

# Introduction to General Relativity and Cosmology

Wolfgang Schweiger WS2019/2020

Erik Kraml  
Tim Sagaster

7. Oktober 2019

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>0</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>3</b>
0.1	Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen	4

## 0 Einleitung und Motivation

### Einführende Zitate

1. W.Pauli "The general theory of relativity .... beauty in its mathematical structure."
2. M.Born: "(The general theory of relativity) seemed and still seems ... admire it as a work of art."
3. A.Einstein (to A.Sommerfeld) "At present I occupy myself ... the original relativity is child's play."

### Abkürzungen

SR ... spezielle Relativitätstheorie

ART ... allgemeine Relativitätstheorie - relativistische Theorie der Gravitation

E-GL ... Einstein-Gleichung

### Einführung

- Äquivalenzprinzip: Gravitationseffekte lassen sich durch Übergang zu geeignet beschleunigtem Bezugssystem wegtransformieren (z.B. Satellitenlabor, ...)
- Kovarianzprinzip: Physikalische Gleichungen sollen als Tensorgleichungen formuliert werden, da sie in allen Bezugssystemen dieselbe Form aufweisen.

Einstein erkannte, dass man Kräfte die durch Gravitation auftreten in dem metrischen Tensor absorbieren kann. Die Metrik hängt dadurch vom betrachteten Raumzeitpunkt ab. Dies entspricht einer gekrümmten Mannigfaltigkeit, daher spricht man von "gekrümmter Raum-Zeit". In diesem Raum muss der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten nicht mehr unbedingt die Gerade sein, sondern kann ein Bogen sein.

### Einstein-Gleichung

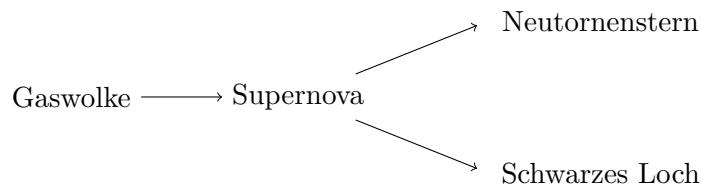
Beschreibt Zusammenhang zwischen metrischem Tensor und Massenverteilung im Raum.

$$g_{\mu\nu}(x) \leftrightarrow \text{Massenverteilung im Raum}$$

$g_{\mu\nu}(x)$  ... Raum-Zeit abhängiger metrischer Tensor

Lösung der E-GL für feste Massenverteilung:

- Metrik in der Nähe eines massiven Sterns  
physikalische Konsequenzen:
  - Lichtablenkung in der Nähe einer großen Masse
  - gravitative Rotverschiebung
  - ART Effekte auf Periheldrehung (insbesondere Merkur)
- Gravitationswellen durch beschleunigte Massen  
LIGO-Experiment (2015)
- Sternentwicklung



- Geschichte des Universums  
Kosmologisches Standardmodell (Robertson-Walker-Metrik)  
 $R(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  : Singularität der Lösung (Big Bang)  
3K kosmische Hintergrundstrahlung

## 0.1 Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen

Ziel: relative Verallgemeinerung von Newtons Gravitationstheorie

1687: "Philosophie naturalis principia mathematica"

$N$  Massepunkte die gravitativ wechselwirken:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = -G \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t))}{|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|^3}$$

$\vec{r}_i(t)$  ... Position des  $i$ -ten Teilchen

$m_i$  ... Masse des  $i$ -ten Teilchen

$G = (6.67408 \pm 0.00031) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$  ... Gravitationskonstante (2014 CODATA)

## Gravitationspotential

$$m := m_i, \vec{r}(t) := \vec{r}_i(t) :$$

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} = -G \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{j \neq i} m_j \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_j) \dots \text{Massendichte}$$

Dynamische Gleichung für Massen:

$$\underbrace{m}_{\text{träge Masse}} \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = - \underbrace{m}_{\text{schwere Masse}} \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}(t))$$

Feldgleichung für Gravitationspotential:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

Vergleich Electrodynamik:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -q \vec{\nabla} \Phi_{el}(\vec{r})$$

$$\Delta \Phi_{el}(\vec{r}) = 4\pi \rho_{el}(\vec{r})$$