Alle Zusammengesetzen Zahlen:

$$\bigcup_{i=2}^{n-1}\bigcup_{k=2}^{n+1-i} i\cdot k = \bigcup_{i=3}^{n}\bigcup_{k=2}^{n+2-i}(i-1)\cdot k = \bigcup_{i=3}^{n}\bigcup_{k=2}^{i-1}(n+2-i)\cdot k =: \varphi(n)$$

$$\bigcup_{i=3}^{n}\bigcup_{k=2}^{i-1}(i+1-k)\cdot k =: \psi(n)$$

$zz : \varphi(n) = \psi(n) \forall n \geq 2$

$\varphi(n)$

k \ i	3	4	5	6	7
2	4				
2	6	4			
3		6			
2	8	6	4		
3		9	6		
3			8		
2	10	8	6	4	
3		12	9	6	
4			12	8	
5				10	
2	12	10	8	6	4
3		15	12	9	6
4			16	12	8
5				15	10
6					12

$\psi(n)$

k \ i	3	4	5	6	7
2	4				
2	4	6			
3		6			
2	4	6	8		
3		6	9		
3			8		
2	4	6	8	10	
3		6	9	12	
4			8	12	
5				10	
2	4	6	8	10	12
3		6	9	12	15
4			8	12	16
5				10	15
6					12

Induktion über n:

Base Case: $n = 3$

$$\varphi(3) = \bigcup_{i=3}^{3}\bigcup_{k=2}^{i-1}(n+2-i)\cdot k = \{4\} = \bigcup_{i=3}^{3}\bigcup_{k=2}^{i-1}(i+1-k)\cdot k = \psi(3)$$

Induktionsvorraussetzung:

$\varphi(n-1) = \bigcup\limits_{i=3}^{n-1} \bigcup\limits_{k=2}^{i-1} (n+2-i) \cdot k = \bigcup\limits_{i=3}^{n-1} \bigcup\limits_{k=2}^{i-1} (i+1-k) \cdot k = \psi(n-1)$

Induction Step: $n-1 \to n$

$\psi(n) = \bigcup\limits_{i=3}^{n} \bigcup\limits_{k=2}^{i-1} (i+1-k) \cdot k = \psi(n-1) \cup \bigcup\limits_{k=2}^{n-1} (n+1-k) \cdot k$
$\varphi(n) = \bigcup\limits_{i=3}^{n} \bigcup\limits_{k=2}^{i-1} (n+2-i) \cdot k = \varphi(n-1) \cup \bigcup\limits_{i=3}^{n} (n+2-i) \cdot (i-1)$
$\bigcup\limits_{i=3}^{n} (n+2-i) \cdot (i-1) = \bigcup\limits_{i=2}^{n-1} (n+2-(i+1)) \cdot ((i+1)-1) = \bigcup\limits_{i=2}^{n-1} (n+1-i) \cdot i = \bigcup\limits_{k=2}^{n-1} (n+1-k) \cdot k$
$\Rightarrow \varphi(n) = \psi(n)$
$\square$

Anwendungen:
$\pi(n) = |\{2, ..., n\} \setminus \psi(n)|$
$G(n) = |\{2, ..., n\} \setminus \bigcup\limits_{b=0}^{1} \bigcup\limits_{i=3}^{n} \bigcup\limits_{k=2}^{i-1} n + (-1)^b \cdot (n - (i+1-k) \cdot k)|$
$\psi_c(n) = \bigcup\limits_{j=2-c}^{1} \bigcup\limits_{i=3}^{n} \bigcup\limits_{k=2}^{i-1} c \cdot (i + \frac{j}{c} - k) \cdot k$
$\pi_c(n) = |\{2, ..., n\} \setminus \psi_c(n)|$
$G_c(n) = |\{2, ..., n\} \setminus \bigcup\limits_{b=0}^{1} \bigcup\limits_{j=2-c}^{1} \bigcup\limits_{i=3}^{n} \bigcup\limits_{k=2}^{i-1} n + (-1)^b \cdot (n - c \cdot (i + \frac{j}{c} - k) \cdot k)|$
$\pi(n) = \pi_c(n) \forall_{n \in \mathbb{N}}$

Aufgabe 9

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$
zz:
$f \in \Theta(g) \iff f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$
Beweis:

'$\Leftarrow$'
Sei $f \in O(g)$ und $f \in \Omega(g)$, d.h.
$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_o \Rightarrow f(n) \leq c_1 \cdot g(n))$ und
$\exists c_2 \in \mathbb{R}^+ : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_1 \Rightarrow f(n) \geq c_2 \cdot g(n))$

Wähle $n_2 := max(n_0, n_1)$.

Dann gilt:
$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_2 \Rightarrow c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n)) \Rightarrow f \in \Theta(g)$

'$\Rightarrow$'
Sei $f \in \Theta(g)$, d.h.
$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_2 \Rightarrow c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n))$

Wähle $n_0 := n_2$ und $n_1 := n_2$.
Dann gilt:
$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_o \Rightarrow f(n) \leq c_1 \cdot g(n))$ und
$\exists c_2 \in \mathbb{R}^+ : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_1 \Rightarrow f(n) \geq c_2 \cdot g(n))$
Also $f \in O(g)$ und $f \in \Omega(g)$

q.e.d.

Aufgabe 10

a)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto (n+1)^2$
zz:
$f \in O(n^2)$
Beweis:

Wähle $c := 3$ und $n_0 := 2$
IA:
$(2+1)^2 = 3^2 = 9 \leq 12 = 3 \cdot 2^2$
IV:
$(n+1)^2 \leq 3 \cdot n^2$
IS: $n \to n+1$
$((n+1)+1)^2 =$
$(n+1)^2 + 2 \cdot (n+1) + 1 \leq (IV)$
$3n^2 + 2 \cdot (n+1) + 1 \leq$
$3n^2 + 6 \cdot (n+1) + 1 =$
$3 \cdot (n+1)^2$
q.e.d.

b)

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, n \mapsto \begin{cases} n^2 + 15 & \text{, falls n gerade} \\ 16n & \text{, sonst} \end{cases} \tag{1}$$

zz:
$f \in O(n^2)$
Beweis:
Wähle $c := 2$ und $n_0 := 8$
n gerade:
$n^2 + 15 \leq 2n^2$
$\Leftrightarrow 1 + \frac{15}{n^2} \leq 2$ (gilt für $n \geq 4$)
n ungerade:
$16n \leq 2n^2$
$\Leftrightarrow 16 \leq 2n$ (gilt für $n \geq 8$)

q.e.d.

Aufgabe 11

a)

b)

Nein, Gegenbeispiel:

$f_1(n) = n^2$
$g_1(n) = n$
$f_2(n) = n^2$
$g_2(n) = n^2$
Nun gilt:
$(f_1 + f_2) \in O(max(g_1, g_2))$
jedoch
$f_1 \notin O(g_1)$

Aufgabe 12

a)

Definition 1.

$$O(g) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ | \exists c \in \mathbb{R}^+ : (\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq c \cdot g(n))))\} \tag{1}$$

$\Leftrightarrow$

$$O(g) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ | \exists c \in \mathbb{R}^+ : (\forall n \in \mathbb{N} : (f(n) \leq c \cdot g(n)))\} \tag{2}$$

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$
Setze $c' := max(\frac{g(1)}{f(1)}, \frac{g(2)}{f(2)}, ..., \frac{g(n_0)}{f(n_0)}, c)$
$2 \Rightarrow 1$
Setze $n_0 := 1$

q.e.d.

b)