Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Formelsammlung Mathematik 1a

Tim Hilt

1. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Notizen

- **Bei LGS einfach immer 1. Zeile $-$ 2. Zeile!**
- **Bei Integration Konstante C nicht vergessen!**
- **Wenn $\ln$-Funktion rauskommt auf Betragsstriche achten!**
- **Beim Wurzel ziehen immer $\pm$ verwenden!**

2 Grundlagen

2.1 Quadratische Ergänzung

Eine quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

kann geschrieben werden als

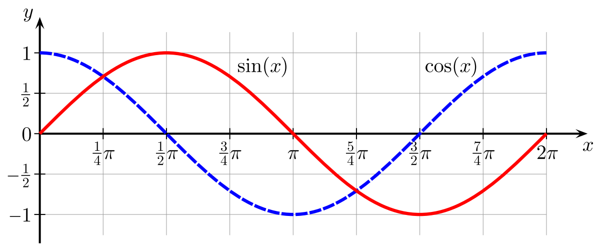
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Dies ist besonders dann nützlich, wenn nach dem Scheitelpunkt einer Parabel gefragt ist. Alternatives Vorgehen beim Scheitelpunkt: $f'(x) = 0$ setzen, berechnetes x_0 als $f(x_0)$ einsetzen.

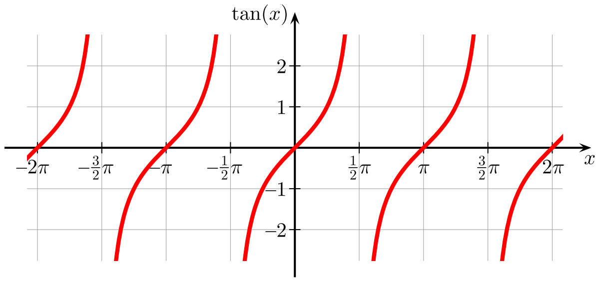
2.2 Potenzregeln

- $x^a * x^b = x^{a+b}$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- $x^a * y^a = (x * y)^a$
- $\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

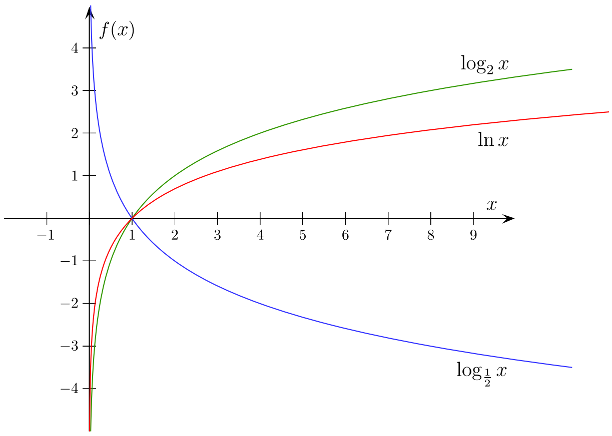
5 Elementare Funktionen



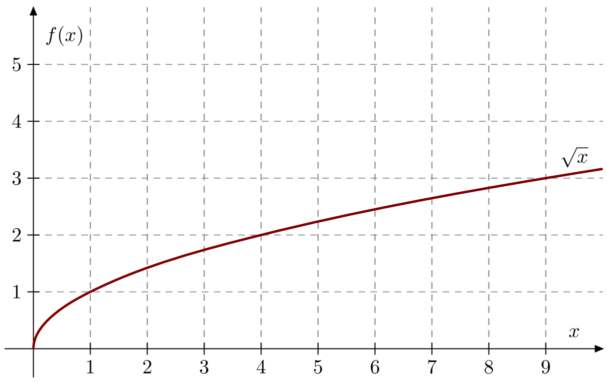
(a) Sinus / Cosinus



(b) Tangens



(c) Logarithmusfunktionen



(d) Wurzelfunktion

6 Funktionen

6.1 Schnittpunkte mit y-Achse

Für Schnittpunkt mit der y-Achse $f(x)$ mit $x = 0$ auflösen!

6.2 Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

Vorgehen, wenn Umkehrfunktion gesucht:

- ersetze $f(x)$ durch y
- Löse nach x auf
- Tausche x und y
- Schreibe fertigen Term als $f^{-1}(x)$ aus

6.3 Periodische Funktionen

6.3.1 Sinus in Kosinus umrechnen

- $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
- $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

6.3.2 Allgemeine Kosinusfunktion

Allgemeine Kosinusfunktion: $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + C$

- Periodendauer T: $\quad T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Nullstellen: $\quad t = -\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{4} + \frac{kT}{2} \qquad ; k \in \mathbb{Z}$

- Hochpunktstellen: $t = -\frac{\varphi}{\omega} + kT \qquad ; k \in \mathbb{Z}$

- Tiefpunktstellen: $t = -\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{2} + kT \qquad ; k \in \mathbb{Z}$

Achtung: Gefragt sind oft die Hochpunkte, nicht nur die t-Stellen!
Außerdem gilt es, die y-Verschiebung C zu beachten.

7 Grenzwerte

7.1 Grenzwerte bei gebrochenrationalen Funktionen

Bei gebrochenrationalen Funktionen wird das Grenzwertverhalten so berechnet, dass immer versucht wird, die höchste Potenz auszuklammern und zu kürzen. Auf diese Art kann erreicht werden, dass einige Brüche entstehen die für $x \to \infty$ gegen 0 laufen.

Allgemein kann der Grenzwert gebildet werden über:

- Ausklammern der höchsten Potenz
- Nur höchste Potenz betrachten (Bei $\lim\limits_{k \to \infty}$)
- Bernoulli bei Typ $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$

8 Kurvendiskussion

8.1 Symmetrie

- Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$
- Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$

Zum Prüfen zwei Werte einsetzen, ansonsnten allgemein Funktion mit sich selbst gleichsetzen und Minus richtig setzen

8.2 Nullstellen

Für Schnittpunkte mit der x-Achse $f(x) = 0$ setzen und Gleichung lösen!
Evtl. zuvor Polynomdivision anwenden um erste Nullstelle herauszufinden.

8.2.1 Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren wird immer dann angewandt, wenn eine **Nullstelle symbolisch nicht exakt berechnet** werden kann.
Benötigt werden ein guter Startwert x_0 und die Ableitung der Funktion $f(x)$. Berechnet werden hierbei Näherungslösungen für die Nullstelle in der Nähe von x_0.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Oder Allgemeiner:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Dieses Verfahren wird so lange angewendet, bis $x_{k+1} = x_k$ ist.

8.3 Tangente im Punkt x_0

Wenn nach der Tangente im Punkt x_0 einer Funktion $f(x_0)$ gefragt ist, so kann die Gleichung dieser Tangente durch

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

berechnet werden.

Achtung: Wenn nach Berührungs- und Schnittpunkten der Tangente $g(x)$ mit der Funktion $f(x)$ gefragt ist, so müssen die beiden Funktionsgleichungen
eingesetzt und aufgelöst werden. Mehrfache Berührungspunkte sind immer möglich!

8.4 Gebrochenrationale Funktionen

8.4.1 Polstellen

Es existieren Polstellen überall da, wo die Funktion gegen $\pm\infty$ geht; also an den Stellen, an denen das Nennerpolynom $= 0$ wird.
An Polstellen besitzt die Funktion **senkrechte Asymptoten**

8.4.2 Asymptoten

- Echt gebrochenrationale Funktionen $\rightarrow$ x-Achse ist waagrechte Asymptote
- Unecht gebrochenrationale Funktion $\rightarrow$ Polynomdivision; waagrechte Asymptote ist Erg. der Division ohne Rest
- **Beachten: senkrechte Asymptoten bei Nennerpolynom $= 0$!**

8.5 Funktionsverhalten durch Differenziation

Generell ist es eine gute Idee, bei einer Kurvendiskussion direkt die erste- und zweite Ableitung auszurechnen!

8.5.1 Extrempunkte

Extremwerte werden gefunden, indem die erste Ableitung $f'(x) = 0$ gesetzt wird. Um jetzt noch herauszufinden, ob ein lokales Maximum oder -inimum vorliegt wird die berechnete Extremstelle x_0 in die zweite Ableitung $f''(x_0)$ eingesetzt. Ist das Ergebnis > 0, so liegt ein Minimum vor. Ist $f''(x_0) < 0$, so liegt ein Maximum vor.

Vorgehen beim finden von Extremwerten

- Berechnung der ersten und zweiten Ableitung $f'(x)$ und $f''(x)$
- Berechne $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)
- Setze alle errechneten x-Werte $x_0.x_y, \ldots x_n$ in $f''(x)$ ein
- Ist $f''(x_n) > 0 \rightarrow$ **Minimum** (Hinreichende Bedingung)
- Ist $f''(x_n) < 0 \rightarrow$ **Maximum** (Hinreichende Bedingung)
- Um die Koordinaten der gefundenen Punkte zu finden wird x_0 in die Ursprungsfunktion $f(x)$ eingesetzt. So ergeben sich H$(x_0|f(x_0))$ bzw. T$(x_0|f(x_0))$

Um zu prüfen ob Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt wird in die Ableitungsfunktion ein Punkt vor- und ein Punkt nach der berechneten Extremstelle x_0 eingegeben! Wechselt hier das Vorzeichen von . . .

- **- nach +:** **Steigung ist zuerst negativ, dann positiv $\rightarrow$ Tiefpunkt**
- **+ nach -:** **Steigung ist zuerst positiv, dann negativ $\rightarrow$ Hochpunkt**
- **- nach - oder + nach +:** **Steigung wechselt das Vorzeichen nicht $\rightarrow$ Sattelpunkt**

8.5.2 Wendepunkte

Wendepunkte existieren, wenn die Funktion **dreimal differenzierbar** ist. Berechnet werden Wendepunkte durch $f''(x) = 0$. Hinreichende Bedingung ist hierbei, dass die dritte Ableitung existiert und an den gefundenen Stellen $f'''(x_n) \neq 0$ ist.

Vorgehen beim Finden von Wendepunkten:

- zweite Ableitung berechnen und $f''(x) = 0$ setzen (Notwendige Bedingung)
- Die gefundenen Werte in $f'''(x_0)$ einsetzen
- Ist $f'''(x_0) \neq 0$, so besitzt die Funktion im Punkt x_0 einen Wendepunkt.
- Nun noch die gefundenen Punkte x_0 in die Ursprungsfunktion $f(x)$ einsetzen.

- Das Verhalten der Krümmung (v. Links- nach Rechtskrümmung oder andersrum) kann mithilfe der lokalen Maxima bestimmt werden

8.6 Kriterium für Links- und Rechtskrümmung

Wenn eine Funktion $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ links- oder rechtsgekrümmt ist, kann dies über die zweite Ableitung $f''(x)$ nachgewiesen werden

- **Linkskrümmung** (Steigung ist negativ), wenn $f''(x) < 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist
- **Rechtskrümmung** (Steigung ist positiv), wenn $f''(x) > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist

9 Integration

9.1 Integration von gebrochenrationalen Funktionen

Im Falle nach der Integration einer gebrochenrationalen Funktion gefragt ist, muss die Funktion zunächst in mehrere, kleine Brüche zerlegt und diese Brüche dann einzeln integriert werden. Dabei ist die Lösung meist eine Kombination aus $\ln$- oder $\arctan$-Funktionen.

Vorgehen:

- Berechne die Nennernullstellen und zerlege so das Nennerpolynom in seine Linearfaktoren
- Erstelle zu jedem Linearfaktor einen Bruch und ordne dem Zähler jedes Bruchs eine Konstante zu: $\frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{x - x_1} \ldots$
- Bringe alles auf einen Nenner (Nenner ist demnach der Nenner der Ursprungsfunktion)
- Setze Zähler der Ursprungsfunktion mit dem Zähler der neuen Funktion gleich
- Führe einen Koeffizientenvergleich durch und berechne so die Konstanten $A, B, \ldots$
- Leite die einzelnen Brüche auf

Kompliziert wird dieses Vorgehen bei mehrfachen Nullstellen.

Bsp.:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-1}{x^2+4x+4} \\
x^2+4x+4 &= 0 \\
\rightarrow x_{0/1} &= -2 \\
\text{Linearfaktor} &= (x+2)(x+2) \\
&= (x+2)^2 \\
\rightarrow &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \\
&= \frac{A*(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

9.2 Numerisches Berechnen von Integralen: Die Trapezregel

Kann eine Integral symbolisch nicht exakt gelöst werden, so löst man dieses Integral mit der **Trapezregel**.

9.3 Fläche zwischen zwei Funktionen

Um die Fläche zu berechnen die zwischen zwei Funktionen; also zwischen zwei Schnittpunkten zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ liegt, muss man zunächst diese beiden Schnittpunkte herausfinden. Dies passiert, indem man die beiden Funktionen gleichsetzt und nach der Unbekannten x auflöst.
Als nächstes muss die Funktion, welche geometrisch „ über “ der Anderen liegt von der anderen Funktion abgezogen werden, also zum Beispiel $(f(x)) - (g(x))$.

Achtung: Hier nicht die Klammern vergessen! Minusklammer!!!

Abschließend wird in den zuvor berechneten Grenzen integriert: $\displaystyle\int_a^b (f(x)) - (g(x))dx$.

Vorgehen bei der Flächenberechnung, die von zwei Funktionen eingeschlossen wird:

- Setze beide Funktionen gleich $f(x) = g(x)$ und löse nach der Unbekannten x auf, um die Schnittpunkte, also Integrationsgrenzen zu bestimmen
- Berechne die Differenz der beiden Funktionen. **Achtung:** Minusklammer beachten!

- Berechne das Integral in den Grenzen, die durch die Schnittpunkte definiert wurden

Es ist immer hilfreich, die Aufgaben zu skizzieren, falls möglich!

9.4 Rotationsvolumen

Ähnlich wie die Berechnungsformel eines Zylinders $\pi r^2 \cdot h$ ist auch die Formel für das Rotationsvolumen definiert: $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$

Wichtig: Wenn das Rotationsvolumen einer Fläche berechnet werden soll, welches von zwei Funktionen eingeschlossen wird, so muss zuerst das Volumen der oberen Funktion, dann das der unteren Funktion berechnet werden. Zuletzt wird noch die Differenz gebildet.

9.5 Beispiele

$$\int \frac{2}{x-2} dx = 2 \ln |x-2|$$

$$\int \frac{2}{(x-2)^2} dx = -\frac{2}{x-2}$$

10 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

10.1 Partielle Ableitung

Eine Funktion $f(x, y)$ mit mehreren Veränderlichen wird durch $f_x(x, y)$ bzw. $f_y(x, y)$ nach x, bzw. y abgeleitet.
Hierbei wird hier jeweils die Variable, nach der nicht abgeleitet werden soll als konstanter Wert angenommen.
Durch $f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ oder auch $f_{xy}(x, y)$ wird mehrfach abgeleitet, jeweils nach der Variable im Index ganz links zuerst. Im Beispiel $f_{xy}(x, y)$ wird zum Beispiel zuerst nach x, dann nach y abgeleitet.

10.2 Wertebereich

Überlegung: Wann wird $f(x, y)$ maximal? Z.b. bei gebr. rat. Fkt. Wann ist Zähler maximal und Nenner minimal (Wenn beide jeweils von einer anderen Variable abhängen)?

10.3 Tangentialebene

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

10.4 Horizontale Tangentialebene

Punkte, an denen Fkt. eine horizontale Tangentialebene besitzt: $f_x(x, y) \quad \&\& \quad f_y(x, y) = 0$

Vorgehen wenn horizontale Tangentialebene gesucht:

1. Berechne Partielle Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$
2. Setze beide Ableitungen **gleich Null** (d.h. wann wird x null, wann wird y null)
3. vergleiche beide Ergebnisse $\rightarrow$ wann werden x und y beide null?

4. Antwort ist der Punkt oder die Punkte in der $x - y$-Ebene, an denen $f(x, y)$ keine Steigung hat