

Introduction to General Relativity and Cosmology

Wolfgang Schweiger WS2019/2020

Erik Kraml
Tim Sagaster

18. November 2019

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung und Motivation	3
0.1	Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen	4
1	Spezielle Relativitätstheorie	7
2	Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie	29

0 Einleitung und Motivation

Einführende Zitate

1. W.Pauli "The general theory of relativity beauty in its mathematical structure."
2. M.Born: "(The general theory of relativity) seemed and still seems ... admire it as a work of art."
3. A.Einstein (to A.Sommerfeld) "At present I occupy myself ... the original relativity is child's play."

Abkürzungen

SR ... spezielle Relativitätstheorie

ART ... allgemeine Relativitätstheorie - relativistische Theorie der Gravitation

E-GL ... Einstein-Gleichung

IS ... Inertial System

Einführung

- Äquivalenzprinzip: Gravitationseffekte lassen sich durch Übergang zu geeignet beschleunigtem Bezugssystem wegtransformieren (z.B. Satellitenlabor, ...)
- Kovarianzprinzip: Physikalische Gleichungen sollen als Tensorgleichungen formuliert werden, da sie in allen Bezugssystemen dieselbe Form aufweisen.

Einstein erkannte, dass man Kräfte die durch Gravitation auftreten in dem metrischen Tensor absorbieren kann. Die Metrik hängt dadurch vom betrachteten Raumzeitpunkt ab. Dies entspricht einer gekrümmten Mannigfaltigkeit, daher spricht man von "gekrümmter Raum-Zeit". In diesem Raum muss der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten nicht mehr unbedingt die Gerade sein, sondern kann ein Bogen sein.

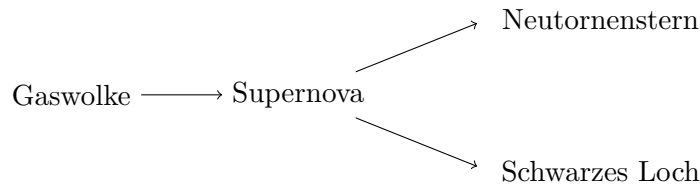
Einstein-Gleichung

Beschreibt Zusammenhang zwischen metrischem Tensor und Massenverteilung im Raum.

$$g_{\mu\nu}(x) \leftrightarrow \text{Massenverteilung im Raum}$$

$g_{\mu\nu}(x)$... Raum-Zeit abhängiger metrischer Tensor
 Lösung der E-GL für feste Massenverteilung:

- Metrik in der Nähe eines massiven Sterns
 physikalische Konsequenzen:
 - Lichtablenkung in der Nähe einer großen Masse
 - gravitative Rotverschiebung
 - ART Effekte auf Periheldrehung (insbesondere Merkur)
- Gravitationswellen durch beschleunigte Massen
 LIGO-Experiment (2015)
- Sternentwicklung



- Geschichte des Universums
 Kosmologisches Standardmodell (Robertson-Walker-Metrik)
 $R(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$: Singularität der Lösung (Big Bang)
 3K kosmische Hintergrundstrahlung

0.1 Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen

Ziel: relative Verallgemeinerung von Newtons Gravitationstheorie
 1687: "Philosophie naturalis principia mathematica"
 N Massepunkte die gravitativ wechselwirken:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = -G \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t))}{|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|^3} \quad (0.1)$$

$\vec{r}_i(t)$... Position des i -ten Teilchen
 m_i ... Masse des i -ten Teilchen

$$G = (6.67408 \pm 0.00031) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \quad (0.2)$$

G ... Gravitationskonstante (2014 CODATA)

Gravitationspotential

$m := m_i, \vec{r}(t) := \vec{r}_i(t) :$

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_j(t)|} = -G \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (0.3)$$

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{j \neq i} m_j \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) \quad (0.4)$$

$\rho(\vec{r}')$... Massendichte

Dynamische Gleichung für Massen:

$$\boxed{\underbrace{m}_{\text{träge Masse}} \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = - \underbrace{m}_{\text{schwere Masse}} \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}(t))} \quad (0.5)$$

Feldgleichung für Gravitationspotential:

$$\boxed{\Delta \Phi = 4\pi G \rho(\vec{r})} \quad (0.6)$$

Vergleich Electrostatik:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -q \vec{\nabla} \Phi_{el}(\vec{r}) \quad (0.7)$$

Φ_{el} ... elektrisches Potential

$$\Delta \Phi_{el}(\vec{r}) = 4\pi \rho_{el}(\vec{r}) \quad (0.8)$$

ρ_{el} ... elektrische Ladungsdichte

Relativistische Verallgemeinerung der Elektrostatik → Elektrodynamik

$$\Delta \rightarrow \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (0.9)$$

$$\rho_{el} \rightarrow (\rho_{el} c, \rho_{el} \vec{v}) = (j^\alpha) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (0.10)$$

$$\Phi_{el} \rightarrow (\Phi_{el}, \vec{A}) = (A^\alpha) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (0.11)$$

A^α ... elektrodynamische Potentiale

$$\Delta\Phi(t, \vec{r}) = -4\pi\rho_{el}(\vec{r}) \rightarrow \underbrace{\square A^\alpha(t, \vec{x})}_{\text{forminvariant bei relativistischen Transformationen zwischen verschiedenen ISen}} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(t, \vec{x}) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (0.12)$$

forminvariant bei relativistischen Transformationen zwischen verschiedenen ISen

Maxwell-Gleichungen für elektrodynamische Potentiale in Lorentz-Eichung
 $\partial_\alpha A^\alpha = 0$

Relativistische Verallgemeinerung der Gravitation

- $\Delta \rightarrow \square$

- 0.10 kann nicht direkt übernommen werden.

Gesamteladung ist eine erhaltene Größe, hängt nicht vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab!

$$\underbrace{\partial_\alpha j^\alpha = 0}_{\text{Stromerhaltung}} \Rightarrow \overbrace{\int_{t=\text{const}} d^3r j^0 = \int_{t=\text{const}} d^3r c \rho_{el}(\vec{r}) = Q}^{\text{Ladungserhaltung}} \quad (0.13)$$

ABER: Gesamtmasse hängt vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab.

Erhaltungsgröße \rightarrow gesamte invariante Masse des Systems:

$$\underbrace{M^2}_{\text{unabhängig von IS}} = E^2 - \vec{P}^2 \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad E = \sum_{i=1}^N \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2} \quad (0.14)$$

Energie Impuls Tensor:

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c \vec{v}^T \\ \rho c \vec{v} & \rho \vec{v} \vec{v}^T \end{pmatrix}$$

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c} \int_{t=\text{konst.}} d^3r T^{\alpha 0} = P^\alpha \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (0.15)$$

”Ladungserhaltung”

$$\rho \rightarrow \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c \vec{v}^T \\ \rho c \vec{v} & \rho \vec{v} \vec{v}^T \end{pmatrix} \sim T^{\alpha\beta} \quad (0.16)$$

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho \rightarrow \underbrace{\square g^{\alpha\beta}}_{\text{metrischer Tensor}} \sim G T^{\alpha\beta} \quad (0.17)$$

1 Spezielle Relativitätstheorie

Bezugssystem

räumliche Koordinaten + Uhr (Zeitkoordinate) ausgezeichnete Bezugssystem: Inertialsysteme (ISe)

Galilei'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig \rightarrow physikalische Gesetze besitzen in allen ISen dieselbe Form (forminvariant bzw. kovariant)
- newtons Axiome gelten in allen ISen

Allgemeinste Übergänge zwischen ISen \rightarrow Galilei-Transformationen

$$\begin{aligned} IS &\rightarrow IS' \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \hat{O}\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}t \\ t &\rightarrow t' = t + t_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\hat{O}^{-1} = \hat{O}^T$... Orthogonale Rotationsmatrix

- Translation in t um t_0
- Translation in \vec{x} um \vec{a}
- Rotation von \vec{v} mit \hat{O}
- Boost mit \vec{v}

Galilei-transformation \rightarrow Probleme mit IS-Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) $c = 299792458 \text{ms}^{-1}$

Einstein'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig
- Die Maxwell'schen Gleichungen gelten in allen ISen

4-dimensionale Raum-Zeit

MISSING GRAFIK

"Ereignis" ... Punkt in der 4-dim Raum-Zeit

(ct over \vec{x}) ... "Ortsvektor" des Ereignisses

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^\alpha = x \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

Schreibweise:

- 4-dim Vektor $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^\alpha)$ ohne Vektorpfeil
- 3-dim Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ mit Vektorpfeil
- Griechische Indizes: $\underbrace{\alpha, \beta, \gamma, \dots}_{\text{SRT}}, \underbrace{\mu, \nu, \rho, \dots}_{\text{ART}}$ bezeichnen Komponenten von 4er Vektoren
- Lateinische Indizes: $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ bezeichnen Komponenten von 3-dim Vektoren
- Indizes hochgestellt \rightarrow kontravariante Vektorkomponenten
- Indizes tiefgestellt \rightarrow kovariante Vektorkomponenten

MISSING GRAFIK

Bewegung durch 4-dim Raum-Zeit \rightarrow Abfolg von Ereignissen \rightarrow Weltline

$$ds^2 := c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 \quad (1.3)$$

"Wegelement" in 4-dim Raum-Zeit unabhängig von IS.

$$\left| \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right| = c \Rightarrow c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = 0 \xrightarrow{1.3} \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c \quad (1.4)$$

Galilei-Boost

$$\begin{aligned} c &= \left| \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = \left| \frac{d(\vec{x} - \vec{v}t)}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{v} \right| \leq \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| + |\vec{v}| \\ &\Rightarrow \text{i.a. } \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| \neq c \end{aligned} \quad (1.5)$$

Im normalen euklidischen Raum:

$$d\vec{x} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \underbrace{c^2 dt^2}_{(dx^0)^2} - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix}}_{dx^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\eta} \underbrace{\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}}_{dx} \\ &= dx^T \eta dx = \sum_{\substack{\alpha, \beta=0 \\ \text{Einstein'sche Summenkonvention}}}^3 dx^\alpha \eta_{\alpha\beta} dx^\beta = dx^\alpha \eta_{\alpha\beta} dx^\beta \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\eta = (\eta_{\alpha\beta})$... metrischer Tensor

Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten

AB in 4-dimensionaler Raum-Zeit:

$$S_{AB}^2 := (x_A - x_B)^2 = (x_A^0 - x_B^0)^2 - (\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 \quad (1.8)$$

$$S_{AB}^2 = \begin{cases} > 0, & \text{Zeitartiger Abstand} \\ = 0, & \text{Lichtartiger Abstand} \\ < 0, & \text{Raumartiger Abstand} \end{cases} \quad (1.9)$$

MISSING GRAFIK

raumartige Punkte sind nicht kausal verbunden (\nexists Signal mit $v \leq c$, das die beiden Punkte verbindet)

Definieren des Skalarprodukts

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (1.10)$$

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = x^T \eta y \quad (1.11)$$

In Komponenten Schreibweise:

$$x \cdot y = x^T \eta y = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta = x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta \quad \text{Einstein'sche Summenkonvention} \quad (1.12)$$

Kovariante Vektorkomponenten

$$\begin{aligned} y_\alpha &:= \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} y^\beta = \eta_{\alpha\beta} y^\beta \\ &= \eta \cdot \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ -y^1 \\ -y^2 \\ -y^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$x \cdot y = \sum_{\alpha=0}^3 x^\alpha y_\alpha = x^\alpha y_\alpha \quad (1.14)$$

- 4-dim Raum-Zeit + Skalarprodukt \rightarrow Minkowski Raum
- Skalarprodukt 1.11 induziert Metrik 1.8

Wie sehen allgemeine Übergänge zwischen ISen aus?

Allgemeiner linearer Ansatz (Analog zur Galilei Transformation)

$$\begin{aligned} \text{IS} &\rightarrow \text{IS}' \\ x &\rightarrow x' = \Lambda x + b \end{aligned} \quad (1.15)$$

b ... 4-dim Vektor für Raum-Zeit-Transformation

Λ ... 4-dim Matrix für "Rotation" in Raum-Zeit

Λ, b so wählen, dass 1.3 gewährleistet ist.

Für b : konstant \checkmark

Für räumliche Rotation:

$$\text{Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \hat{R} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \checkmark \quad (1.16)$$

\hat{R} ... orthogonale Rotationsmatrix ($\hat{R}\hat{R}^T - \hat{R}^2\hat{R} = \hat{1}$)

- Bemerkung: Allgemeine Transformation der Form
 $x' : \Lambda x + b$
nennt man Poincaré - Transformation (wenn sie 1.3 erfüllen)

$$\left. \begin{array}{l} \det \hat{R} = 1 \text{ keine Raumspiegelung} \\ \det \Lambda = 1 \text{ keine Zeitspiegelung} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Eigentliche} \\ \text{Poincaré-Transformation} \end{array}$$

$$b = 0 \rightarrow \text{Lorentz- Transformation}$$

Wie sehen Lorentz-Boosts aus?

$$\begin{aligned} dx' &= \Lambda dx \\ dx'^\alpha \Lambda_\beta^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} dx' \cdot dx' &= dx'^T \eta dx' = dx^T \underline{\Lambda^T \eta \Lambda} dx \stackrel{!}{=}_{1.3} dx^T \underline{\eta} dx = dx \cdot dx \\ &\Rightarrow \boxed{\Lambda \eta \Lambda = \eta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$(\Lambda^T)^\alpha_\gamma \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\delta = \eta_{\gamma\delta}$$

$$\boxed{\Lambda^\alpha_\gamma \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\delta = \eta_{\gamma\delta}} \quad (1.19)$$

TEIL A

MISSING

TEIL B

Für Boost in x-Richtung

$$\Lambda = (\Lambda^\alpha_\beta) = \text{MISSINGMATRIX} \quad (1.20)$$

Vernachlässige y- und z- Richtung:

MISSINGMATRIXGLEICHUNG

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 &= 1 \\ -(\Lambda^1_1)^2 + (\Lambda^0_1)^2 &= -1 \\ \Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_0^0 &= \cosh \Psi, \Lambda_0^1 = -\sinh \Psi \quad 1. \text{ Gleichung erfüllt} \\ 2. \text{ Gleichung} &\Rightarrow \Lambda_1^1 = \cosh \Psi \\ 3. \text{ Gleichung} &\Rightarrow \Lambda_1^0 = -\sinh \Psi\end{aligned}\tag{1.21}$$

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}\tag{1.22}$$

Wie hängt Ψ mit Boostgeschwindigkeit v zusammen?

MISSING GRAFIK

MISSING GRAFIK

Weltlinie des Ursprungs von IS'

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

$$\boxed{\tanh \Psi = \frac{v}{c}}\tag{1.23}$$

Ψ ... "Rapidity"

$$-1 \leq \tanh \Psi \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{v}{c} \right| \leq 1 \Rightarrow c \text{ Maximalgeschwindigkeit}$$

$$\text{Mit } \cosh^2 \Psi = \frac{1}{1 - \tanh^2 \Psi} \text{ und } \sinh^2 \Psi = \frac{\tanh^2 \Psi}{1 - \tanh^2 \Psi} \text{ folgt}$$

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

$$\boxed{\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG mit } \gamma = \cosh \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}\tag{1.24}$$

MISSING GRAFIK

Grenzfall $\left(\frac{v}{c}\right) \ll 1$:

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

Geschwindigkeitsaddition

MISSING GRAFIK

Boosts nur in x-Richtung

$$\text{MISSINGVEKTORGLEICHUNG}\tag{1.25}$$

Die Rapiditäten werden linear addiert!

$$\boxed{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2} \quad (1.26)$$

$$\frac{v}{c} = \tanh(\Psi) = \tanh(\Psi_1 \Psi_2) = \frac{\tanh \Psi_1 \tanh \Psi_2}{1 + \tanh \Psi_1 \tanh \Psi_2} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}} \quad (1.27)$$

$$v \approx \begin{cases} v_1 + v_2 & v_1, v_2 \ll c \\ \rightarrow c & v_1 \rightarrow c \text{ oder } v_2 \rightarrow c \end{cases}$$

MISSING GRAFIK

Allgemeiner (rotationsfreier) Lorentzboost

$$\Lambda(\vec{v}) = \text{MISSINGMATRIX} \quad (1.28)$$

Geschwindigkeitsaddition für \vec{v}_1, \vec{v}_2 beliebig

$$x^4 = \Lambda(\vec{v}_2)x' = \Lambda(\vec{v}_2)\Lambda(\vec{v}_1)x = \Lambda(\vec{v})x$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma} \left[\vec{v}_1 + \frac{\vec{v}_2}{\gamma_1} - \vec{v}_1 \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{v_1^2} \left(\frac{1}{\gamma_1} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_{2\parallel} + \vec{v}_{2\perp} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2}} \end{aligned}$$

mit $\vec{v}_{2\parallel} \parallel \vec{v}_1$ und $\vec{v}_{2\perp} \perp \vec{v}_1$

$$r_i = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_i^2}{c^2}}$$

$$r = \Lambda_0^0(\vec{v}) = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right) \quad (1.29)$$

Größen, die unter LTen Λ wie $x = (x^\alpha)$ transformieren

$$\begin{aligned} IS &\xrightarrow{\Lambda} IS' \\ a &\rightarrow a' = \Lambda a \\ a^\alpha &\rightarrow a'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta a^\beta \end{aligned}$$

bezeichnet man allgemein als 4-Vektoren, oder Lorentzvektoren

Längenkontraktion und Zeitdilatation

Maßstab mit "Eigenlänge" l_0 den in seinem Ruhesystem IS' entlang der x -Achse liegt. Weltlinie des Maßstabs im IS' :

$$x'_1 = \text{MISSINGVEKTOR}$$

$$x'_2 = \text{MISSINGVEKTOR}$$

IS' bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v (in x -Richtung)

Welche Länge l misst man für den Maßstab im IS ?

Längenmessung erfolgt zu fester Zeit $t = 0$.

Für Anfangspunkt:

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

Für Endpunkt:

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

Längenkontraktion:

$$\Rightarrow l = \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{<1} l_0 \quad (1.30)$$

Längenkontraktion nur in Bewegungsrichtung

$$l_{\parallel} = \frac{1}{\gamma} l_{0\parallel}, \quad l_{\perp} = l_{0\perp} \quad (1.31)$$

Uhrenvergleich

Uhr, die im IS' im Ursprung ruht.

IS' bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v

In IS 2 synchronisierte Uhren:

eine bei $x_1 = 0$ und eine bei $x_2 = vt_2$

Die Uhr fliegt bei $x_1 = 0$ vorbei

MISSING GRAFIK

MISSINGMATRIXGLEICHUNG

Zum Zeitpunkt t_2 passiert die bewegte Uhr den Beobachter bei vt_2

MISSINGMATRIXGLEICHUNG

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

t_0 ... Zeitspanne in IS'

t ... Zeitspanne in IS

Eigenzeit

Welche Uhrzeit τ eines Teilchens bestimmen, des sich mit $\vec{v}(t)$ in IS bewegt. Betrachten des Teilchens zum Zeitpunkt t in einem IS' das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \vec{v}(t)$ gegenüber IS bewegt. $\rightarrow IS'$ ist das "momentane Ruheintervall" des Teilchens.

$$\Rightarrow \vec{v}' \approx 0 \text{ in Zeitintervall } [t', t' + dt']$$

$$\Rightarrow d\tau = dt' = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (1.32)$$

"Aufsummation" über alle infinitesimalen Zeitintervalle

Anzeige einer mit \vec{t} bewegten Uhr:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} \quad (1.33)$$

τ ... Eigenzeit

τ hängt nicht von IS ab.

ds^2 invariant unter LTen.

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} \Rightarrow \text{invariant unter LTen} \quad (1.34)$$

Relativistische Mechanik

Relativistisch bewegtes Teilchen unter Einfluss einer Kraft; suchen Bewegungsgleichung

In momentanen Ruhesystem des Teilchens zum Zeitpunkt t gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{m}_{\text{Ruhemasse}} \frac{d\vec{v}'(t')}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_N}_{\text{Newton'sche Kraft}} \text{ in } IS' \quad (1.35)$$

(Unabhängig von IS)

versuchen 4-dimensionales Analogon von 1.35 zu finden, das sich im momentanen Ruhesystem auf 1.35 reduziert.

Nichtrelativistisch:	Relativistisch
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$	Vierergeschwindigkeit
Räumliche Rotation	$u^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \quad (1.36)$
$\vec{v}(t) \xrightarrow{\hat{R}} \vec{v}'(t) = \hat{R}\vec{v}(t)$	τ ... Eigenzeit, unabhängig vom Bezugssystem Lorentz-Transformation
	$u^\alpha(\tau) \xrightarrow{\Lambda} u'^\alpha(\tau) = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta(\tau) \quad (1.37)$
	$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$
	$\Rightarrow (u^\alpha(\tau)) = \gamma \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right) = \gamma(c, \vec{v})$

$d\tau = \frac{ds}{c}$ invariant unter LTen

dx^α 4-Vektor
 $\rightarrow u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ 4-Vektor

relativistische Verallgemeinerung von 1.35

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \quad (1.38)$$

Forminvariant (kovariant) unter LTen.

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow{IS \rightarrow IS'} m \frac{du'^\alpha}{d\tau} = F'^\alpha \quad (1.39)$$

Sofern die verallgemeinerte Kraft $F = (F^\alpha)$ wie ein 4-Vektor transformiert

$$F^\alpha \xrightarrow[IS \rightarrow IS']{\text{LT } \Lambda} F'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta F^\beta \quad (1.40)$$

F^α ... Minkowskikraft

Im momentanen Ruhesystem $IS'(\vec{v}' = 0, \gamma = 1)$

$$m \left(\frac{du^\alpha(\tau)}{d\tau} \right) = m\gamma' \frac{d}{dt'}(c, \vec{v}') = m \left(0, \frac{d\vec{v}'}{dt'} \right) \quad (1.41)$$

$$(F'^\alpha) = (F'^0, \vec{F}') = (0, \vec{F}_N) \quad (1.42)$$

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow{\vec{v}'=0} m \frac{d\vec{v}'(t')}{d\tau'} = \vec{F}_N$$

Minkowskikraft in IS , wenn in IS' bekannt.

$$IS' \xrightarrow{\Lambda(-\vec{v})} IS$$

$$F^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(-\vec{v}) F'^\beta \quad (1.43)$$

Für $\vec{v} = v^1 \vec{e}_1$:

$$\text{MISSINGGLEICHUNG} \quad (1.44)$$

Für \vec{v} beliebig

$$\text{MISSINGGLEICHUNG} \quad (1.45)$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

Energie und Impuls

Nicht relativistisch:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_N = \vec{F}_N$$

$$p = p^\alpha := mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad (1.46)$$

Relativistische Energie und Impuls:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \gamma \vec{v}m = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.47)$$

Nicht relativistischer Grenzfall: ($|\vec{v}| \ll c$, $\gamma \rightarrow 1$):

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p}_N = m\vec{v}$$

$$m \frac{du^0}{d\tau} = \frac{dp^0}{d\tau} = F^0 \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \underbrace{\frac{dE}{dt}}_{\text{zeitliche Änderung der kinetischen Energie in n.r. Mechanik}} = \frac{\vec{v}F_N}{c} \quad (1.48)$$

zeitliche Änderung der kinetischen Energie in n.r. Mechanik

Relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$p^\alpha p_\alpha = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 (m^2 c^2 - m^2 \vec{v}^2) = m^2 c^2 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2$$

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} \quad (1.49)$$

Masselose Teilchen ($m = 0$): $E = c|\vec{p}|$

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_{kin} \\ E_0 &= mc^2 && \dots \text{ Ruheenergie} \\ E_{kin} &= E - E_0 && \dots \text{ kinetische Energie} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Für abgeschlossene Systeme ist Gesamtenergie E und Gesamtimpuls \vec{P} erhalten.

$$Mc^2 = \sqrt{E^2 - c^2 P^2} \quad (1.51)$$

M ... invariante Masse des Gesamtsystems, hängt vom Impuls der einzelnen Teilchen ab.

Atomkern mit N Neutronen und Z Protonen

$$(Nm_n + Zm_p) c^2 = \underbrace{M_k c^2}_{\text{Kernmasse}} + \underbrace{\Delta E}_{\text{Bindungsenergie}} \quad (1.52)$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

Ausbesserung Beweis:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

$$\Lambda^T \Lambda = 1$$

$$\begin{aligned} (\eta')_{\alpha\beta} &= (\Lambda^T \eta \Lambda)_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = (\Lambda \eta \Lambda^T)_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\gamma} \eta_{\gamma\delta} (\Lambda^T)_{\beta}^{\delta} \\ &= \Lambda_{\alpha}^{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} \eta_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

Elektrodynamik

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha$$

Maxwell Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_{el} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.79)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.80)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \quad (1.81)$$

$$\underbrace{(j^\alpha)}_{\text{kontra 4-Vektor}} = (c\rho_{el} \cdot \vec{j}) \quad (1.82)$$

Aus 1.81 folgt Ladungserhaltung

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} d^3r j^0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \int_{\partial\mathbb{R}^3} d\vec{A} \cdot \vec{j} = 0$$

Q... Lorentzvektor

Feldstärketensor:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta \quad (1.84)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \quad (1.85)$$

Aus 1.84 folgt $F^{\alpha\beta}$ kontravarianter Lorentzvektor 2. Stufe

Elektrodynamische Potentiale

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (1.86)$$

$$(A^\alpha) = (\Phi, \vec{A})$$

(A^α) nur bis auf 4-divergenz festgelegt, das heißt $F^{\alpha\beta}$ unverändert unter Eichtransformation

$$A^{\alpha'} \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \chi \quad (1.87)$$

$\chi(x)$... skalares Feld

Lorentzgleichung

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (1.88)$$

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (1.89)$$

Kopplung eines gebundenen Teilchens an ein elektromagnetisches Feld

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha = \frac{q}{c} \underbrace{F^{\alpha\beta}}_{\text{relativistische Lorentzkraft}} u_\beta \quad (1.90)$$

Vergleich mit Lagrangefunktion:

$$L = \underbrace{-mc\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}_{\text{freies relativistisches Teilchen}} - \frac{q}{c} A^\beta u_\beta$$

Für räumlichen Anteil:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)}_{\text{Lorentzkraft}} \quad (1.91)$$

Energie-Impulstensor

$$T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\gamma}^{\alpha} F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right) \quad (1.92)$$

00-Komponente ... Energiedichte

$$u_{em} = T_{em}^{00} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \quad (1.93)$$

0i-Komponente ... Energiestromdichte (\vec{S} ... Poyntingvektor)

$$\vec{S} = c \sum_{i=1}^3 T_{em}^{0i} \vec{e}_i = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \quad (1.94)$$

T^{j0} ... Impulsdichten und T^{ji} ... Impulsstromdichten analog

Aus Maxwellgleichungen folgt:

$$\partial_{\alpha} T_{em}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} F^{\beta\gamma} j_{\gamma} \quad (1.95)$$

Im Ladungsfreien Raum ($j_{\gamma} = 0$)

$$\partial_{\alpha} T_{em}^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.96)$$

Für abgeschlossenes System (keine Kopplung an Strom) folgt
4-Impulserhaltung:

$$P_{em}^{\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T_{em}^{0\beta} = konst. \quad (1.97)$$

Für räumliche Komponenten folgt aus 1.95

$$\frac{1}{c} F^{i\gamma} j_{\gamma} \vec{e}_i = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} + \vec{B} = \underbrace{\vec{f}}_{\text{Lorentzkraftdichte}} \quad (1.98)$$

1.95 kann geschrieben werden als

$$\partial_{\alpha} T_{em}^{\alpha\beta} = - \underbrace{f^{\beta}}_{\text{Kraftdichte die e.m. Feld auf Stromverteilung ausübt}} \quad (1.99)$$

\Rightarrow Austausch von Energie auf Impuls zwischen e.m. Feld und Strom

Relativistische Hydrodynamik

ideale Flüssigkeiten

$\rho(\vec{r}, t)$... Massendichte

$\vec{v}(\vec{r}, t) = v^i \vec{e}_i$... Geschwindigkeitsfeld

$P(\vec{r}, t)$... isotroper Druck (Skalar, in alle Richtungen gleich)

Viskosität (innere Reibung) vernachlässigbar

Massenelement δm mit Volumen δV

$$\begin{aligned} \Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \Delta \vec{F}_N \\ \underbrace{\frac{\Delta m}{\Delta V}}_{\rho(\vec{r}, t)} \frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} &= \underbrace{\frac{\Delta \vec{F}_N}{\Delta V}}_{\vec{f}_N(\vec{r}, t)} \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\vec{f}_N(\vec{r}, t) = - \underbrace{\vec{\nabla} P(\vec{r}, t)}_{\text{Druckgradient}} + \underbrace{\vec{f}_0(\vec{r}, t)}_{\text{äußere Kraft (z.B. Gravitation)}} \quad \dots \text{Newton'sche Kraftdichte}$$

$$\begin{aligned} d\vec{v}(\vec{r}, t) &= dt \frac{d\vec{v}}{dt} + dx \frac{d\vec{v}}{dx} + dy \frac{d\vec{v}}{dy} + dz \frac{d\vec{v}}{dz} \\ &= \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \underbrace{\left(d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right)}_{d\vec{v}dt} \vec{v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(d\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right) dt \end{aligned} \quad (1.101)$$

Eulergleichung:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_0 \quad (1.102)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.103)$$

1.102 + 1.103 nichtrelativistische Feldgleichung einer idealen Flüssigkeit

5 unbekannte Felder ρ , P , v^i , aber nur 4 Gleichungen.

Brauche Beziehung zwischen ρ und P .

Beispiele:

$\rho = \text{konst.}$.. inkompressible Flüssigkeit

$\frac{P}{\rho} = \text{konst.}$... ideales Gas bei festem T

Relativistische Verallgemeinerung?

$$v^i(\vec{r}, t) \rightarrow u^\alpha(x), x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

linke Seite $\rightarrow \vec{v}$ quadratisch \rightarrow Ansatz:

$$M^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta \quad (1.104)$$

$M^{\alpha\beta} \rightarrow$ Kontravarianter Term 2. Stufe

$\rho(x)$... Massendichte \rightarrow Lorentz-Skalar

$$\rho(x) = \rho'(x') = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\text{Ruhemasse}}{\text{Eigenvolumen}}$$

$\rho'(x')$... Dichte des Flüssigkeitselements ΔV am Ort x im momentanen Ruhesystem IS'

$$(u^\alpha) = \gamma (c, \vec{v}) \quad (1.105)$$

$$(M^{\alpha\beta}) = \rho \gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^1}{c} & \frac{v^2}{c} & \frac{v^3}{c} \\ \frac{v^1}{c} & & & \\ \frac{v^2}{c} & & \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{c^2} & \\ \frac{v^3}{c} & & & \end{pmatrix} \quad (1.106)$$

Analogon zur Ladungsdichte ρ_{em} in Elektrodynamik

$$\tilde{\rho} = \frac{M^{00}}{c^2} = \gamma^2 \rho = \frac{\rho}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.107)$$

$\tilde{\rho}$... Energie Massendichte

$\tilde{\rho}$ transformiert wie 00-Komponente von Tensor

$$\partial_\beta M^{0\beta} = c \left[\partial_t \tilde{\rho} + \partial_k (\tilde{\rho} v^k) \right] \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} \partial_\beta M^{i\beta} &= \partial_t (\tilde{\rho} v^i) + \partial_k (\tilde{\rho} v^i v^k) \\ &= \tilde{\rho} \left(\partial_t v^i + v^k \partial_k v^i \right) + \underbrace{v^i \left[\partial_t \tilde{\rho} + \partial_k (\tilde{\rho} v^k) \right]}_{= 0 \text{ wegen Kontinuitätsgleichung}} \end{aligned} \quad (1.109)$$

Für $v \ll c$:

1.108 \rightarrow linke Seite von 1.103

1.109 \rightarrow linke Seite von 1.102

Kräftefreier Fall: ($P = 0, f_0 = 0$)

kovariante Verallgemeinerung der Strömungsgleichung

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.110)$$

Kontinuitätsgleichung (für Energiestrom)

$$\partial_\beta M^{0\beta} = 0 \quad (1.111)$$

Eulergleichung (Kontinuitätsgleichung für Impulsstrom)

$$\partial_\beta M^{i\beta} = 0 \quad (1.112)$$

1.110 differenzieller Erhaltungssatz für 4-Impulsdichte \Rightarrow 4-Impulserhaltung

Nicht relativistisch, anisotropes Medium (Druck kann Richtungsabhängig sein).

Kraft auf ein gerichtetes Flüssigkeitselement

MISSING GRAFIK

$$d\vec{F} = \hat{P} d\vec{A} = \sum_{i=1}^3 dF^i \vec{e}^i \quad \text{mit} \quad dF^i = \sum_{j=1}^3 P^{ij} dA^j \quad (1.113)$$

Im momentanen Ruhesystem IS' des Flüssigkeitselements an Ort \vec{x} zum Zeitpunkt t und isotroper Druckverteilung:

$$(P'^{ij}) = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.114)$$

relativistisch verallgemeinerter 4-Tensor, in IS' gelten 1.102 \rightarrow auf rechter Seite steht.

$$\partial'_i P = \partial'_j P'^{ij} \quad (1.115)$$

4-Divergenz des Drucktensors auf rechter Seite von 1.110.

$$\left(\partial'_\beta P'^{\alpha\beta} \right) = (0 \quad \partial'_i P) \quad (1.116)$$

Druck in IS' ... "Eigendruck"

Druck in IS , in dem Flüssigkeitselement Geschwindigkeit \vec{v} aufweist \rightarrow Lorentzboost mit $-\vec{v}$

$$P^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta P'^{\gamma\delta} = P \left(\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} - \eta^{\alpha\beta} \right) \quad (1.117)$$

Eulergleichung + Kontinuitätsgleichung relativistisch (für $\vec{f}_0 = 0$)

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} + \partial_\beta P^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.118)$$

Energie Impulstensor

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P \quad (1.119)$$

Eulergleichung + Kontinuitätsgleichung mit Energie Impulstensor:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.120)$$

Mit äußeren Kräften ($\vec{f}_0 \rightarrow$ Minkowskikraft f^α):

Relativistische Grundgleichung der Hydrodynamik:

$$\boxed{\partial_\beta T^{\alpha\beta} = f^\alpha} \quad (1.121)$$

Für abgeschlossens System ($f^\alpha = 0$):

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.122)$$

Kontinuitätsgleichung für Energie- und Impulsdichten

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T^{\alpha 0} = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \partial_i T^{\alpha i} \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \int_{\partial(\mathbb{R}^3)} dS_i T^{\alpha i} = 0 \quad (1.123)$$

$T^{\alpha i}(x) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ genügend schnell
 \Rightarrow 4- Impulserhaltung

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T^{\alpha 0} = \text{konst} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (1.124)$$

$$\begin{aligned} T^{00} &\rightarrow \text{Energiedichte} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T^{00} \text{ Energie} \\ \frac{T^{i0}}{c} &\rightarrow \text{Impulsdichte} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \frac{T^{i0}}{0} \text{ Impuls} \end{aligned} \quad (1.125)$$

cP^0 ... Energie
 P^i ... Impuls

Energie- Impulserhaltung gilt für abgeschlossene Systeme
geladene Flüssigkeit, auf die e.m. Kräfte wirken

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \underbrace{f^\alpha}_{\text{Minkowski-Energieimpulstensor des e.m. Feldes}} \stackrel{1.99}{=} -\partial_\beta \underbrace{T_{em}^{\alpha\beta}}_{\text{Energieimpulstensor}} \quad (1.126)$$

$$\partial_\beta (T^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta}) = 0 \quad (1.127)$$

Allgemein:

⇒ Energie und Impulserhaltung für Gesamtsystem aber nicht getrennt für Flüssigkeit und e.m. Feld.

Zusätzliche Kräfte können zu Bestandteil des Energie- Impulstensor gemacht werden, sodass in Energie- Impulstensor alle Energieformen berücksichtigt sind.

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} + \dots \quad (1.128)$$

$$\partial T^{\alpha\beta} = 0, \quad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (1.129)$$

Energie- Impulstensor für Gesamtsystem

<u>Elektrodynamik</u>	<u>ideale Flüssigkeit</u>
ρ_{el} ... elektrische Ladungsdichte	$\tilde{\rho} = \gamma^2 \rho$... Energie- Massedichte
(j^α) ... (ρ_{el}, \vec{j}) Strom	$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} c^2 \tilde{\rho} = c^2 \gamma^2 \rho & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$
$\partial j^\alpha = 0 \Rightarrow$ Ladungserhaltung	$\partial T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$ 4-Impuls
j^α ... Quelle des e.m. Felds	$T^{\alpha\beta}$... Quelle des Gravitationsfeldes
$\square A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(x)$	$\square g^{\alpha\beta}(x) \sim G T^{\alpha\beta}(x)$
... inhomogene Maxwellgleichung	... Einstein'sche Feldgleichung
	$T^{\alpha\beta}$ enthält <u>alle</u> Energieformen
	Wie sieht $g_{\alpha\beta}(x)$ aus?
	Enthält $T^{\alpha\beta}$ auch die Energie des Gravitationsfeldes?

2 Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

- relativistische Gleichungen $\xrightarrow{|\vec{v}| \ll c}$ nichtrelativistische Gleichungen
- Kovarianzprinzip: relativistische Gleichungen lassen sich in kovarianter Form, das heißt als Gleichungen für Lorentz-Tensoren formulieren, die forminvariant unter Lorentz-Transformationen sind

Für relativistische Formulierung der Gravitation

- Äquivalenzprinzip
Schwache Form: träge und schwere Masse sind gleich
Starke Form (Einstein'sches Äquivalenzprinzip):
 Für ein beliebiges Gravitationsfeld ist es in jedem Raum- Zeitpunkt X möglich, ein lokales Inertialsystem zu finden, sodass in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes X die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie ohne Gravitation gelten.

$$\text{ART} \xrightarrow{\text{Äquivalenzprinzip}} \text{SRT}$$

$$(\text{analog SRT} \xrightarrow{|\vec{v}| \ll c} \text{NM})$$
- Allgemeines Kovarianzprinzip: Gleichungen der ART sind forminvariant (kovariant) unter allgemeinen (nicht singuläre) Koordinatentransformationen $x \rightarrow x'$.

Äquivalenzprinzip

Frei fallender Körper nahe der Erdoberfläche (nicht relativistisch)

$$m_t \ddot{z} = -m_s g$$

Für $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$ ist die Lösung

$$z(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_s}{m_t} g t^2 \quad (2.1)$$

Für Pendel bei kleinen Auslenkungen ist die Schwingungsdauer

$$\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = \left(\frac{m_t}{m_s} \right) \left(\frac{l}{g} \right)$$

Konstante von $\frac{m_s}{m_t}$:
 Newton: auf 10^{-3} genau

Eötvös (1922): auf 5×10^{-9} genau
Aktuelles Ergebnis: auf 2×10^{-13} genau

$[m_s] = [m_t] = 1 \text{ kg}$
 \Rightarrow Wert von G in 0.2

$m_s = m_t$

Trägt Energie des Gravitationsfeldes auch zu m_s und m_t in gleichem Maße bei?