

**МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ
КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Факультет СиСС

Кафедра общей теории связи

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

№ 26-1

по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

на тему:

**«Анализ нерекурсивных цифровых фильтров 1-го и 2-го
порядка»**

Вариант №13

Выполнил: студ. гр. БКК2101

Климов Эдуард

Проверил: проф. каф. ОТС

Волчков В.П.

(Осенний семестр)

Москва 2023

1. Цель работы

На персональном компьютере провести экспериментальный анализ нерекурсивных (трансверсальных) фильтров (ЦФ) 1-го и 2-го порядка; исследовать частотные и временные характеристики фильтров, а также их взаимосвязь со значениями коэффициентов (параметров) ЦФ.

2. Выполнение домашнего задания

2.1 Исходные данные для своего варианта ДЗ

Табл. 1. Таблица параметров фильтра для своего варианта ДЗ

Порядок	b_0	b_1	f_d
1	1	0,84	8 кГц

2.2 Запись разностного уравнения и системной функции

Разностное уравнение нерекурсивного цифрового фильтра 1-го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} y_i = b_0 x_i + b_1 x_{i-1} \\ \text{Нач. условие: } x_{-1} = 0 \end{cases}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Нахождение системной функции $H(z)$:

Свойства Z - преобразования:

Свойство 1 (свойство линейности):

$$X(z) = Z(x_i) = \alpha S(z) + \beta U(z), \quad (2)$$

где $S(z), U(z)$ – Z - преобразования сигналов s_i, u_i .

Свойство 2 (свойство смещения):

$$X(z) = Z(\{x_i\}) = Z(\{u_{i-m}\}) = z^{-m}U(z) \quad (3)$$

Пусть задан дискретный сигнал $\{x_i\}, i = 0, 1, 2, \dots$, тогда его односторонним Z - преобразованием называется:

$$S(z) \triangleq Z(\{s_i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i z^{-i} \quad (4)$$

$z \in \mathbb{C}$ (комплексная переменная).

Пусть на входе ЦФ действует сигнал $\{x_i\}$, а на его выходе сигнал $\{y_i\}$, тогда системной функцией ЦФ называется отношение Z - преобразований выходного сигнала от входного:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5)$$

Найдем системную функцию ЦФ используя свойства 1 и 2:

$$\begin{aligned}
Y(z) &\triangleq Z(\{y_i\}) = Z(\{\sum_{m=0}^M b_m x_{0-m}\}) = \sum_{m=0}^M b_m Z(\{x_{i-m}\}) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z) = X(z) \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \Rightarrow \\
\Rightarrow H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{X(z) \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{X(z)} = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}
\end{aligned} \tag{6}$$

Исходя из формулы (6) найдем системную функцию ЦФ-1:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} \tag{7}$$

2.3 Построение структурной схемы ЦФ

Для построения структурной схемы ЦФ будем использовать обозначения основных блоков.

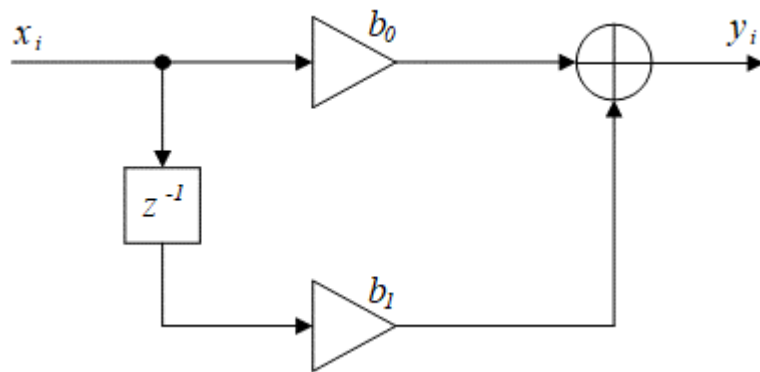


Рис. 1. Структурная схема нерекурсивного ЦФ 1-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 0,84$)

2.4 Расчет и построение характеристик ЦФ

Импульсной характеристикой ЦФ (любого) называется его отклик на единичный импульс Кронекера:

$$\begin{aligned}
q_i &= y_i|_{x_i=\delta_i}, \text{ где} \\
\delta_i &= \begin{cases} 1, i = 0 \\ 0, i \neq 0 \end{cases}, i = 0, \pm 1, \pm 2...
\end{aligned} \tag{8}$$

δ_i – единичный импульс Кронекера.

Из формулы (8) с учетом начального условия последовательно получаем:

$$q_i = b_0 \delta_i + b_1 \delta_{i-1} = \begin{cases} b_0 \delta_0 + b_1 \delta_{-1}, i = 0 \\ b_0 \delta_1 + b_1 \delta_0, i = 1 \\ b_0 \delta_2 + b_1 \delta_1, i = 2 \end{cases} = \begin{cases} b_0, i = 0 \\ b_1, i = 1 \\ 0, i \geq 2 \end{cases} \tag{9}$$

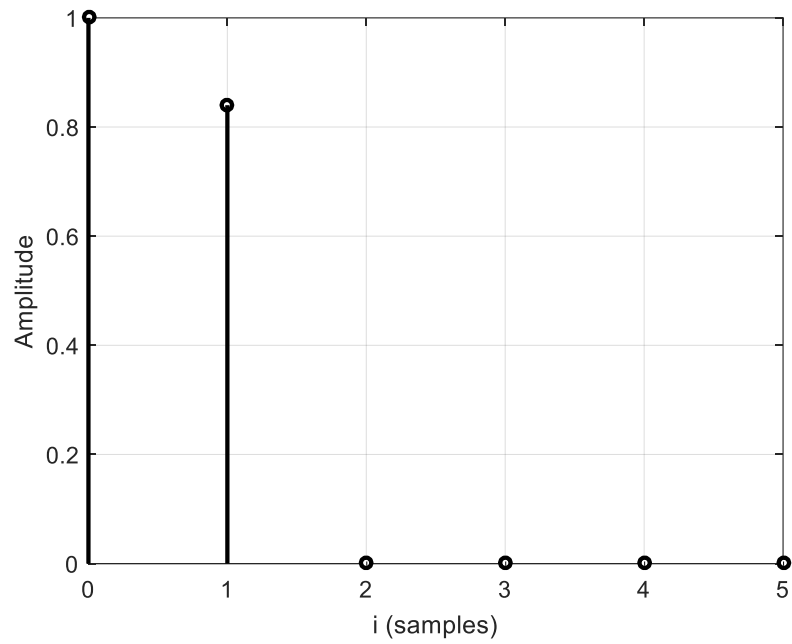


Рис. 1. ИХ нерекурсивного ЦФ 1-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 0,84$)

Переходная характеристика ЦФ:

$$h_i = \sum_{k=0}^i g_k \quad (10)$$

Исходя из формулы (10) получаем:

$$h_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 1,84, & i > 0 \end{cases} \quad (11)$$

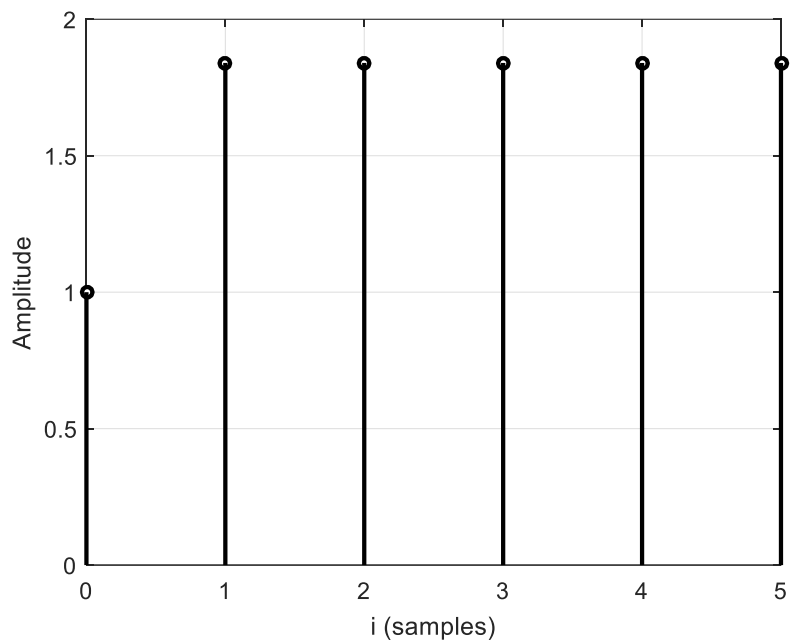


Рис. 2. ПХ нерекурсивного ЦФ 1-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 0,84$)

Комплексным коэффициентом передачи ЦФ (КЧХ) $K_T(jf)$ называется функция частоты $f \in [0; f_d]$:

$$K_T(jf) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi fT}} = H(e^{j2\pi fT}), \quad (12)$$

где f_d - частота дискретизации, $T = \frac{1}{f_d}$ - интервал дискретизации.

Свойства комплексных чисел:

Если $c = a + jb$, то

$$\operatorname{Re}(c) = a; \operatorname{Im}(c) = b \quad (13)$$

$$\bar{c} = a - jb \Rightarrow \operatorname{Re}(\bar{c}) = a; \operatorname{Im}(\bar{c}) = -b \quad (14)$$

$$|c| = |\bar{c}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(c) + \operatorname{Im}^2(c)} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (15)$$

Формулы Эйлера:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \quad (16)$$

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - j \sin(\varphi) \quad (17)$$

Найдем $K_T(jf)$ используя (10) и формулы Эйлера (14), (15):

$$K_T(jf) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi fT}} = b_0 + b_1 e^{-j2\pi fT} = b_0 + b_1 \cos(2\pi fT) - jb_1 \sin(2\pi fT) \quad (18)$$

Найдем $\operatorname{Re}(K_T(jf))$, $\operatorname{Im}(K_T(jf))$ используя (11) и (12):

$$\operatorname{Re}(K_T(jf)) = b_0 + b_1 \cos(2\pi fT); \quad (19)$$

$$\operatorname{Im}(K_T(jf)) = -b_1 \sin(2\pi fT)$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) ЦФ называется функция частоты:

$$K_T(f) \triangleq |K_T(jf)| \quad (20)$$

$$K_T(f) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(K_T(jf)) + \operatorname{Im}^2(K_T(jf))}, \quad (21)$$

где $f \in [0; f_d]$

Находим АЧХ по формулам (19) и (17):

$$\begin{aligned} K_T(f) &= \sqrt{(b_0 + b_1 \cos(2\pi fT))^2 + b_1^2 \sin^2(2\pi fT)} = \\ &= \sqrt{b_0^2 + 2b_0b_1 \cos(2\pi fT) + b_1^2 \cos^2(2\pi fT) + b_1^2 \sin^2(2\pi fT)} = \\ &= \sqrt{b_0^2 + 2b_0b_1 \cos(2\pi fT) + b_1^2} \end{aligned} \quad (22)$$

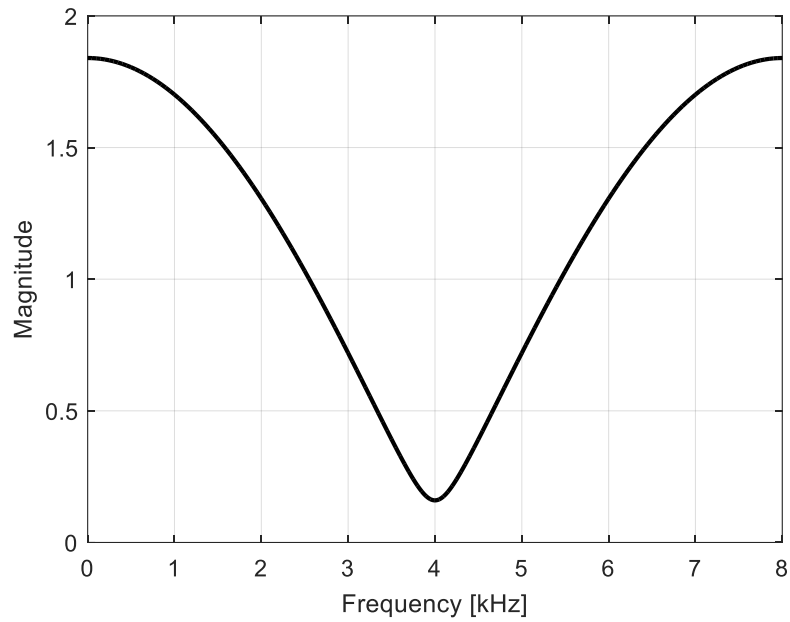


Рис. 3. АЧХ нерекурсивного ЦФ 1-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 0,84$)

Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) ЦФ называется функция частоты:

$$\Phi_T(f) = \arg(K_T(jf)) = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Im}(K_T(jf))}{\text{Re}(K_T(jf))} \right) \in (-\pi; \pi], \quad (23)$$

где $f = [0; f_d]$

Найдем ФЧХ по формуле (21):

$$\Phi_T(f) = \text{Arctg} \left(\frac{-b_1 \sin(2\pi fT)}{b_0 + b_1 \cos(2\pi fT)} \right) \quad (24)$$

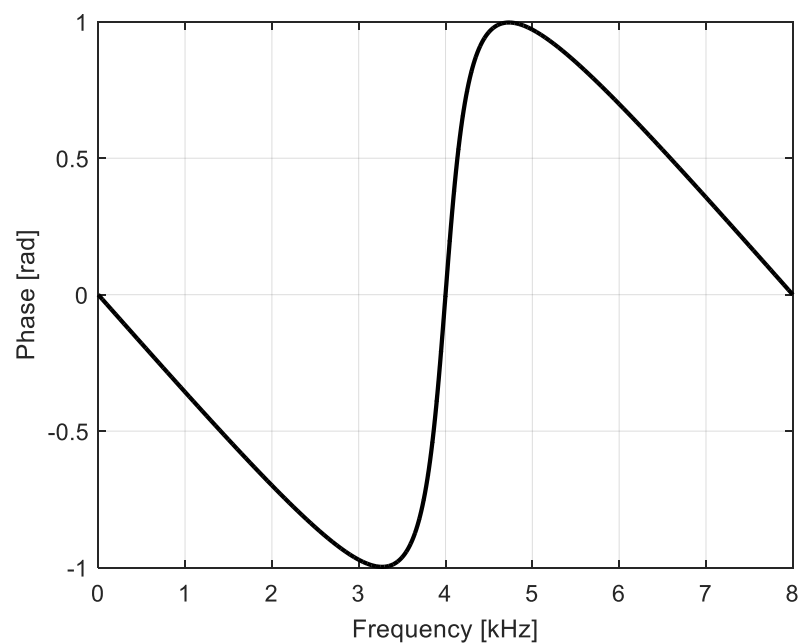


Рис. 4. ФЧХ нерекурсивного ЦФ 1-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 0,84$)

3. Выполнение лабораторной работы

3.1. Исходные параметры исследуемых фильтров

Табл. 2. Таблица параметров исследуемых фильтров

Номер фильтра	Порядок фильтра	b_0	b_1	b_2	Δ
1	1	1	1,26	0	0,26
2	1	1	-0,74	0	0,26
3	2	1	1	0,26	0,26
4	2	1	-1	0,26	0,26
5	2	1	0	1,26	0,26
6	2	1	0	-0,74	0,26

3.2. Структурные схемы и уравнения исследуемых фильтров

Уравнение нерекурсивного ЦФ 2-го порядка:

$$\begin{cases} y_i = b_0 x_i + b_1 x_{i-1} + b_2 x_{i-2} \\ \text{Нач. условие } x_{-1} = x_{-2} = 0 \end{cases}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

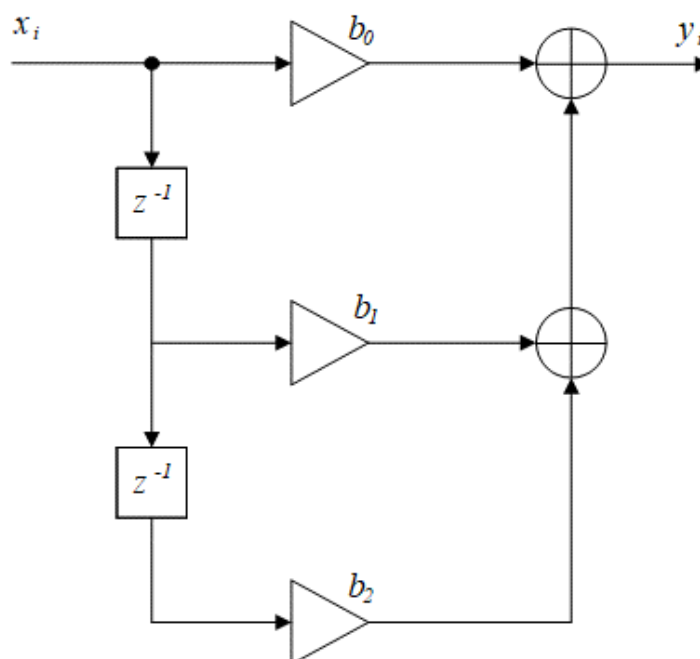


Рис. 5. Структурная схема нерекурсивного ЦФ 2-го порядка

3.3. Выражения для расчета характеристик, исследуемых ЦФ

Формулы для расчета характеристик ЦФ 1-го порядка:

ИХ ЦФ 1-го порядка определяется по формуле (9).

АЧХ ЦФ 1-го порядка определяется по формуле (12).

ФЧХ ЦФ 1-го порядка определяется по формуле (24).

Формулы для расчета характеристик ЦФ 2-го порядка:

По определению ИХ ЦФ получаем уравнение 2-го порядка:

$$q_i = \begin{cases} b_0\delta_0 + b_1\delta_{-1} + b_2\delta_{-2}, & i = 0 \\ b_0\delta_1 + b_1\delta_0 + b_2\delta_{-1}, & i = 1 \\ b_0\delta_2 + b_1\delta_1 + b_2\delta_0, & i = 2 \\ b_0\delta_3 + b_1\delta_2 + b_2\delta_1, & i = 3 \end{cases} = \begin{cases} b_0, & i = 0 \\ b_1, & i = 1 \\ b_2, & i = 2 \\ 0, & i \geq 3 \end{cases} \quad (26)$$

Найдем системную функцию ЦФ 2-го порядка применим к обоим частям уравнения (25) Z – преобразование и воспользовавшись свойствами линейности и сдвига, а также формулой (6).

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} \quad (27)$$

Найдем КЧХ ЦФ 2-го порядка по формулам (12), (16) и (17):

$$\begin{aligned} K_T(jf) &= H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi fT}} = b_0 + b_1e^{-j2\pi fT} + b_2e^{-j4\pi fT} = \\ &= b_0 + b_1 \cos(2\pi fT) + b_2 \cos(4\pi fT) - jb_1 \sin(2\pi fT) - jb_2 \sin(4\pi fT) \end{aligned} \quad (28)$$

Найдем Re и Im от $K_T(jf)$ по формулам (13) и (14):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(K_T(jf)) &= b_0 + b_1 \cos(2\pi fT) + b_2 \cos(4\pi fT) \\ \operatorname{Im}(K_T(jf)) &= -b_1 \sin(2\pi fT) - b_2 \sin(4\pi fT) \end{aligned} \quad (29)$$

Найдем АЧХ ЦФ 2-го порядка по формулам (21) и (29):

$$\begin{aligned} K_T(f) &= \sqrt{(b_0 + b_1 \cos(2\pi fT) + b_2 \cos(4\pi fT))^2 + (-b_1 \sin(2\pi fT) - b_2 \sin(4\pi fT))^2} = \\ &= \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 \cos(2\pi fT)(b_0 + b_2) + 2b_0b_2 \cos(4\pi fT)}, f = [0; f_d] \end{aligned} \quad (30)$$

Найдем ФЧХ ЦФ 2-го порядка по формуле (23):

$$\Phi_T(f) = \operatorname{Arctg} \left(\frac{-b_1 \sin(2\pi fT) - b_2 \sin(4\pi fT)}{b_0 + b_1 \cos(2\pi fT) + b_2 \cos(4\pi fT)} \right), f = [0; f_d] \quad (31)$$

3.4. Результаты экспериментального исследования

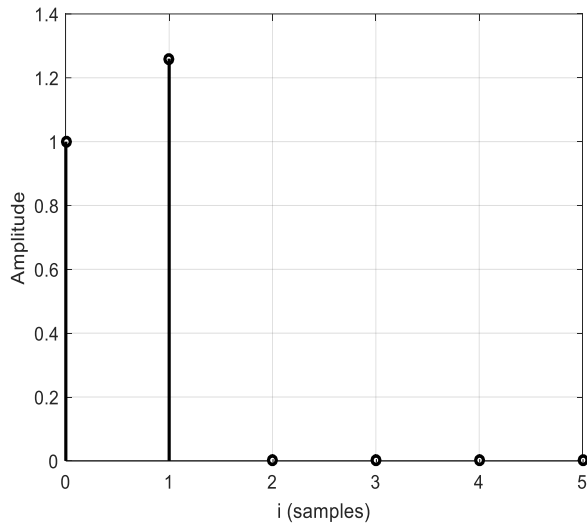


Рис. ИХ-1 ($b_0 = 1$, $b_1 = 1,26$, $b_2 = 0$)

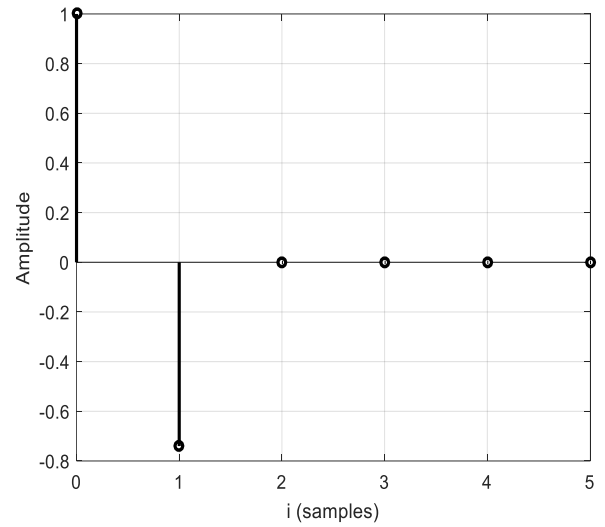


Рис. ИХ-2 ($b_0 = 1$, $b_1 = -0,74$, $b_2 = 0$)

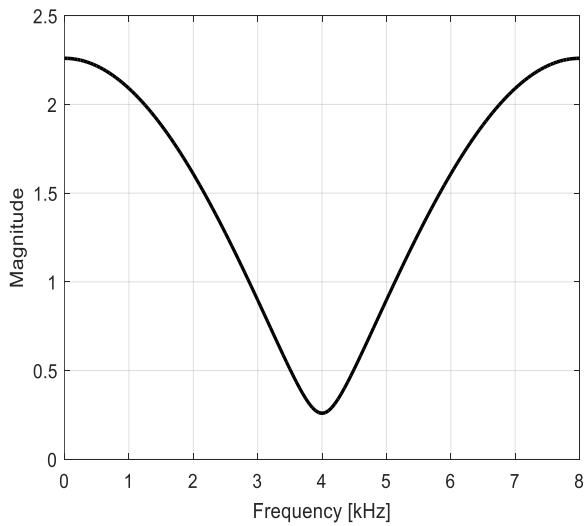


Рис. АЧХ-1 ($b_0 = 1$, $b_1 = 1,26$, $b_2 = 0$)

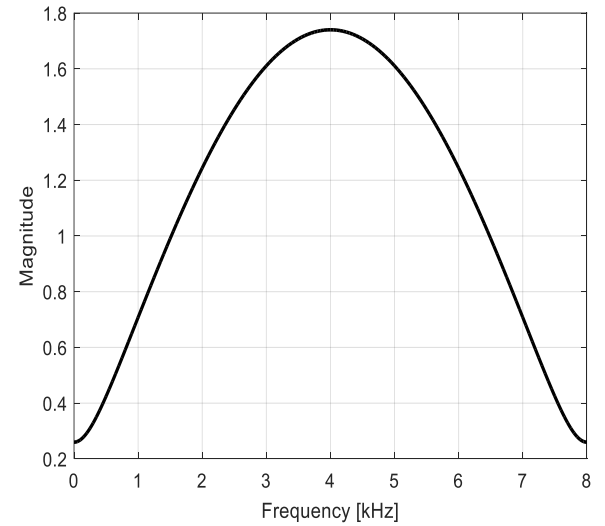


Рис. АЧХ-2 ($b_0 = 1$, $b_1 = -0,74$, $b_2 = 0$)

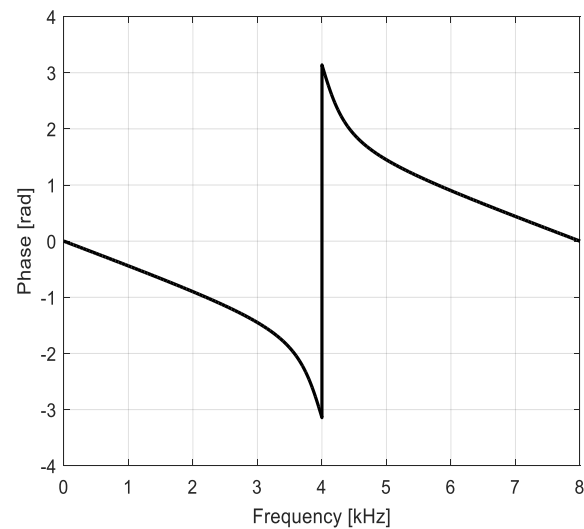


Рис. ФЧХ-1 ($b_0 = 1$, $b_1 = 1,26$, $b_2 = 0$)

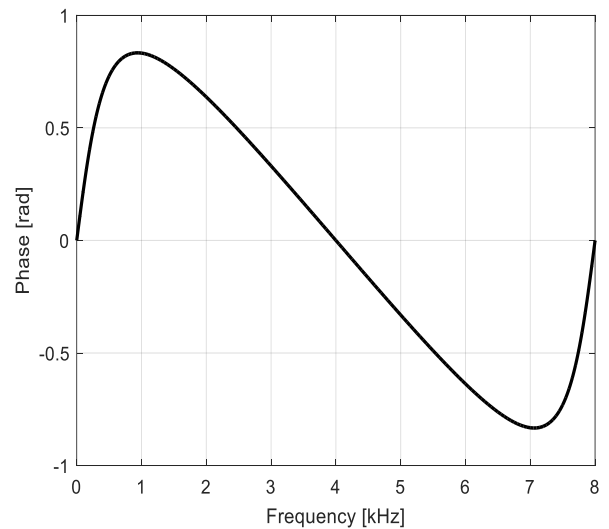


Рис. ФЧХ-2 ($b_0 = 1$, $b_1 = -0,74$, $b_2 = 0$)

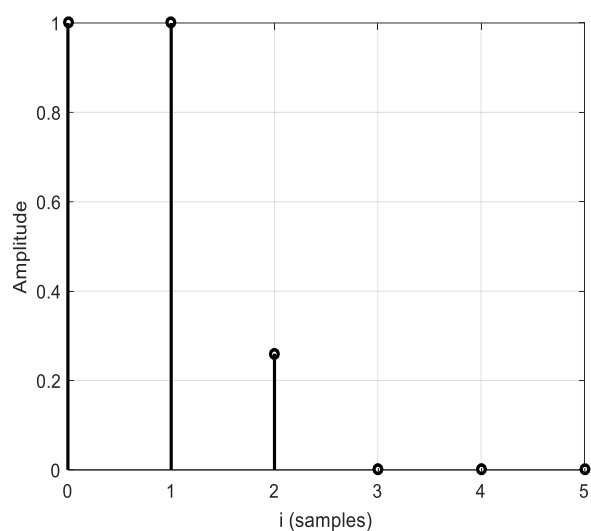


Рис. ИХ-3 ($b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0,26$)

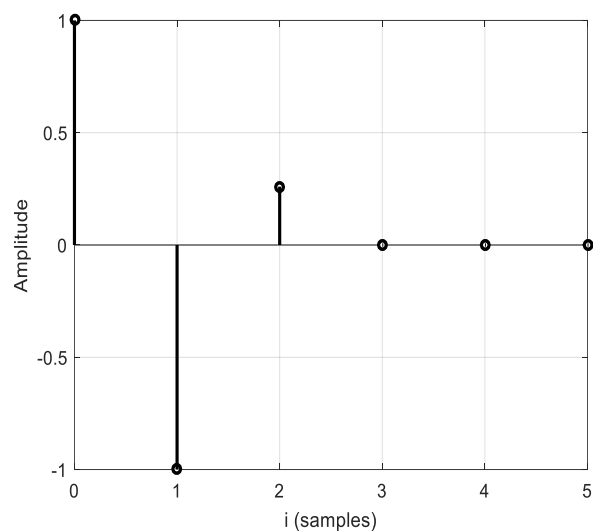


Рис. ИХ-4 ($b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0,26$)

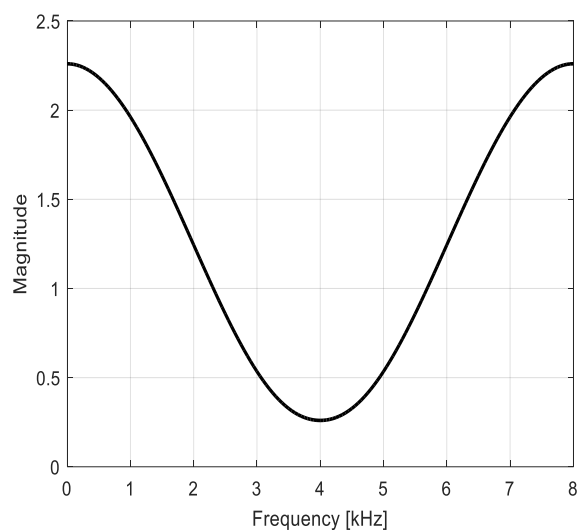


Рис. АЧХ-3 ($b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0,26$)

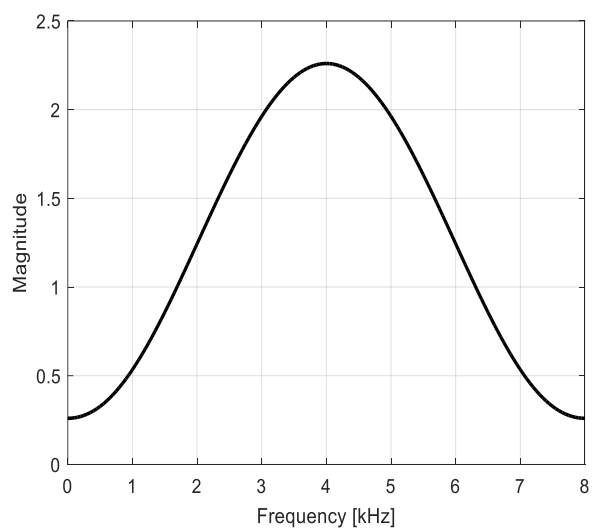


Рис. АЧХ-4 ($b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0,26$)

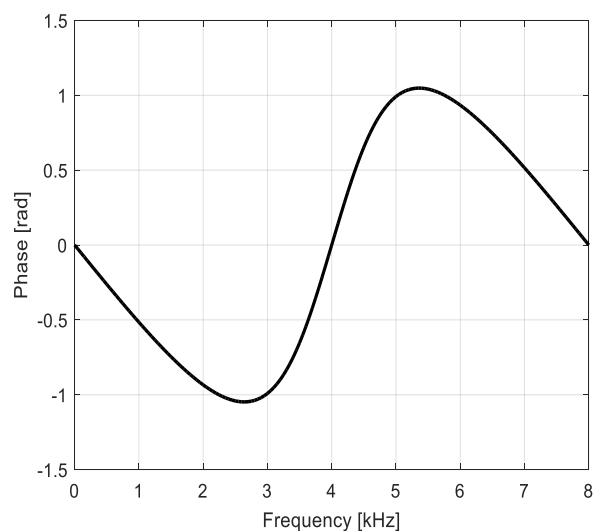


Рис. ФЧХ-3 ($b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0,26$)

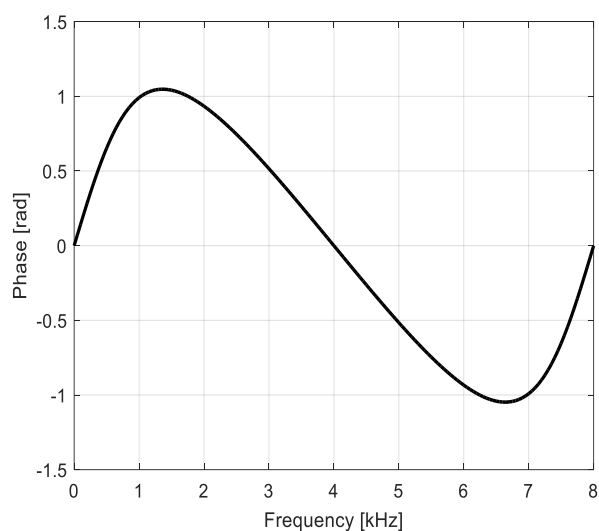


Рис. ФЧХ-4 ($b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0,26$)

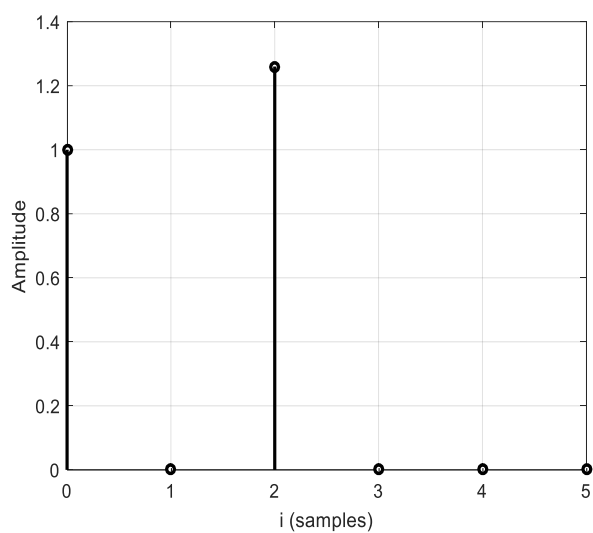


Рис. ИХ-5 ($b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1,26$)

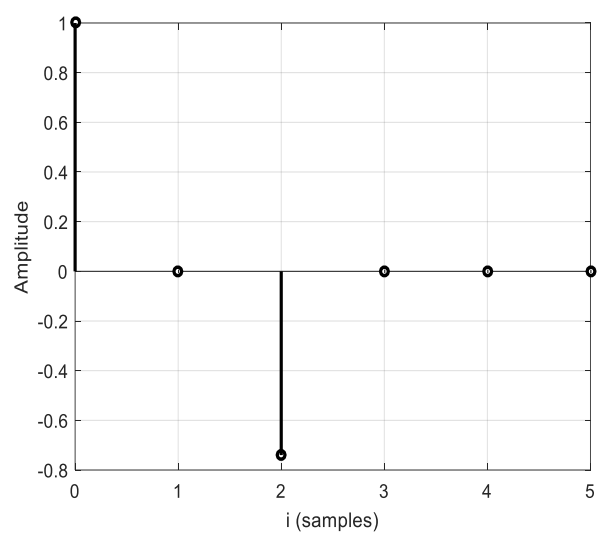


Рис. ИХ-6 ($b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -0,74$)

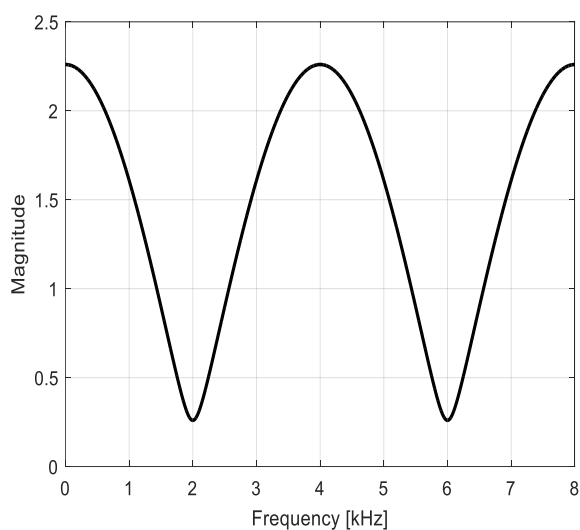


Рис. АЧХ-5 ($b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1,26$)

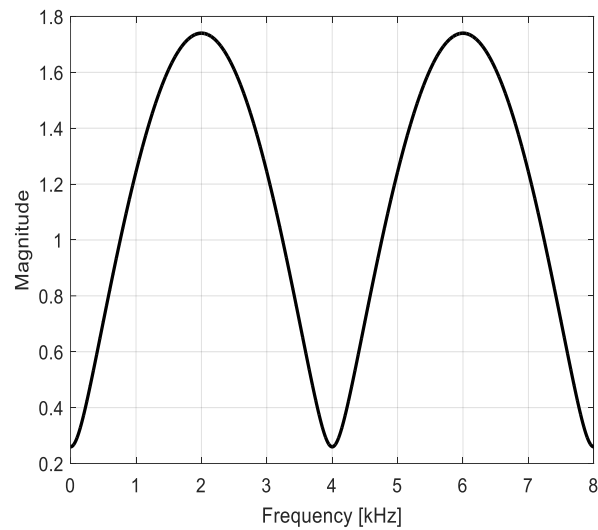


Рис. АЧХ-6 ($b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -0,74$)

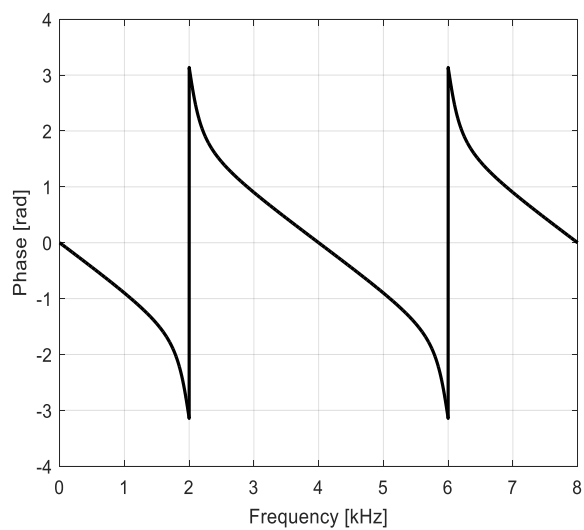


Рис. ФЧХ-5 ($b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1,26$)

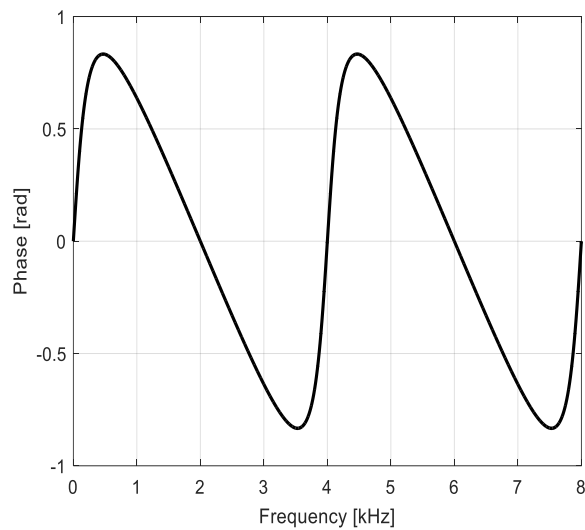


Рис. ФЧХ-6 ($b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -0,74$)

4. Детальные выводы по работе

4.1. Анализ устойчивости

Нерекурсивные фильтры являются устойчивыми, так как при любых начальных условиях реакция фильтра на любое ограниченное воздействие также ограничена (имеет конечную импульсную характеристику), а также потому что линейные цепи не имеют обратной связи.

4.2. Классификация фильтров

Вид фильтра определяется по характеру локализации АЧХ в рабочем диапазоне частот. Следовательно подаваемый сигнал не должен иметь ширину полосы, выходящую за пределы рабочего диапазона, если условие не выполняется, то надо повысить частоту дискретизации, соответственно возрастет и частота Найквиста, что обеспечит выполнение условия.

ЦФ с АЧХ $K_T(f)$ называется ФНЧ, если центральная частота ЦФ принадлежит диапазону $\left[0; \frac{1}{3}f_{\text{нк}}\right]$.

ЦФ с АЧХ $K_T(f)$ называется ПФ, если центральная частота ЦФ принадлежит диапазону $\left[\frac{1}{3}f_{\text{нк}}; \frac{2}{3}f_{\text{нк}}\right]$.

ЦФ с АЧХ $K_T(f)$ называется ФВЧ, если центральная частота ЦФ принадлежит диапазону $\left[\frac{2}{3}f_{\text{нк}}; f_{\text{нк}}\right]$.

ЦФ с АЧХ $K_T(f)$ называется РФ, если его дополняющая АЧХ описывает ПФ.

Фильтры, полученные в результате выполнения лабораторной работы:

Фильтр №1: ФНЧ 1-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 1,26, b_2 = 0$)

Фильтр №2: ФВЧ 1-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = -0,74, b_2 = 0$)

Фильтр №3: ФНЧ 2-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 0,26$)

Фильтр №4: ФВЧ 2-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = 0,26$)

Фильтр №5: РФ 2-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1,26$)

Фильтр №6: ПФ 2-го порядка ($b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -0,74$)

4.3. Анализ поведения АЧХ

Сравнение ФНЧ 1-го порядка (фильтр №1) и ФНЧ 2-го порядка (фильтр №3):

- полоса пропускания на уровне 0,7 ФНЧ 1-го порядка (2043 Гц) шире полосы пропускания на уровне 0,7 ФНЧ 2-го порядка (1567 Гц);
- крутизна спада ФНЧ 2-го порядка ($4,3650 \cdot 10^{-4}$) на границе полосы пропускания больше крутизны спада ФНЧ 1-го порядка ($3,3186 \cdot 10^{-4}$);
- пульсации отсутствуют как в полосе пропускания, так и за ее пределами.

Сравнение ФВЧ 1-го порядка (фильтр №2) и ФВЧ 2-го порядка (фильтр №4):

- f_n на уровне 0,7 ФВЧ 2-го порядка (2432 Гц) больше f_n на уровне 0,7 ФВЧ 1-го порядка (1945 Гц);
- крутизна спада ФВЧ 2-го порядка ($4,3240 \cdot 10^{-4}$) на границе полосы пропускания больше крутизны спада ФВЧ 1-го порядка ($2,5401 \cdot 10^{-4}$);
- пульсации отсутствуют как в полосе пропускания, так и за ее пределами.

4.4. Недостатки и преимущества исследуемых фильтров

Преимущества нерекурсивных цифровых фильтров:

- Простота реализации: нерекурсивные фильтры обычно проще в реализации по сравнению с рекурсивными фильтрами, поскольку они не требуют запоминания предыдущих значений.
- Устойчивость: нерекурсивные фильтры обладают большей устойчивостью по сравнению с рекурсивными, что снижает риск возникновения проблем с колебаниями или потерей устойчивости.
- Меньше требований к памяти: так как нерекурсивные фильтры не используют предыдущие значения, они требуют меньше памяти для хранения коэффициентов фильтра.

Недостатки нерекурсивных цифровых фильтров:

- Ограниченная сложность: нерекурсивные фильтры имеют ограниченную сложность по сравнению с их рекурсивным аналогом, что может ограничивать их способность аппроксимировать сложные частотные характеристики.
- Большой вычислительный объем: хотя нерекурсивные фильтры проще в реализации, они могут требовать больше вычислительных ресурсов для обработки больших объемов данных из-за отсутствия рекуррентной структуры.
- Задержка во времени: нерекурсивные фильтры могут иметь большую задержку во времени из-за их не рекуррентного характера.