Formelsammlung — Signale und Systeme

bei Prof. Thao Dang

Tim Hilt

3. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

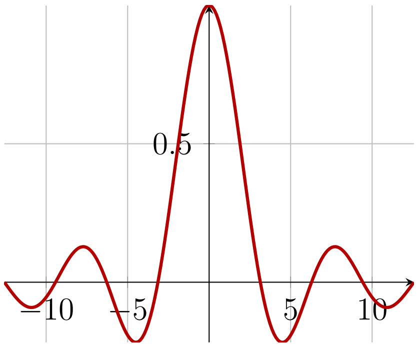
1 Grundlagen

Eigenschaften Allgemeine Cosinusfunktion

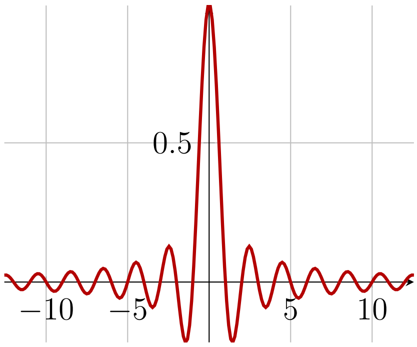
$$f(t) = A\cos(\omega \cdot t + \varphi)$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

si(x)- und sinc(x)-Funktionen

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Betrag einer komplexen Zahl

$$Z = a + jb$$
$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Winkel einer komplexen Zahl $Z = x + jy$

$$\arg(Z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \text{ bel.} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

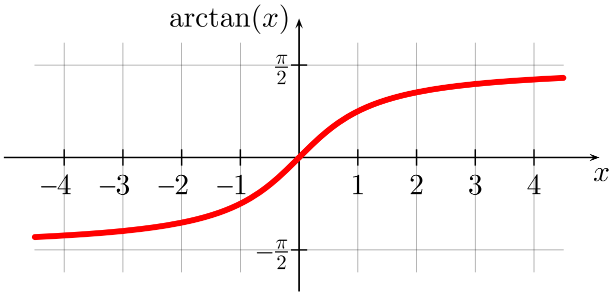


Abbildung 1: Verlauf der Arkustangens-Funktion

Umrechnung e-Funktion zu Cosinus und Sinus

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}}$$

Dämpfung zweier Pegel

$$a = 20 \cdot \log\left(\frac{\text{Eingang}}{\text{Ausgang}}\right)\mathrm{dB}$$

und wenn Eingang = 1:

$$= -20 \cdot \log(\text{Ausgang})\mathrm{dB}$$

Phasengang

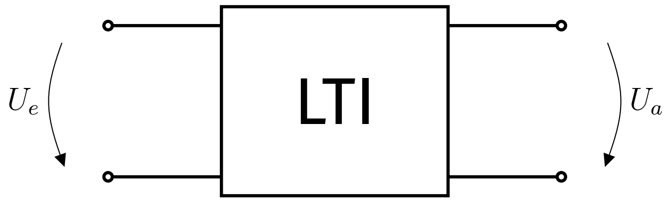
$$b(f) = -\arg(Z)$$

Die Phase muss dem negativen Winkel entsprechen, um bei nachlaufendem Signal eine positive Zeitverzögerung zu erhalten.

Phasenlaufzeit/Zeitverzögerung

$$t_p = \frac{b(f)}{\omega}$$

2 LTI-Systeme



$$x(t) \star h(t) = y(t)$$

$$X(p) \cdot H(p) = Y(p)$$

Abbildung 2: LTI-System

Linearität

Ein System gilt als linear, wenn zum Signal nichts addiert wird, sondern dass Signal nur entweder verschoben entlang der t-Achse oder skaliert in y-Richtung ist.

Zeitinvarianz

Wird das Signal $x(t)$ noch mit einer anderen Funktion, die von t abhängt multipliziert, dann ist das System **nicht** zeitinvariant, da diese Funktion sich mit der Zeit verändert und $x(t)$ somit immer mit anderen Werten multipliziert wird.

Bsp.:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sqrt{2}x(t) && \text{zeitinvariant} \\
y(t) &= x(t) \cdot \sin(t) && \text{zeitvariant!} \\
y(t) &= x^2(t) && \text{auch zeitvariant}
\end{aligned}
$$

Kausalität

Ein Signal ist kausal, wenn gilt $y(t) = 0$ für $t < 0$

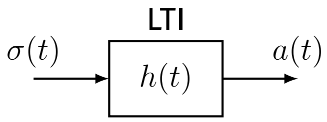
Stabilität

Beim Betrachten der Stabilität unterscheidet man 3 Fälle:

1. Das System ist stabil, wenn alle Pole im Pol-Nullstellen-Diagramm in der linken Halbebene liegen
2. Das System ist grenzstabil, wenn nur einfache Pole im Pol-Nullstellen-Diagramm auf der imaginären Achse liegen
3. Das System ist instabil, wenn Pole in der rechten Halbebene des Pol-Nullstellen-Diagramms liegen und/oder mehrfache Pole auf der imaginären Achse liegen

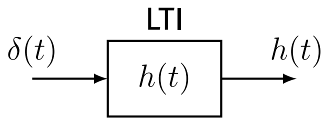
Sprungantwort und Impulsantwort

Die Sprungantwort ist das Ausgangssignal eines Systems wenn am Eingang die Sprungfunktion $\sigma(t)$ angelegt wird. Sie wird allgemein auch mit $a(t)$ bezeichnet.



Ein Rechteckimpuls ist die Kombination mehrerer skalierter und verschobener Sprungfunktionen. Aufgrund der Eigenschaften von LTI-Systemen kann die Systemantwort auf einen Rechteckimpuls daher durch die Addition mehrerer Sprungantworten konstruiert werden.

Die Impulsantwort hingegen ist das Ausgangssignal eines Systems, wenn am Eingang die Impulsfunktion $\delta(t)$ angelegt wird. Sie wird allgemein auch mit $h(t)$ bezeichnet.



Um von der Sprungantwort auf die Impulsantwort zu schließen muss Die Sprungantwort einmal abgeleitet werden, da gilt:

$$\sigma(t)' = \delta(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a(t)' = h(t)$$

Demnach gilt auch:

$$\int h(t)dt = a(t)$$

Darüber hinaus gilt:

$$A(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p) \qquad \Rightarrow \qquad H(p) = p \cdot A(p)$$

Die Impulsantwort $h(t)$ beschreibt das gesamte System. Wird die Impulsantwort transformiert, so ergibt sich die Übertragungsfunktion $H(f)$.

$$h(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(f)$$

Wird ein beliebiges Eingangssignal $x(t)$ mit der Impulsantwort gefaltet, so ergibt sich das Ausgangssignal.

$$x(t) \star h(t) = y(t)$$

Sprungantwort spezieller Filter

Sprungantwort Tiefpass:	$a(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
Sprungantwort Hochpass:	$a(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$

3 Fourierreihen

$$f(t) = s_G + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} / 2\pi \cdot f_0$$

Gleichanteil

$$s_G = \frac{a_0}{2} = c_0 \quad = \quad \frac{\text{Integral über eine Periode}}{\text{Periodendauer}}$$

Reelle Fourier-Koeffizienten a_n und b_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$$

Umrechnung von c_n zu a_n und b_n

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= 2\mathrm{Re}(c_n) \\ b_n &= -2\mathrm{Im}(c_n) \\ \rightarrow c_n &= \frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2} \end{aligned}}$$

Berechnung der Amplituden

$$\hat{s}_n = 2 \cdot |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

4 Fouriertransformation, Laplacetransformation

Fourierreihe aus Fouriertransformation

Achtung: stetiges f der Fouriertransformation wird durch diskretes $\frac{n}{T}$ ersetzt

$$\frac{1}{T} = f_0$$
$$s(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S(f)$$
$$c_n = \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{n}{T}\right) = f_0 \cdot S(n \cdot f_0)$$

Demnach lässt sich der Gleichanteil berechnen durch:

$$\boxed{c_0 = s_G = \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{0}{T}\right) = f_0 \cdot S(0 \cdot f_0)}$$

Transformation von $\cos(2\pi f_0 t)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$$

Spezielle Rücktransformationen

Zu der Funktion

$$\frac{p}{p+1}$$

ergibt die Korrespondenzentabelle keine Einträge. Hier hilft das Erweitern des Zählers mit $1 - 1$:

$$\frac{p}{p+1} = \frac{p+1-1}{p+1}$$
$$\to = \frac{p+1}{p+1} - \frac{1}{p+1}$$
$$\to = 1 - \frac{1}{p+1}$$

5 Faltung

Werden zwei Signale $u_1(t), u_2(t)$ unterschiedlicher Bandbreiten T_1, T_2 gefaltet, so beträgt die Bandbreite des neuen Signals $T_1 + T_2$.

Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$n(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} n(\tau) d\tau$$

6 Filter und Übertragungsfunktionen

Zeitkonstante τ beim **Kondensator**: . . . . $\tau = R \cdot C$

Zeitkonstante τ bei der **Spule**: . . . . $\tau = \frac{L}{R}$

Im Fourierbereich: $\omega = 2\pi f$, im Laplacebereich: $j\omega = p$

	RC-Tiefpass	**RC-Hochpass**	**RL-Tiefpass**	**RL-Hochpass**
$\frac{\boldsymbol{U_a}}{\boldsymbol{U_e}} = \boldsymbol{H}(j\omega)$	$\frac{1}{1+j\omega RC}$	$\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$	$\frac{R}{R+j\omega L}$	$\frac{j\omega L}{R+j\omega L}$
$\boldsymbol{f_G/\omega_G}$	$\frac{1}{2\pi RC}; \frac{1}{RC}$	$\frac{1}{2\pi RC}; \frac{1}{RC}$	$\frac{R}{2\pi L}; \frac{R}{L}$	$\frac{R}{2\pi L}; \frac{R}{L}$

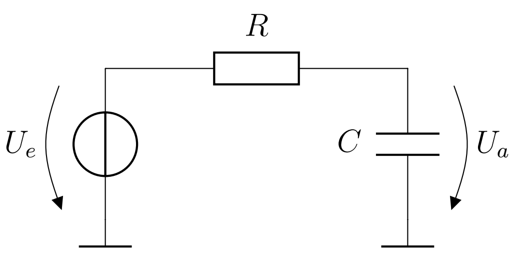


Abbildung 3: RC-Tiefpass

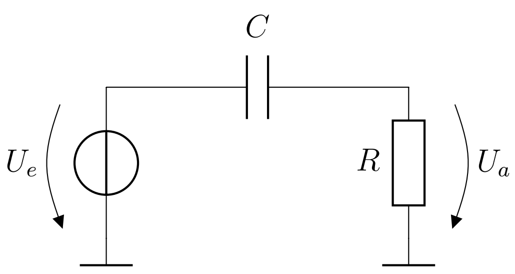


Abbildung 5: RC-Hochpass

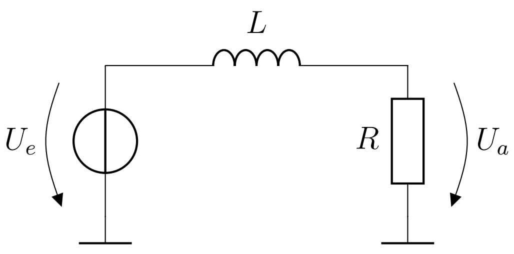


Abbildung 4: RL-Tiefpass

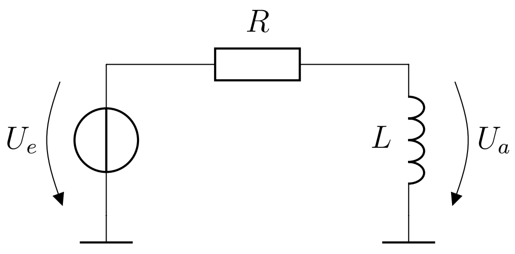


Abbildung 6: RL-Hochpass

Frequenz	Spule	Kondensator
0 Hz	$Z_L = 0\,\Omega$; Kurzschluss	$Z_C = \infty\,\Omega$; Leerlauf
∞ Hz	$Z_L = \infty\,\Omega$; Leerlauf	$Z_C = 0\,\Omega$; Kurzschluss

Tabelle 1: Spule und Kondensator im Frequenzbereich

Vorgehen, wenn nach $H(p), p \to \infty$ gefragt ist

1. Stelle $H(p)$ auf
2. Löse so auf, dass ps einzeln stehen
3. Setze $p = \infty$ ein
4. Kürze soweit wie möglich
5. Betrachte Rest

7 Bode-Diagramm

Für Pol- Nullstellendiagramm:

1. ps im Nenner und im Zähler isolieren
2. Pol- und Nullstellen des Bruchs für p finden
3. Polstellen als $\times$ und Nullstellen als $\bigcirc$ in ein $\mathrm{Re}\,/\,\mathrm{Im}$-Diagramm ($p$-Ebene) eintragen

Das Bode-Diagramm besteht aus dem Amplitudengang und dem Phasengang. Der Amplitudengang $a(f)$ lässt sich berechnen durch

$$a(f) = -20\log(|H(f)|)$$

während sich der Phasengang $b(f)$ berechnen lässt über

$$b(f) = -\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(H(f))}{\mathrm{Re}(H(f))}\right) + \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}(H(f)) > 0 \\ \pm\pi & \mathrm{Re}(H(f)) < 0 \end{cases}$$

Zudem kann der lineare Amplitudengang als

$$A(f) = |H(f)|$$

dargestellt werden.

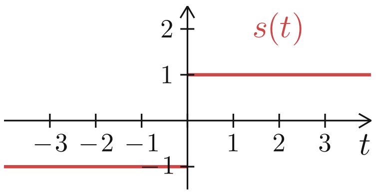
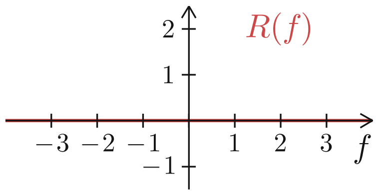
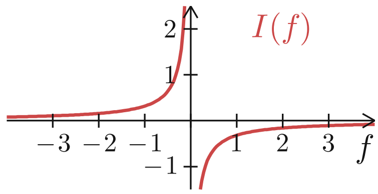
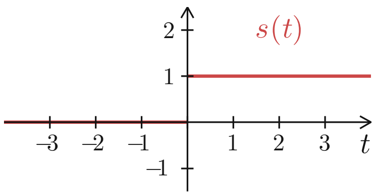
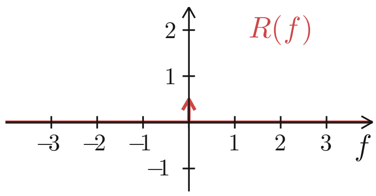
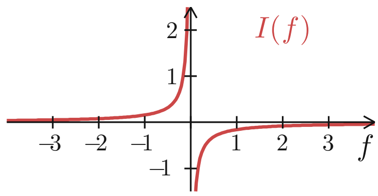
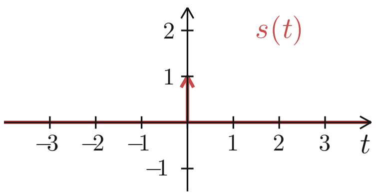
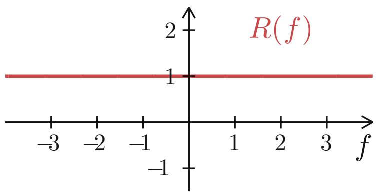
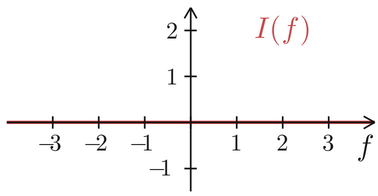
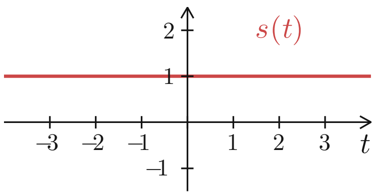
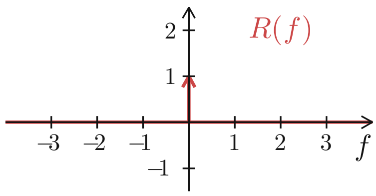
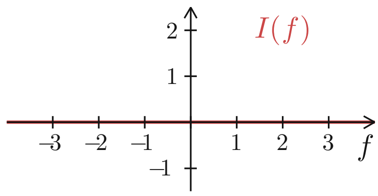
Schrittweise Konstruktion des Bode-Diagramms

1. $|H(f)|$ bestimmen
2. f_G berechnen
3. Werte für f in $|H(f)|$ einsetzen (für $f = 0$ und zwei Werte im Sperrbereich) und $20 \cdot \log(|H(f)|)$ berechnen
4. Asymptoten zeichnen
5. Bode Diagramm zeichnen, f_G befindet sich am Schnittpunkt beider Asymptoten

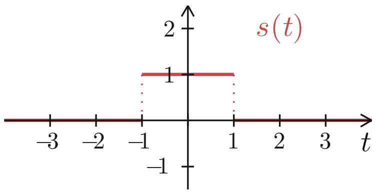
Sprungantwort schnell berechnen

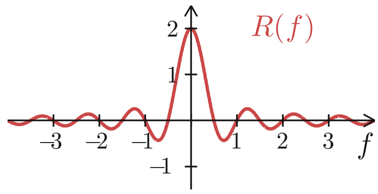
$$a(t) = (a(0) - a(\infty)) \cdot e^{-\frac{t}{T}} + a(\infty)$$

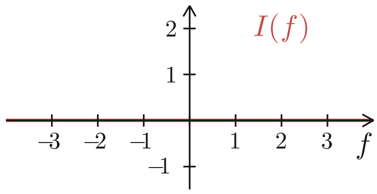
A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$
	 
$s(t) = \operatorname{sgn}(t)$	$S(f) = -\mathrm{i}\,\dfrac{1}{\pi f}$
	 
$s(t) = \sigma(t)$	$S(f) = \dfrac{1}{2}\,\delta(f) - \mathrm{i}\,\dfrac{1}{2\pi f}$
	 
$s(t) = \delta(t)$	$S(f) = 1$
	 
$s(t) = 1$	$S(f) = \delta(f)$

Zeitfunktion $s(t)$ | **Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$**

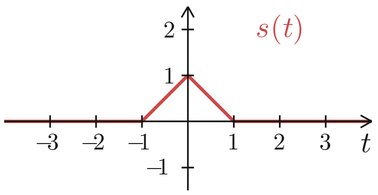


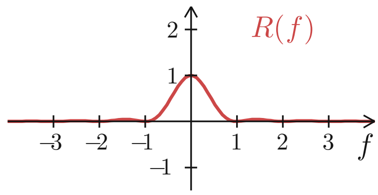


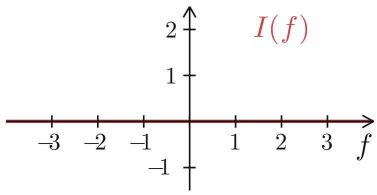


$s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$

$S(f) = 2\,\dfrac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$

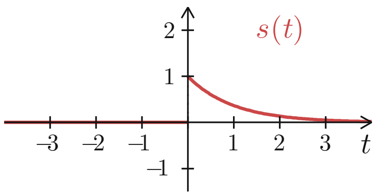


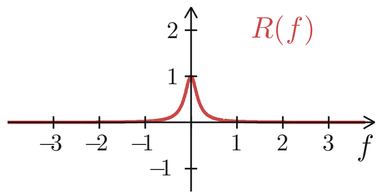


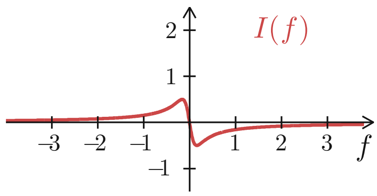


$$s(t) = (1+t)\big(\sigma(t+1) - \sigma(t)\big) + (1-t)\big(\sigma(t) - \sigma(t-1)\big)$$

$$S(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2$$

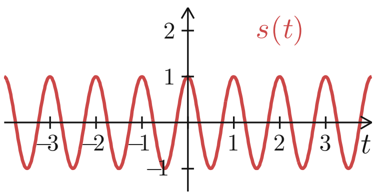


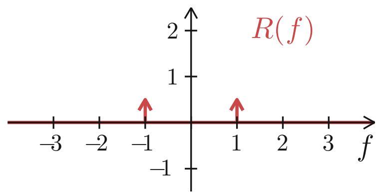


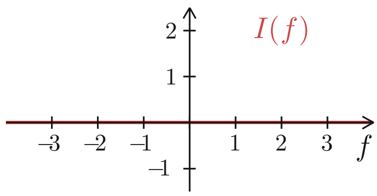


$s(t) = \mathrm{e}^{-t}\sigma(t)$

$$S(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,2\pi f} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2} - \mathrm{i}\,\frac{2\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$$







$s(t) = \cos(2\pi t)$

$$S(f) = \frac{1}{2}\big(\delta(f-1) + \delta(f+1)\big)$$

A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\,s_1(t)+C_2\,s_2(t)$	$C_1\,S_1(f)+C_2\,S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t_0}\,S(f)$
Frequenzverschiebung	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\,\pi\,f_0\,t}\,s(t)$	$S(f-f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t)\,\cos(2\,\pi\,f_0\,t)$	$\frac{1}{2}\big(S(f-f_0)+S(f+f_0)\big)$
Ähnlichkeit	$s(a\,t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\,S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in t	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ $\vdots$ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}s(t)$	$\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,S(f)$ $(\mathrm{i}\,2\,\pi\,f)^2\,S(f)$ $\vdots$ $(\mathrm{i}\,2\,\pi\,f)^n\,S(f)$
Differenziation in f	$(-\mathrm{i}\,2\,\pi\,t)s(t)$ $(-\mathrm{i}\,2\,\pi\,t)^2s(t)$ $\vdots$ $(-\mathrm{i}\,2\,\pi\,t)^ns(t)$	$S'(f)$ $S''(f)$ $\vdots$ $S^{(n)}(f)$
Multiplikation in t	$t\,s(t)$ $t^2\,s(t)$ $\vdots$ $t^n\,s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-\mathrm{i}\,2\,\pi}$ $\vdots$ $\frac{S^{(n)}(f)}{(-\mathrm{i}\,2\,\pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{\mathrm{i}\,2\,\pi\,f}\,S(f)+\frac{1}{2}\,S(0)\,\delta(f)$
Faltung in t	$s_1(t)\star s_2(t)$	$S_1(f)\cdot S_2(f)$
Faltung in f	$s_1(t)\cdot s_2(t)$	$S_1(f)\star S_2(f)$

A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\sin at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\cos at$
$\frac{a}{s(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-1$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\sinh at$
$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	$\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\cosh at$
$\frac{a}{1+as}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
$\frac{a^2}{(1+as)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$	$t\sinh at$
$\frac{a-b}{(1+as)(1+bs)}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}} \quad (a,b \neq 0)$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)\mathrm{e}^{at}$	$\frac{2}{(s-a)^3}$	$t^2\,\mathrm{e}^{at}$
$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	$a\,\mathrm{e}^{at}-b\,\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{2s}{(s-a)^3}$	$(at^2+2t)\mathrm{e}^{at}$
$\frac{a^3 s}{(1+as)^2}$	$(a-t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2s^2}{(s-a)^3}$	$(a^2t^2+4at+2)\mathrm{e}^{at}$
$\frac{ab(a-b)s}{(1+as)(1+bs)}$	$a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}-b\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \; (a,b \neq 0)$	$\frac{a^2}{s^2(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-at-1$

A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\, f_1(t) + C_2\, f_2(t)$	$C_1\, F_1(s) + C_2\, F_2(s)$
Ähnlichkeit $(a > 0)$	$f(a\,t)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$\sigma(t - t_0)\, f(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-t_0\, s}\, F(s)$
Dämpfung	$\mathrm{e}^{-s_0\, t}\, f(t)$	$F(s + s_0)$
Differenziation in t	$f'(t)$	$s\, F(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n\, F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\, f^{(k)}(0)$
Differenziation in s	$-t\, f(t)$	$F'(s)$
	$t^2\, f(t)$	$F''(s)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$(-t)^n\, f(t)$	$F^{(n)}(s)$
Multiplikation mit t	$t\, f(t)$	$-F'(s)$
	$t^2\, f(t)$	$F''(s)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$t^n\, f(t)$	$(-1)^n\, F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{s}\, F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}\, f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}\,u$
Faltung im Zeitbereich	$f_1(t) \star f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Periodische Funktion	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-T\, s}} \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-s\, t}\,\mathrm{d}\,t$

A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

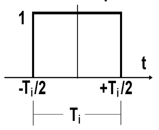
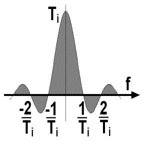
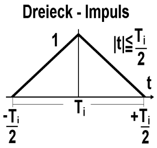
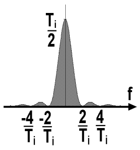
Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)	Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)
1	δ_k	$\frac{1}{z^n}$	1 für $k = n$, 0 sonst
$\frac{z}{z-1}$	1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	k
$\frac{z}{z-a}$	a^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$k\,a^k$

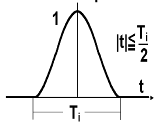
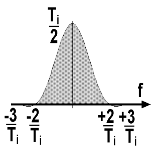
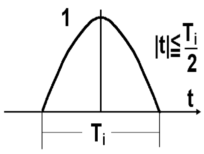
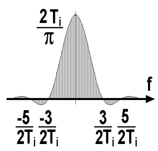
A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

Eigenschaft	Zeitfolge	Bildfunktion
Linearität	$C_1\,(f_k) + C_2\,(g_k)$	$C_1\,F(z) + C_2\,G(z)$
Dämpfung	$(a^{-k}\,f_k)$	$F(a\,z)$
Indexverschiebung	(f_{k-n})	$z^{-n}F(z)$
	(f_{k+1})	$z(F(z) - f_0)$
	(f_{k+2})	$z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$
	$\vdots$	$\vdots$
	(f_{k+n})	$z^n\left(F(z) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}\right)$
Differenzen	$(\triangle\, f_k)$	$(z-1)F(z) - z\,f_0$
	$\left(\triangle^2\, f_k\right)$	$(z-1)^2 F(z) - z((z-1)f_0 + \triangle f_0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$(\triangle^n\, f_k)$	$(z-1)^n F(z) - z \sum\limits_{k=0}^{n-1} (z-1)^{n-k-1} \triangle^k f_0$
Multiplikation mit k	$(k\,f_k)$	$-z\,F'(z)$
	$\left(k^2\,f_k\right)$	$z\,F'(z) - z^2\,F''(z)$
	$\vdots$	$\vdots$
Faltung im Zeitbereich	$(f_k) \star (g_k)$	$F(z) \cdot G(z)$

Korrespondenzen der FT

Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Zeitfunktion s(t) ○—●	Spektralfunktion $\underline{S}(f)$	Fourierkoeffizienten a_0, a_n, b_n
$s(t) = 1$ $(Bereich\ -\frac{T_i}{2} \le t \le +\frac{T_i}{2})$ **Rechteck - Impuls** 	$\underline{S}(f) = T_i \frac{\sin(\pi f T_i)}{\pi f T_i}$ 	$a_0 = 2\frac{T_i}{T}$ $\quad a_n = 2\frac{T_i}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi\frac{T_i}{T}\right)}{n\pi\frac{T_i}{T}}$ $b_n = 0$ Sonderfall: $T=2T_i$: (Rechteck-Schwingung) $a_0 = 1 \quad a_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2}{n\pi}$ $n = 1, 3, 5, 7,$
$s(t) = 1 - 2\frac{\lvert t\rvert}{T_i}$ $(Bereich\ -\frac{T_i}{2} \le t \le +\frac{T_i}{2})$ **Dreieck - Impuls** 	$\underline{S}(f) = \frac{T_i}{2}\left(\frac{\sin(\pi f\frac{T_i}{2})}{\pi f\frac{T_i}{2}}\right)^2$ 	$a_0 = \frac{T_i}{T} \quad a_n = \frac{T_i}{T}\left(\frac{\sin\left(n\pi\frac{T_i}{2T}\right)}{n\pi\frac{T_i}{2T}}\right)^2$ $b_n = 0$ Sonderfall: $T=T_i$: (Dreieck-Schwingung) $a_0 = 1 \quad a_n = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ $n = 1, 3, 5, 7,$

Zeitfunktion s(t) ○—●	Spektralfunktion $\underline{S}(f)$	Fourierkoeffizienten a_0, a_n, b_n
$s(t) = \cos^2\left(\pi\frac{t}{T_i}\right)$ $= \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\pi\frac{t}{T_i}\right)$ **cos ² - Impuls** 	$\underline{S}(f) = \frac{T_i}{2} \cdot \frac{\sin(\pi f T_i)}{\pi f T_i(1 - (fT_i)^2)}$ 	$a_0 = \frac{T_i}{T}$ $a_n = \frac{T_i}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi\frac{T_i}{T}\right)}{n\pi\frac{T_i}{T}\left(1 - \left(n\frac{T_i}{T}\right)^2\right)}$ $b_n = 0$
$s(t) = \cos\left(\pi\frac{t}{T_i}\right)$ **cos - Impuls** 	$\underline{S}(f) = \frac{2T_i}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi f T_i)}{1 - (2fT_i)^2}$ 	$a_0 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{T_i}{T}$ $a_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{T_i}{T} \cdot \frac{\cos\left(n\pi\frac{T_i}{T}\right)}{1 - \left(2n\frac{T_i}{T}\right)^2}$ $b_n = 0$

Skript, Tabelle 2.2.

k	$si\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$	$si\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right)$	$si\left(k \cdot \frac{\pi}{4}\right)$	$si\left(k \cdot \frac{\pi}{5}\right)$	$si\left(k \cdot \frac{\pi}{6}\right)$	$si\left(k \cdot \frac{\pi}{7}\right)$	$si\left(k \cdot \frac{\pi}{8}\right)$
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.6366	0.8270	0.9003	0.9355	0.9549	0.9668	0.9745
2	0.0000	0.4135	0.6366	0.7568	0.8270	0.8710	0.9003
3	-0.2122	0.0000	0.3001	0.5046	0.6366	0.7241	0.7842
4	0.0000	-0.2067	0.0000	0.2339	0.4135	0.5431	0.6366
5	0.1273	-0.1654	-0.1801	0.0000	0.1910	0.3484	0.4705
6	0.0000	0.0000	-0.2122	-0.1559	0.0000	0.1611	0.3001
7	-0.0909	0.1181	-0.1286	-0.2162	-0.1364	0.0000	0.1392
8	0.0000	0.1034	0.0000	-0.1892	-0.2067	-0.1208	0.0000
9	0.0707	0.0000	0.1000	-0.1039	-0.2122	-0.1936	-0.1083
10	0.0000	-0.0827	0.1273	0.0000	-0.1654	-0.2172	-0.1801
11	-0.0579	-0.0752	0.0818	0.0850	-0.0868	-0.1975	-0.2139
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.1261	0.0000	-0.1452	-0.2122
13	0.0490	0.0636	-0.0693	0.1164	0.0735	-0.0744	-0.1810
14	0.0000	0.0591	-0.0909	0.0668	0.1181	0.0000	-0.1286
15	-0.0424	0.0000	-0.0600	0.0000	0.1273	0.0645	-0.0650
16	0.0000	-0.0517	0.0000	-0.0585	0.1034	0.1089	0.0000
17	0.0374	-0.0486	0.0530	-0.0890	0.0562	0.1278	0.0573
18	0.0000	0.0000	0.0707	-0.0841	0.0000	0.1207	0.1000
19	-0.0335	0.0435	0.0474	-0.0492	-0.0503	0.0917	0.1238
20	0.0000	0.0413	0.0000	0.0000	-0.0827	0.0483	0.1273
21	0.0303	0.0000	-0.0429	0.0445	-0.0909	0.0000	0.1120
22	0.0000	-0.0376	-0.0579	0.0688	-0.0752	-0.0439	0.0818
23	-0.0277	-0.0360	-0.0391	0.0658	-0.0415	-0.0757	0.0424
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0390	0.0000	-0.0905	0.0000
25	0.0255	0.0331	0.0360	0.0000	0.0382	-0.0869	-0.0390
26	0.0000	0.0318	0.0490	-0.0360	0.0636	-0.0670	-0.0693
27	-0.0236	0.0000	0.0333	-0.0561	0.0707	-0.0358	-0.0871
28	0.0000	-0.0295	0.0000	-0.0541	0.0591	0.0000	-0.0909
29	0.0220	-0.0285	-0.0310	-0.0323	0.0329	0.0333	-0.0811
30	0.0000	0.0000	-0.0424	0.0000	0.0000	0.0581	-0.0600
31	-0.0205	0.0267	-0.0290	0.0302	-0.0308	0.0701	-0.0314
32	0.0000	0.0258	0.0000	0.0473	-0.0517	0.0679	0.0000
33	0.0193	0.0000	0.0273	0.0459	-0.0579	0.0528	0.0295
34	0.0000	-0.0243	0.0374	0.0275	-0.0486	0.0284	0.0530
35	-0.0182	-0.0236	0.0257	0.0000	0.0273	0.0000	0.0672
36	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0260	0.0000	-0.0269	0.0707
37	0.0172	0.0224	-0.0243	-0.0409	0.0258	-0.0471	0.0636
38	0.0000	0.0218	-0.0335	-0.0398	0.0435	-0.0572	0.0474
39	-0.0163	0.0000	-0.0231	-0.0240	0.0490	-0.0557	0.0250
40	0.0000	-0.0207	0.0000	0.0000	0.0414	-0.0436	0.0000

Tabelle 2.1: Ausgewählte Werte der si-Funktion