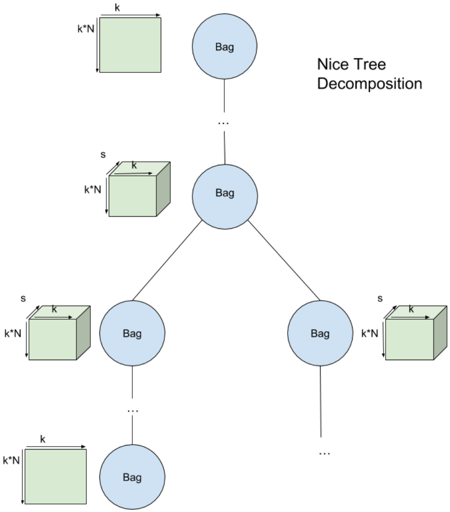
Implementierung (1)

- Inorder-Traversierung der NTD



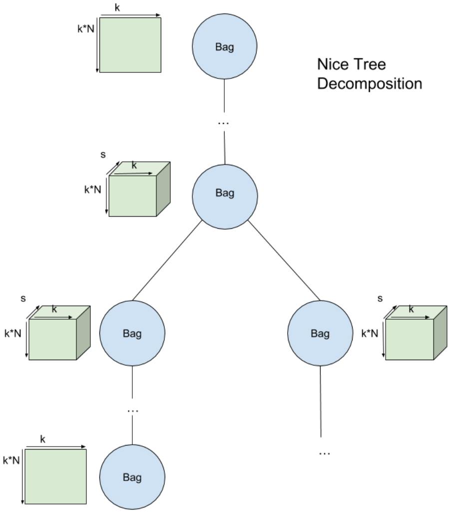
Implementierung (1)

- Inorder-Traversierung der NTD
- Berechnung einer Datenmatrix basierend auf dynamischen Programm und Kind-Knoten



Implementierung (1)

- Inorder-Traversierung der NTD
- Berechnung einer Datenmatrix basierend auf dynamischen Programm und Kind-Knoten
- Wurzel- und alle Blattknoten enthalten 2D Datenmatrix



Implementierung (2)

- Entwicklung einer Umformung von TD $\rightarrow$ NTD

Implementierung (2)

- Entwicklung einer Umformung von TD $\rightarrow$ NTD
- anpassen der Färbungs-Dimension mittels ternärer Kodierung

Implementierung (2)

- Entwicklung einer Umformung von TD $\rightarrow$ NTD
- anpassen der Färbungs-Dimension mittels ternärer Kodierung
- Tests mit verschiedenen Input-Größen

Input	$\varnothing$ **T in** s
(k=2, N= 6, |V|=3)	$\sim$ 0.002
(k=3, N=14, |V|=7)	$\sim$ 0.83
(k=4, N=32, |V|=16)	$\sim$ 14.23

Implementierung (2)

- Entwicklung einer Umformung von TD $\rightarrow$ NTD
- anpassen der Färbungs-Dimension mittels ternärer Kodierung
- Tests mit verschiedenen Input-Größen
- Vorteil:
  - $\mathcal{O}(1)$ Zugriffszeit für alle $i < k$
  - Wahrscheinlichkeit über N steuerbar, aber Datenmatrix wächst schnell !

Input	$\varnothing$ **T in** s
(k=2, N= 6, |V|=3)	$\sim$ 0.002
(k=3, N=14, |V|=7)	$\sim$ 0.83
(k=4, N=32, |V|=16)	$\sim$ 14.23

Fragen?

References

Marek Cygan and Jesper Nederlof and Marcin Pilipczuk and Michal Pilipczuk and Johan M. M. van Rooij and Jakub Onufry Wojtaszczyk (2011)
Solving connectivity problems parameterized by treewidth in single exponential time
CoRR abs/1103.0534.

dynamisches Programm

Berechnungen

- **Leaf bag**:
  - $A_x = (0, 0, \emptyset) = 1$
- **Introduce vertex v**:
  - $A_x = (i, w, s[v \to 0]) = [v \notin T]A_y(i, w, s)$
  - $A_x = (i, w, s[v \to 1_1]) = A_y(i-1, w-w(v), s)$
  - $A_x = (i, w, s[v \to 1_2]) = [v \neq v_1]A_y(i-1, w-w(v), s)$
- **Introduce edge uv**
  - $A_x(i, w, s) = [s(u) = 0 \vee s(v) = 0 \vee s(u) = s(v)]A_y(i, w, s)$
- **Forget vertex v**
  - $A_x(i, w, s) = \sum_{\alpha \in 0, \mathbf{1_1}, \mathbf{1_2}} A_x(i, w, s[v \to \alpha])$
- **Join bag**
  - $A_x(i, w, s) = \sum_{i_1 + i_2 = i + |s^{-1}(1_1, 1_2)|} \sum_{w_1 + w_2 = w + w(s^{-1}(1_1, 1_2))} A_y(i_1, w_1, s)A_z(i_2, w_2, s)$