Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

23. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Wiederholung 6
   - 1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln 6
   - 1.2. Komplexe Zahlen 7
     - 1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen 7
     - 1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander 7
     - 1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen 8
   - 1.3. Sinus Kardinalis 8

I. Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen 9

2. Verallgemeinerte Funktionen 10
   - 2.1. Heaviside-Funktion 10
   - 2.2. Dirac-Distribution 11
   - 2.3. Verallgemeinerte Ableitung 11
     - 2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen 12
   - 2.4. Faltung 12
   - 2.5. Faltung mit $\sigma(t)$ 12
   - 2.6. Faltung mit $\delta(t)$ 13
   - 2.7. Einseitige Faltung 13

3. Fourier-Transformation 14
   - 3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen 14
   - 3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen 15
   - 3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel 15
   - 3.4. Inverse Fourier-Transformation 16

4. Laplacetransformation 17

5. z-Transformation 19

II. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung 20

6. Beschreibende Statistik 21

7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung 22
7.1. Kombinatorik 22
7.1.1. Permutation 22
7.2. Kombination und Variation 22
7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung 24
7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen 24
Allgemeine Form 24
Hypergeometrische Verteilung 25
Binomialverteilung 26
Poissonverteilung 27
Geometrische Verteilung 27
Quantile und Zufallsstreubereich der Normalverteilung 28

8. Anhang 30
A. Tabellen aus Buch von Prof. Koch und Prof. Stämpfle 30

Kapitel 1.

Grundlagen und Wiederholung

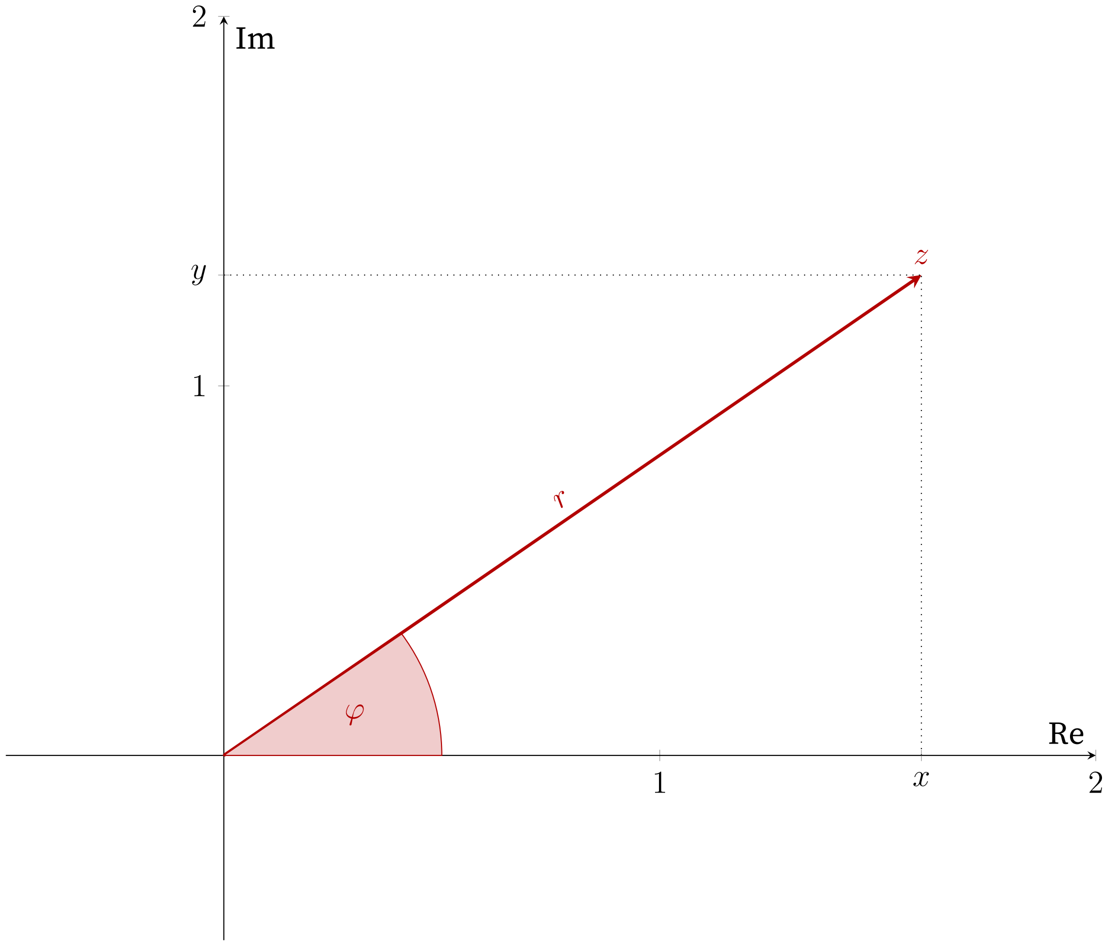
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \tfrac{\sin x}{\cos x} \\
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\[1em]
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\tan(x \pm y) &= \tfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \tfrac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} \\[1em]
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\tan(2x) &= \tfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}
\end{aligned}
$$

1.2. Komplexe Zahlen

1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form:	$z = x + \mathrm{j}y$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r\cos\varphi + \mathrm{j}r\sin\varphi$
Exponentialform:	$re^{\mathrm{j}\varphi}$



1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$z = r\cos\varphi + \mathrm{j}r\sin\varphi = re^{\mathrm{j}\varphi}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \text{ bel.} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}}$$

1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

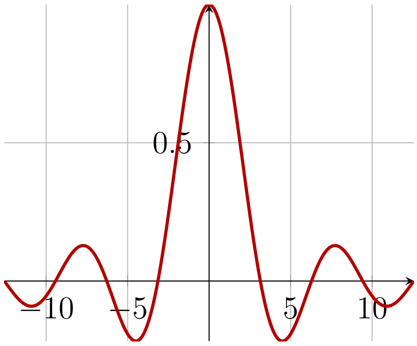
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{\mathrm{j}\varphi} + e^{-\mathrm{j}\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\mathrm{j}\varphi} - e^{-\mathrm{j}\varphi}}{2\mathrm{j}}}$$

1.3. Sinus Kardinalis

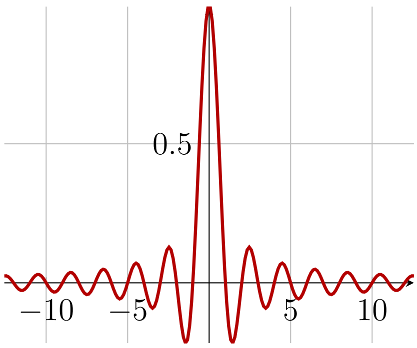
Der Sinus Kardinals $\mathrm{si}(x)$ ist definiert als

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die $\mathrm{sinc}(x)$-Funktion. Sie ist definiert als:

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



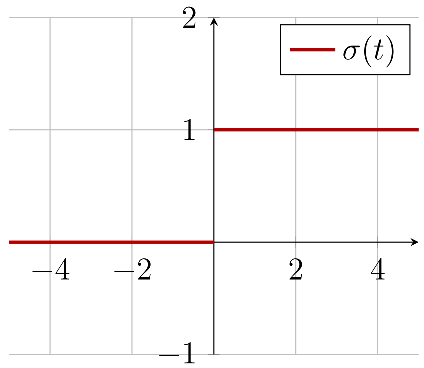
Teil I.

Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen

Kapitel 2.

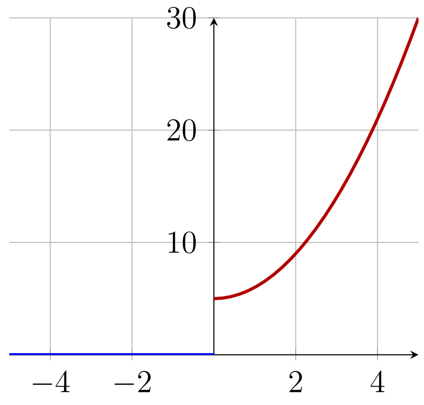
Verallgemeinerte Funktionen

2.1. Heaviside-Funktion



Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

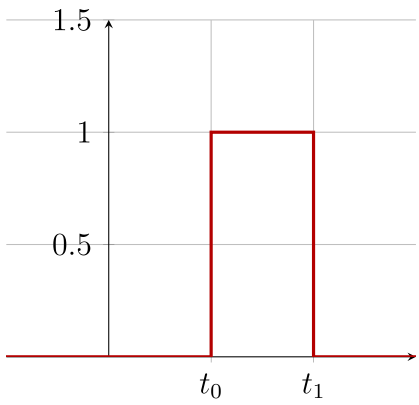
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$



Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.

Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

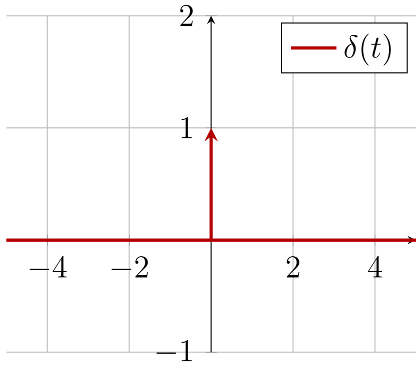
$$\boxed{r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)}$$



2.2. Dirac-Distribution

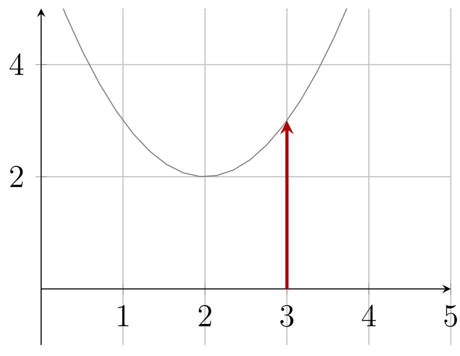
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \backslash 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen ∞.

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt t_0 multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle t_0 ausgeblendet!**



$((t - 2)^2 + 2) \cdot \delta(t - 3)$

2.3. Verallgemeinerte Ableitung

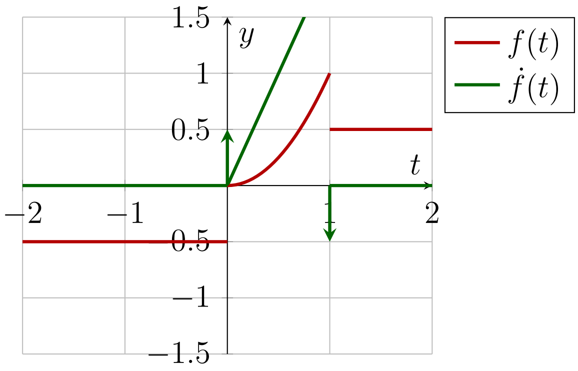
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!

2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der x-Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

2.4. Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function g as it is shifted over another function f." (http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html)

Die Faltung ist definiert durch:

$$\boxed{h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau}$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion $h(t)$. τ ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf t ab.

2.5. Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

2.6. Faltung mit $\delta(t)$

Wird eine Funktion $f(t)$ mit der Dirac-Distribution $\delta(t)$ gefaltet, so ergibt sich:

$$f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

Dies haben wir den Ausblendeigenschaften der Dirac-Distribution zu verdanken.

2.7. Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen $f(t)$ und $g(t) = 0$ für $x \leq 0$, so ergibt sich das Faltungsintegral:

$$f(t) \star g(t) = \int_{0}^{t} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$$

Kapitel 3.

Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$\boxed{s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-\mathrm{j}2\pi f t} dt}$$

3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \cos(2\pi f t)\ dt \\ \mathrm{Im}(z) &= -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \sin(2\pi f t)\ dt \end{aligned}}$$

3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von $-\infty$ bis ∞ integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis ∞ mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$\boxed{S(f) = \text{Re}(f) = 2\int_0^\infty s(t)\ \cos(2\pi ft)dt}$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$\boxed{S(f) = \text{j}\,\text{Im}(f) = -2\text{j}\int_0^\infty s(t)\ \sin(2\pi ft)dt}$$

3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$\boxed{S(f) = |S(f)|e^{\text{j}\varphi(f)}}$$

Dabei ist

- Die Amplitude $|S(f)| = \sqrt{\text{Re}(f)^2 + \text{Im}(f)^2}$ eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\text{Re}(f) + \text{j}\,\text{Im}(f))$ eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

3.4. Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransormierten Funktion $S(f)$ die Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten muss $S(f)$ **rücktransformiert** werden:

$$\boxed{S(f) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{\mathrm{j}2\pi f} df}$$

Kapitel 4.

Laplacetransformation

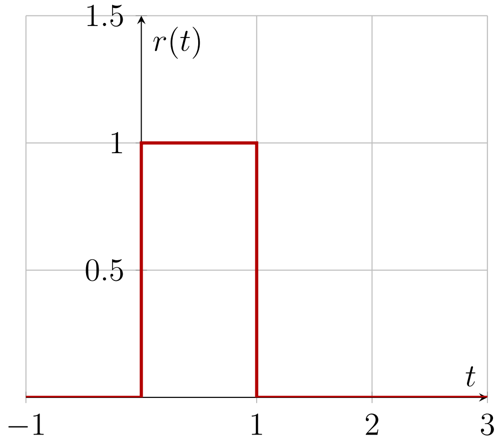
Die Berechnung der Laplace-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Standardrechteck im Laplacebereich

Das Standardrechteck $r(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$ entspricht im Laplacebereich

$$\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1 - e^{-s}}{s}$$



Eingangssignal, Ausgangssignal, Impulsantwort

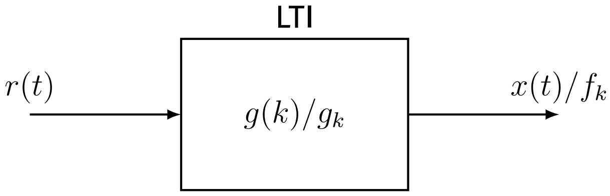
Eine inhomogene Differential- oder Differenzengleichung mit Stöfunktion $r(t) \neq 0$ besitzt das **Eingangssignal $r(t)$**. Sie besitzt die Lösung $x(t)$ bzw. f_k.
Ist nun noch auch die Impulsantwort $g(k)/g_k$ des Systems bekannt, so gilt:

$$x(t) = g(k) \star r(t)$$

bzw.

$$f_k = g_k \star r(t)$$

Die Ausgangsfunktion entspricht demnach der Faltung der Störfunktion $r(t)$ mit der Impulsantwort $g(k)/g_l k$.



Kapitel 5.

z-Transformation

Teil II.

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kapitel 6.

Beschreibende Statistik

Kapitel 7.

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1. Kombinatorik

7.1.1. Permutation

Permutation ohne Wiederholung:	$n!$
Permutation mit Wiederholung:	$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$

7.2. Kombination und Variation

Kombinationen werden verwendet, wenn **nur einige** der Elemente in einer Menge angeordnet werden sollen. Permutationen hingegen ordnen **alle** Elemente an.

Urnenmodell: Ziehen von k aus n	Anzahl Möglichkeiten	Name Vorlesung	typische Beispiele
ohne Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n}{k}$	Kombination verschiedene Elemente	a) Lotto: 6 aus 49 b) k Personen aus n (Arbeitsgruppe)
mit Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n+k-1}{k}$	Kombination Elemente mehrfach	a) Widerstände parallel b) 2 T-Shirts aus 5 Farben auswählen
ohne Zurücklegen; geordnet	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Variation verschiedene Elemente Spezialfall: $n = k$ Permutation	a) Siegerpodest b) Rangreihenfolge Auswahl Studierende c) Zieleinlauf insgesamt
mit Zurücklegen; geordnet	n^k	Variation Elemente mehrfach	a) Binäre Ziffernfolge b) Wörter aus 7 Buchstaben

7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Allgemeine Form

Dichtefunktion:
Funktion, bei der auf der x-Achse alle Elemente mit der auf der y-Achse aufgetragenen Wahrscheinlichkeit gezeichnet sind. Es ergibt sich ein Säulendiagramm.
Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k}^{x}(k \cdot P(X = k))$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \sum_{k} k \cdot P(X = k)$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{k} (k^2 \cdot P(X = k)) - \mu^2$$

Hypergeometrische Verteilung

Beschreibung: Ziehen ohne Zurücklegen $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit verändert sich im Verlauf des Experiments
Es müssen folgende Variablen (bis auf k) gegeben sein:

N	Anzahl aller Elemente
M	Anzahl Elemente mit bestimmter Eigenschaft
n	Anzahl Elemente in der Stichprobe
k	Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim H(k, n, N, M)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \mathrm{H}(k, n, N, M)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Binomialverteilung

Beschreibung: Ziehen **mit** zurücklegen $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit bleibt während dem Experiment gleich
Es müssen folgende Variablen gegeben sein:

p	Anteil der Elemente/ Wahrscheinlichkeit beim Ziehen **eines** Elementes aus der Grundgesamtheit
n	Anzahl Elemente in der Stichprobe
k	Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim \mathrm{B}(k, n, p)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Verteilungsfunktion: Hier müssen die einzelnen Dichtefunktionen berechnet werden

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \mathrm{B}(k, n, p)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Annäherung der Hypergeometrischen Verteilung durch Binomialverteilung:
Falls $\frac{n}{N} \leq 0.1$ kann der Parameter p durch $p = \frac{M}{N}$ angenähert werden.

Poissonverteilung

Beschreibung: Gegeben ist ein Durchschnittswerts (*Erwartungswert*) λ pro einer gewissen Einheit (z.B. im Durchschnitt 3 Anrufe in 5 Minuten). Die Poissonverteilung soll berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist einen anderen Wert k als Ergebnis zu erhalten.
Dichtefunktion:

$$X \sim \text{Po}(k, \lambda)$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \text{Po}(k, \lambda)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

Annäherung der Binomialverteilung durch Poissonverteilung:
Wenn n groß und p klein ist ($n \geq 30, p \leq 0.1$) kann der Parameter λ durch $\lambda = n \cdot p$ angenähert werden.

Geometrische Verteilung

Beschreibung: Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg (p, Misserfolg $q = 1-p$). Die geometrische Verteilung berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k Versuche benötigt werden um zum ersten Erfolg zu kommen; dass man also **beim** k-ten Versuch Erfolg hat.
Dichtefunktion:

$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

Verteilungsfunktion:

$$P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{p}$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2}$$

Quantile und Zufallsstreubereich der Normalverteilung

Quantile berechnen einen bestimmten Prozentsatz der Fläche unter der Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable.

Bsp. das 95% Quantil wird geschrieben als

$$\boxed{q_{0.95} = \mu + z_{0.95} \cdot \sigma}$$

Das bedeutet, dass 95% der Werte unterhalb des Wertes $q_{0.95}$ liegen.

Die Werte für z_m sind tabelliert, können jedoch auch mit dem Taschenrechner (mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$) berechnet werden:

m	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
z_m	0.842	1.282	1.654	1.960	2.326	2.576	3.090

Der Zufallsstreubereich (ZSB) Ist ein Intervall, das zwei Quantile berechnet. ZSBs können nach unten, nach oben oder zweiseitig beschränkt sein. Der Zufallsstreubereich kann für ein gegebenes μ oder für den arithmetischen Mittelwert $\overline{X}$ eines gegebenen Datensatzes berechnet werden.

Es sei p die gegebene Wahrscheinlichkeit/die gewünschte Fläche unter der Verteilungsfunktion für das Quantil oder den ZSB. Wir definieren α als den Kehrwert $\alpha = \mathbf{1} - \mathbf{p}$ von p.

Soll nun ein ZSB berechnet werden so passiert dies über die Formeln:

Nach oben beschränkt	$(-\infty\ ;\ q_{1-\alpha}]$	$=$	$(-\infty\ ;\ \mu + z_{1-\alpha} \cdot \sigma]$
Nach unten beschränkt	$[q_\alpha\ ;\ \infty)$	$=$	$[\mu - z_{1-\alpha} \cdot \sigma\ ;\ \infty)$
Beidseitig beschränkt	$[q_{\frac{\alpha}{2}}\ ;\ q_{1-\frac{\alpha}{2}}]$	$=$	$[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\ ;\ \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma]$

Auch hier kann der **Taschenrechner** eingesetzt werden (InvNormal). Hier sind die Werte **Area, $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\sigma}$** verlangt. μ und σ sind meist in der Aufgabenstellung gegeben, für Area muss:

einseitiger Grenzwert:		
	nach oben beschränkt:	p
	nach unten beschränkt:	α
zweiseitiger Grenzwert:		
	untere Grenze:	$\frac{\alpha}{2}$
	obere Grenze:	$1-\frac{\alpha}{2}$

Ist ein Datensatz mit n Elementen gegeben, so ändern sich die Formeln zu:

Nach oben beschränkt	$(-\infty\ ;\ q_{1-\alpha}]$	$=$	$\left(-\infty\ ;\ \mu + z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Nach unten beschränkt	$[q_\alpha\ ;\ \infty)$	$=$	$\left[\mu - z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \infty\right)$
Beidseitig beschränkt	$[q_{\frac{\alpha}{2}}\ ;\ q_{1-\frac{\alpha}{2}}]$	$=$	$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Nun muss selbstverständlich für σ in der InvNormal-Funktion $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ eingegeben werden.

A.2 Trigonometrische Funktionen

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+
$\tan x$	+	−	+	−

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Verschiebung des Sinus	Verschiebung des Kosinus
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$	$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
$\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x$
$\sin(x\pm\pi) = -\sin x$	$\cos(x\pm\pi) = -\cos x$
$\sin(\pm\pi-x) = \sin x$	$\cos(\pm\pi-x) = -\cos x$

Additionstheoreme	Doppelwinkelformeln
$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$	$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$	$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\tan(x\pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$	$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\cot(x\pm y) = \dfrac{\cot x\cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$	$\cot(2x) = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$

A.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a^x \quad (a>0)$	$(\ln a)\, a^x$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a\, x^{a-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
		$\log_a x \quad (a>0, a \neq 1)$	$\frac{1}{(\ln a)\, x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$
$\cot x$	$-1-\cot^2 x$	$\coth x$	$1-\coth^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

A.4 Ableitungsregeln

Regel	Formel
Faktorregel	$(C\, f(x))' = C\, f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))' = f'(u(x))\cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$

A.5 Integrale

Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)	Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert x\rvert$	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$	$= \mathrm{e}^x$
$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}$	$\int a^x\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{\ln a}\,a^x \quad (a > 0)$
$\int x^a\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a+1}\,x^{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \ln x\,\mathrm{d}x$	$= x\,(\ln x - 1)$
		$\int \log_a x\,\mathrm{d}x$	$= x\,(\log_a x - \log_a \mathrm{e}) \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x$	$= -\cos x$	$\int \sinh x\,\mathrm{d}x$	$= \cosh x$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x$	$= \sin x$	$\int \cosh x\,\mathrm{d}x$	$= \sinh x$
$\int \tan x\,\mathrm{d}x$	$= -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\int \tanh x\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert\cosh x\rvert$
$\int \cot x\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert\sin x\rvert$	$\int \coth x\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert\sinh x\rvert$
$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$	$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arsinh} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$
$\int \arccos x\,\mathrm{d}x$	$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arcosh} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$
$\int \arctan x\,\mathrm{d}x$	$= x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{artanh} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{artanh} x + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$
$\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{arcoth} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arcoth} x + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$
$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert x-a\rvert$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$	$= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$	$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert ax^2+bx+c\rvert \quad (a \neq 0)$
$\int x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{ax-1}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}$	$\int x^2\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}\,\mathrm{e}^{ax}$
$\int x\,\sin ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$	$\int x\,\cos ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$
$\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{2x}{a^2}\sin ax - \frac{a^2x^2-2}{a^3}\cos ax$	$\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{2x}{a^2}\cos ax + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax$
$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$	$= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$	$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$	$= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$
$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$	$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x$	$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$	$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x$

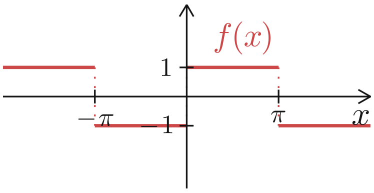
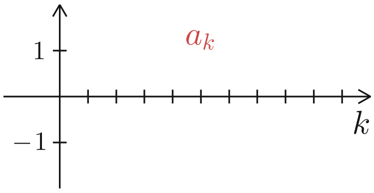
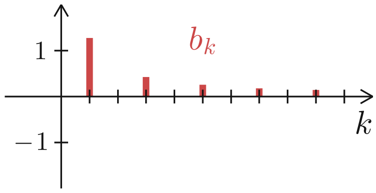
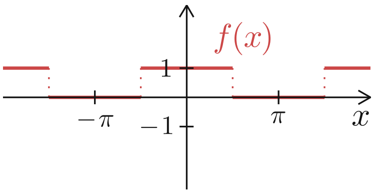
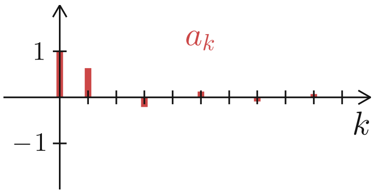
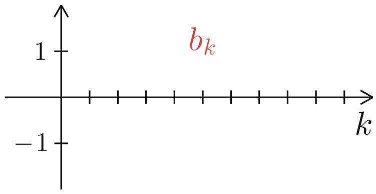
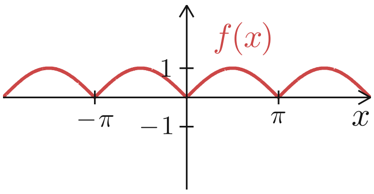
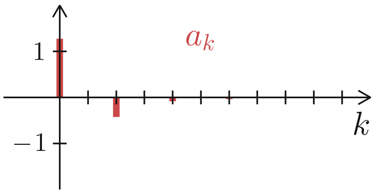
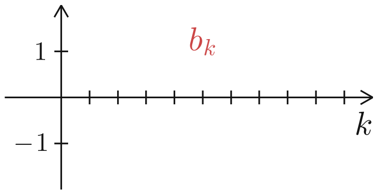
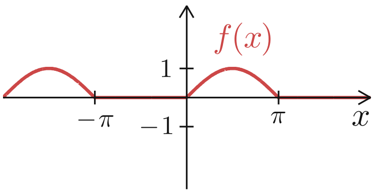
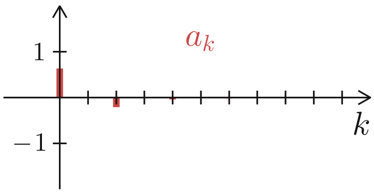
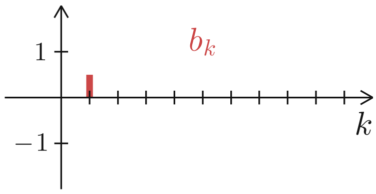
A.6 Integralregeln

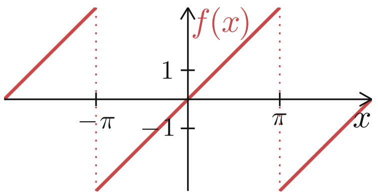
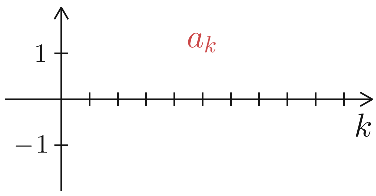
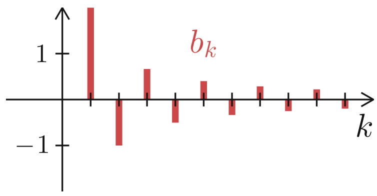
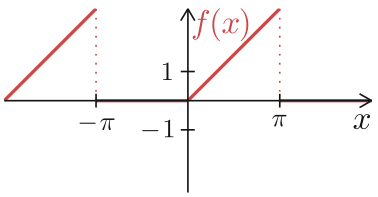
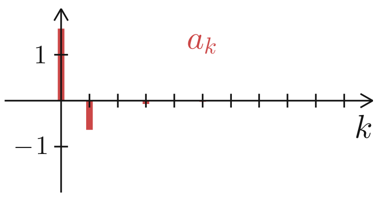
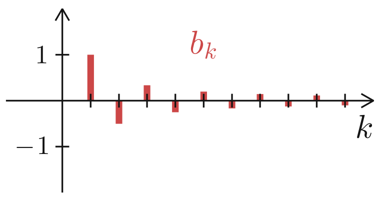
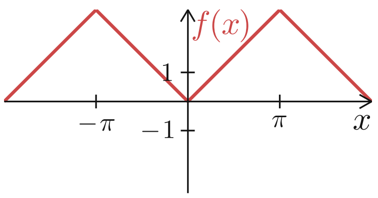
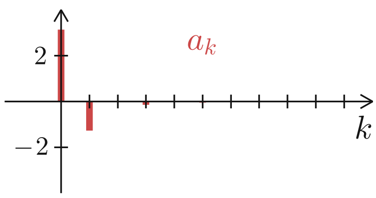
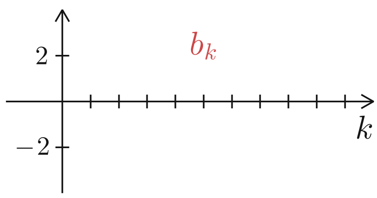
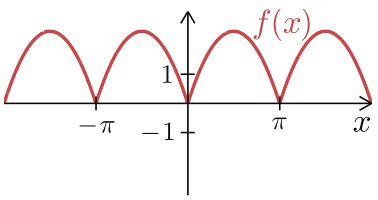
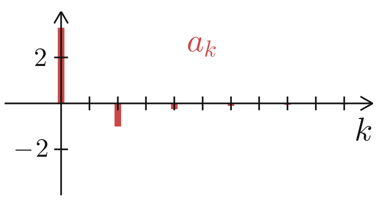
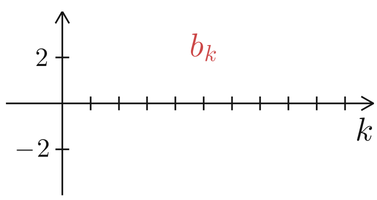
Regel	Formel
Faktorregel	$\int C\,f(x)\,\mathrm{d}x = C\int f(x)\,\mathrm{d}x$
Summenregel	$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
Substitution	$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$
	$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$
	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert$
Partielle Integration	$\int f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$
Vertauschen	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
Integrationsbereich	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Hauptsatz I	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(t)$
Hauptsatz II	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

A.7 Potenzreihen

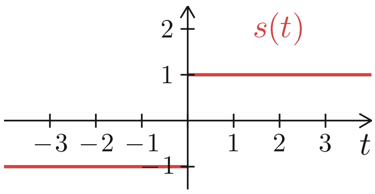
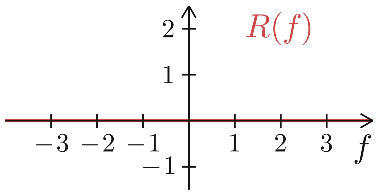
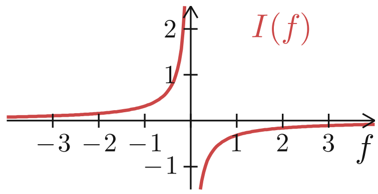
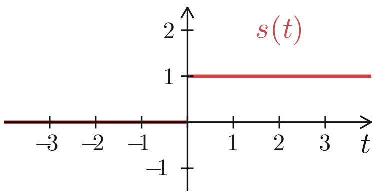
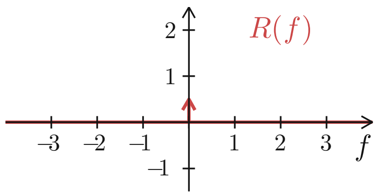
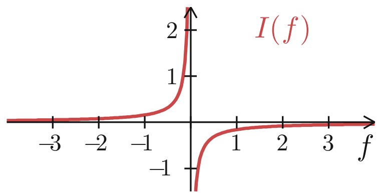
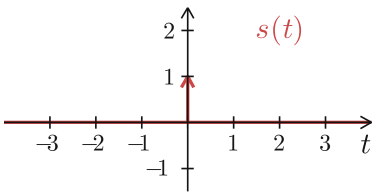
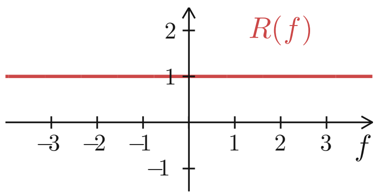
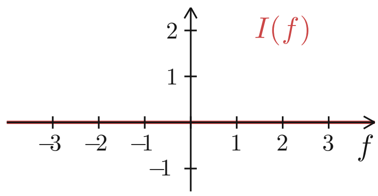
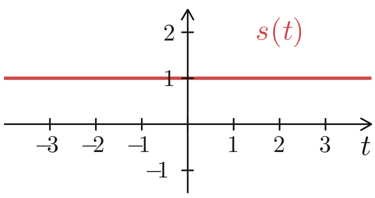
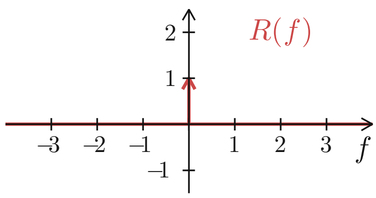
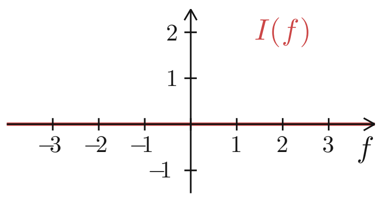
Funktion	Potenzreihe		Konvergenzradius
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$	1
e^x	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	∞
$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$	1
$\sin x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$	∞
$\cos x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$	∞
$\arctan x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots$	1
$\sinh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$	∞
$\cosh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$	$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$	∞

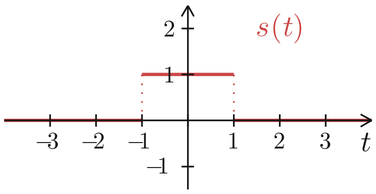
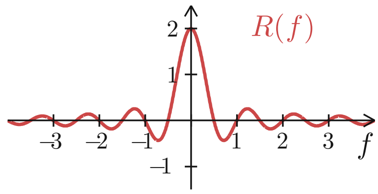
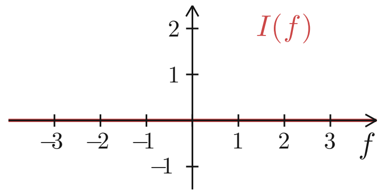
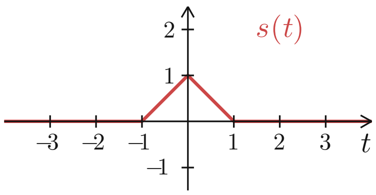
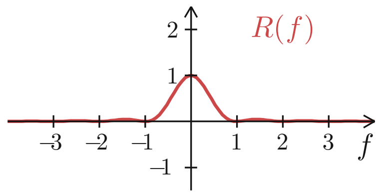
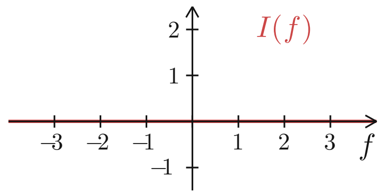
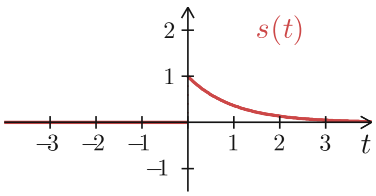
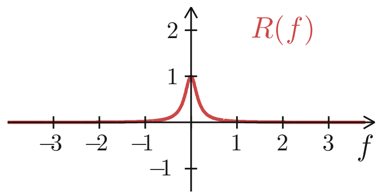
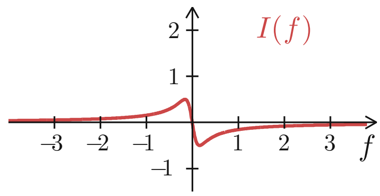
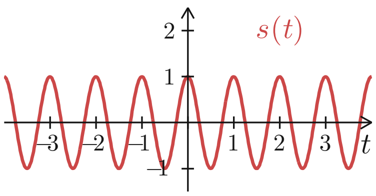
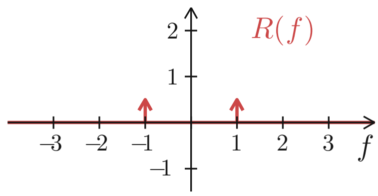
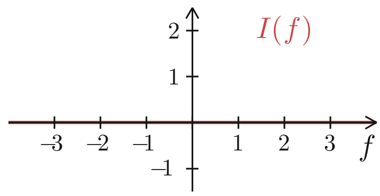
A.8 Fourier-Reihen

Funktion	Fourier-Reihe	
		
$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$	
		
$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$	$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \ldots\right)$	
		
$f(x) = \lvert \sin x \rvert \quad -\pi \leq x < \pi$	$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$	
		
$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right) + \frac{\sin x}{2}$	

Funktion	Fourier-Reihe
 $f(x) = x \quad -\pi \le x < \pi$	  $f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \ldots\right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$	  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \ldots$
 $f(x) = \lvert x \rvert \quad -\pi \le x < \pi$	  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$
 $f(x) = \begin{cases} -x(x+\pi) & -\pi \le x < 0 \\ -x(x-\pi) & 0 \le x < \pi \end{cases}$	  $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$

A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$	
		
$s(t) = \operatorname{sgn}(t)$	$S(f) = -\mathrm{i}\,\dfrac{1}{\pi f}$	
		
$s(t) = \sigma(t)$	$S(f) = \dfrac{1}{2}\,\delta(f) - \mathrm{i}\,\dfrac{1}{2\pi f}$	
		
$s(t) = \delta(t)$	$S(f) = 1$	
		
$s(t) = 1$	$S(f) = \delta(f)$	

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$	
		
$s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$	$S(f) = 2\,\dfrac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$	
		
$s(t) = (1+t)\big(\sigma(t+1) - \sigma(t)\big) + (1-t)\big(\sigma(t) - \sigma(t-1)\big)$	$S(f) = \left(\dfrac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2$	
		
$s(t) = \mathrm{e}^{-t}\sigma(t)$	$S(f) = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}\,2\pi f} = \dfrac{1}{1+4\pi^2 f^2} - \mathrm{i}\,\dfrac{2\pi f}{1+4\pi^2 f^2}$	
		
$s(t) = \cos(2\pi t)$	$S(f) = \dfrac{1}{2}\big(\delta(f-1) + \delta(f+1)\big)$	

A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\, s_1(t) + C_2\, s_2(t)$	$C_1\, S_1(f) + C_2\, S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\,\pi\, f\, t_0}\, S(f)$
Frequenzverschiebung	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, 2\,\pi\, f_0\, t}\, s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t)\, \cos(2\,\pi\, f_0\, t)$	$\frac{1}{2}\left(S(f - f_0) + S(f + f_0)\right)$
Ähnlichkeit	$s(a\, t)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}\, S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in t	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ $\vdots$ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, t^n} s(t)$	$\mathrm{i}\, 2\,\pi\, f\, S(f)$ $(\mathrm{i}\, 2\,\pi\, f)^2\, S(f)$ $\vdots$ $(\mathrm{i}\, 2\,\pi\, f)^n\, S(f)$
Differenziation in f	$(-\mathrm{i}\, 2\,\pi\, t) s(t)$ $(-\mathrm{i}\, 2\,\pi\, t)^2 s(t)$ $\vdots$ $(-\mathrm{i}\, 2\,\pi\, t)^n s(t)$	$S'(f)$ $S''(f)$ $\vdots$ $S^{(n)}(f)$
Multiplikation in t	$t\, s(t)$ $t^2\, s(t)$ $\vdots$ $t^n\, s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-\mathrm{i}\, 2\,\pi}$ $\vdots$ $\frac{S^{(n)}(f)}{(-\mathrm{i}\, 2\,\pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, \mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{\mathrm{i}\, 2\,\pi\, f}\, S(f) + \frac{1}{2}\, S(0)\, \delta(f)$
Faltung in t	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in f	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\,\sin at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\,\cos at$
$\frac{a}{s(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-1$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\,\sinh at$
$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	$\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\,\cosh at$
$\frac{a}{1+as}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\,\sin at$
$\frac{a^2}{(1+as)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\,\cos at$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$	$t\,\sinh at$
$\frac{a-b}{(1+as)(1+bs)}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}\quad(a,b\neq 0)$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\,\cosh at$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)\mathrm{e}^{at}$	$\frac{2}{(s-a)^3}$	$t^2\,\mathrm{e}^{at}$
$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	$a\,\mathrm{e}^{at}-b\,\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{2s}{(s-a)^3}$	$(at^2+2t)\mathrm{e}^{at}$
$\frac{a^3\,s}{(1+as)^2}$	$(a-t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\frac{2s^2}{(s-a)^3}$	$(a^2t^2+4at+2)\mathrm{e}^{at}$
$\frac{ab(a-b)s}{(1+as)(1+bs)}$	$a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}-b\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\ (a,b\neq 0)$	$\frac{a^2}{s^2(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-at-1$

A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\, f_1(t) + C_2\, f_2(t)$	$C_1\, F_1(s) + C_2\, F_2(s)$
Ähnlichkeit $(a > 0)$	$f(a\,t)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$\sigma(t - t_0)\, f(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-t_0\, s}\, F(s)$
Dämpfung	$\mathrm{e}^{-s_0\, t}\, f(t)$	$F(s + s_0)$
Differenziation in t	$f'(t)$	$s\,F(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n\, F(s) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\, f^{(k)}(0)$
Differenziation in s	$-t\, f(t)$	$F'(s)$
	$t^2\, f(t)$	$F''(s)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$(-t)^n\, f(t)$	$F^{(n)}(s)$
Multiplikation mit t	$t\, f(t)$	$-F'(s)$
	$t^2\, f(t)$	$F''(s)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$t^n\, f(t)$	$(-1)^n\, F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{s}\, F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}\, f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}\,u$
Faltung im Zeitbereich	$f_1(t) \star f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Periodische Funktion	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-T\,s}} \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t$

A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)	Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)
1	δ_k	$\frac{1}{z^n}$	1 für $k = n$, 0 sonst
$\frac{z}{z-1}$	1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	k
$\frac{z}{z-a}$	a^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$k\,a^k$

A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

Eigenschaft	Zeitfolge	Bildfunktion
Linearität	$C_1\,(f_k) + C_2\,(g_k)$	$C_1\,F(z) + C_2\,G(z)$
Dämpfung	$(a^{-k}\,f_k)$	$F(a\,z)$
Indexverschiebung	(f_{k-n})	$z^{-n}F(z)$
	(f_{k+1})	$z(F(z) - f_0)$
	(f_{k+2})	$z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$
	$\vdots$	$\vdots$
	(f_{k+n})	$z^n\left(F(z) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}\right)$
Differenzen	$(\triangle\,f_k)$	$(z-1)F(z) - z\,f_0$
	$\left(\triangle^2\,f_k\right)$	$(z-1)^2F(z) - z((z-1)f_0 + \triangle f_0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$(\triangle^n\,f_k)$	$(z-1)^nF(z) - z\sum\limits_{k=0}^{n-1}(z-1)^{n-k-1}\triangle^k f_0$
Multiplikation mit k	$(k\,f_k)$	$-z\,F'(z)$
	$\left(k^2\,f_k\right)$	$z\,F'(z) - z^2\,F''(z)$
	$\vdots$	$\vdots$
Faltung im Zeitbereich	$(f_k) \star (g_k)$	$F(z) \cdot G(z)$