# Introduction to General Relativity and Cosmology

Wolfgang Schweiger WS2019/2020

Erik Kraml
Tim Sagaster

25. November 2019

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Einleitung und Motivation

## Einführende Zitate

1. W.Pauli "The general theory of relativity .... beauty in its mathematical structure."
2. M.Born: "(The gerneral theory of relativity) seemed and still seems ... admire it as a work of art."
3. A.Einstein (to A.Sommerfeld) "At present I occupy myself ... the original relativity is child's play."

## Abkürzungen

SR ... spezielle Relativitätstheorie
ART ... allgemeine Relativitätstheorie - relativistische Theorie der Gravitation
E-GL ... Einstein-GLeichung
IS ... Inertial System

## Einführung

- Äquivalenzprinzip: Gravitationseffekte lassen sich durch Übergang zu geeignet beschleunigtem Bezugssystem wegtransformieren (z.B. Satellitenlabor, ...)
- Kovarianzprinzip: Physikalische Gleichungen sollen als Tensorgleichungen formuliert werden, da sie in allen Bezugssytemen dieselbe Form aufweisen.

Einstein erkannte, dass man Kräfte die durch Gravitation auftreten in dem metrischen Tensor absorbieren kann. Die Metrik hängt dadurch vom betrachteten Raumzeitpunkt ab. Dies entspricht einer gekrümmten Manigfaltigkeit, daher spricht man von "gekrümmter Raum-Zeit". In diesem Raum muss der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten nicht mehr unbedingt die Gerade sein, sondern kann ein Bogen sein.

## Einstein-Gleichung

Beschreibt Zusammenhang zwischen metrischem Tensor und Massenverteilung im Raum.

$$g_{\mu\nu}(x) \leftrightarrow \text{Massenverteilung im Raum}$$

$g_{\mu\nu}(x) \ldots$ Raum-Zeit abhängiger metrischer Tensor
Lösung der E-GL für feste Massenverteilung:

$\rightarrow$ Metrik in der Nähe eines massiven Sterns
physikalische Konsequenzen:

- Lichtableitung in der Nähe eier großen Masse
- gravitative Rotverschiebung
- ART Effekte auf Periheldrehung (insbesondere Merkur)

$\rightarrow$ Gravitationswellen durch beschleunigte Massen
LIGO-Experiment (2015)

$\rightarrow$ Sternentwicklung

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Neutornenstern} \\
\text{Gaswolke} \arrow[r] & \text{Supernova} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \text{Schwarzes Loch}
\end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ Geschichte des Universums
Kosmologisches Standardmodell (Robertson-Walker-Metrik)
$R(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$ : Singularität der Lösung (Big Bang)
3K kosmische Hintergrundstrahlung

## 0.1 Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen

Ziel: relative Verallgemeinerung von Newtons Gravitationstheorie
1687: "Philosophie naturalis principia mathematica"
$N$ Massepunkte die gravitativ wechselwirken:

$$m_i \frac{g^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = -G \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{m_i m_j (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t'))}{|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|^3} \tag{0.1}$$

$\vec{r}_i(t)$ ... Position des $i$-ten Teilchen
$m_i$ ... Masse des $i$-ten Teilchen

$$G = (6.67408 \pm 0.00031) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2} \tag{0.2}$$

$G$ ... Gravitationskonstante (2014 CODATA)

**Gravitationspotential**

$m := m_i$, $\vec{r}(t) := \vec{r}_i(t)$ :

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_j(t)|} = -G \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{0.3}$$

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{j \neq i} m_j \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) \tag{0.4}$$

$\rho(\vec{r}')$ ... Massendichte

Dynamische Gleichung für Massen:

$$\boxed{\underbrace{m}_{\text{träge Masse}} \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\underbrace{m}_{\text{schwere Masse}} \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}(t))} \tag{0.5}$$

Feldgleichung für Gravitationspotential:

$$\boxed{\Delta\Phi = 4\pi G \rho(\vec{r})} \tag{0.6}$$

Vergleich Electrostatik:

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -q \vec{\nabla}\Phi_{el}(\vec{r}) \tag{0.7}$$

$\Phi_{el}$ ... elektrisches Potential

$$\Delta\Phi_{el}(\vec{r}) = 4\pi \rho_{el}(\vec{r}) \tag{0.8}$$

$\rho_{el}$ ... elektrische Ladungsdichte

**Relativistische Verallgemeinerung der Elektrostatik → Elektrodynamik**

$$\Delta \to \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{0.9}$$

$$\rho_{el} \to (\rho_{el} c, \rho_{el} \vec{v}) = (j^\alpha) \; \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{0.10}$$

$$\Phi_{el} \to (\Phi_{el}, \vec{A}) = (A^\alpha) \; \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{0.11}$$

$A^\alpha$ ... elektrodynamische Potentiale

$$\Delta\Phi(t,\vec{r}) = -4\pi\rho_{el}(\vec{r}) \to \Box \underbrace{A^\alpha(t,\vec{x})}_{\text{forminvariant bei relativistischen Transformationen zwischen verschiedenen ISen}} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(t,\vec{x}) \quad \alpha = 0,1,2,3 \tag{0.12}$$

Maxwell-Gleichungen für elektrodynamische Potentiale in Lorentz-Eichung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$

**Relativistische Verallgemeinerung der Gravitation**

- $\Delta \to \Box$
- 0.10 kann nicht direkt übernommen werden.
  Gesamteladung ist eine erhaltene Größe, hängt nicht vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab!

$$\overbrace{\partial_\alpha j^\alpha = 0}^{\text{Stromerhaltung}} \Rightarrow \overbrace{\int_{t=const} d^3 r j^0 = \int_{t=const} d^3 r c \rho_{el}(\vec{r}) = Q}^{\text{Ladungserhaltung}} \tag{0.13}$$

  ABER: Gesatmasse hängt vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab.
  Erhaltungsgröße $\to$ gesamte invariante Masse des Systems:

$$\underbrace{M^2}_{\text{unabhängig von IS}} = E^2 - \vec{P}^2 \qquad \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad E = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2} \tag{0.14}$$

  Energie Impuls Tensor:

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c \vec{v}^T \\ \rho c \vec{v} & \rho \vec{v}\vec{v}^T \end{pmatrix}$$

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c} \int_{t=konst.} d^3 r T^{\alpha 0} = P^\alpha \qquad \alpha = 0,1,2,3 \tag{0.15}$$

  "Ladungserhaltung"

$$\rho \to \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c \vec{v}^T \\ \rho c \vec{v} & \rho \vec{v}\vec{v}^T \end{pmatrix} \sim T^{\alpha\beta} \tag{0.16}$$

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho \to \boxed{\Box \underbrace{g^{\alpha\beta}}_{\text{metrischer Tensor}} \sim G T^{\alpha\beta}} \tag{0.17}$$

# 1 Spezielle Relativitätstheorie

Bezugssystem
räumliche Koordinaten + Uhr (Zeitkoordinate) ausgezeichnete Bezugssystem: Inertialsysteme (ISe)

### Galilei'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig $\rightarrow$ physikalische Gesetze besitzen in allen ISen diesselbe Form (forminvariant bzw. kovariant)
- newtons Axiome gelten in allen ISen

Allgemeinste Übergänge zwischen ISen $\rightarrow$ Galilei-Transformationen

$$
\begin{aligned}
IS &\rightarrow IS' \\
\vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \hat{O}\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}t \\
t &\rightarrow t' = t + t_0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$\hat{O}^{-1} = \hat{O}^T$ ... Orthogonale Rotationsmatrix

- Translation in $t$ um $t_0$
- Translation in $\vec{x}$ um $\vec{a}$
- Rotation von $\vec{v}$ mit $\hat{O}$
- Boost mit $\vec{v}$

Galilei-transformation $\rightarrow$ Probleme mit IS-Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) $c = 299792458 ms^{-1}$

### Einstein'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig
- Die Maxwell'schen Gleichungen gelten in allen ISen

4-dimensionale Raum-Zeit

MISSING GRAFIK

"Ereignis" ... Punkt in der 4-dim Raum-Zeit

$(ctover\vec{x})$ ... "Ortsvektor" des Ereignisses

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^\alpha = x \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

**Schreibweise:**

- 4-dim Vektor $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \left(x^\alpha\right)$ ohne Vektorpfeil
- 3-dim Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ mit Vektorpfeil
- Griechische Indizes: $\underbrace{\alpha, \beta, \gamma, ...}_{\text{SRT}}, \underbrace{\mu, \nu, \rho, ...}_{\text{ART}}$ bezeichnen Komponenten von 4er Vektoren
- Lateinishce Indizes: $i, j, k, ... = 1, 2, 3$ bezeichnen Komponenten von 3-dim Vektoren
- Indizes hochgestellt $\rightarrow$ kontravariante Vektorkomponenten
- Indizes tiefgestellt $\rightarrow$ kovariante Vektorkomponenten

MISSING GRAFIK
Bewegung durch 4-dim Raum-Zeit $\rightarrow$ Abfolg von Ereignissen $\rightarrow$ Weltline

$$ds^2 := c^2 dt - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 \tag{1.3}$$

"Wegelement" in 4-dim Raum-Zeit unabhängig von IS.

$$\left|\frac{d\vec{x}'}{dt'}\right| = c \Rightarrow c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = 0 \overset{1.3}{\Longrightarrow} \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| = c \tag{1.4}$$

**Galilei-Boost**

$$\begin{aligned} c = \left|\frac{d\vec{x}'}{dt'}\right| = \left|\frac{d\vec{x}'}{dt}\right| = \left|\frac{d(\vec{x} - \vec{v}t)}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{v}\right| \leq \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| + |\vec{v}| \\ \Rightarrow \text{i.a.} \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| \neq c \end{aligned} \tag{1.5}$$

Im normalen euklidishcen Raum:

$$d\vec{x} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \underbrace{c^2 dt^2}_{(dx^0)^2} - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix}}_{dx^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\eta} \underbrace{\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}}_{dx} \\ &= dx^T \eta dx = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} dx^\alpha \eta_{\alpha,\beta} = \underbrace{dx^\alpha \eta_{\alpha\beta} dx^\beta}_{\text{Einstein'sche Summenkonvention}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

$\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ ... metrischer Tensor

**Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten**

AB in 4-dimensionaler Raum-Zeit:

$$S_{AB}^2 := (x_A - x_B)^2 = \left(x_A^0 - x_B^0\right)^2 - (\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 \tag{1.8}$$

$$S_{AB}^2 = \begin{cases} > 0, & \text{Zeitartiger Abstand} \\ = 0, & \text{Lichtartiger Abstand} \\ < 0, & \text{Raumartiger Abstand} \end{cases} \tag{1.9}$$

MISSING GRAFIK

raumartige Punkte sind nicht kausal verbunden ($\nexists$ Signal mit $v \leq c$, das die beiden Punkte verbindet)

**Definieren des Skalarprodukts**

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{1.10}$$

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = x^T \eta y \tag{1.11}$$

In Komponenten Schreibweise:

$$x \cdot y = x^T \eta y = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta \underset{\text{Einstein'sche Summenkonvention}}{=} x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta \tag{1.12}$$

**Kovariante Vektorkomponenten**

$$\begin{aligned} y_\alpha &:= \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} y^\beta = \eta_{\alpha\beta} y^\beta \\ &= \eta \cdot \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ -y^1 \\ -y^2 \\ -y^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$x \cdot y = \sum_{\alpha=0}^{3} x^\alpha y_\alpha = x^\alpha y_\alpha \tag{1.14}$$

- 4-dim Raum-Zeit + Skalarprodukt $\rightarrow$ Minkowski Raum
- Skalarprodukt 1.11 induziert Metrik 1.8

Wie sehen allgemeine Übergänge zwischen ISen aus?

Allgemeiner linearer Ansatz (Analog zur Galilei Transformation)

$$\begin{aligned} \text{IS} &\rightarrow \text{IS}' \\ x &\rightarrow x' = \Lambda x + b \end{aligned} \tag{1.15}$$

$b$ ... 4-dim Vektor für Raum-Zeit-Transformation
$\Lambda$ ... 4-dim Matrix für "Rotation" in Raum-Zeit

$\Lambda$, $b$ so wählen, dass 1.3 gewährleistet ist.
Für $b$: konstant $\surd$

Für räumliche Rotation:

$$Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \hat{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \surd \tag{1.16}$$

$\hat{R}$ ... orthogonale Rotationsmatrix ($\hat{R}\hat{R}^T - \hat{R}^2\hat{R} = \hat{1}$)

- Bemerkung: Allgemeine Transformation der Form
  $x' : \Lambda x + b$
  nennt man <u>Poincaré - Transformation</u> (wenn sie 1.3 erfüllen)

$$\left.\begin{array}{l}\det\hat{R} = 1 \text{ keine Raumspiegelung} \\ \det\Lambda = 1 \text{ keine Zeitspiegelung}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Eigentliche} \\ \text{Poincaré-Transformation}\end{array}$$

  $b = 0 \rightarrow$ <u>Lorentz- Transformation</u>

Wie sehen Lorentz-Boosts aus?

$$\begin{aligned} dx' &= \Lambda dx \\ dx'^{\alpha} &\Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta} \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} dx' \cdot dx' = dx'^{T} \eta dx' = dx^{T} \underline{\Lambda^{T} \eta \Lambda} dx &\overset{!}{=}_{1.3} dx^{T} \underline{\eta} dx = dx \cdot dx \\ &\Rightarrow \boxed{\Lambda \eta \Lambda = \eta} \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\left(\Lambda^{T}\right)^{\alpha}_{\gamma} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta}$$

$$\boxed{\Lambda^{\alpha} \gamma \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta}} \tag{1.19}$$

TEIL A

$$MISSING$$

TEIL B

Für Boost in x-Richtung

$$\Lambda = \left(\Lambda^{\alpha}_{\beta}\right) = MISSINGMATRIX \tag{1.20}$$

Vernachlässige y- und z- Richtung:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\Lambda^{0}_{0}\right)^{2} - \left(\Lambda^{1}_{0}\right)^{2} &= 1 \\ -\left(\Lambda^{1}_{1}\right)^{2} + \left(\Lambda^{0}_{1}\right)^{2} &= -1 \\ \Lambda^{0}_{0} \Lambda^{0}_{1} - \Lambda^{1}_{0} \Lambda^{1}_{1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0 = \cosh\Psi\ ,\ \Lambda^1_0 = -\sinh\Psi \text{ 1. Gleichung erfüllt} \\ \text{2.Gleichung} \Rightarrow \Lambda^1_1 = \cosh\Psi \\ \text{3.Gleichung} \Rightarrow \Lambda^0_1 = -\sinh\Psi \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG \tag{1.22}$$

Wie hängt $\Psi$ mit Boostgeschwindigkeit $v$ zusammen?
MISSING GRAFIK
MISSING GRAFIK

Weltlinie des Ursprungs von IS$'$

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

$$\boxed{\tanh\Psi = \frac{v}{c}} \tag{1.23}$$

$\Psi$ ... "Rapidität"

$-1 \leq tanh\Psi \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{v}{c}\right| \leq 1 \Rightarrow c$Maximalgeschwindigkeit

Mit $\cosh^2\Psi = \dfrac{1}{1-\tanh\Psi}$ und $\sinh^2\Psi = \dfrac{\tanh^2\Psi}{1-\tanh^2\Psi}$ folgt

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$
$$\boxed{MISSINGMATRIXGLEICHUNG \text{ mit } \gamma = \cosh\Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{1.24}$$

MSSING GRAFIK

Grenzfall $\left(\dfrac{v}{c}\right) \ll 1$:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

**Geschwindigkeitsaddition**

MISSING GRAFIK

Boosts nur in x-Richtung

$$MISSINGVEKTORGLEICHUNG \tag{1.25}$$

Die Rapiditäten werden linear addiert!

$$\boxed{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2} \tag{1.26}$$

$$\frac{v}{c} = \tanh(\Psi) = \tanh(\Psi_1 \Psi_2) = \frac{\tanh \Psi_1 \tanh \Psi_2}{1 + \tanh \Psi_1 \tanh \Psi} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}} \tag{1.27}$$

$$v \approx \begin{cases} v_1 + v_2 & v_1, v_2 \ll c \\ \to c & v_1 \to c \text{ oder } v_2 \to c \end{cases}$$

MISSING GRAFIK

**Allgemeiner (rotationsfreier) Lorentzboost**

$$\Lambda(\vec{v}) = MISSINGMATRIX \tag{1.28}$$

**Geschwindigkeitsaddition für $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ beliebig**

$$x^4 = \Lambda(\vec{v}_2)x' = \Lambda(\vec{v}_2)\Lambda(\vec{v}_1)x = \Lambda(\vec{v})x$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma} \left[ \vec{v}_1 + \frac{\vec{v}_2}{\gamma_1} - \vec{v}_1 \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{\vec{v}_1^2} \left( \frac{1}{\gamma_1} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_{2\parallel} + \vec{v}_{2\perp} \sqrt{1 - \frac{v1^2}{c^2}}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2}} \end{aligned}$$

mit $\vec{v}_{2\parallel} \parallel \vec{v}_1$ und $\vec{v}_{2\perp} \perp \vec{v}_1$

$$r_i = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_i^2}{c^2}}$$

$$r = \Lambda^0_0(\vec{v}) = \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right) \tag{1.29}$$

Größen, die unter LTen $\Lambda$ wie $x = (x^\alpha)$ transformieren

$$IS \xrightarrow{\Lambda} IS'$$
$$a \to a' = \Lambda a$$
$$a^\alpha \to a'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta a^\beta$$

bezeichnet man allgemein als 4-Vektoren, oder Lorentzvektoren

### Längenkontraktion und Zeitdilatation

Maßstab mit "Eigenlänge" $l_0$ den in seinem Ruhesystem $IS'$ entlang der $x$-Achse liegt. Weltlinie des Maßstabs im $IS'$:

$$x_1' = MISSINGVEKTOR$$

$$x_2' = MISSINGVEKTOR$$

$IS'$ bewege sich relativ zu $IS$ mit Geschwindigkeit $v$ (in $x$-Richtung)
Welche Länge $l$ misst man für den Maßstab im $IS$?
Längenmessung erfolgt zu fester Zeit $t = 0$.
Für Anfangspunkt:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

Für Endpunkt:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

Längenkontraktion:

$$\Rightarrow \boxed{l = \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{<1} l_0} \tag{1.30}$$

Längenkontraktion nur in Bewegungsrichtung

$$l_\parallel = \frac{1}{\gamma} l_{0\parallel} \ , \ l_\perp = l_{0\perp} \tag{1.31}$$

### Uhrenvergleich

Uhr, die im $IS'$ im Ursprung ruht.
$IS'$ bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit $v$
In $IS$ 2 synchronisierte Uhren:
eine bei $x_1 = 0$ und eine bei $x_2 = vt_2$
Die Uhr fliegt bei $x_1 = 0$ vorbei

MISSING GRAFIK

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

Zum Zeitpunkt $t_2$ passiert die bewegte Uhr den Beobachter bei $vt_2$

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

$$\boxed{t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$t_0$ ... Zeitspanne in $IS'$
$t$ ... Zeitspanne in $IS$

## Eigenzeit

Welche Uhrzeit $\tau$ eines Teilchens bestimmen, des sich mit $\vec{v}(t)$ in $IS$ bewegt. Betrachten des Teilchens zum Zeitpunkt $t$ in einem $IS'$ das sich mmit Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \vec{v}(t)$ gegenüber $IS$ bewegt. $\rightarrow$ $IS'$ ist das "momentane Ruheintervall" des Teilchens.

$$\Rightarrow \vec{v}' \approx 0 \text{ in Zeitintervall } [t', t' + dt']$$

$$\Rightarrow d\tau = dt' = \sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}dt = \sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c}}dt \tag{1.32}$$

"Aufsummation" über alle infinitesimalen Zeitintervalle

Anzeige einer mit $\vec{t}$ bewegten Uhr:

$$\boxed{\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}} \tag{1.33}$$

$\tau$ ... Eigenzeit

$\tau$ hängt nicht von $IS$ ab.
$ds^2$ invariant unter LTen.

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} \Rightarrow \text{invariant unter LTen} \tag{1.34}$$

### Relativistische Mechanik

Relativistisch bewegtes Teilchen unter Einfluss einer Kraft; suchen Bewegungsgleichung
In momentanen Ruhesystem des Teilchens zum Zeitpunkt $t$ gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{m}_{\text{Ruhemasse}} \frac{d\vec{v}'(t')}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_N}_{\text{Newton'sche Kraft}} \text{ in } IS' \tag{1.35}$$

(Unabhängig von $IS$)

versuchen 4-dimensionales Analogon von 1.35 zu finden, das sich im momentanen Ruhesystem auf 1.35 reduziert.

| Nichtrelativistisch: | Relativistisch |
|---|---|
| $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ | Vierergeschwindigkeit |
| Räumliche Rotation | $$u^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \tag{1.36}$$ |
| $\vec{v}(t) \xrightarrow{\hat{R}} \vec{v}'(t) = \hat{R}\vec{v}(t)$ | $\tau$ ... Eigenzeit, unabhängig vom Bezugssystem<br>Lorentz-Transformation |
| | $$u^\alpha(\tau) \xrightarrow{\Lambda} u'^\alpha(\tau) = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta(\tau) \tag{1.37}$$ |
| | $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$<br>$\Rightarrow (u^\alpha(\tau)) = \gamma \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right) = \gamma(c, \vec{v})$ |

$d\tau = \frac{ds}{c}$ invariant unter Lten
$dx^\alpha$ 4-Vektor
$\rightarrow u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ 4-Vektor

### relativistische Verallgemeinerung von 1.35

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \tag{1.38}$$

Forminvariant (kovariant) unter LTen.

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow[IS \rightarrow IS']{\text{LT}} m\frac{du'^\alpha}{d\tau} = F'^\alpha \tag{1.39}$$

Sofern die verallgemeinerte Kraft $F = (F^\alpha)$ wie ein 4-Vektor transformiert

$$F^\alpha \xrightarrow[IS \to IS']{\text{LT } \Lambda} F'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta F^\beta \tag{1.40}$$

$F^\alpha$ ... Minkowskikraft

Im momentanen Ruhesystem $IS'(\vec{v}' = 0, \gamma = 1)$

$$m\left(\frac{du^\alpha(\tau)}{d\tau}\right) = m\gamma' \frac{d}{dt'}(c, \vec{v}') = m\left(0, \frac{d\vec{v}'}{dt'}\right) \tag{1.41}$$

$$\left(F'^\alpha\right) = \left(F'^0, \vec{F}'\right) = \left(0, \vec{F}_N\right) \tag{1.42}$$

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow{\vec{v}'=0} m\frac{d\vec{v}'(t')}{d\tau'} = \vec{F}_N$$

Minkowskikraft in $IS$, wenn in $IS'$ bekannt.

$$IS' \xrightarrow{\Lambda(-\vec{v})} IS$$

$$F^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(-\vec{v})F'^\beta \tag{1.43}$$

Für $\vec{v} = v^1\vec{e}_1$:

$$MISSINGGLEICHUNG \tag{1.44}$$

Für $\vec{v}$ beliebig

$$MISSINGGLEICHUNG \tag{1.45}$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

### Energie und Impuls

Nicht relativistisch:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_N = \vec{F}_N$$

$$p = p^\alpha := mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{1.46}$$

Relativistische Energie und Impuls:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \vec{p} = \gamma\vec{v}m = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.47}$$

Nicht relativistischer Grenzfall: ($|\vec{v}| \ll c, \qquad \gamma \to 1$):

$$\vec{p} \to \vec{p}_N = m\vec{v}$$

$$m\frac{du^0}{d\tau} = \frac{dp^0}{d\tau} = F^0 \xrightarrow{\gamma\to 1} \frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c}\underbrace{\frac{dE}{dt}}_{\text{zeitliche Änderung der kinetischen Energie in n.r. Mechanik}} = \frac{\vec{v}F_N}{c} \tag{1.48}$$

### Relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$p^\alpha p_\alpha = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} = \gamma^2\left(m^2c^2 - m^2\vec{v}^2\right) = m^2c^2\frac{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = m^2c^2$$

$$\boxed{E^2 = m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \tag{1.49}$$

Masselose Teilchen ($m = 0$): $E = c|\vec{p}|$

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_{kin} \\ E_0 &= mc^2 && \text{... Ruheenergie} \\ E_{kin} &= E - E_0 && \text{... kinetische Energie} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Für abgeschlossene Systeme ist Gesamtenergie $E$ und Gesamtimpuls $\vec{P}$ erhalten.

$$Mc^2 = \sqrt{E^2 - c^2 P^2} \tag{1.51}$$

$M$ ... invariante Masse des Gesamtsystems, hängt vom Impuls der einzelnen Teilchen ab.

Atomkern mit $N$ Neutronen und $Z$ Protonen

$$(Nm_n + Zm_p)\, c^2 = \underbrace{M_k}_{\text{Kernmasse}} c^2 + \underbrace{\Delta E}_{\text{Bindungsenergie}} \tag{1.52}$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT Ausbesserung Beweis:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

$$\Lambda^T \Lambda = 1$$

$$\begin{aligned} (\eta')_{\alpha\beta} &= \left(\Lambda^T \eta \Lambda\right)_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \left(\Lambda \eta \Lambda^T\right)_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\gamma \eta_{\gamma\delta} \left(\Lambda^T\right)_\beta^\delta \\ &= \Lambda_\alpha^\gamma \Lambda_\beta^\delta \eta_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

### Elektrodynamik

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha$$

### Maxwell Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho_{el} & \vec{\nabla}\times\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \end{aligned}} \tag{1.79, 1.80}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \tag{1.81}$$

$$\underbrace{(j^\alpha)}_{\text{kontra 4-Vektor}} = \left(c\rho_{el}\cdot\vec{j}\right) \tag{1.82}$$

Aus 1.81 folgt Ladungserhaltung

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} d^3r j^0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \int_{\partial\mathbb{R}^3} d\vec{A}\cdot\vec{j} = 0$$

$Q$... Lorentzvektor

Feldstärketensor:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.83}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{c}j^\beta \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} &= 0 \end{aligned}} \tag{1.84, 1.85}$$

Aus 1.84 folgt $F^{\alpha\beta}$ kontravarianter Lorentzvektor 2. Stufe

### Elektrodynamische Potentiale

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \tag{1.86}$$

$$(A^\alpha) = \left(\Phi, \vec{A}\right)$$

$(A^\alpha)$ bur bis auf 4-divergenz festgelegt, das heißt $F^{\alpha\beta}$ unverändert unter <u>Eichtransformation</u>

$$A^{\alpha\prime} \to A^\alpha + \partial^\alpha \chi \tag{1.87}$$

$\chi(x)$... skalares Feld

#### Lorentzeichung

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_\alpha A^\alpha = 0 && (1.88)\\ &\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha && (1.89)\end{aligned}}$$

### Kopplung eines gebundenen Teilchens an ein elektromagnetisches Feld

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha = \frac{q}{c}\underbrace{F^{\alpha\beta}}_{\text{relativistische Lorentzkraft}} u_\beta \tag{1.90}$$

Vergleich mit Lagrangefunktion:

$$L = \underbrace{-mc\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}_{\text{freies relativistisches Teilchen}} - \frac{q}{c} A^\beta u_\beta$$

Für räumlichen Anteil:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \underbrace{q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)}_{\text{Lorentzkraft}} \tag{1.91}$$

**Energie-Impulstensor**

$$T^{\alpha\beta}_{em} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha}_{\gamma}F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\gamma\delta F^{\gamma\delta}}\right) \tag{1.92}$$

00-Komponente ... Energiedichte

$$u_{em} = T^{00}_{em} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{1.93}$$

$0i$-Komponente ... Energiestromdichte ($\vec{S}$... Poyntingvektor)

$$\vec{S} = c\sum_{i=1}^{3} T^{0i}_{em}\vec{e}_i = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{1.94}$$

$T^{j0}$... Impulsdichten und $T^{ji}$... Impulsstromdichten analog

Aus Maxwellgleichungen folgt:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{em} = -\frac{1}{c}F^{\beta\gamma}j_\gamma \tag{1.95}$$

Im Ladungsfreien Raum ($j_\gamma = 0$)

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{em} = 0 \tag{1.96}$$

Für abgeschlossenes System (keine Kopplung an Strom) folgt
4-Impulserhaltung:

$$P^{\beta}_{em} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T^{0\beta}_{em} = konst. \tag{1.97}$$

Für räumliche Komponenten folgt aus 1.95

$$\frac{1}{c}F^{i\gamma}j_\gamma\vec{e}_i = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} + \vec{B} = \underbrace{\vec{f}}_{\text{Lorentzkraftdichte}} \tag{1.98}$$

1.95 kann geschrieben werden als

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{em} = -\underbrace{f^{\beta}}_{\text{Kraftdichte die e.m. Feld auf Stromverteilung ausübt}} \tag{1.99}$$

⇒ Austausch von Energie auf Impuls zwischen e.m. Feld und Strom

**Relativistische Hydrodynamik**

ideale Flüssigkeiten

$\rho(\vec{r},t)$ ... Massendichte
$\vec{v}(\vec{r},t) = v^i \vec{e}_i$ ... Geschwindigkeitsfeld
$P(\vec{r},t)$ ... isotroper Druck (Skalar, in alle Richtungen gleich)
Viskosität (innere Reibung) vernachlässigbar
Massenelement $\delta m$ mit Volumen $\delta V$

$$\begin{aligned} \Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \Delta \vec{F}_N \\ \underbrace{\frac{\Delta m}{\Delta V}}_{\rho(\vec{r},t)} \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} &= \underbrace{\frac{\Delta \vec{F}_N}{\Delta V}}_{\vec{f}_N(\vec{r},t)} \end{aligned} \tag{1.100}$$

$\vec{f}_N(\vec{r},t) = -\underbrace{\vec{\nabla} P(\vec{r},t)}_{\text{Druckgradient}} + \underbrace{\vec{f}_0(\vec{r},t)}_{\text{äußere Kraft (z.B. Gravitation)}}$ ... Newton'sche Kraftdichte

$$\begin{aligned} d\vec{v}(\vec{r},t) &= dt\frac{d\vec{v}}{dt} + dx\frac{d\vec{v}}{dx} + dy\frac{d\vec{v}}{dy} + dz\frac{d\vec{v}}{dz} \\ &= \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \underbrace{\left( d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right)}_{d\vec{v}dt} \vec{v} \right) \\ &= \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( d\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right) dt \end{aligned} \tag{1.101}$$

Eulergleichung:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_0 \tag{1.102}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{1.103}$$

1.102 + 1.103 nichtrelativistische Feldgleichung einer idealen Flüssigkeit

5 unbekannte Felder $\rho$, $P$, $v^i$, aber nur 4 Gleichungen.
Brauche Beziehung zwischen $\rho$ und $P$.
Beispiele:

$\rho = konst.$ .. inkompressible Flüssigkeit

$\frac{P}{\rho} = konst.$ ... ideales Gas bei festem T

**Relativistische Verallgemeinerung?**

$$v^i(\vec{r},t) \rightarrow u^\alpha(x), x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

linke Seite $\rightarrow \vec{v}$ quadratisch $\rightarrow$ Ansatz:

$$M^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta \tag{1.104}$$

$M^{\alpha\beta} \rightarrow$ Kontravarianter Term 2. Stufe

$\rho(x)$ ... Massendichte $\rightarrow$ <u>Lorentz-Skalar</u>

$$\rho(x) = \rho'(x') = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\text{Ruhemasse}}{\text{Eigenvolumen}}$$

$\rho'(x')$ ... Dichte des Flüssigkeitselements $\Delta V$ am Ort $x$ im momentanen Ruhesystem $IS'$

$$(u^\alpha) = \gamma\,(c, \vec{v}) \tag{1.105}$$

$$\left(M^{\alpha\beta}\right) = \rho\gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^1}{c} & \frac{v^2}{c} & \frac{v^3}{c} \\ \frac{v^1}{c} & & & \\ \frac{v^2}{c} & & \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{c^2} & \\ \frac{v^3}{c} & & & \end{pmatrix} \tag{1.106}$$

Analogon zur Ladungsdichte $\rho_{em}$ in Elektrodynamik

$$\tilde{\rho} = \frac{M^{00}}{c^2} = \gamma^2\rho = \frac{\rho}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1.107}$$

$\tilde{\rho}$ ... Energie Massendichte
$\tilde{\rho}$ transformiert wie 00-Komponente von Tensor

$$\partial_\beta M^{0\beta} = c\left[\partial_t\tilde{\rho} + \partial_k\left(\tilde{\rho}v^k\right)\right] \tag{1.108}$$

$$\begin{aligned} \partial_\beta M^{i\beta} &= \partial_t\left(\tilde{\rho}v^i\right) + \partial_k\left(\tilde{\rho}v^i v^k\right) \\ &= \tilde{\rho}\left(\partial_t v^i + v^k\partial_k v^i\right) + \underbrace{v^i\left[\partial_t\tilde{\rho} + \partial_k\left(\tilde{\rho}v^k\right)\right]}_{=0 \text{ wegen Kontinuitätsgleichung}} \end{aligned} \tag{1.109}$$

<u>Für $v \ll c$:</u>
1.108 $\rightarrow$ linke Seite von 1.103
1.109 $\rightarrow$ linke Seite von 1.102

Kräftefreier Fall: ($P = 0,\ f_0 = 0$)
kovariante Verallgemeinerung der Strömungsgleichung

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.110}$$

Kontinuitätsgleichung (für Energiestrom)

$$\partial_\beta M^{0\beta} = 0 \tag{1.111}$$

Eulergleichung (Kontinuitätsgleichung für Impulsstrom)

$$\partial_\beta M^{i\beta} = 0 \tag{1.112}$$

1.110 differenzieller Erhaltungssatz für 4-Impulsdichte ⇒ 4-Impulserhaltung

Nicht relativistisch, anisotropes Medium (Druck kann Richtungsabhängig sein).
Kraft auf ein gerichtetes Flüssigkeitselement

MISSING GRAFIK

$$d\vec{F} = \hat{P} d\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} dF^i \vec{e}^i \qquad \text{mit } dF^i = \sum_{j=1}^{3} P^{ij} dA^j \tag{1.113}$$

Im momentanen Ruhesystem $IS'$ des Flüssigkeitselements an Ort $\vec{x}$ zum Zeitpunkt $t$ und isotroper Druckverteilung:

$$\left(P'^{ij}\right) = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \tag{1.114}$$

relativistisch verallgemeinerter 4-Tensor, in $IS'$ gelten 1.102 → auf rechter Seite steht.

$$\partial'_i P = \partial'_j P'^{ij} \tag{1.115}$$

4-Divergenz des Drucktensors auf rechter Seitevon 1.110.

$$\left(\partial'_\beta P'^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \partial'_i P \end{pmatrix} \tag{1.116}$$

Druck in $IS'$ ... "Eigendruck"
Druck in $IS$, in dem Flüssigkeitselement Geschwindigkeit $\vec{v}$ aufweist → Lorentzboost mit $-\vec{v}$

$$P^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta P'^{\gamma\delta} = P\left(\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} - \eta^{\alpha\beta}\right) \tag{1.117}$$

Eulergleichung + Kontinuitätsgleichung relativistisch (für $\vec{f_0} = 0$)

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} + \partial_\beta P^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.118}$$

## Energie Impulstensor

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P \tag{1.119}$$

Eulergleichung + Kontinuitätsgleichung mit Energie Impulstensor:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.120}$$

Mit äußeren Kräften ($\vec{f_0} \to$ Minkowskikraft $f^\alpha$):

Relativistische Grundgleichung der Hydrodynamik:

$$\boxed{\partial_\beta T^{\alpha\beta} = f^\alpha} \tag{1.121}$$

Für abgeschlossens System ($f^\alpha = 0$):

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.122}$$

Kontinuitätsgleichung für Energie- und Impulsdichten

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T^{\alpha 0} = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \partial_i T^{\alpha i} \stackrel{\text{Gauss}}{=} -\int_{\partial(\mathbb{R}^3)} dS_i T^{\alpha i} = 0 \tag{1.123}$$

$T^{\alpha i}(x) \xrightarrow{|\vec{x}|\to\infty} 0$ genügend schnell
$\Rightarrow$ 4- Impulserhaltung

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T^{\alpha 0} = konst \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{1.124}$$

$$\begin{aligned} &T^{00} \to \text{ Energiedichte } \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T^{00} \text{ Energie} \\ &\frac{T^{i0}}{c} \to \text{ Impulsdichte } \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \frac{T^{i0}}{0} \text{ Impuls} \end{aligned} \tag{1.125}$$

$cP^0$ ... Energie
$P^i$ ... Impuls

Energie- Impulserhaltung gilt für abgeschlossne Systeme
geladene Flüssigkeit, auf die e.m. Kräfte wirken

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \underbrace{f^\alpha}_{\text{Minkowskikraftdichte}} \overset{1.99}{=} -\partial_\beta \underbrace{T^{\alpha\beta}_{em}}_{\text{Energie-Impulstensor des e.m. Feldes}} \tag{1.126}$$

$$\partial_\beta \left( T^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{em} \right) = 0 \tag{1.127}$$

<u>Allgemein:</u>

$\Rightarrow$ Energie und Impulserhaltung für Gesamtsystem aber nicht getrennt für Flüssigkeit und e.m. Feld.
Zusätzliche Kräfte können zu Bestandteil des Energie- Impulstensor gemacht werden, sodass in Energie- Impulstensor alle Energieformen berücksichtigt sind.

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{em} + ... \tag{1.128}$$

$$\partial T^{\alpha\beta} = 0, \qquad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \tag{1.129}$$

Energie- Impulstensor für Gesamtsystem

| <u>Elektrodynamik</u> | <u>ideale Flüssigkeit</u> |
|---|---|
| $\rho_{el}$ ... elektrische Ladungsdichte | $\tilde{\rho} = \gamma^2 \rho$ ... Energie- Massedichte |
| $(j^\alpha)$ ... $(\rho_{el}, \vec{j})$ Strom | $\left(T^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} c^2\tilde{\rho} = c^2\gamma^2\rho & \cdots \\ \cdots & \end{pmatrix}$ |
| $\partial j^\alpha = 0 \Rightarrow$ Ladungserhaltung | $\partial T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$ 4-Impuls |
| $j^\alpha$ ... Quelle des e.m. Felds | $T^{\alpha\beta}$ ... Quelle des Gravitationsfeldes |
| $\Box A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(x)$ | $\Box g^{\alpha\beta}(x) \sim G T^{\alpha\beta}(x)$ |
| ... inhomogene Maxwellgleichung | ... Einstein'sche Feldgleichung |
| | $T^{\alpha\beta}$ enthält <u>alle</u> Energieformen |
| | Wie sieht $g_{\alpha\beta}(x)$ aus? |
| | Enthält $T^{\alpha\beta}$ auch die Energie des Gravitationsfeldes? |

# 2 Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

- relativistische Gleichungen $\xrightarrow{|\vec{v}| \ll c}$ nichtrelativistische Gleichungen
- Kovarianzprinzip:relativistische Gleichungen lassen sich im kovarianter Form, das heißt als gleichungen für Lorentz-Tensoren formulieren, die forminvariant unter Lorentz-Transformationen sind

Für relativistische Formulierung der Gravitation

- Äquivalenzprinzip
  Schwache Form: träge und schwere Masse sind gleich
  Starke Form (Einstein'sches Äquivalenzprinzip):
  Für ein beliebiges Gravitationsfeld ist es in jedem Raum- Zeitpunkt $X$ möglich, ein lokales Inertialsystem zu finden, sodass in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes $X$ die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie ohne Gravitation gelten.

  ART $\xrightarrow{\text{Äquivalenzprinzip}}$ SRT
  (analog SRT $\xrightarrow{|\vec{v}| \ll c}$ NM)

- Allgemeines Kovarianzprinzip: Gleichungen der ART sind forminvariant (kovariant) unter allgemeinen (nicht singuläre) Koordinatentransformationen $x \to x'$.

### Äquivalenzprinzip

Frei fallender Körper nahe der Erdoberfläche (nicht relativistisch)

$$m_t \ddot{z} = -m_s g$$

Für $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$ ist die Lösung

$$z(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_s}{m_t} g t^2 \tag{2.1}$$

Für Pendel bei kleinen Auslenkungen ist die Schwingungsdauer

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{m_t}{m_s}\right)\left(\frac{l}{g}\right) \tag{2.2}$$

Konstanz von $\frac{m_s}{m_t}$:
Newton: auf $10^{-3}$ genau

Eötvös (1922): auf $5 \times 10^{-9}$ genau
Aktuelles Ergebnis: auf $2 \times 10^{-13}$ genau

$[m_s] = [m_t] = 1$ kg
$\Rightarrow$ Wert von $G$ in 0.2
$m_s = m_t$

Trägt Energie des Gravitationsfeldes auch zu $m_s$ und $m_t$ in gleichem Maße bei?

MISSING EQNUMBER  MISSING GRAFIK (Erde Satelit)

Lokales IS. Gegenüber Fixsternhimmel beschleunigt. In (infinitesimal) kleinem Raum-Zeitvolumen spielen sich physikalische Vorgänge wie in einem IS ohne Gravitationskräfte ab.

## Relativistische Gesetze mit Gravitation

SRT-Gesetze: ohne Gravitation $\underset{\text{lokales IS}\leftrightarrow\text{globales BS des Beobachters}}{\xleftrightarrow{\text{Koordinatentr.}}}$ Relativistische Gesetze mit Gravitati

Gravitative Effekte lassen sich nur lokal wegtransformieren
Beobachter (KS): Koordinaten $(x^0, x^1, x^2, x^3)$

Lokales IS (Minkowskiraum): Koordinaten $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$

$$IS \to KS: \qquad \xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{2.6}$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.6A

Invarianz des Wegelements $ds$:

$$IS: \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{2.7}$$

$$KS: \quad ds^2 = MISSINGGLEICHUNG \tag{2.8}$$

Ortsabhängiger metrischer Tensor:

$$g_{\mu\nu}(x) = MISSINGGLEICHUNG \tag{2.9}$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.9A

Raum (Manigfaltigkeit) mit ortsabhängiger Metrik ... Riemanscher Raum (genauer $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \geq 0$ mit $= 0$, wenn $x = 0$)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... $(= 0, 1, 2, 3)$ im Minkowskiraum

$\mu, \nu, \lambda, \kappa$ ... $(= 0, 1, 2, 3)$ Riemanraum

$g_{\mu\nu}(x)$ wird von Koordinaten (**??**) bestimmt und hängt von relativer Beschleunigung zwischen $KS$ und $IS$ ab.

Für lokale $IS$e an zwei verschiedenen Orten sind Beschleunigungen im allgemeinen verschieden $\Rightarrow$ Für reale Gravitationsfelder gibt es keine globale Transformation, die den (**??**) auf Minkowskitransformation bringt.
($\Leftrightarrow$ Riemann-Raum gekrümmt)

Ursprung von lokalem $IS$ bei $\underbrace{X}_{\text{Koordinate im } KS} = (X^0, X^1, X^2, X^3)$

$$\xi^\alpha_X(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.6b

$$g^{\mu\nu}(X) = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}|_{x=X}$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.9b

Für realistische Gravitationsfelder kann $\xi^\alpha_X$ nicht $X$ unabhängig gewählt werden.

### Bewegung in Gravitationsfeld

Im lokalen $IS$ kräftefreie Bewegung von Massepunkt:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0 \tag{2.10}$$

Eigenzeit:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{2.11}$$

Lösung:

$$\xi^\alpha = a^\alpha \tau + b^\alpha \tag{2.12}$$

gilt für massive Teilchen.

Für masselose Teilchen gilt: $ds = cd\tau = 0 \Rightarrow d\tau = 0 \Rightarrow$ Bahn von masselosen Teilchen kann nicht mit Eigenzeit parametrisisert werden.
Masseloses Teilchen bewegt sich ohne äußere Kräfte mit konstanter Geschwindigkeit $c \Rightarrow$ lässt sich in der Form $\xi^\alpha = cn^\alpha\sigma + b^\alpha$ mit Bahnparameter $\sigma$ mit $(n^2 = 0)$ parametrisieren.

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = 0 \tag{2.13}$$

mit $(ds^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 0)$

$$\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\sigma}\frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = 0 \tag{2.14}$$

Im <u>globalen $KS$</u> des Beobachters:

$$0 = MISSINGGLEICHUNG \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\kappa_\mu \tag{2.16}$$

$$0 = MISSINGGLEICHUNG \tag{2.17}$$

Hilfsgröße:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} := \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{2.18}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} \tag{2.19}$$

$\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ ... affiner Zusammenhang, Christoffelsymbol (2.Art)

$x^\kappa(\tau)$ ... Teilchenbahn im $KS$ in Abhängikeit von Eigenzeit $\tau$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

$\Rightarrow$ zusätzliche Bedingung:

$$g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2 \tag{2.20}$$

Für masseloses Photon:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\sigma^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} \tag{2.21}$$

$ds^2 = d\tau^2 = 0$ Zusatzbedingung:

$$g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \tag{2.22}$$

### Christoffelsymbole und metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}, \qquad \Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= MISSINGGLEICHUNG \\ &\quad + MISSINGGLEICHUNG\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} &= \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}\underbrace{\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\gamma}}_{\delta^\beta_\gamma}\frac{\partial^2\xi^\gamma}{\partial x^\mu\partial x^\lambda} \\ &= \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\mu\partial x^\lambda} \\ &\overset{\mathbf{??}}{=} MISSINGGLEICHUNG\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$g^{\kappa\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\kappa_\sigma \tag{2.26}$$

$$\boxed{\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = MISSINGGLEICHUNG} \tag{2.27}$$

$$\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \tag{2.28}$$

### Newtonscher Grenzfall

Newton-Theorie (nicht relativistisch):

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^2} \tag{2.29}$$

$\Phi(\vec{r})$ .. statisches (d.h. zeitunabhängiges) Gravitationspotential

Für $\Phi(\vec{r})$ schwach und $|\vec{v}| \ll c$ sollte **??** in **??** übergehen.

Für <u>$\Phi(\vec{r})$ schwach:</u>

$$g_{\mu\nu}(x) = MISSINGGLEICHUNG \tag{2.30}$$

mit

$$|h_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.31}$$

Koordinaten in $KS$: $MISSINGGLEICHUNG$
sind "fast" Minkowskikoordinaten (aber nicht ganz)

Kleine Geschwindigkeit:

$$\left|v^i\right| = \left|\frac{dx^i}{dt}\right| \ll c \qquad \text{bzw.} \qquad MISSINGGLEICHUNG \tag{2.32}$$

$$\textbf{??} \Rightarrow MISSINGGLEICHUNG \tag{2.33}$$

$$\textbf{??}, \textbf{??} \Rightarrow MISSINGGLEICHUNG \tag{2.34}$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.34a

$$(\Gamma^{\kappa}_{00}) = \left(0, \frac{1}{2}\vec{\nabla} h_{00}\right)$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.34b

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = c\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = konst. = K \qquad dt = Kd\tau \tag{2.35}$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.35a

$$MISSINGGLEICHUNG$$

MISSING BESCHRIFTUNG 2.35b

$$MISSINGGLEICHUNG \tag{2.36}$$

$$MISSINGGLEICHUNG \tag{2.37}$$

$$\boxed{MISSINGGLEICHUNG} \tag{2.38}$$