Lineare Algebra für Informatik

L.105.96100

Vorlesungsskript

1. Mathematische Grundlagen

1.1. Mengen

1.1.1. Definition

Eine Menge ist eine (gedankliche) Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte, gennant Elemente der Menge.

- Ist M eine Menge, so gilt für jedes Objekt x:
  - entweder $x \in M$ („x ist Element von M“)
  - oder $x \notin M$ („x ist nicht Element von M“).

1.1.2. Beispiel (Beschreibung von Mengen)

(1) Aufzählung
   (a) $\text{Menge der Früchte} = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \text{Pflaume}, ...\}$
   (b) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ natürliche Zahlen
   (c) $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ganze Zahlen
   (d) $\emptyset = \{\}$ leere Menge

   Es kommt nicht auf Reihenfolge und Wiederholung an:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 3, 2, 3, 1\}$$

(2) Angabe einer charakteristischen Eigenschaft
   (a) $\mathbb{N}_0 = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \geq 0\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$
   (b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\} = \{2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, ...\}$
$$= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

(3) Beschreibung der Elemente:
   (a) $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\right\}$
   (b) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ungerade Zahlen
   (c) $\mathbb{R} = \text{Menge der reellen Zahlen (s. Analysis)}$

1.1.3. Notation

Seien M und N Mengen. N heißt Teilmenge von M, geschrieben $n \subseteq M$, wenn gilt: wenn $x \in N$, dann gilt $x \in M$.

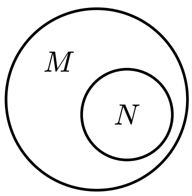

Abbildung 1: Teilmenge

Falls $N \subseteq M$, definiere $N^c = \overline{N} := \{x \in M \mid x \notin N\}$.

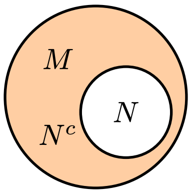

Abbildung 2: Mengenkomplement

Schreibe $M = N$, falls $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$.

1.1.4. Definition

(i) $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ Vereinigung

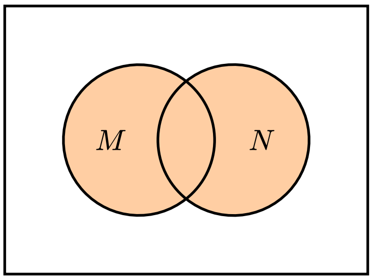

Abbildung 3: Vereinigung

(ii) $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ Durchschnitt

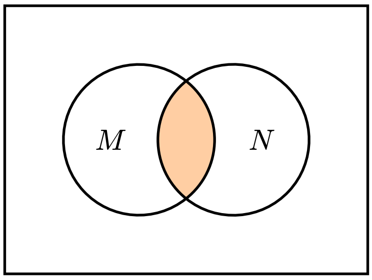

Abbildung 4: Durchschnitt

M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.

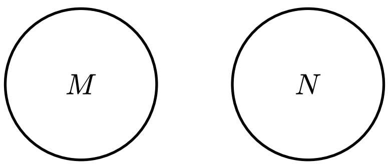

Abbildung 5: Disjunkte Mengen

Eine disjunkte Vereinigung $M \mathbin{\dot\cup} N$ oder $M \sqcup N$ bedeutet $M \cup N$ unter der Bedingung $M \cap N = \emptyset$.

(iii) $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$ Differenz

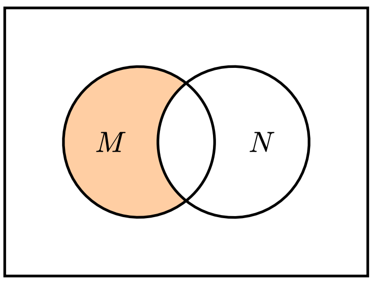

Abbildung 6: Differenz

Falls $N \subseteq M$, dann gilt $M \setminus N = N$.

(iv)
$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}$$

Dabei ist (m, n) ein geordnetes Paar; es gilt $(m, n) = (m', n')$ genau dann, wenn $m = m'$ und $n = n'$.

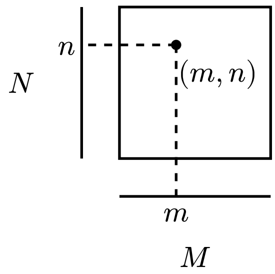

Abbildung 7: Kartesisches Produkt

Beispiel:

$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Allgemeiner: Für Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) setze

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 \times ... \times M_n &:= \prod_{i=1}^{n} M_i \\ &:= \{(m_1, m_2, ..., m_n) \mid m_i \in M; \text{für alle } i = 1, 2, ..., n\} \end{aligned}$$

1.2. Aussagen

1.2.1. Definition

Eine Aussage ist ein Satz der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

1.2.2. Beispiel

(i) „Alle Gummibärchen sind grün“ (falsche) Aussage
(ii) „Wenn es regnet, wird die Erde nass“ (wahre) Aussage
(iii) „$x + 5 = 2$“ ist keine Aussage
(iv) „Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$ mit $x + 5 = 2$“ (falsche) Aussage
(v) „Bitte stehen Sie auf“ keine Aussage

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \land B$	$A \lor B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

1.2.3. Satz

Seien A, B, C Aussagen. Dann gilt

(i) $\underbrace{A \lor \neg A}_{\text{Tautologie}}$ ist wahr; $\underbrace{A \land \neg A}_{\text{Widerspruch}}$ ist falsch

(ii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

(iii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(iv) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(v) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(vi) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(vii) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

(viii) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A (\not\Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B)$

(ix) $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg B$

(x) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

1.2.4. Definition

Sei M eine Menge, und für jedes $x \in M$ sei $A(x)$ eine Aussage.

(i) „$\forall x \in M : A(x)$“ bedeutet: „Für jedes x in M gilt $A(x)$.“ (Allquantor)

(ii) „$\exists x \in M : A(x)$“ bedeutet: „Es existiert mindestens ein x in M, sodass $A(x)$ gilt.“ (Existenzquantor)

1.2.5. Bemerkung (Verneinung von Quantoren)

(a) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$

(b) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

1.3. Abbildungen

1.3.1. Definition

Seien X, Y zwei Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist ein Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zuordnet: $x \mapsto f(x)$. x heißt Definitionsbereich und Y Wertebereich von f.

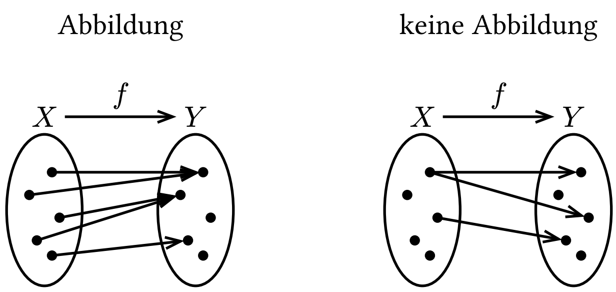

Abbildung 8: Abbildungen

Die Menge $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ heißt Graph von f.

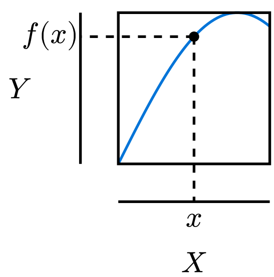

Abbildung 9: Graph von Abbildung f

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist ein Tripel (X, Y, Γ), wobei X, Y Mengen sind und $\Gamma \subseteq X \times Y$ eine Teilemenge mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall x \in X : \exists! y \in Y : (x, y) \in \Gamma$$

1.3.2. Bemerkung

Zwei Abbildungen $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ und $g : X' \to Y', x' \mapsto g(x')$ sind genau dann gleich, wenn $X = X', Y = Y'$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X(= X')$.

1.3.3. Beispiel

(i) $\mathrm{id}_X : X \to X, x \mapsto x = \mathrm{id}_X(x)$ heißt Identität von X.

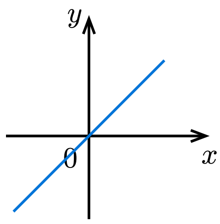

Abbildung 10: Identitätsabbildung id_X

(ii) $\emptyset \to X$ ist eine Abbildung: Aber, falls $X \neq \emptyset$, dann existiert keine Abbildung $X \to \emptyset$. Der Graph zu $\emptyset \to X$ ist die leere Menge: $\emptyset \times X = \emptyset \quad (\emptyset, X, \emptyset)$.

(iii) $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, n \mapsto n^2$ und $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n^2$ sind verschiedene Abbildungen.

(iv) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \pm\sqrt{n}$ ist keine Abbildung
$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, n \mapsto \sqrt{n}$ ist keine Abbildung

(v)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Allgemein: $N \subseteq \mathbb{R}$ Teilemenge,

$$\mathrm{char}_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in N \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

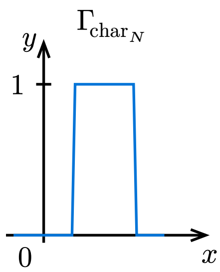

Abbildung 11: Abbildungsbeispiel char_N

1.3.4. Definition

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilmengen.

(a)
$$\begin{aligned} f(A) &:= \{y \in Y \mid \exists a \in A : f(a) = y\} \\ &= \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq Y \end{aligned}$$

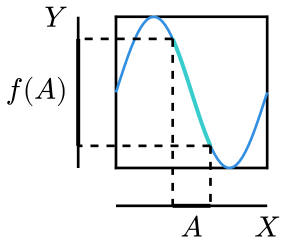

Abbildung 12: Das Bild einer Abbildung

(b)
$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

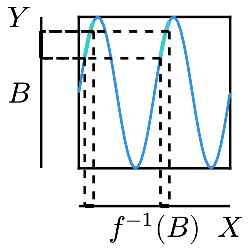

Abbildung 13: Das Urbild einer Abbildung

(c)
- $f|_A : A \to Y, a \mapsto f(x)$ heißt Einschränkung von f auf/nach A.
- $Y \supseteq f(A)$ heißt Bild von A unter f.
- $X \supseteq f^{-1}(B)$ heißt Urbild von B unter f.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$

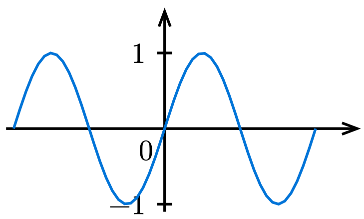

Abbildung 14: Beispiel für Bild und Urbild

$$f(\mathbb{R}) = [-1; 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$
$$f^{-1}(\{0\}) = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..., \pm k\pi, ...\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.3.5. Definition

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

(i) f heißt injektiv, falls: Für alle $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ gilt $f(x) \neq f(x')$.
$\Leftrightarrow$ Für alle $x, x' \in X$ gilt: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
$\Leftrightarrow$ Für alle $y \in Y$ hat $f^{-1}(\{y\})$ höchstens ein Element ($\left|f^{-1}(\{y\})\right| \leq 1$)

Alternative schreibweise: $f : X \hookrightarrow Y$

(ii) f heißt surjektiv, falls $f(X) \subseteq Y$
$\Leftrightarrow$ Für alle $y \in Y$ hat $f^{-1}(\{y\})$ mindestens ein Element ($\left|f^{-1}(\{y\})\right| \geq 1$)

Alternative schreibweise: $f : X \twoheadrightarrow Y$

(iii) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist
$\Leftrightarrow$ Für alle $y \in Y$ hat $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element ($\left|f^{-1}(\{y\})\right| = 1$)

Alternative schreibweise: $f : X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y, f : X \xrightarrow{\cong} Y$

Beispiel:

(i) $$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist weder injektiv noch surjektiv

(ii) $$\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv

(iii) $$\sin : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$$

ist bijektiv (s. Analysis)

1.3.6. Definition

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann heißt: $g \circ f : X \to Z, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$ die Komposition (Verknüpfung) von f und g.

1.3.7. Bemerkung

$\circ$ ist assoziativ. Ist $h : Z \to A$ eine weitere Abbildung, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Denn für alle $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x)\end{aligned}$$

1.3.8. Beispiel

(i) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so gilt $f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f : X \to Y$

(ii) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) - 1 \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$(f \circ g)(x) = \sin(x^2) - 1$$

$$(g \circ f)(x) = (\sin(x) - 1)^2$$

Im Allgemeinen gilt: $f \circ g \neq g \circ f$

1.3.9. Satz

Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind äquivalent:

(a) f ist bijektiv

(b) Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ derart, dass $g \circ f = \mathrm{id}_X : X \to X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y : Y \to Y$