

Introduction to General Relativity and Cosmology

Wolfgang Schweiger WS2019/2020

Erik Kraml
Tim Sagaster

28. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----------|
| 0 | Einleitung und Motivation | 3 |
| 0.1 | Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen | 4 |
| 1 | Spezielle Relativitätstheorie | 7 |

0 Einleitung und Motivation

Einführende Zitate

1. W.Pauli "The general theory of relativity beauty in its mathematical structure."
2. M.Born: "(The general theory of relativity) seemed and still seems ... admire it as a work of art."
3. A.Einstein (to A.Sommerfeld) "At present I occupy myself ... the original relativity is child's play."

Abkürzungen

SR ... spezielle Relativitätstheorie

ART ... allgemeine Relativitätstheorie - relativistische Theorie der Gravitation

E-GL ... Einstein-Gleichung

IS ... Inertial System

Einführung

- Äquivalenzprinzip: Gravitationseffekte lassen sich durch Übergang zu geeignet beschleunigtem Bezugssystem wegtransformieren (z.B. Satellitenlabor, ...)
- Kovarianzprinzip: Physikalische Gleichungen sollen als Tensorgleichungen formuliert werden, da sie in allen Bezugssystemen dieselbe Form aufweisen.

Einstein erkannte, dass man Kräfte die durch Gravitation auftreten in dem metrischen Tensor absorbieren kann. Die Metrik hängt dadurch vom betrachteten Raumzeitpunkt ab. Dies entspricht einer gekrümmten Mannigfaltigkeit, daher spricht man von "gekrümmter Raum-Zeit". In diesem Raum muss der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten nicht mehr unbedingt die Gerade sein, sondern kann ein Bogen sein.

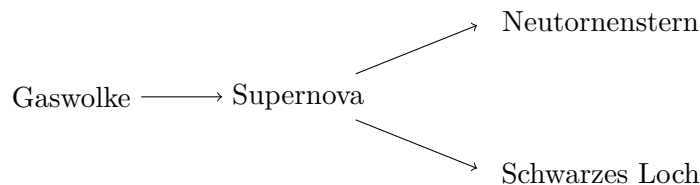
Einstein-Gleichung

Beschreibt Zusammenhang zwischen metrischem Tensor und Massenverteilung im Raum.

$$g_{\mu\nu}(x) \leftrightarrow \text{Massenverteilung im Raum}$$

$g_{\mu\nu}(x)$... Raum-Zeit abhängiger metrischer Tensor
 Lösung der E-GL für feste Massenverteilung:

- Metrik in der Nähe eines massiven Sterns
 physikalische Konsequenzen:
 - Lichtablenkung in der Nähe einer großen Masse
 - gravitative Rotverschiebung
 - ART Effekte auf Periheldrehung (insbesondere Merkur)
- Gravitationswellen durch beschleunigte Massen
 LIGO-Experiment (2015)
- Sternentwicklung



- Geschichte des Universums
 Kosmologisches Standardmodell (Robertson-Walker-Metrik)
 $R(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$: Singularität der Lösung (Big Bang)
 3K kosmische Hintergrundstrahlung

0.1 Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen

Ziel: relative Verallgemeinerung von Newtons Gravitationstheorie
 1687: "Philosophie naturalis principia mathematica"
 N Massepunkte die gravitativ wechselwirken:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_i m_j (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t))}{|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|^3} \quad (0.1)$$

$\vec{r}_i(t)$... Position des i -ten Teilchen
 m_i ... Masse des i -ten Teilchen

$$G = (6.67408 \pm 0.00031) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \quad (0.2)$$

G ... Gravitationskonstante (2014 CODATA)

Gravitationspotential

$m := m_i, \vec{r}(t) := \vec{r}_i(t) :$

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_j(t)|} = -G \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (0.3)$$

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{j \neq i} m_j \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) \quad (0.4)$$

$\rho(\vec{r}')$... Massendichte

Dynamische Gleichung für Massen:

$$\boxed{\underbrace{m}_{\text{träge Masse}} \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = - \underbrace{m}_{\text{schwere Masse}} \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}(t))} \quad (0.5)$$

Feldgleichung für Gravitationspotential:

$$\boxed{\Delta \Phi = 4\pi G \rho(\vec{r})} \quad (0.6)$$

Vergleich Electrostatik:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -q \vec{\nabla} \Phi_{el}(\vec{r}) \quad (0.7)$$

Φ_{el} ... elektrisches Potential

$$\Delta \Phi_{el}(\vec{r}) = 4\pi \rho_{el}(\vec{r}) \quad (0.8)$$

ρ_{el} ... elektrische Ladungsdichte

Relativistische Verallgemeinerung der Elektrostatik → Elektrodynamik

$$\Delta \rightarrow \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (0.9)$$

$$\rho_{el} \rightarrow (\rho_{el} c, \rho_{el} \vec{v}) = (j^\alpha) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (0.10)$$

$$\Phi_{el} \rightarrow (\Phi_{el}, \vec{A}) = (A^\alpha) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (0.11)$$

A^α ... elektrodynamische Potentiale

$$\Delta\Phi(t, \vec{r}) = -4\pi\rho_{el}(\vec{r}) \rightarrow \underbrace{\square A^\alpha(t, \vec{x})}_{\text{forminvariant bei relativistischen Transformationen zwischen verschiedenen ISen}} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(t, \vec{x}) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (0.12)$$

forminvariant bei relativistischen Transformationen zwischen verschiedenen ISen

Maxwell-Gleichungen für elektrodynamische Potentiale in Lorentz-Eichung
 $\partial_\alpha A^\alpha = 0$

Relativistische Verallgemeinerung der Gravitation

- $\Delta \rightarrow \square$
- 0.10 kann nicht direkt übernommen werden.
 Gesamteladung ist eine erhaltene Größe, hängt nicht vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab!

$$\underbrace{\partial_\alpha j^\alpha = 0}_{\text{Stromerhaltung}} \Rightarrow \overbrace{\int_{t=\text{const}} d^3r j^0 = \int_{t=\text{const}} d^3r c \rho_{el}(\vec{r}) = Q}^{\text{Ladungserhaltung}} \quad (0.13)$$

ABER: Gesamtmasse hängt vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab.

Erhaltungsgröße \rightarrow gesamte invariante Masse des Systems:

$$\underbrace{M^2}_{\text{unabhängig von IS}} = E^2 - \vec{P}^2 \text{abstand} \vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \text{abstand} E = \sum_{i=1}^N \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2} \quad (0.14)$$

Energie Impuls Tensor:
 $(T^{\alpha\beta}) = \text{MISSING}$

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \text{MISSING} \quad (0.15)$$

$$\rho \rightarrow \text{MISSING} \quad (0.16)$$

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho \rightarrow \underbrace{\square g^{\alpha\beta}}_{\text{metrischer Tensor}} \sim G T^{\alpha\beta} \quad (0.17)$$

1 Spezielle Relativitätstheorie

Bezugssystem

räumliche Koordinaten + Uhr (Zeitkoordinate) ausgezeichnete Bezugssystem: Inertialsysteme (ISe)

Galilei'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig \rightarrow physikalische Gesetze besitzen in allen ISen dieselbe Form (forminvariant bzw. kovariant)
- newtons Axiome gelten in allen ISen

Allgemeinste Übergänge zwischen ISen \rightarrow Galilei-Transformationen

$$\begin{aligned} IS &\rightarrow IS' \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \hat{O}\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}t \\ t &\rightarrow t' = t + t_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$\hat{O}^{-1} = \hat{O}^T$... Orthogonale Rotationsmatrix

- Translation in t um t_0
- Translation in \vec{x} um \vec{a}
- Rotation von \vec{v} mit \hat{O}
- Boost mit \vec{v}

Galilei-transformation \rightarrow Probleme mit IS-Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) $c = 299792458 \text{ms}^{-1}$

Einstein'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig
- Die Maxwell'schen Gleichungen gelten in allen ISen

4-dimensionale Raum-Zeit

MISSING GRAFIK

"Ereignis" ... Punkt in der 4-dim Raum-Zeit
(*ct* over \vec{x}) ... "Ortsvektor" des Ereignisses

$$MISSING \text{Ortsvektor} \quad (1.2)$$

Schreibweise:

- 4-dim Vektor $x = MISSING$ ohne Vektorpfeil
- 3-dim Vektor $\vec{x} = MISSING$ mit Vektorpfeil
- Griechische Indizes: $\underbrace{\alpha, \beta, \gamma, \dots}_{\text{SRT}}, \underbrace{\mu, \nu, \rho, \dots}_{\text{ART}}$ bezeichnen Komponenten von 4er Vektoren
- Lateinische Indizes: $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ bezeichnen Komponenten von 3-dim Vektoren
- Indizes hochgestellt \rightarrow kontravariante Vektorkomponenten
- Indizes tiefgestellt \rightarrow kovariante Vektorkomponenten

MISSING GRAFIK

Bewegung durch 4-dim Raum-Zeit \rightarrow Abfolg von Ereignissen \rightarrow Weltline

$$ds^2 := c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 \quad (1.3)$$

"Wegelement" in 4-dim Raum-Zeit unabhängig von IS.

$$\left| \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right| = c \Rightarrow c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = 0 \xrightarrow{1.3} \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c \quad (1.4)$$

Galilei-Boost

$$c = \left| \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = \left| \frac{d(\vec{x} - \vec{v}t)}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{v} \right| \leq \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| + |\vec{v}|$$

$$\Rightarrow \text{i.a. } \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| \neq c \quad (1.5)$$

Im normalen euklidischen Raum:

$$d\vec{x}^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = MISSING = MISSING \quad (1.6)$$

$$ds^2 = \underbrace{c^2 dt^2}_{(dx^0)^2} - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = MISSING$$

$$= dx^T \eta dx = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 dx^\alpha \eta_{\alpha, \beta} dx^\beta = dx^\alpha \eta_{\alpha, \beta} dx^\beta$$

Einstein'sche Summenkonvention

$\eta = (\eta_{\alpha\beta})$... metrischer Tensor

Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten

AB in 4-dimensionaler Raum-Zeit:

$$S_{AB}^2 := (x_A - x_B)^2 = (x_A^0 - x_B^0)^2 - (\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 \quad (1.8)$$

$$S_{AB}^2 = \begin{cases} CASE, & MISSING \\ CASE, & MISSING \\ CASE, & MISSING \end{cases} \quad (1.9)$$

MISSING GRAFIK

raumartige Punkte sind nicht kausal verbunden (\nexists Signal mit $v \leq c$, das die beiden Punkte verbindet)

Definieren des Skalarprodukts

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (1.10)$$

$$x \cdot y = MISSING = x^T \eta y \quad (1.11)$$

In Komponenten Schreibweise:

$$x \cdot y = x^T \eta y = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta = x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta \quad (1.12)$$

Einstein'sche Summenkonvention

Kovariante Vektorkomponenten

$$y_\alpha := \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} y^\beta = \eta_{\alpha\beta} y^\beta \quad (1.13)$$

MISSINGVEKTOREN

$$x \cdot y = \sum_{\alpha=0}^3 x^\alpha y_\alpha = x^\alpha y_\alpha \quad (1.14)$$

- 4-dim Raum-Zeit + Skalarprodukt \rightarrow Minkowski Raum
- Skalarprodukt ?? induziert Metrik ??

Wie sehen allgemeine Übergänge zwischen ISen aus?

Allgemeiner linearer Ansatz (Analog zur Galilei Transformation)

$$\begin{aligned} \text{IS} &\rightarrow \text{IS}' \\ x &\rightarrow x' = \Lambda x + b \end{aligned} \quad (1.15)$$

b ... 4-dim Vektor für Raum-Zeit-Transformation

Λ ... 4-dim Matrix für "Rotation" in Raum-Zeit

Λ, b so wählen, dass ?? gewährleistet ist.

Für b : konstant ✓

Für räumliche Rotation:

$$\text{Lambda} = \text{MISSINGMATRIX} \checkmark \quad (1.16)$$

\hat{R} ... orthogonale Rotationsmatrix ($\hat{R}\hat{R}^T - \hat{R}^2\hat{R} = \hat{1}$)

- Bemerkung: Allgemeine Transformation der Form

$x' : \Lambda x + b$

nennt man Poincaré - Transformation (wenn sie ?? erfüllen)

$$\left. \begin{aligned} \det \hat{R} &= 1 \text{ keine Raumspiegelung} \\ \det \Lambda &= 1 \text{ keine Zeitspiegelung} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Eigentliche} \\ &\text{Poincaré-Transformation} \end{aligned}$$

$b = 0 \rightarrow$ Lorentz- Transformation

Wie sehen Lorentz-Boosts aus?

$$\begin{aligned} dx' &= \Lambda dx \\ dx'^\alpha \Lambda_\beta^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} dx' \cdot dx' &= dx'^T \eta dx' = dx^T \underline{\Lambda^T \eta \Lambda} dx \stackrel{!}{=} dx^T \underline{\eta} dx = dx \cdot dx \\ &\Rightarrow \boxed{\Lambda \eta \Lambda = \eta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$(\Lambda^T)_\gamma^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_\delta^\beta = \eta_{\gamma\delta}$$

$$\boxed{\Lambda^\alpha_\gamma \eta_{\alpha\beta} \Lambda_\delta^\beta = \eta_{\gamma\delta}} \quad (1.19)$$

TEIL A

MISSING

TEIL B

Für Boost in x-Richtung

$$\Lambda = (\Lambda_{\beta}^{\alpha}) = \text{MISSINGMATRIX} \quad (1.20)$$

Vernachlässige y- und z- Richtung:

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 &= 1 \\ -(\Lambda_1^1)^2 + (\Lambda_1^0)^2 &= -1 \\ \Lambda_0^0 \Lambda_1^0 - \Lambda_0^1 \Lambda_1^1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= \cosh \Psi, \quad \Lambda_0^1 = -\sinh \Psi \quad 1. \text{ Gleichung erfüllt} \\ 2. \text{ Gleichung} &\Rightarrow \Lambda_1^1 = \cosh \Psi \\ 3. \text{ Gleichung} &\Rightarrow \Lambda_1^0 = -\sinh \Psi \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG} \quad (1.22)$$

Wie hängt Ψ mit Boostgeschwindigkeit v zusammen?

MISSING GRAFIK

MISSING GRAFIK

Weltlinie des Ursprungs von IS'

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

$$\boxed{\tanh \Psi = \frac{v}{c}} \quad (1.23)$$

Ψ ... "Rapidity"

$$-1 \leq \tanh \Psi \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{v}{c} \right| \leq 1 \Rightarrow c \text{ Maximalgeschwindigkeit}$$

$$\text{Mit } \cosh^2 \Psi = \frac{1}{1 - \tanh^2 \Psi} \text{ und } \sinh^2 \Psi = \frac{\tanh^2 \Psi}{1 - \tanh^2 \Psi} \text{ folgt}$$

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

$$\boxed{\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG mit } \gamma = \cosh \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (1.24)$$

MISSING GRAFIK

Grenzfall $\left(\frac{v}{c}\right) \ll 1$:

MISSINGMATRIXGLEICHUNG

Geschwindigkeitsaddition

MISSING GRAFIK

Boosts nur in x-Richtung

MISSINGVEKTORGLEICHUNG (1.25)

Die Rapiditäten werden linear addiert!

$$\boxed{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2} \quad (1.26)$$

$$\frac{v}{c} = \tanh(\Psi) = \tanh(\Psi_1 \Psi_2) = \frac{\tanh \Psi_1 \tanh \Psi_2}{1 + \tanh \Psi_1 \tanh \Psi_2} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}} \quad (1.27)$$

$$v \approx \begin{cases} v_1 + v_2 & v_1, v_2 \ll c \\ \rightarrow c & v_1 \rightarrow c \text{ oder } v_2 \rightarrow c \end{cases}$$

MISSING GRAFIK

Allgemeiner (rotationsfreier) Lorentzboost

$$\Lambda(\vec{v}) = \text{MISSINGMATRIX} \quad (1.28)$$

Geschwindigkeitsaddition für \vec{v}_1, \vec{v}_2 beliebig

$$x^4 = \Lambda(\vec{v}_2)x' = \Lambda(\vec{v}_2)\Lambda(\vec{v}_1)x = \Lambda(\vec{v})x$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma} \left[\vec{v}_1 + \frac{\vec{v}_2}{\gamma_1} - \vec{v}_1 \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{v_1^2} \left(\frac{1}{\gamma_1} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_{2\parallel} + \vec{v}_{2\perp} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2}}$$

mit $\vec{v}_{2\parallel} \parallel \vec{v}_1$ und $\vec{v}_{2\perp} \perp \vec{v}_1$

$$r_i = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_i^2}{c^2}}$$

$$r = \Lambda_0^0(\vec{v}) = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right) \quad (1.29)$$

Größen, die unter LTen Λ wie $x = (x^\alpha)$ transformieren

$$IS \xrightarrow{\Lambda} IS'$$

$$a \rightarrow a' = \Lambda a$$

$$a^\alpha \rightarrow a'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta a^\beta$$

bezeichnet man allgemein als 4-Vektoren, oder Lorentzvektoren

Längenkontraktion und Zeitdilatation

Maßstab mit "Eigenlänge" l_0 den in seinem Ruhesystem IS' entlang der x -Achse liegt. Weltlinie des Maßstabs im IS' :

$$x'_1 = \text{MISSINGVEKTOR}$$

$$x'_2 = \text{MISSINGVEKTOR}$$

IS' bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v (in x -Richtung)

Welche Länge l misst man für den Maßstab im IS ?

Längenmessung erfolgt zu fester Zeit $t = 0$.

Für Anfangspunkt:

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

Für Endpunkt:

$$\text{MISSINGMATRIXGLEICHUNG}$$

Längenkontraktion:

$$\Rightarrow l = \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{<1} l_0 \quad (1.30)$$

Längenkontraktion nur in Bewegungsrichtung

$$l_{\parallel} = \frac{1}{\gamma} l_{0\parallel}, \quad l_{\perp} = l_{0\perp} \quad (1.31)$$

Uhrenvergleich

Uhr, die im IS' im Ursprung ruht.

IS' bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v

In IS 2 synchronisierte Uhren:

eine bei $x_1 = 0$ und eine bei $x_2 = vt_2$

Die Uhr fliegt bei $x_1 = 0$ vorbei

MISSING GRAFIK

MISSINGMATRIXGLEICHUNG

Zum Zeitpunkt t_2 passiert die bewegte Uhr den Beobachter bei vt_2

MISSINGMATRIXGLEICHUNG

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

t_0 ... Zeitspanne in IS'

t ... Zeitspanne in IS

Eigenzeit

Welche Uhrzeit τ eines Teilchens bestimmen, des sich mit $\vec{v}(t)$ in IS bewegt. Betrachten des Teilchens zum Zeitpunkt t in einem IS' das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \vec{v}(t)$ gegenüber IS bewegt. $\rightarrow IS'$ ist das "momentane Ruheintervall" des Teilchens.

$$\Rightarrow \vec{v}' \approx 0 \text{ in Zeitintervall } [t', t' + dt']$$

$$\Rightarrow d\tau = dt' = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (1.32)$$

”Aufsummation” über alle infinitesimalen Zeitintervalle

Anzeige einer mit \vec{t} bewegten Uhr:

$$\boxed{\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}} \quad (1.33)$$

τ ... Eigenzeit

τ hängt nicht von IS ab.

ds^2 invariant unter LTen.

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} \Rightarrow \text{invariant unter LTen} \quad (1.34)$$

Relativistische Mechanik

Relativistisch bewegtes Teilchen unter Einfluss einer Kraft; suchen Bewegungsgleichung

In momentanen Ruhesystem des Teilchens zum Zeitpunkt t gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{m}_{\text{Ruhemasse}} \frac{d\vec{v}'(t')}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_N}_{\text{Newton'sche Kraft}} \text{ in } IS' \quad (1.35)$$

(Unabhängig von IS)

versuchen 4-dimensionales Analogon von ?? zu finden, das sich im momentanen Ruhesystem auf ?? reduziert.

| Nichtrelativistisch: | Relativistisch |
|--|--|
| $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ Räumliche Rotation | Vierergeschwindigkeit $u^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \quad (1.36)$ |
| $\vec{v}(t) \xrightarrow{\hat{R}} \vec{v}'(t) = \hat{R}\vec{v}(t)$ | τ ... Eigenzeit, unabhängig vom Bezugssystem Lorentz-Transformation $u^\alpha(\tau) \xrightarrow{\Lambda} u'^\alpha(\tau) = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta(\tau) \quad (1.37)$ $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ $\Rightarrow (u^\alpha(\tau)) = \gamma \left(\frac{dx^\alpha}{dt} \right) = \gamma(c, \vec{v})$ |
| $d\tau = \frac{ds}{c}$ invariant unter Lten dx^α 4-Vektor $\rightarrow u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ 4-Vektor | |

relativistische Verallgemeinerung von ??

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \quad (1.38)$$

Forminvariant (kovariant) unter LTen.

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow[IS \rightarrow IS']{LT} m \frac{du'^\alpha}{d\tau} = F'^\alpha \quad (1.39)$$

Sofern die verallgemeinerte Kraft $F = (F^\alpha)$ wie ein 4-Vektor transformiert

$$F^\alpha \xrightarrow[IS \rightarrow IS']{LT \Lambda} F'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta F^\beta \quad (1.40)$$

F^α ... Minkowskikraft

Im momentanen Ruhesystem $IS'(\vec{v}' = 0, \gamma = 1)$

$$m \left(\frac{du^\alpha(\tau)}{d\tau} \right) = m \gamma' \frac{d}{dt'}(c, \vec{v}') = m \left(0, \frac{d\vec{v}'}{dt'} \right) \quad (1.41)$$

$$(F'^\alpha) = (F'^0, \vec{F}') = (0, \vec{F}_N) \quad (1.42)$$

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow{\vec{v}'=0} m \frac{d\vec{v}'(t')}{d\tau'} = \vec{F}_N$$

Minkowskikraft in IS , wenn in IS' bekannt.

$$\begin{aligned} IS' &\xrightarrow{\Lambda(-\vec{v})} IS \\ F^\alpha &= \Lambda^\alpha_\beta(-\vec{v}) F'^\beta \end{aligned} \tag{1.43}$$

Für $\vec{v} = v^1 \vec{e}_1$:

$$\text{MISSINGGLEICHUNG} \tag{1.44}$$

Für \vec{v} beliebig

$$\text{MISSINGGLEICHUNG} \tag{1.45}$$