Lineare Algebra für Informatik

L.105.96100

Vorlesungsskript

1. Mathematische Grundlagen

1.1. Mengen

1.1.1. Definition

Eine Menge ist eine (gedankliche) Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte, gennant Elemente der Menge.

- Ist M eine Menge, so gilt für jedes Objekt x:
  - entweder $x \in M$ („x ist Element von M“)
  - oder $x \notin M$ („x ist nicht Element von M“).

1.1.2. Beispiel (Beschreibung von Mengen)

(1) Aufzählung
   (a) $\text{Menge der Früchte} = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \text{Pflaume}, ...\}$
   (b) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ natürliche Zahlen
   (c) $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ganze Zahlen
   (d) $\emptyset = \{\}$ leere Menge

   Es kommt nicht auf Reihenfolge und Wiederholung an:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 3, 2, 3, 1\}$$

(2) Angabe einer charakteristischen Eigenschaft
   (a) $\mathbb{N}_0 = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \geq 0\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$
   (b) $$\begin{aligned}\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\} &= \{2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, ...\} \\ &= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}\end{aligned}$$

(3) Beschreibung der Elemente:
   (a) $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\right\}$
   (b) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ungerade Zahlen
   (c) $\mathbb{R} = \text{Menge der reellen Zahlen (s. Analysis)}$

1.1.3. Notation

Seien M und N Mengen. N heißt Teilmenge von M, geschrieben $n \subseteq M$, wenn gilt: wenn $x \in N$, dann gilt $x \in M$.

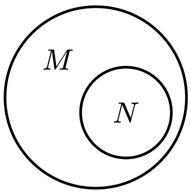

Abbildung 1: Teilmenge

Falls $N \subseteq M$, definiere $N^c = \overline{N} := \{x \in M \mid x \notin N\}$.

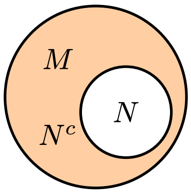

Abbildung 2: Mengenkomplement

Schreibe $M = N$, falls $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$.

1.1.4. Definition

(i) $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ Vereinigung

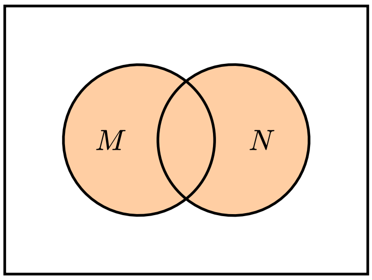

Abbildung 3: Vereinigung

(ii) $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ Durchschnitt

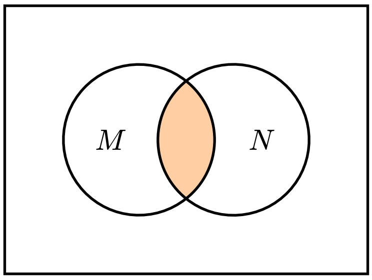

Abbildung 4: Durchschnitt

M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.

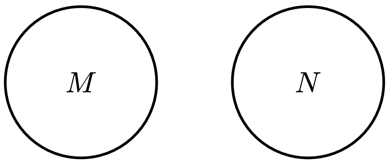

Abbildung 5: Disjunkte Mengen

Eine disjunkte Vereinigung $M \mathbin{\dot\cup} N$ oder $M \sqcup N$ bedeutet $M \cup N$ unter der Bedingung $M \cap N = \emptyset$.

(iii) $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$ Differenz

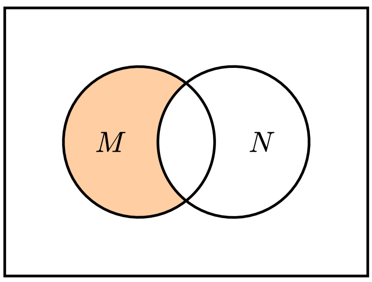

Abbildung 6: Differenz

Falls $N \subseteq M$, dann gilt $M \setminus N = N$.

(iv) $$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}$$

Dabei ist (m, n) ein geordnetes Paar; es gilt $(m, n) = (m', n')$ genau dann, wenn $m = m'$ und $n = n'$.

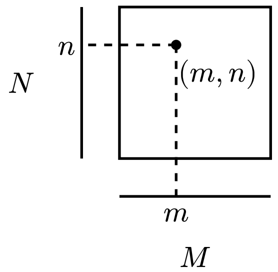

Abbildung 7: Kartesisches Produkt

Beispiel:

$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Allgemeiner: Für Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) setze

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 \times ... \times M_n &:= \prod_{i=1}^{n} M_i \\ &:= \{(m_1, m_2, ..., m_n) \mid m_i \in M; \text{für alle } i = 1, 2, ..., n\} \end{aligned}$$

1.2. Aussagen

1.2.1. Definition

Eine Aussage ist ein Satz der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

1.2.2. Beispiel

(i) „Alle Gummibärchen sind grün“ (falsche) Aussage

(ii) „Wenn es regnet, wird die Erde nass“ (wahre) Aussage

(iii) „$x + 5 = 2$“ ist keine Aussage

(iv) „Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$ mit $x + 5 = 2$“ (falsche) Aussage

(v) „Bitte stehen Sie auf“ keine Aussage

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

1.2.3. Satz

Seien A, B, C Aussagen. Dann gilt

(i) $\underbrace{A \vee \neg A}_{\text{Tautologie}}$ ist wahr; $\underbrace{A \wedge \neg A}_{\text{Widerspruch}}$ ist falsch

(ii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
(iii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
(iv) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
(v) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(vi) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(vii) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
(viii) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A (\not\Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B)$
(ix) $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg B$
(x) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

1.2.4. Definition

Sei M eine Menge, und für jedes $x \in M$ sei $A(x)$ eine Aussage.
(i) „$\forall x \in M : A(x)$“ bedeutet: „Für jedes x in M gilt $A(x)$.“ (Allquantor)
(ii) „$\exists x \in M : A(x)$“ bedeutet: „Es existiert mindestens ein x in M, sodass $A(x)$ gilt.“ (Existenzquantor)

1.2.5. Bemerkung (Verneinung von Quantoren)

(a) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
(b) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

1.3. Abbildungen

1.3.1. Definition

Seien X, Y zwei Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist ein Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zuordnet: $x \mapsto f(x)$. x heißt Definitionsbereich und Y Wertebereich von f.

Abbildung

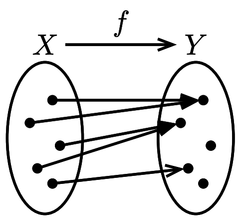

Abbildung 8: Abbildungen