Abitur-Notizen

29.08.2025

Tim Teichmann
teichmanntim@outlook.de

Inhaltsverzeichnis

1. Mathematik

1.1. Analysis

1.1.1. Trassierungsaufgaben

Das Ziel von Trassierungsaufgaben ist es anhand von bestimmten Angaben eine Funktion aufzustellen. Deshalb ist das Verstehen der Aufgabenstellung der schwierigste Teil der Aufgabe.

Das ist eine mögliche Aufgabenstellung:
Eine quadratische Funktion hat im Punkt $P(0|0)$ eine Nullstelle und im Punkt $Q(2|5)$ ein Maximum. Stelle die Funktionsgleichung auf!

1. Die ersten drei Wörter des Satzes: ***Eine quadratische Funktion*** sagen uns um welchen Typ Funktion es sich handelt. Es ist eine quadratische Funktion. Die allgemeine quadratische Funktion sieht so aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Unsere Funktion f hat also drei unbekannte, a, b und c.

2. Außerdem ist für uns wichtig, dass die Funktion ***im Punkt*** $P(0|0)$ ***eine Nullstelle*** hat. Das bedeutet, dass $f(0) = 0$ sein muss. Unsere erste Bedingung ist also:

$$f(0) = 0$$

3. Als letztes hat unsere Funktion ***im Punkt*** $Q(2|5)$ ***ein Maximum***.
Um die Extrempunkte von einer Funktion (hier: g) zu finden, muss man die erste Ableitung dieser Funktion gleich 0 setzen.

$$g'(x) = 0$$

Im Idealfall bekommt man eine oder mehr Lösungen heraus, wir nennen die Lösung x_1. Um herauszufinden um welche Art von Extrempunkt es sich handelt setzen wir x_1 in die zweite Ableitung von g ein. Jetzt können wir drei weitere Bedingungen für unsere Aufgabe aufstellen. Unsere Funktion soll ein Maximum in $Q(2|5)$ haben, deshalb müssen diese Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \\ f'(2) &= 0 \\ f''(2) &< 0 \end{aligned}$$

4. Jetzt müssen wir aus unseren vier Bedingungen eine Funktion bilden, dafür bilden wir erstmal die ersten beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f'(x) &= 2ax + b \\ f''(x) &= 2a \\ f(0) &= 0 \\ f(2) &= 5 \\ f'(2) &= 0 \\ f''(2) &< 0 \end{aligned}$$

Nun müssen wir einsetzen, Ungleichungen ($f''(2) < 0$) dürfen nicht eingesetzt werden.

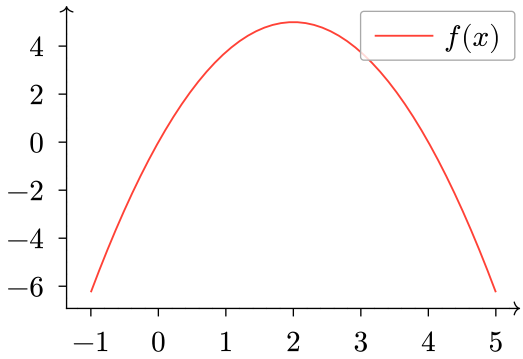
$$\begin{aligned} 0^2a + 0b + c &= 0 \\ c &= 0 \\ a \cdot 2^2 + 2b + c &= 5 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ 4a + 2b &= 5 \\ 2a \cdot 2 + b &= 0 \\ 4a + b &= 0 \end{aligned}$$

Eine von den drei unbekannten ist gelöst ($c = 0$). Jetzt muss $4a + 2b = 5$ in $4a + b = 0$ eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 5 \\ 4a + b &= 0 \\ 4a + 2b - (4a + b) &= 5 \\ b &= 5 \\ 4a + 5 &= 0 \\ a &= \frac{-5}{4} \end{aligned}$$

Alle unbekannten Variablen sind gelöst, $a = \frac{-5}{4}$, $b = 5$, $c = 0$. Also ist das unsere Funktion:

$$f(x) = \frac{-5}{4}x^2 + 5x$$

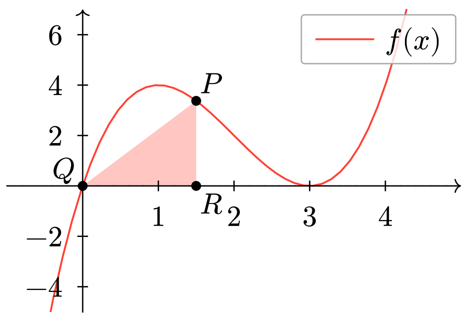


1.2. Extremwertaufgaben

Bei Extemwertaufgaben geht es darum die maximal/minimal möglichen Flächeninhalte herauszufinden. Dabei kann es oft auch um das maximale/minimale Volumen eines Körpers gehen. Jedoch maximiert/minimiert sich das Volumen eines Körpers wenn der Flächeninhalt des Mantels maximal/minimal wird. Die Aufgabenstellungen zu diesem Aufgabentyp sind meistens sehr spezifisch und brauchen eine Skizze.

In diesem Beispiel soll der maximale Flächeninhalt eines Dreiecks gefunden werden. Das Dreieck ist unterhalb der Funktion f. Die drei Ecken des Dreiecks sind die Punkte $P(u|v)$, $Q(0|0)$ und $R(u|0)$.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$



Um die Fläche A eines Dreiecks auszurechnen nutzt man diese Formel, g steht für die Grundseite und h für die Höhe:

$$A = \frac{gh}{2}$$

In unserem Beispiel ist $g = u$ und $h = v$, dazu ist $v = f(u)$. Wenn wir diese Werte in A einsetzen bildet sich diese Funktion:

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{u \cdot f(u)}{2} \\ A(u) &= \frac{u(u^3 - 6u^2 + 9u)}{2} \\ A(u) &= \frac{u^4 - 6u^3 + 9u^2}{2} \\ A(u) &= \frac{u^4}{2} - 3u^3 + \frac{9}{2}u^3 \end{aligned}$$

Unsere neue Funktion $A(u)$ kann jetzt den Flächeninhalt für jeden Wert von u berechnen. Wir brauchen den maximalen Flächeninhalt, also soll die Funktion für den Flächeninhalt ($A(u)$) maximal werden. Um ein maximum zu berechnen bilden wir die ersten zwei Ableitungen unserer Funktion.

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{u^4}{2} - 3u^3 + \frac{9}{2}u^3 \\ A'(u) &= 2u^3 - 9u^2 + 9u \\ A''(u) &= 6u^2 - 18u + 9 \end{aligned}$$

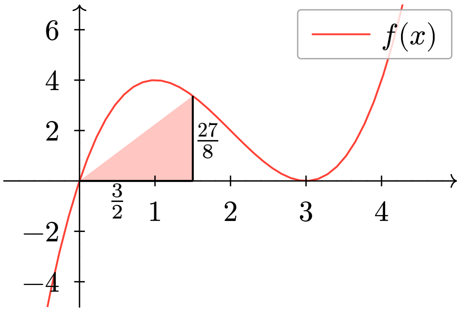
Jetzt finden wir die Nullstelle der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} A'(u) &= 0 \\ \Leftrightarrow u_1 = 0, \quad u_2 &= \frac{3}{2}, \quad u_3 = 3 \end{aligned}$$

Danach prüfen wir, in welcher Stelle ein Maximum liegt.

$$\begin{aligned} A''(0) &= 9 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\ A''\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{-9}{2} < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \\ A''(3) &= 9 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\ A\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{81}{32} \\ v = f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{27}{8} \end{aligned}$$

Der größte Flächeninhalt ist $\frac{81}{32}$, um diesen zu erreichen muss $u = \frac{3}{2}$ und $v = \frac{27}{8}$ sein.



1.3. Integralrechnung

1.3.1. Stammfunktionen

Stammfunktionen sind Funktionen, die eine Funktion f ergeben, wenn man sie ableitet. Also gilt: $F'(x) = f(x)$.

Allgemein gilt die folgende Regel.

$$f(x) = x^n$$
$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

Wenn eine Funktion abgeleitet wird fällt jede Konstante weg, daher gibt es unendlich viele Stammfunktionen, die Konstante wird mit C dargestellt.

1.3.2. Bestimmte Integrale

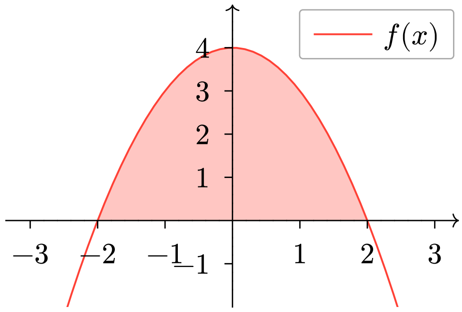
Bei bestimmten Integralen ist immer klar, welches Intervall gesucht ist. Also gilt für ein Integral in dem Intervall $[a; b]$ diese Formel:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Außerdem ist die Integralrechnung keine Flächenberechnung, daher werden oft Absolutbeträge genutzt. Damit wird das Ergebnis eines Integrals immer positiv. Die Definition des Absolutbetrags sieht so aus:

$$|x| := \begin{cases} x \text{ wenn } x \geq 0 \\ -x \text{ andernfalls} \end{cases}$$

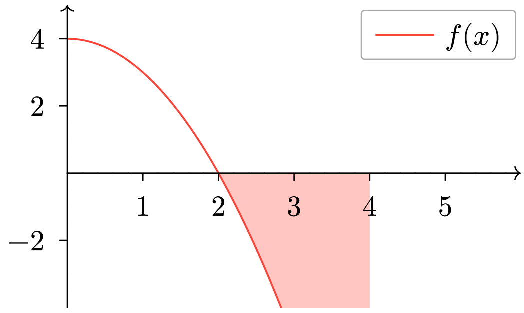
Es wird schnell deutlich, dass die Integralrechnung keine Flächenberechnung ist. Haben wir beispielsweise die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ gegeben und wollen diese von -2 bis 2 integrieren, sieht die Fläche, die wir berechnen wollen, so aus:



Jetzt bilden wir das Integral und lösen es auf.

$$\int_{-2}^{2} -x^2 + 4dx$$
$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left[\frac{-2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(\frac{-(-2)^3}{3} + 4(-2)\right)\right]$$
$$= \frac{32}{3}$$

Es gibt keine Probleme. Möchten wir jetzt jedoch von 2 bis 4 integrieren, stellen wir etwas komisches fest.



Erstmal das Integral bilden.

$$\int_{2}^{4} -x^2 + 4dx$$
$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{2}^{4}$$
$$= \left[\frac{-4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{-2^3}{3} + 4 * 2\right)\right]$$
$$= \frac{-32}{3}$$

Das Ergebnis ist negativ, obwohl ein negativer Flächeninhalt nicht möglich ist. Deshalb nutzen wir, wenn das Ergebnis des Integrals negativ ist

– was vorher geprüft werden sollte – den Betrag des Ergebnisses.

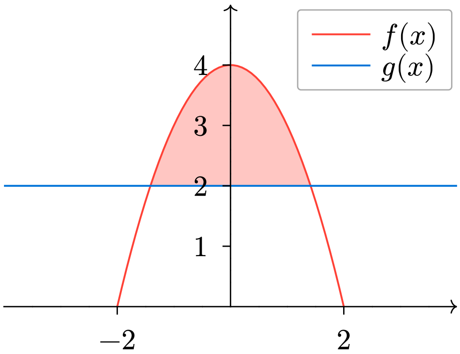
$$\left|\int_2^4 -x^2 + 4dx\right|$$
$$= \left|\frac{-32}{3}\right|$$
$$= \frac{32}{3}$$

1.3.3. Flächen zwischen zwei Funktionen

Um die Fläche zwischen den beiden Funktionen f und g ($f \geq g$) im Intervall $[a; b]$ zu berechnen nutzt man diese Formel:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Beispiel: $f(x) = -x^2 + 4, g(x) = 2$



Um die Fläche zwischen f und g zu bestimmen muss zunächst klar werden, welche Funktion in dem gezeigten Bereich größer ist. Hier ist $f > g$, $[x_1; x_2]$, x_1 und x_2 stellen hier die Schnittpunkte der beiden Funktionen dar. Jetzt darf einfach in die Formel eingesetzt werden, x_1 und x_2 müssen dafür natürlich erst bestimmt werden, das werden wir in diesem Beispiel jedoch nicht machen.

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]dx$$

1.3.4. Mittelwerte von Funktionen

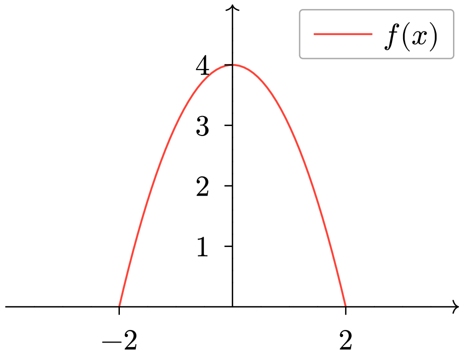
diskrete Mittelwerte:
Es wird ein Mittelwert aus einer Menge von Zahlen gebildet.

$$\{1, 3, 5, 4\}$$
$$\frac{1+3+5+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

kontinuierliche Mittelwerte:
Der Mittelwert wird aus Werten einer Funktion bestimmt.

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

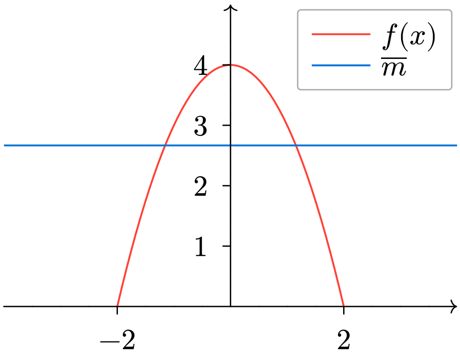
Beispiel: $f(x) = -x^2 + 4$



Wir wollen den Mittelwert $\overline{m}$ von f in dem Interval $[-2; 2]$ bestimmen. Dafür setzen wir einfach in die Formel ein.

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$
$$\overline{m} = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$$
$$\overline{m} = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$$
$$\overline{m} = \frac{1}{4} \left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^2$$
$$\overline{m} = \frac{1}{4} \left[\frac{-2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(\frac{-(-2)^3}{3} + 4(-2)\right)\right]$$
$$\overline{m} = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{3}$$
$$\overline{m} = \frac{8}{3}$$

Der Mittelwert der Funktion f im Interval $[-2; 2]$ ist also $\frac{8}{3}$.

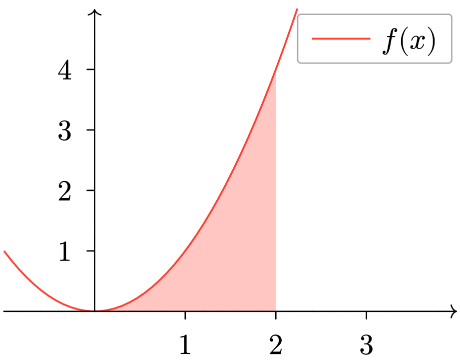


1.3.5. Rotationskörper

Rotationskörper, sind Objekte, die sich bilden wenn eine Funktion um eine Achse rotiert. Die Rotationsachse wird auch die Figurenachse genannt. Um allgemein das Volumen eines Rotationskörpers, der durch die Funktion f beschrieben wird zu bestimmen nutzt man diese Formel:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Beispiel: $f(x) = x^2$, im Interval $[0; 2]$



Uns interessiert das Volumen V dieses Körpers. Dazu setzen wir unsere Werte in die Formel ein.

$$V = \pi \int_0^2 [x^2]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$V = \pi \left[\frac{2^5}{5} - \left(\frac{0^5}{5}\right)\right]$$

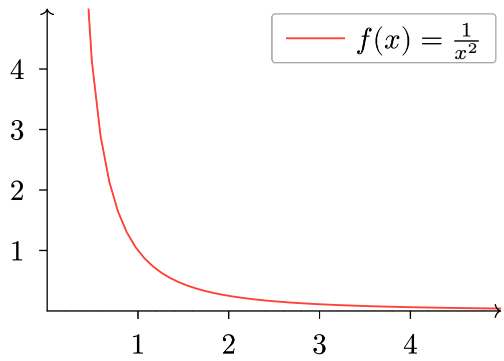
$$V = \pi \frac{32}{5}$$

$$V = \frac{32\pi}{5}$$

Nun wissen wir, dass das Volumen V unseres Rotationskörpers $\frac{32\pi}{5}$ beträgt.

1.3.6. Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind bestimmte Integrale mit komplizierteren Integrationsgrenzen. Oft wird $-\infty$ oder $+\infty$ in die Integrationsgrenzen eingebaut, es können jedoch auch Integrale mit richtigen Zahlen uneigentlich sein.



Hier sieht man den Plot von $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Es lässt sich relativ gut erkennen, dass der Wert der Funktion immer größer wird, umso näher man der Y-Achse kommt. Entfernt man sich also von der Y-Achse, wird der Wert immer kleiner. Mathematisch lässt sich das so ausdrücken:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

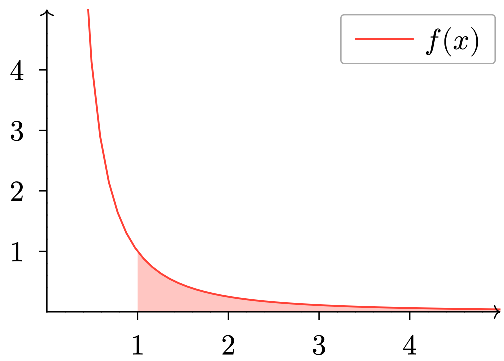
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Diese Grenzen muss man beachten, wenn man uneigentliche Integrale, wie beispielsweise dieses Integral ausrechnen möchte.

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

Mit diesem Integral würde man die folgende Fläche berechnen:



Wenn man versucht dieses Integral zu berechnen fällt eine Besonderheit auf.

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

$$\int_1^\infty x^{-2}dx$$

$$\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^\infty$$

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty$$

Als obere Grenze kann nicht einfach ∞ eingesetzt werden, deshalb suchen wir einen Weg um uns an ∞ anzunähern.

$$\lim_{b to \infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^b$$

Jetzt ist es möglich anstatt ∞ einfach unsere Variable b einzusetzen und erstmal so weit wie möglich aufzulösen.

$$\lim_{b to \infty}\left[\frac{-1}{b} - \left(\frac{-1}{1}\right)\right]$$

$$\lim_{b to \infty}\left(\frac{-1}{b} + 1\right)$$

Nachdem wir so weit wie möglich vereinfacht haben, gucken wir uns jetzt jeden Bestandteil des Ergebnisses an. Da unsere Variable b ist, interessieren uns erstmal nur die Terme, in denen b vorkommt. $+1$ ist für den Limes irrelevant, da es kein b enthält, $\frac{-1}{b}$ ist jedoch relevant, deshalb müssen wir uns $\frac{-1}{b}$ genauer angucken. newline Dazu müssen wir uns fragen, was passiert, wenn b einen sehr großen Wert annimmt. Anhand von ein paar Beispielen kann man das verhalten von $\frac{-1}{b}$ relativ gut verinnerlichen. Man kann zur Veranschaulichung einfach ein paar Werte für b einsetzen.

$$\frac{-1}{b}$$

$$\frac{-1}{2} = -0.5$$

$$\frac{-1}{4} = -0.25$$

$$\frac{-1}{8} = -0.125$$

$$\frac{-1}{16} = -0.0625$$

Wie man relativ gut erkennen kann, geht $\frac{-1}{b}$ immer weiter gegen 0, desto größer der Wert für b ist. Das bedeutet für unsere ursprüngliche Frage, dass dieser Term wegfällt.

$$\lim_{b to \infty}\left(\frac{-1}{b} + 1\right)$$

$$= 1$$

$$\int_1^\infty f(x)dx = 1$$

Nach ein wenig Rechnerei wissen wir also, dass unser uneigentliches Integral, welches eine obere Grenze von ∞ hat, nicht den Wert von ∞, sondern einen Wert von 1 hat.

1.4. Stochastik

1.4.1. Binomialverteilungen

Eine Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das bedeutet, dass eine Binomialverteilung auf einer kleineren Menge definiert ist. Oft ist diese Menge endlich ($\{0, 1, 2, ..., n\}$), sie kann aber auch abzählbar unendlich (bspw. die Menge der natürlichen

Zahlen) sein. Außerdem kennt eine Binomialverteilung nur zwei Versuchsausgänge, Erfolg oder Misserfolg. Solche Experimente werden Bernoulli Experimente genannt.

1.4.1.1. Aufgabentypen

Für alle hier beschriebenen Aufgabentypen gilt n als die Anzahl aller Versuchsausgänge, k als die beschränkte Anzahl von Versuchsausgängen und p als Erfolgswahrscheinlichkeit.

Beispiel: Ein Würfel wird 100 mal geworfen, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 5 Sechsen geworfen werden?

Hier gilt:

$$n = 100, k = 5, p = \frac{1}{6}$$

1. **Bestimmung von P**

   Der häufigste und einfachste Aufgabentyp ist die Bestimmung von P. Hierbei verlässt man sich auf eine treue Formel.

   $$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

   Kumulierte Wahrscheinlichkeiten berechnet man mit der selben Formel, diese benötigen jedoch mehr Aufwand.

   $$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

   Mathematica bietet den `CDF` Befehl um diese Art der kumulierten Wahrscheinlichkeit auszurechnen. Somit lässt sich jeder beliebige Ausdruck in solch einen Ausdruck umformen und mit Mathematica berechnen.

   $$\begin{aligned} P(X > k) &= 1 - P(X \leq k) \\ P(X \geq k) &= 1 - P(X \leq k-1) \\ P(X < k) &= P(X \leq k-1) \\ P(k_1 \leq X \leq k_2) &= P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1 - 1) \end{aligned}$$

2. **Bestimmung von n**

   In manchen Aufgaben sind nur p und k gegeben, n muss bestimmt werden. Aus der Aufgabenstellung geht dann eine ähnliche Ungleichung hervor (hier: $p = 0.6$ und $k = n$):

   $$\begin{aligned} P(X = n) &\leq 0.01 \\ \binom{n}{n} \cdot 0.6^n \cdot 0.4^0 &\leq 0.01 \\ 0.6^n &\leq 0.01 \\ \ln(0.6^n) &\leq \ln(0.01) \\ n \ln(0.6) &\leq \ln(0.01) \\ n &\geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.6)} \approx 9.01 \\ &\geq \text{, da} \ln(0.6) < 0 \end{aligned}$$

   Hier ist also, wie so oft in der Stochastik, die einzige Kunst das Entschlüsseln der Aufgabenstellung.

3. **Erwartungswert und Standardabweichung**

   Der Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ sind wichtige Bestandteile der Stochastik. Glücklicherweise ist es bei Binomialverteilungen relativ einfach μ und σ zu bestimmen.

   $$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \end{aligned}$$

   Der Erwartungswert ist der Wert, der im Schnitt erwartet wird, wenn ein Experiment oft ausgeführt wird. Die Standardabweichung ist die mögliche Abweichung vom Erwartungswert. Dieses Interval beschreibt diese Abweichung:

   $$[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$$

1.5. Analytische Geometrie

1.5.1. Vektorrechnung

Ein Vektor kann als die Verschiebung eines Punktes gesehen werden. Dabei kann jedoch ein einzelner Vektor auf eine beliebige Menge von Punkten angewandt werden. Wenn man den Vektor $\vec{a}$ auf den Punkt P anwendet, bekommt man also einen zweiten Punkt P', dessen Koordinaten um die Werte des Vektors $\vec{a}$ verschoben wurden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (1, 2, 3)$$

$$P' = (1 + 1, 2 + 1, 3 + 1) = (2, 3, 4)$$

1.5.2. Ortsvektoren

Ortsvektoren verschieben den Ursprung des Koordinatensystems. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ hat also die gleichen Koordinaten, wie der Punkt P, da $O = (0, 0, 0)$ ist.

$$O = (0, 0, 0)$$

$$P = (1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.5.3. Addition

Die Addition von Vektoren ist sehr simpel. Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert werden sollen, werden alle Einträge von $\vec{b}$ zu den Einträgen von $\vec{a}$ addiert.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 1 + 3 \\ 1 + 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Informatik