Introduction to General Relativity and Cosmology

Wolfgang Schweiger WS2019/2020

Erik Kraml
Tim Sagaster

11. November 2019

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung und Motivation

Einführende Zitate

1. W.Pauli "The general theory of relativity .... beauty in its mathematical structure."
2. M.Born: "(The gerneral theory of relativity) seemed and still seems ... admire it as a work of art."
3. A.Einstein (to A.Sommerfeld) "At present I occupy myself ... the original relativity is child's play."

Abkürzungen

SR ... spezielle Relativitätstheorie
ART ... allgemeine Relativitätstheorie - relativistische Theorie der Gravitation
E-GL ... Einstein-GLeichung
IS ... Inertial System

Einführung

- Äquivalenzprinzip: Gravitationseffekte lassen sich durch Übergang zu geeignet beschleunigtem Bezugssystem wegtransformieren (z.B. Satellitenlabor, ...)
- Kovarianzprinzip: Physikalische Gleichungen sollen als Tensorgleichungen formuliert werden, da sie in allen Bezugssytemen dieselbe Form aufweisen.

Einstein erkannte, dass man Kräfte die durch Gravitation auftreten in dem metrischen Tensor absorbieren kann. Die Metrik hängt dadurch vom betrachteten Raumzeitpunkt ab. Dies entspricht einer gekrümmten Manigfaltigkeit, daher spricht man von "gekrümmter Raum-Zeit". In diesem Raum muss der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten nicht mehr unbedingt die Gerade sein, sondern kann ein Bogen sein.

Einstein-Gleichung

Beschreibt Zusammenhang zwischen metrischem Tensor und Massenverteilung im Raum.

$$g_{\mu\nu}(x) \leftrightarrow \text{Massenverteilung im Raum}$$

$g_{\mu\nu}(x) \ldots$ Raum-Zeit abhängiger metrischer Tensor
Lösung der E-GL für feste Massenverteilung:

→ Metrik in der Nähe eines massiven Sterns
physikalische Konsequenzen:

- Lichtableitung in der Nähe eier großen Masse
- gravitative Rotverschiebung
- ART Effekte auf Periheldrehung (insbesondere Merkur)

→ Gravitationswellen durch beschleunigte Massen
LIGO-Experiment (2015)

→ Sternentwicklung

$$\begin{tikzcd} & & \text{Neutornenstern} \\ \text{Gaswolke} \arrow[r] & \text{Supernova} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \text{Schwarzes Loch} \end{tikzcd}$$

→ Geschichte des Universums
Kosmologisches Standardmodell (Robertson-Walker-Metrik)
$R(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$: Singularität der Lösung (Big Bang)
3K kosmische Hintergrundstrahlung

0.1 Von Newtons Gravitationstheorie zu den Einstein-Gleichungen

<u>Ziel:</u> relative Verallgemeinerung von Newtons Gravitationstheorie
1687: "Philosophie naturalis principia mathematica"
N Massepunkte die gravitativ wechselwirken:

$$m_i \frac{g^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = -G \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{m_i m_j (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t'))}{|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|^3} \tag{0.1}$$

$\vec{r}_i(t)$ ... Position des i-ten Teilchen
m_i ... Masse des i-ten Teilchen

$$G = (6.67408 \pm 0.00031) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2} \tag{0.2}$$

G ... Gravitationskonstante (2014 CODATA)

Gravitationspotential

$m := m_i$, $\vec{r}(t) := \vec{r}_i(t)$:

$$\Phi(\vec{r}) = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_j(t)|} = -G \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{0.3}$$

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{j \neq i} m_j \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) \tag{0.4}$$

$\rho(\vec{r}')$ ... Massendichte

Dynamische Gleichung für Massen:

$$\boxed{\underbrace{m}_{\text{träge Masse}} \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\underbrace{m}_{\text{schwere Masse}} \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}(t))} \tag{0.5}$$

Feldgleichung für Gravitationspotential:

$$\boxed{\Delta\Phi = 4\pi G \rho(\vec{r})} \tag{0.6}$$

Vergleich Electrostatik:

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -q \vec{\nabla}\Phi_{el}(\vec{r}) \tag{0.7}$$

Φ_{el} ... elektrisches Potential

$$\Delta\Phi_{el}(\vec{r}) = 4\pi \rho_{el}(\vec{r}) \tag{0.8}$$

ρ_{el} ... elektrische Ladungsdichte

Relativistische Verallgemeinerung der Elektrostatik → Elektrodynamik

$$\Delta \to \Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{0.9}$$

$$\rho_{el} \to (\rho_{el} c, \rho_{el} \vec{v}) = (j^\alpha) \ \alpha = 0,1,2,3 \tag{0.10}$$

$$\Phi_{el} \to (\Phi_{el}, \vec{A}) = (A^\alpha) \ \alpha = 0,1,2,3 \tag{0.11}$$

A^α ... elektrodynamische Potentiale

$$\Delta\Phi(t,\vec{r}) = -4\pi\rho_{el}(\vec{r}) \to \underbrace{\Box A^\alpha(t,\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} j^\alpha(t,\vec{x})}_{\text{forminvariant bei relativistischen Transformationen zwischen verschiedenen ISen}} \quad \alpha = 0,1,2,3 \tag{0.12}$$

Maxwell-Gleichungen für elektrodynamische Potentiale in Lorentz-Eichung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$

Relativistische Verallgemeinerung der Gravitation

- $\Delta \to \Box$
- 0.10 kann nicht direkt übernommen werden.
  Gesamteladung ist eine erhaltene Größe, hängt nicht vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab!

$$\overbrace{\partial_\alpha j^\alpha = 0}^{\text{Stromerhaltung}} \Rightarrow \overbrace{\int_{t=const} d^3 r j^0 = \int_{t=const} d^3 r c\rho_{el}(\vec{r}) = Q}^{\text{Ladungserhaltung}} \tag{0.13}$$

ABER: Gesatmasse hängt vom Bewegungszustand der einzelnen Teilchen ab.
Erhaltungsgröße $\to$ gesamte invariante Masse des Systems:

$$\underbrace{M^2}_{\text{unabhängig von IS}} = E^2 - \vec{P}^2 \text{abstand} \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \text{abstand} E = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2} \tag{0.14}$$

Energie Impuls Tensor:
$(T^{\alpha\beta})$ =MISSING

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow MISSING \tag{0.15}$$

$$\rho \to MISSING \tag{0.16}$$

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho \to \boxed{\Box \underbrace{g^{\alpha\beta}}_{\text{metrischer Tensor}} \sim G T^{\alpha\beta}} \tag{0.17}$$

1 Spezielle Relativitätstheorie

Bezugssystem
räumliche Koordinaten + Uhr (Zeitkoordinate) ausgezeichnete Bezugssystem: Inertialsysteme (ISe)

Galilei'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig $\rightarrow$ physikalische Gesetze besitzen in allen ISen diesselbe Form (forminvariant bzw. kovariant)
- newtons Axiome gelten in allen ISen

Allgemeinste Übergänge zwischen ISen $\rightarrow$ Galilei-Transformationen

$$\begin{aligned} IS &\rightarrow IS' \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \hat{O}\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}t \\ t &\rightarrow t' = t + t_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\hat{O}^{-1} = \hat{O}^T$ ... Orthogonale Rotationsmatrix

- Translation in t um t_0
- Translation in $\vec{x}$ um $\vec{a}$
- Rotation von $\vec{v}$ mit $\hat{O}$
- Boost mit $\vec{v}$

Galilei-transformation $\rightarrow$ Probleme mit IS-Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) $c = 299792458ms^{-1}$

Einstein'sches Relativitätsprinzip

- Alle ISe sind gleichwertig
- Die Maxwell'schen Gleichungen gelten in allen ISen

4-dimensionale Raum-Zeit

MISSING GRAFIK

"Ereignis" ... Punkt in der 4-dim Raum-Zeit
$(ctover\vec{x})$ ... "Ortsvektor" des Ereignisses

$$MISSINGortsvektor \tag{1.2}$$

Schreibweise:

- 4-dim Vektor $x = MISSING$ ohne Vektorpfeil
- 3-dim Vektor $\vec{x} = MISSING$ mit Vektorpfeil
- Griechische Indizes: $\underbrace{\alpha, \beta, \gamma, ...}_{\text{SRT}}, \underbrace{\mu, \nu, \rho, ...}_{\text{ART}}$ bezeichnen Komponenten von 4er Vektoren
- Lateinishce Indizes: $i, j, k, ... = 1, 2, 3$ bezeichnen Komponenten von 3-dim Vektoren
- Indizes hochgestellt $\rightarrow$ kontravariante Vektorkomponenten
- Indizes tiefgestellt $\rightarrow$ kovariante Vektorkomponenten

MISSING GRAFIK
Bewegung durch 4-dim Raum-Zeit $\rightarrow$ Abfolg von Ereignissen $\rightarrow$ Weltline

$$ds^2 := c^2 dt - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 \tag{1.3}$$

"Wegelement" in 4-dim Raum-Zeit unabhängig von IS.

$$\left|\frac{d\vec{x}'}{dt'}\right| = c \Rightarrow c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = 0 \stackrel{1.3}{\Longrightarrow} \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| = c \tag{1.4}$$

Galilei-Boost

$$\begin{aligned} c &= \left|\frac{d\vec{x}'}{dt'}\right| = \left|\frac{d\vec{x}'}{dt}\right| = \left|\frac{d(\vec{x} - \vec{v}t)}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{v}\right| \leq \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| + |\vec{v}| \\ \Rightarrow \text{ i.a. } & \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| \neq c \end{aligned} \tag{1.5}$$

Im normalen euklidishcen Raum:

$$d\vec{x} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = MISSING = MISSING \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \underbrace{c^2 dt^2}_{(dx^0)^2} - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = MISSING \\ &= dx^T \eta dx = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} dx^\alpha \eta_{\alpha,\beta} = dx^\alpha \eta_{\alpha\beta} dx^\beta \quad \text{Einstein'sche Summenkonvention} \end{aligned} \tag{1.7}$$

$\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ ... metrischer Tensor

Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten

AB in 4-dimensionaler Raum-Zeit:

$$S_{AB}^2 := (x_A - x_B)^2 = \left(x_A^0 - x_B^0\right)^2 - (\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 \tag{1.8}$$

$$S_{AB}^2 = \begin{cases} CASE, & MISSING \\ CASE, & MISSING \\ CASE, & MISSING \end{cases} \tag{1.9}$$

MISSING GRAFIK

raumartige Punkte sind nicht kausal verbunden ($\nexists$ Signal mit $v \leq c$, das die beiden Punkte verbindet)

Definieren des Skalarprodukts

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{1.10}$$

$$x \cdot y = MISSING = x^T \eta y \tag{1.11}$$

In Komponenten Schreibweise:

$$x \cdot y = x^T \eta y = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta \underbrace{= x^\alpha \eta_{\alpha\beta} y^\beta}_{\text{Einstein'sche Summenkonvention}} \tag{1.12}$$

Kovariante Vektorkomponenten

$$y_\alpha := \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} y^\beta = \eta_{\alpha\beta} y^\beta$$
$$MISSINGVEKTOREN \tag{1.13}$$

$$x \cdot y = \sum_{\alpha=0}^{3} x^\alpha y_\alpha = x^\alpha y_\alpha \tag{1.14}$$

- 4-dim Raum-Zeit + Skalarprodukt $\rightarrow$ Minkowski Raum
- Skalarprodukt **??** induziert Metrik **??**

Wie sehen allgemeine Übergänge zwischen ISen aus?

Allgemeiner linearer Ansatz (Analog zur Galilei Transformation)

$$\begin{aligned} \mathrm{IS} &\to \mathrm{IS}' \\ x &\to x' = \Lambda x + b \end{aligned} \tag{1.15}$$

b ... 4-dim Vektor für Raum-Zeit-Transformation
Λ ... 4-dim Matrix für "Rotation" in Raum-Zeit

Λ, b so wählen, dass **??** gewährleistet ist.
Für b: konstant $\surd$

Für räumliche Rotation:

$$Lambda = MISSINGMATRIX \surd \tag{1.16}$$

$\hat{R}$ ... orthogonale Rotationsmatrix ($\hat{R}\hat{R}^T - \hat{R}^2\hat{R} = \hat{1}$)

- Bemerkung: Allgemeine Transformation der Form
  $x' : \Lambda x + b$
  nennt man <u>Poincaré - Transformation</u> (wenn sie **??** erfüllen)

  $$\left.\begin{array}{l} \det\hat{R} = 1 \text{ keine Raumspiegelung} \\ \det\Lambda = 1 \text{ keine Zeitspiegelung} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Eigentliche} \\ \text{Poincaré-Transformation} \end{array}$$

  $b = 0 \to$ <u>Lorentz- Transformation</u>

Wie sehen Lorentz-Boosts aus?

$$\begin{aligned} dx' &= \Lambda dx \\ dx'^{\alpha} &\Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta} \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} dx' \cdot dx' = dx'^T \eta dx' = dx^T \underline{\Lambda^T \eta \Lambda} dx \overset{!}{=}_{??} dx^T \underline{\eta} dx = dx \cdot dx \\ \Rightarrow \boxed{\Lambda\eta\Lambda = \eta} \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\left(\Lambda^T\right)^{\alpha}_{\gamma} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta}$$

$$\boxed{\Lambda^{\alpha}\gamma\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta}} \tag{1.19}$$

TEIL A

$$MISSING$$

TEIL B

Für Boost in x-Richtung

$$\Lambda = \left(\Lambda^{\alpha}_{\beta}\right) = MISSINGMATRIX \tag{1.20}$$

Vernachlässige y- und z- Richtung:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \left(\Lambda^1_0\right)^2 &= 1 \\ -\left(\Lambda^1_1\right)^2 + \left(\Lambda^0_1\right)^2 &= -1 \\ \Lambda^0_0\Lambda^0_1 - \Lambda^1_0\Lambda^1_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0 = \cosh\Psi \ , \ \Lambda^1_0 = -\sinh\Psi \ \text{1. Gleichung erfüllt} \\ \text{2.Gleichung} \Rightarrow \Lambda^1_1 = \cosh\Psi \\ \text{3.Gleichung} \Rightarrow \Lambda^0_1 = -\sinh\Psi \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG \tag{1.22}$$

Wie hängt Ψ mit Boostgeschwindigkeit v zusammen?
MISSING GRAFIK
MISSING GRAFIK

Weltlinie des Ursprungs von IS′

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

$$\boxed{\tanh\Psi = \frac{v}{c}} \tag{1.23}$$

Ψ ... "Rapidität"

$-1 \leq tanh\Psi \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{v}{c}\right| \leq 1 \Rightarrow c$Maximalgeschwindigkeit

Mit $\cosh^2\Psi = \dfrac{1}{1-\tanh\Psi}$ und $\sinh^2\Psi = \dfrac{\tanh^2\Psi}{1-\tanh^2\Psi}$ folgt

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

$$\boxed{MISSINGMATRIXGLEICHUNG \text{ mit } \gamma = \cosh\Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{1.24}$$

MSSING GRAFIK

Grenzfall $\left(\frac{v}{c}\right) \ll 1$:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

Geschwindigkeitsaddition

MISSING GRAFIK

Boosts nur in x-Richtung

$$MISSINGVEKTORGLEICHUNG \tag{1.25}$$

Die Rapiditäten werden linear addiert!

$$\boxed{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2} \tag{1.26}$$

$$\frac{v}{c} = \tanh(\Psi) = \tanh(\Psi_1 \Psi_2) = \frac{\tanh \Psi_1 \tanh \Psi_2}{1 + \tanh \Psi_1 \tanh \Psi} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}} \tag{1.27}$$

$$v \approx \begin{cases} v_1 + v_2 & v_1, v_2 \ll c \\ \to c & v_1 \to c \text{ oder } v_2 \to c \end{cases}$$

MISSING GRAFIK

Allgemeiner (rotationsfreier) Lorentzboost

$$\Lambda(\vec{v}) = MISSINGMATRIX \tag{1.28}$$

Geschwindigkeitsaddition für $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ beliebig

$$x^4 = \Lambda(\vec{v}_2)x' = \Lambda(\vec{v}_2)\Lambda(\vec{v}_1)x = \Lambda(\vec{v})x$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma}\left[\vec{v}_1 + \frac{\vec{v}_2}{\gamma_1} - \vec{v}_1\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{\vec{v}_1^2}\left(\frac{1}{\gamma_1} - 1\right)\right]$$
$$= \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_{2\parallel} + \vec{v}_{2\perp}\sqrt{1 - \frac{v1^2}{c^2}}}{1 + \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}}$$

mit $\vec{v}_{2\parallel} \parallel \vec{v}_1$ und $\vec{v}_{2\perp} \perp \vec{v}_1$

$$r_i = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_i^2}{c^2}}$$

$$r = \Lambda_0^0(\vec{v}) = \gamma_1\gamma_2\left(1 + \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right) \tag{1.29}$$

Größen, die unter LTen Λ wie $x = (x^\alpha)$ transformieren

$$IS \xrightarrow{\Lambda} IS'$$
$$a \to a' = \Lambda a$$
$$a^\alpha \to a'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta a^\beta$$

bezeichnet man allgemein als 4-Vektoren, oder Lorentzvektoren

Längenkontraktion und Zeitdilatation

Maßstab mit "Eigenlänge" l_0 den in seinem Ruhesystem IS' entlang der x-Achse liegt. Weltlinie des Maßstabs im IS':

$$x_1' = MISSINGVEKTOR$$

$$x_2' = MISSINGVEKTOR$$

IS' bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v (in x-Richtung)
Welche Länge l misst man für den Maßstab im IS?
Längenmessung erfolgt zu fester Zeit $t = 0$.
Für Anfangspunkt:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

Für Endpunkt:

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

Längenkontraktion:

$$\Rightarrow \boxed{l = \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{<1} l_0} \tag{1.30}$$

Längenkontraktion nur in Bewegungsrichtung

$$l_{\parallel} = \frac{1}{\gamma} l_{0\parallel} \ , \ l_{\perp} = l_{0\perp} \tag{1.31}$$

Uhrenvergleich

Uhr, die im IS' im Ursprung ruht.
IS' bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v
In IS 2 synchronisierte Uhren:
eine bei $x_1 = 0$ und eine bei $x_2 = vt_2$
Die Uhr fliegt bei $x_1 = 0$ vorbei

MISSING GRAFIK

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

Zum Zeitpunkt t_2 passiert die bewegte Uhr den Beobachter bei vt_2

$$MISSINGMATRIXGLEICHUNG$$

$$\boxed{t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

t_0 ... Zeitspanne in IS'
t ... Zeitspanne in IS

Eigenzeit

Welche Uhrzeit τ eines Teilchens bestimmen, des sich mit $\vec{v}(t)$ in IS bewegt. Betrachten des Teilchens zum Zeitpunkt t in einem IS' das sich mmit Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \vec{v}(t)$ gegenüber IS bewegt. $\rightarrow$ IS' ist das "momentane Ruheintervall" des Teilchens.

$$\Rightarrow \vec{v}' \approx 0 \text{ in Zeitintervall } [t', t' + dt']$$

$$\Rightarrow d\tau = dt' = \sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}dt = \sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c}}dt \tag{1.32}$$

"Aufsummation" über alle infinitesimalen Zeitintervalle

Anzeige einer mit $\vec{t}$ bewegten Uhr:

$$\boxed{\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}} \tag{1.33}$$

τ ... Eigenzeit

τ hängt nicht von IS ab.
ds^2 invariant unter LTen.

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} \Rightarrow \text{invariant unter LTen} \tag{1.34}$$

Relativistische Mechanik

Relativistisch bewegtes Teilchen unter Einfluss einer Kraft; suchen Bewegungsgleichung
In momentanen Ruhesystem des Teilchens zum Zeitpunkt t gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{m}_{\text{Ruhemasse}} \frac{d\vec{v}'(t')}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_N}_{\text{Newton'sche Kraft}} \text{ in } IS' \tag{1.35}$$

(Unabhängig von IS)

versuchen 4-dimensionales Analogon von **??** zu finden, das sich im momentanen Ruhesystem auf **??** reduziert.

Nichtrelativistisch:	Relativistisch
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ Räumliche Rotation	Vierergeschwindigkeit $$u^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \tag{1.36}$$
$\vec{v}(t) \xrightarrow{\hat{R}} \vec{v}'(t) = \hat{R}\vec{v}(t)$	τ ... Eigenzeit, unabhängig vom Bezugssystem Lorentz-Transformation $$u^\alpha(\tau) \xrightarrow{\Lambda} u'^\alpha(\tau) = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta(\tau) \tag{1.37}$$ $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ $\Rightarrow (u^\alpha(\tau)) = \gamma \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right) = \gamma(c, \vec{v})$

$d\tau = \frac{ds}{c}$ invariant unter Lten
dx^α 4-Vektor
$\to u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ 4-Vektor

relativistische Verallgemeinerung von ??

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \tag{1.38}$$

Forminvariant (kovariant) unter LTen.

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow[IS \to IS']{\text{LT}} m\frac{du'^\alpha}{d\tau} = F'^\alpha \tag{1.39}$$

Sofern die verallgemeinerte Kraft $F = (F^\alpha)$ wie ein 4-Vektor transformiert

$$F^\alpha \xrightarrow[IS \to IS']{\text{LT } \Lambda} F'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta F^\beta \tag{1.40}$$

F^α ... Minkowskikraft

Im momentanen Ruhesystem $IS'(\vec{v}' = 0, \gamma = 1)$

$$m\left(\frac{du^\alpha(\tau)}{d\tau}\right) = m\gamma' \frac{d}{dt'}(c, \vec{v}') = m\left(0, \frac{d\vec{v}'}{dt'}\right) \tag{1.41}$$

$$\left(F'^\alpha\right) = \left(F'^0, \vec{F}'\right) = \left(0, \vec{F}_N\right) \tag{1.42}$$

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \xrightarrow{\vec{v}'=0} m\frac{d\vec{v}'(t')}{d\tau'} = \vec{F}_N$$

Minkowskikraft in IS, wenn in IS' bekannt.

$$IS' \xrightarrow{\Lambda(-\vec{v})} IS$$

$$F^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(-\vec{v})F'^\beta \tag{1.43}$$

Für $\vec{v} = v^1\vec{e}_1$:

$$MISSINGGLEICHUNG \tag{1.44}$$

Für $\vec{v}$ beliebig

$$MISSINGGLEICHUNG \tag{1.45}$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

Ausbesserung Beweis:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

$$\Lambda^T \Lambda = 1$$

$$\begin{aligned} \left(\eta'\right)_{\alpha\beta} &= \left(\Lambda^T \eta \Lambda\right)_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \left(\Lambda \eta \Lambda^T\right)_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\gamma \eta_{\gamma\delta} \left(\Lambda^T\right)_\beta^\delta \\ &= \Lambda_\alpha^\gamma \Lambda_\beta^\delta \eta_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT
MISSING EINHEIT

Elektrodynamik

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha$$

Maxwell Gleichungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho_{el} & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{array}} \qquad (1.79),\ (1.80)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \tag{1.81}$$

$$\underbrace{(j^\alpha)}_{\text{kontra 4-Vektor}} = \left(c\rho_{el}\cdot\vec{j}\right) \tag{1.82}$$

Aus 1.81 folgt Ladungserhaltung

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^3} d^3r j^0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \int_{\partial\mathbb{R}^3} d\vec{A}\cdot\vec{j} = 0$$

Q... Lorentzvektor

Feldstärketensor:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.83}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}j^\beta \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \end{array}} \qquad (1.84),\ (1.85)$$

Aus 1.84 folgt $F^{\alpha\beta}$ kontravarianter Lorentzvektor 2. Stufe

Elektrodynamische Potentiale

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \tag{1.86}$$

$$(A^\alpha) = \left(\Phi, \vec{A}\right)$$

(A^α) bur bis auf 4-divergenz festgelegt, das heißt $F^{\alpha\beta}$ unverändert unter <u>Eichtransformation</u>

$$A^{\alpha\prime} \to A^\alpha + \partial^\alpha \chi \tag{1.87}$$

$\chi(x)$... skalares Feld

Lorentzeichung

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_\alpha A^\alpha = 0 \\ &\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \end{aligned}} \tag{1.88, 1.89}$$

Kopplung eines gebundenen Teilchens an ein elektromagnetisches Feld

$$m\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha = \frac{q}{c}\underbrace{F^{\alpha\beta}}_{\text{relativistische Lorentzkraft}} u_\beta \tag{1.90}$$

Vergleich mit Lagrangefunktion:

$$L = \underbrace{-mc\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}_{\text{freies relativistisches Teilchen}} - \frac{q}{c}A^\beta u_\beta$$

Für räumlichen Anteil:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \underbrace{q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)}_{\text{Lorentzkraft}} \tag{1.91}$$

Energie-Impulstensor

$$T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\gamma}^{\alpha}F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\gamma\delta F^{\gamma\delta}}\right) \tag{1.92}$$

00-Komponente ... Energiedichte

$$u_{em} = T_{em}^{00} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{1.93}$$

$0i$-Komponente ... Energiestromdichte ($\vec{S}$... Poyntingvektor)

$$\vec{S} = c\sum_{i=1}^{3} T_{em}^{0i}\vec{e}_i = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{1.94}$$

T^{j0}... Impulsdichten und T^{ji}... Impulsstromdichten analog

Aus Maxwellgleichungen folgt:

$$\partial_\alpha T_{em}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}F^{\beta\gamma}j_\gamma \tag{1.95}$$

Im Ladungsfreien Raum ($j_\gamma = 0$)

$$\partial_\alpha T_{em}^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.96}$$

Für abgeschlossenes System (keine Kopplung an Strom) folgt
4-Impulserhaltung:

$$P_{em}^{\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r T_{em}^{0\beta} = konst. \tag{1.97}$$

Für räumliche Komponenten folgt aus 1.95

$$\frac{1}{c}F^{i\gamma}j_\gamma\vec{e}_i = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} + \vec{B} = \underbrace{\vec{f}}_{\text{Lorentzkraftdichte}} \tag{1.98}$$

1.95 kann geschrieben werden als

$$\partial_\alpha T_{em}^{\alpha\beta} = -\underbrace{f^{\beta}}_{\text{Kraftdichte die e.m. Feld auf Stromverteilung ausübt}} \tag{1.99}$$

$\Rightarrow$ Austausch von Energie auf Impuls zwischen e.m. Feld und Strom

Relativistische Hydrodynamik

ideale Flüssigkeiten

$\rho(\vec{r},t)$ ... Massendichte
$\vec{v}(\vec{r},t) = v^i \vec{e}_i$ ... Geschwindigkeitsfeld
$P(\vec{r},t)$ ... isotroper Druck (Skalar, in alle Richtungen gleich)
Viskosität (innere Reibung) vernachlässigbar
Massenelement δm mit Volumen δV

$$\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta \vec{F}_N$$
$$\underbrace{\frac{\Delta m}{\Delta V}}_{\rho(\vec{r},t)} \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \underbrace{\frac{\Delta \vec{F}_N}{\Delta V}}_{\vec{f}_N(\vec{r},t)} \tag{1.100}$$

$\vec{f}_N(\vec{r},t) = - \underbrace{\vec{\nabla} P(\vec{r},t)}_{\text{Druckgradient}} + \underbrace{\vec{f}_0(\vec{r},t)}_{\text{äußere Kraft (z.B. Gravitation)}}$ ... Newton'sche Kraftdichte

$$\begin{aligned} d\vec{v}(\vec{r},t) &= dt\frac{d\vec{v}}{dt} + dx\frac{d\vec{v}}{dx} + dy\frac{d\vec{v}}{dy} + dz\frac{d\vec{v}}{dz} \\ &= \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \underbrace{\left(d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right)}_{d\vec{v}dt} \vec{v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(d\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right) dt \end{aligned} \tag{1.101}$$

Eulergleichung:
$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_0 \tag{1.102}$$

Kontinuitätsgleichung:
$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{1.103}$$

1.102 + 1.103 nichtrelativistische Feldgleichung einer idealen Flüssigkeit

5 unbekannte Felder ρ, P, v^i, aber nur 4 Gleichungen.
Brauche Beziehung zwischen ρ und P.
<u>Beispiele:</u>

- $\rho = konst.$ .. inkompressible Flüssigkeit
- $\frac{P}{\rho} = konst.$ ... ideales Gas bei festem T

Relativistische Verallgemeinerung?

$$v^i(\vec{r},t) \to u^\alpha(x), x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

linke Seite $\to \vec{v}$ quadratisch $\to$ Ansatz:

$$M^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta \tag{1.104}$$

$M^{\alpha\beta} \to$ Kontravarianter Term 2. Stufe

$\rho(x)$ ... Massendichte $\to$ <u>Lorentz-Skalar</u>

$$\rho(x) = \rho'(x') = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\text{Ruhemasse}}{\text{Eigenvolumen}}$$

$\rho'(x')$ ... Dichte des Flüssigkeitselements ΔV am Ort x im momentanen Ruhesystem IS'

$$(u^\alpha) = \gamma\,(c, \vec{v}) \tag{1.105}$$

$$\left(M^{\alpha\beta}\right) = \rho\gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^1}{c} & \frac{v^2}{c} & \frac{v^3}{c} \\ \frac{v^1}{c} & & & \\ \frac{v^2}{c} & & \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{c} & \\ \frac{v^3}{c} & & & \end{pmatrix} \tag{1.106}$$

Analogon zur Ladungsdichte ρ_{em} in Elektrodynamik

$$\tilde{\rho} = \frac{M^{00}}{c^2} = \gamma^2\rho = \frac{\rho}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1.107}$$

$\tilde{\rho}$ ... Energie Massendichte
$\tilde{\rho}$ transformiert wie 00-Komponente von Tensor

$$\partial_\beta M^{0\beta} = c\left[\partial_t\tilde{\rho} + \partial_k\left(\tilde{\rho}v^k\right)\right] \tag{1.108}$$

$$\begin{aligned}\partial_\beta M^{i\beta} &= \partial_t\left(\tilde{\rho}v^i\right) + \partial_k\left(\tilde{\rho}v^i v^k\right) \\ &= \tilde{\rho}\left(\partial_t v^i + v^k\partial_k v^i\right) + v^i \underbrace{\left[\partial_t\tilde{\rho} + \partial_k\left(\tilde{\rho}v^k\right)\right]}_{=0 \text{ wegen Kontinuitätsgleichung}}\end{aligned} \tag{1.109}$$

<u>Für $v \ll c$:</u>
1.108 $\to$ linke Seite von 1.103
1.109 $\to$ linke Seite von 1.102

Kräftefreier Fall: ($P = 0,\ f_0 = 0$)
kovariante Verallgemeinerung der Strömungsgleichung

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.110}$$

Kontinuitätsgleichung (für Energiestrom)

$$\partial_\beta M^{0\beta} = 0 \tag{1.111}$$

Eulergleichung (Kontinuitätsgleichung für Impulsstrom)

$$\partial_\beta M^{i\beta} = 0 \tag{1.112}$$

1.110 differenzieller Erhaltungssatz für 4-Impulsdichte $\Rightarrow$ 4-Impulserhaltung