Formelsammlung — Signale und Systeme

bei Prof. Thao Dang

Tim Hilt

16. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und Metriken

Eigenschaften Allgemeine Cosinusfunktion

$$f(t) = A\cos(\omega \cdot t + \varphi)$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Betrag einer komplexen Zahl

$$Z = x + jy$$
$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Winkel einer komplexen Zahl

$$\arg(Z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \text{ bel.} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Dämpfung zweier Pegel

$$a = 20 \cdot \log\left(\frac{\text{Eingang}}{\text{Ausgang}}\right) \text{dB}$$

und wenn Eingang = 1:

$$= -20 \cdot \log(\text{Ausgang})\text{dB}$$

Phasengang

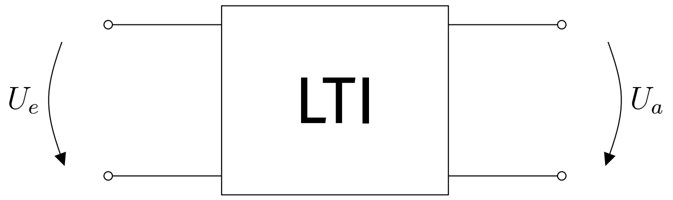
$$b(f) = -\arg(Z)$$

Die Phase muss dem negativen Winkel entsprechen, um bei nachlaufendem Signal eine positive Zeitverzögerung zu erhalten.

Phasenlaufzeit/Zeitverzögerung

$$t_p = \frac{b(f)}{\omega}$$

2 LTI-Systeme



$$
\begin{array}{ccccc}
x(t) & \star & h(t) & = & y(t) \\
X(p) & \cdot & H(p) & = & Y(p)
\end{array}
$$

Abbildung 1: LTI-System

Linearität
Ein System gilt als linear, wenn zum Signal nichts addiert wird, sondern dass Signal nur entweder verschoben an der t-Achse oder skaliert in y-Richtung ist.

Zeitinvarianz
Wird das Signal $x(t)$ noch mit einer anderen Funktion, die von t abhängt multipliziert, dann ist das System **nicht** zeitinvariant, da diese Funktion sich mit der Zeit verändert und $x(t)$ somit immer mit anderen Werten multipliziert wird.

Bsp.:

$$
\begin{array}{ll}
y(t) = \sqrt{2}x(t) & \text{zeitinvariant} \\
y(t) = x(t) \cdot \sin(t) & \text{zeitvariant!} \\
y(t) = x^2(t) & \text{auch zeitvariant}
\end{array}
$$

Kausalität
Ein Signal ist kausal, wenn gilt $x(t) = 0$ für $t < 0$

Stabilität
Beim Betrachten der Stabilität unterscheidet man 3 Fälle:

1. Das System ist stabil, wenn alle Pole im Pol-Nullstellen-Diagramm in der linken Halbebene liegen
2. Das System ist grenzstabil, wenn nur einfache Pole im Pol-Nullstellen-Diagramm auf der imaginären Achse liegen
3. Das System ist instabil, wenn Pole in der rechten Halbebene des Pol-Nullstellen-Diagramms liegen und/oder mehrfache Pole auf der imaginären Achse liegen

3 Fourierreihen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Gleichanteil

$$s_G = \frac{\text{Integral über eine Periode}}{\text{Periodendauer}}$$

Reelle Fourier-Koeffizienten a_k und b_k

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

Umrechnung von c_k zu a_k und b_k

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= 2\mathrm{Re}(c_k) \\ b_k &= -2\mathrm{Im}(c_k) \\ \rightarrow c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \end{aligned}}$$

4 Fouriertransformation

Fourierreihe aus Fouriertransformation

Achtung: stetiges f der Fouriertransformation wird durch diskretes $\frac{k}{T}$ ersetzt

$$\frac{1}{T} = f_0$$

$$s(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad S(f)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{k}{T}\right)$$

Demnach lässt sich der Gleichanteil berechnen durch:

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{0}{T}\right)}$$

5 Faltung

Werden zwei Signale $u_1(t), u_2(t)$ unterschiedlicher Bandbreiten T_1, T_2 gefaltet, so beträgt die Bandbreite des neuen Signals $T_1 + T_2$.

Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$n(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} n(\tau) d\tau$$

6 Filter und Übertragungsfunktionen

Im Fourierbereich: $\omega = 2\pi f$, im Laplacebereich: $j\omega = p$

	RC-Tiefpass	**RC-Hochpass**	**RL-Tiefpass**	**RL-Hochpass**
$\boldsymbol{\frac{U_a}{U_e} = H(j\omega)}$	$\frac{1}{1+j\omega RC}$	$\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$	$\frac{R}{R+j\omega L}$	$\frac{j\omega L}{R+j\omega L}$
$\boldsymbol{f_G/\omega_G}$	$\frac{1}{2\pi RC}; \frac{1}{RC}$	$\frac{1}{2\pi RC}; \frac{1}{RC}$	$\frac{R}{2\pi L}; \frac{R}{L}$	$\frac{R}{2\pi L}; \frac{R}{L}$

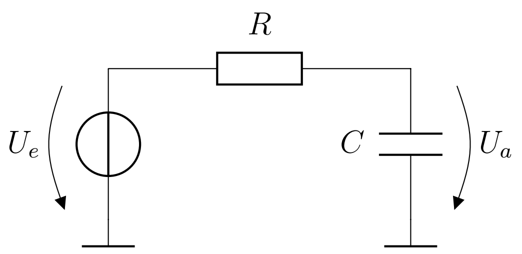


Abbildung 2: RC-Tiefpass

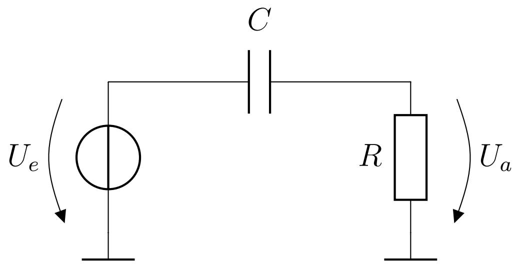


Abbildung 4: RC-Hochpass

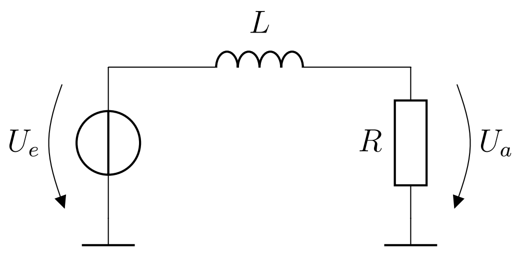


Abbildung 3: RL-Tiefpass

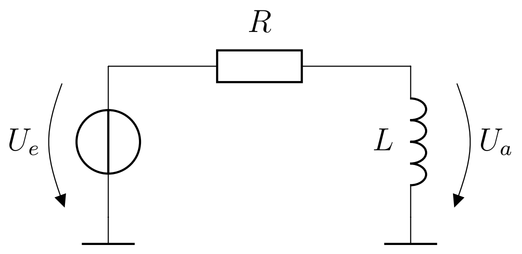


Abbildung 5: RL-Hochpass

7 Konstruktion Bode-Diagramm

Für Pol- Nullstellendiagramm:

1. ps im Nenner und im Zähler isolieren
2. Pol- und Nullstellen für p finden
3. Polstellen als $\times$ und Nullstellen als $\bigcirc$ in ein $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Im}$-Diagramm ($p$-Ebene) eintragen

Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm besteht aus dem **Amplitudengang** und dem **Phasengang**. Der Amplitudengang $A(f)$ lässt sich berechnen durch

$$A(f) = -20\log(|H(f)|)$$

während sich der Phasengang $b(f)$ berechnen lässt über

$$b(f) = -\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(H(f))}{\mathrm{Re}(H(f))}\right) + \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}(H(f)) > 0 \\ \pm\pi & \mathrm{Re}(H(f)) < 0 \end{cases}$$

Sprungantwort schnell berechnen

$$a(t) = (a(0) - a(\infty)) \cdot e^{-\frac{t}{T}} + a(\infty)$$