

Lineare Algebra für Informatik

L.105.96100

Vorlesungsskript

1. Mathematische Grundlagen

1.1. Mengen

1.1.1. Definition

Eine Menge ist eine (gedankliche) Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte, genannt Elemente der Menge.

- Ist M eine Menge, so gilt für jedes Objekt x :
 - entweder $x \in M$ („ x ist Element von M “)
 - oder $x \notin M$ („ x ist nicht Element von M “).

1.1.2. Beispiel (Beschreibung von Mengen)

(1) Aufzählung

- (a) Menge der Früchte = {Apfel, Birne, Pflaume, ...}
- (b) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen
- (c) $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ganze Zahlen
- (d) $\emptyset = \{\}$ leere Menge

Es kommt nicht auf Reihenfolge und Wiederholung an:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 3, 2, 3, 1\}$$

(2) Angabe einer charakteristischen Eigenschaft

- (a) $\mathbb{N}_0 = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \geq 0\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$
- (b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\} = \{2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \dots\}$
 $= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

(3) Beschreibung der Elemente:

- (a) $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\}$
- (b) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ungerade Zahlen
- (c) \mathbb{R} = Menge der reellen Zahlen (s. Analysis)

1.1.3. Notation

Seien M und N Mengen. N heißt Teilmenge von M , geschrieben $n \subseteq M$, wenn gilt: wenn $x \in N$, dann gilt $x \in M$.

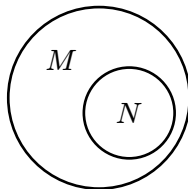


Abbildung 1: Teilmenge

Falls $N \subseteq M$, definiere $N^c = \overline{N} := \{x \in M \mid x \notin N\}$.

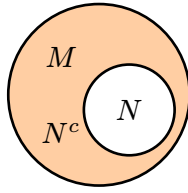


Abbildung 2: Mengenkompiment

Schreibe $M = N$, falls $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$.

1.1.4. Definition

(i) $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ Vereinigung

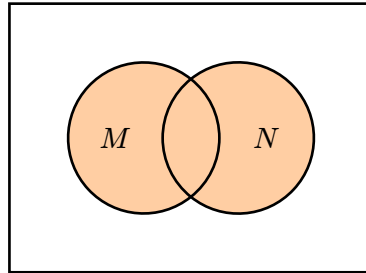


Abbildung 3: Vereinigung

(ii) $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ Durchschnitt

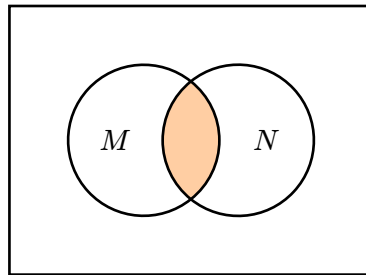


Abbildung 4: Durchschnitt

M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.

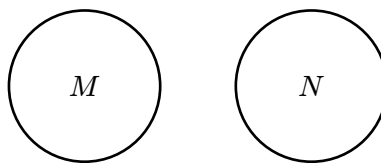


Abbildung 5: Disjunkte Mengen

Eine disjunkte Vereinigung $M \cup N$ oder $M \sqcup N$ bedeutet $M \cup N$ unter der Bedingung $M \cap N = \emptyset$.

(iii) $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$ Differenz

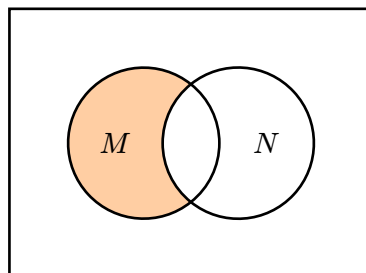


Abbildung 6: Differenz

Falls $N \subseteq M$, dann gilt $M \setminus N = N$.

$$(iv) \quad M \times N := \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}$$

Dabei ist (m, n) ein geordnetes Paar; es gilt $(m, n) = (m', n')$ genau dann, wenn $m = m'$ und $n = n'$.

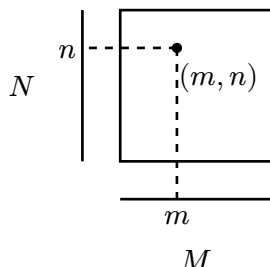


Abbildung 7: Kartesisches Produkt

Beispiel:

$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Allgemeiner: Für Mengen M_1, M_2, \dots, M_n (mit $n \in \mathbb{N}$) setze

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n &:= \prod_{i=1}^n M_i \\ &:= \{(m_1, m_2, \dots, m_n) \mid m_i \in M_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

1.2. Aussagen

1.2.1. Definition

Eine Aussage ist ein Satz der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

1.2.2. Beispiel

- (i) „Alle Gummibärchen sind grün“ (falsche) Aussage
- (ii) „Wenn es regnet, wird die Erde nass“ (wahre) Aussage
- (iii) „ $x + 5 = 2$ “ ist keine Aussage
- (iv) „Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$ mit $x + 5 = 2$ “ (falsche) Aussage
- (v) „Bitte stehen Sie auf“ keine Aussage

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

1.2.3. Satz

Seien A, B, C Aussagen. Dann gilt

- (i) $\underbrace{A \vee \neg A}_{\text{Tautologie}}$ ist wahr; $\underbrace{A \wedge \neg A}_{\text{Widerspruch}}$ ist falsch

- (ii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- (iii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- (iv) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- (v) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- (vi) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- (vii) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- (viii) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A (\nLeftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B)$
- (ix) $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg B$
- (x) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$