Лениво оценяване и програмиране от по-висок ред

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, 2017/18 г.

4–11 януари 2018 г.

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\; x!$, $g := \lambda z\; z^2 + z$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\; x!$, $g := \lambda z\; z^2 + z$
- $g(f(4))$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)})$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!})$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)}$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
- $\underline{g(f(4))}$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$

- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))}^2 + \underline{f(4)}$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))}^2 + \underline{f(4)} \longrightarrow (\underline{4!})^2 + \underline{4!}$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$

- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))}^2 + \underline{f(4)} \longrightarrow (\underline{4!})^2 + \underline{4!} \longrightarrow 24^2 + 24$

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
    - оценява се отвътре навън
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))}^2 + \underline{f(4)} \longrightarrow (\underline{4!})^2 + \underline{4!} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
    - оценява се отвън навътре

Щипка λ-смятане

- λ-изрази: $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x\, E$
- Изчислително правило: $(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека $f := \lambda x\, x!$, $g := \lambda z\, z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow \quad ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
  - оценява се отвътре навън
  - стриктно (апликативно, лакомо) оценяване
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))}^2 + \underline{f(4)} \longrightarrow (\underline{4!})^2 + \underline{4!} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
  - оценява се отвън навътре
  - нестриктно (нормално, лениво) оценяване

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже "пази чисто"

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже "пази чисто"

Нестриктното оценяване

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже "пази чисто"

Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже "пази чисто"

Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
    - `x = p != NULL ? p->data : 0;`

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
  - `x = p != NULL ? p->data : 0;`
  - `found = i < n && a[i] == x`

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже "пази чисто"

Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
  - `x = p != NULL ? p->data : 0;`
  - `found = i < n && a[i] == x`
- нарича се още "call-by-name" (извикване по име)

Стриктно и нестриктно оценяване

Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още "call-by-value" (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже "пази чисто"

Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
    - `x = p != NULL ? p->data : 0;`
    - `found = i < n && a[i] == x`
- нарича се още "call-by-name" (извикване по име)
- може да спести сметки, понеже "изхвърля боклуците"

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

$\underline{\texttt{(g '(3))}} \longrightarrow$ `(f` $\underline{\texttt{(car '(3))}}$ `(cadr '(3)))`

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

$\underline{\texttt{(g '(3))}} \longrightarrow \texttt{(f } \underline{\texttt{(car '(3))}} \texttt{ (cadr '(3)))}$

$\longrightarrow \texttt{(f 3 } \underline{\texttt{(cadr '(3))}}\texttt{)}$

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

(g '(3)) ⟶ (f (car '(3)) (cadr '(3)))
⟶ (f 3 (cadr '(3))) ⟶ Грешка!

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

(g '(3)) ⟶ (f (car '(3)) (cadr '(3)))
⟶ (f 3 (cadr '(3))) ⟶ Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

(g '(3)) ⟶ (f (car '(3)) (cadr '(3)))
⟶ (f 3 (cadr '(3))) ⟶ Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

g [3]

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

(g '(3)) ⟶ (f (car '(3)) (cadr '(3)))
⟶ (f 3 (cadr '(3))) ⟶ Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

g [3] ⟶ f (head [3]) (head (tail [3]))

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

$\underline{\texttt{(g '(3))}} \longrightarrow \texttt{(f } \underline{\texttt{(car '(3))}} \texttt{ (cadr '(3)))}$

$\longrightarrow \texttt{(f 3 } \underline{\texttt{(cadr '(3))}}\texttt{)} \longrightarrow$ Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

$\underline{\texttt{g [3]}} \longrightarrow \underline{\texttt{f (head [3]) (head (tail [3]))}}$

$\longrightarrow \texttt{if } \underline{\texttt{head [3]}} \texttt{ < 5 then head [3] else head (tail [3])}$

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

(g '(3)) ⟶ (f (car '(3)) (cadr '(3)))
⟶ (f 3 (cadr '(3))) ⟶ Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

g [3] ⟶ f (head [3]) (head (tail [3]))
⟶ if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
⟶ if 3 < 5 then head [3] else head (tail [3])

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

(g '(3)) ⟶ (f (car '(3)) (cadr '(3)))
⟶ (f 3 (cadr '(3))) ⟶ Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

g [3] ⟶ f (head [3]) (head (tail [3]))
⟶ if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
⟶ if 3 < 5 then head [3] else head (tail [3])
⟶ if True then head [3] else head (tail [3])

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

```
(g '(3)) ⟶ (f (car '(3)) (cadr '(3)))
         ⟶ (f 3 (cadr '(3))) ⟶ Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

```
g [3] ⟶ f (head [3]) (head (tail [3]))
      ⟶ if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
      ⟶ if 3 < 5 then head [3] else head (tail [3])
      ⟶ if True then head [3] else head (tail [3])
      ⟶ head [3]
```

Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

$\underline{\texttt{(g '(3))}} \longrightarrow$ `(f` $\underline{\texttt{(car '(3))}}$ `(cadr '(3)))`

$\longrightarrow$ `(f 3` $\underline{\texttt{(cadr '(3))}}$`)` $\longrightarrow$ Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

$\underline{\texttt{g [3]}} \longrightarrow \underline{\texttt{f (head [3]) (head (tail [3]))}}$

$\longrightarrow$ `if` $\underline{\texttt{head [3]}}$ `< 5 then head [3] else head (tail [3])`

$\longrightarrow$ `if` $\underline{\texttt{3 < 5}}$ `then head [3] else head (tail [3])`

$\longrightarrow \underline{\texttt{if True then head [3] else head (tail [3])}}$

$\longrightarrow \underline{\texttt{head [3]}} \longrightarrow 3$

Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат

Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат
- има случаи, когато нормалното оценяване дава резултат, но апликативното не!

Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат
- има случаи, когато нормалното оценяване дава резултат, но апликативното не!
- нещо повече:

Теорема (за нормализация, Church-Rosser)

Ако има някакъв ред на оценяване на програмата, който достига до резултат, то и с нормална стратегия на оценяване ще достигнем до някакъв резултат.

Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат
- има случаи, когато нормалното оценяване дава резултат, но апликативното не!
- нещо повече:

Теорема (за нормализация, Church-Rosser)

Ако има някакъв ред на оценяване на програмата, който достига до резултат, то и с нормална стратегия на оценяване ще достигнем до някакъв резултат.

Следствие

Ако с нормално оценяване програмата даде грешка или не завърши, то няма да получим резултат с никоя друга стратегия на оценяване.

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) =?$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$g(g(g(2)))$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$$g(g(g(2))) \quad \mapsto g(g(2))^2 + g(g(2))$$

Извикване при нужда ("call-by-need")

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) =?$

$$g(g(g(2))) \quad \mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2)$$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) =?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) =?$

$$
\begin{aligned}
g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\
&\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots
\end{aligned}
$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) =?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) =?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$g(g(g(2)))$$

Извикване при нужда ("call-by-need")

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$g(g(g(2))) \quad \mapsto \textbf{let } x = g(g(2)) \textbf{ in } x^2 + x$$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \textbf{let } x = g(g(2)) \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = g(2) \textbf{ in } \textbf{let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \end{aligned}$$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) =?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \textbf{let } x = g(g(2)) \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = g(2) \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } z = 2 \textbf{ in let } y = z^2 + z \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \end{aligned}$$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \textbf{let } x = g(g(2)) \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = g(2) \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } z = 2 \textbf{ in let } y = z^2 + z \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = 6 \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \end{aligned}$$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \textbf{let } x = g(g(2)) \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = g(2) \textbf{ in } \textbf{let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } z = 2 \textbf{ in } \textbf{let } y = z^2 + z \textbf{ in } \textbf{let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = 6 \textbf{ in } \textbf{let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } x = 42 \textbf{ in } x^2 + x \mapsto 1806 \end{aligned}$$

Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$$
\begin{aligned}
g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\
&\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots
\end{aligned}
$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$
\begin{aligned}
g(g(g(2))) &\mapsto \textbf{let } x = g(g(2)) \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\
&\mapsto \textbf{let } y = g(2) \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\
&\mapsto \textbf{let } z = 2 \textbf{ in let } y = z^2 + z \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\
&\mapsto \textbf{let } y = 6 \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\
&\mapsto \textbf{let } x = 42 \textbf{ in } x^2 + x \mapsto 1806
\end{aligned}
$$

- Избягва се повторението чрез споделяне на общи подизрази

Извикване при нужда ("call-by-need")

Ако $g(z) = z^2 + z$, $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2+2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2+2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \ldots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

$\boxed{\textbf{Идея: } (\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto \textbf{let } x = E_2 \textbf{ in } E_1}$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \textbf{let } x = g(g(2)) \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = g(2) \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } z = 2 \textbf{ in let } y = z^2 + z \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } y = 6 \textbf{ in let } x = y^2 + y \textbf{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \textbf{let } x = 42 \textbf{ in } x^2 + x \mapsto 1806 \end{aligned}$$

- Избягва се повторението чрез споделяне на общи подизрази
- Заместването се извършва чак когато е абсолютно наложително

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
    - първо се оценява e
    - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv$ `f` $e_1\ e_2\ \ldots\ e_n$, за `f` — n-местна примитивна функция:

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv$ `f` e_1 e_2 ... e_n, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv$ `f` e_1 e_2 $\ldots$ e_n, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv \texttt{f}\ e_1\ e_2\ \ldots\ e_n$, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че $s \equiv \texttt{f}\ e$

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv$ `f` e_1 e_2 ... e_n, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че $s \equiv$ `f` e
- първо се оценява `f`, за да разберем как да продължим

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv$ `f` e_1 e_2 ... e_n, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че $s \equiv$ `f` e
- първо се оценява `f`, за да разберем как да продължим
- ако `f` x_1 ... x_n `|` g_1 `=` t_1 ... `|` g_k `=` t_k е дефинирана чрез пазачи:

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv \mathtt{f}\ e_1\ e_2\ \ldots\ e_n$, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че $s \equiv \mathtt{f}\ e$
- първо се оценява `f`, за да разберем как да продължим
- ако `f` $x_1 \ldots x_n$ `|` g_1 `=` $t_1 \ldots$ `|` g_k `=` t_k е дефинирана чрез пазачи:
  - тогава `f` се замества с израза:
    `\`$x_1 \ldots x_n$ `->` `if` g_1 `then` t_1 `else` … `if` g_k `then` t_k
    `else error "..."`

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv$ `f` e_1 e_2 ... e_n, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че $s \equiv$ `f` e
- първо се оценява `f`, за да разберем как да продължим
- ако `f` x_1 ... x_n `|` g_1 `=` t_1 ... `|` g_k `=` t_k е дефинирана чрез пазачи:
  - тогава `f` се замества с израза:
    `\`x_1 ... x_n `->` `if` g_1 `then` t_1 `else` ... `if` g_k `then` t_k
    `else error "..."`
- ако `f` е конструктор (константа), оценката остава `f` e

Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз s.

- ако $s \equiv$ `if` e `then` e_1 `else` e_2
  - първо се оценява e
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на e_1
  - ако оценката е `False`, се преминава към оценката на e_2
- ако $s \equiv$ `f` e_1 e_2 ... e_n, за `f` — n-местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно $e_1, \ldots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че $s \equiv$ `f` e
- първо се оценява `f`, за да разберем как да продължим
- ако `f` x_1 ... x_n `|` g_1 `=` t_1 ... `|` g_k `=` t_k е дефинирана чрез пазачи:
  - тогава `f` се замества с израза:
    `\`x_1 ... x_n `->` `if` g_1 `then` t_1 `else` ... `if` g_k `then` t_k
    `else error "..."`
- ако `f` е конструктор (константа), оценката остава `f` e
- ако `f = \`p `->` t, където p е образец, редът на оценяване зависи от образеца!

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\p -> t) e`?

- ако $p \equiv c$ е константа

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата c, преминава се към оценката на тялото t

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата c, преминава се към оценката на тялото t
- ако $p \equiv$ _ е анонимният образец

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\p -> t) e`?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента *e*
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата *c*, преминава се към оценката на тялото *t*
- ако $p \equiv$ _ е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на *t* без да се оценява *e*

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата c, преминава се към оценката на тялото t
- ако $p \equiv$ _ е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на t без да се оценява e
- ако $p \equiv$ `x` е променлива

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата c, преминава се към оценката на тялото t
- ако $p \equiv$ _ е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на t без да се оценява e
- ако $p \equiv$ `x` е променлива
  - преминава се към оценка на израза t като се въвежда локалната дефиниция `x =` e

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p` -> `t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата c, преминава се към оценката на тялото t
- ако $p \equiv$ `_` е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на t без да се оценява e
- ако $p \equiv$ `x` е променлива
  - преминава се към оценка на израза t като се въвежда локалната дефиниция `x = `e
- ако $p \equiv (p_1, \ p_2, \ \ldots, \ p_n)$

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата c, преминава се към оценката на тялото t
- ако $p \equiv$ `_` е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на t без да се оценява e
- ако $p \equiv$ `x` е променлива
  - преминава се към оценка на израза t като се въвежда локалната дефиниция `x =` e
- ако $p \equiv$ `(`p_1`,` p_2`, ...,` p_n`)`
  - преминава се към оценката на e

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv c$ е константа
  - преминава се към оценката на аргумента e
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата c, преминава се към оценката на тялото t
- ако $p \equiv$ `_` е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на t без да се оценява e
- ако $p \equiv$ `x` е променлива
  - преминава се към оценка на израза t като се въвежда локалната дефиниция `x =` e
- ако $p \equiv$ `(`p_1`,` p_2`,` `...,` p_n`)`
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида `(`e_1`,` e_2`,` `...,` e_n`)`, преминава се към оценката на израза `(\`$p_1\, p_2 \ldots p_n$ `->` t`)` $e_1\, e_2 \ldots e_n$

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява (\\p -> t) e?

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\p -> t) e`?

- ако $p \equiv (p_h : p_t)$

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\p -> t) e`?

- ако $p \equiv (p_h : p_t)$
  - преминава се към оценката на e

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява (\p -> t) e?

- ако $p \equiv (p_h : p_t)$
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида $(e_h : e_t)$, преминава се към оценката на израза (\p_h p_t -> t) e_h e_t

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv$ `(`p_h`:`p_t`)`
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида `(`e_h`:`e_t`)`, преминава се към оценката на израза `(\`p_h p_t `->` t`)` e_h e_t
- ако $p \equiv$`[`p_1`,` p_2`,` $\ldots$`,` p_n`]`

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv (p_h : p_t)$
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида $(e_h : e_t)$, преминава се към оценката на израза `(\`p_h p_t `->` t`)` e_h e_t
- ако $p \equiv [p_1, p_2, \ldots, p_n]$
  - преминава се към оценката на e

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\p -> t) e`?

- ако $p \equiv (p_h : p_t)$
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида $(e_h : e_t)$, преминава се към оценката на израза $(\backslash p_h\ p_t\ \texttt{->}\ t)\ e_h\ e_t$
- ако $p \equiv [p_1, p_2, \ldots, p_n]$
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$, преминава се към оценката на израза $(\backslash p_1\ p_2\ \ldots\ p_n\ \texttt{->}\ t)\ e_1\ e_2\ \ldots\ e_n$

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv$ `(`p_h`:`p_t`)`
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида `(`e_h`:`e_t`)`, преминава се към оценката на израза `(\`p_h p_t `->` t`)` e_h e_t
- ако $p \equiv$`[`p_1`,` p_2`,` `...,` p_n`]`
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида `[`e_1`,` e_2`,` `...,` e_n`]`, преминава се към оценката на израза `(\`p_1 p_2 `...` p_n `->` t`)` e_1 e_2 `...` e_n
  - всъщност е еквивалентно да разгледаме p като p_1`:`p_2`:...:`p_n`:[]`

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява `(\`p `->` t`)` e?

- ако $p \equiv$ `(`p_h`:`p_t`)`
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида `(`e_h`:`e_t`)`, преминава се към оценката на израза `(\`p_h p_t `->` t`)` e_h e_t
- ако $p \equiv$`[`p_1`,` p_2`, ...,` p_n`]`
  - преминава се към оценката на e
  - ако се установи, че тя е от вида `[`e_1`,` e_2`, ...,` e_n`]`, преминава се към оценката на израза `(\`p_1 p_2 `...` p_n `->` t`)` e_1 e_2 `...` e_n
  - всъщност е еквивалентно да разгледаме p като p_1`:`p_2`:...:`p_n`:[]`
- ако има няколко равенства за f с използване на различни образци, се търси кой образец пасва отгоре надолу

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
      sumFirst [1..10] [5..50]
```

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

 <u>`sumFirst`</u> `[1..10] [5..50]`

$\longrightarrow$ `(\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y)` <u>`[1..10]`</u> `[5..50]`

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{\texttt{sumFirst}}\ \texttt{[1..10] [5..50]} \\
\longrightarrow & \texttt{(\textbackslash(x:xs) -> \textbackslash(y:ys) -> x + y)}\ \underline{\texttt{[1..10]}}\ \texttt{[5..50]} \\
\longrightarrow & \underline{\texttt{(\textbackslash(x:xs) -> \textbackslash(y:ys) -> x + y) (1:[2..10])}}\ \texttt{[5..50]}
\end{array}
$$

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y

     sumFirst [1..10] [5..50]
 ⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
 ⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
 ⟶  let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
```

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y

     sumFirst [1..10] [5..50]
 ⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
 ⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
 ⟶  let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
 ⟶  let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
```

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
    sumFirst [1..10] [5..50]
⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
⟶  let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
⟶  let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
⟶  let x=1; xs=[2..10]; y=5; ys=[6..50] in x+y
```

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y

    sumFirst [1..10] [5..50]
⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
⟶  (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
⟶  let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
⟶  let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
⟶  let x=1; xs=[2..10]; y=5; ys=[6..50] in x+y
⟶  1 + 5
```

Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y

     sumFirst [1..10] [5..50]
 ⟶   (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
 ⟶   (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
 ⟶   let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
 ⟶   let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
 ⟶   let x=1; xs=[2..10]; y=5; ys=[6..50] in x+y
 ⟶   1 + 5 ⟶ 6
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
(filter isPrime [4..1000]) !! 1
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
   (filter isPrime [4..1000]) !! 1
→  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
     (filter isPrime [4..1000]) !! 1
⟶   (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶   (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
    (filter isPrime [4..1000]) !! 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶ ...(\p (z:zs) ->   if p z then z:filter p zs
                     else filter p zs) isPrime [4..1000]...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
     (filter isPrime [4..1000]) !! 1
⟶   (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶   (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) isPrime [4..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) [4..1000]...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
     (filter isPrime [4..1000]) !! 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) isPrime [4..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) [4..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) (4:[5..1000]))...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
     (filter isPrime [4..1000]) !! 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [4..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) [4..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (4:[5..1000]))...
⟶ ...let p=isPrime; z=4; zs=[5..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
    (filter isPrime [4..1000]) !! 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶  (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) isPrime [4..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) [4..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                       else filter p zs) (4:[5..1000]))...
⟶ ...let p=isPrime; z=4; zs=[5..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=4; zs=[5..1000] in
   if False then z:filter p zs else filter p zs...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

$\longrightarrow \ldots$ `(\p (z:zs) ->` `if p z then z:filter p zs` `else filter p zs) isPrime` `[5..1000]`$\ldots$

Оценяване в Haskell: пример 2

$\longrightarrow$ ...(\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs else filter p zs) isPrime [5..1000]...

$\longrightarrow$ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs else filter p zs) (5:[6..1000])...

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [5..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (5:[6..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [5..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (5:[6..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if True then z:filter p zs else filter p zs...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [5..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (5:[6..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if True then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [5..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (5:[6..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if True then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1
⟶ let xs=filter isPrime [6..1000] in (\n -> xs !! (n-1)) 1
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [5..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (5:[6..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if True then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1
⟶ let xs=filter isPrime [6..1000] in (\n -> xs !! (n-1)) 1
⟶ let xs=filter isPrime [6..1000]; n=1 in xs !! (n-1)
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [5..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (5:[6..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
   if True then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1
⟶ let xs=filter isPrime [6..1000] in (\n -> xs !! (n-1)) 1
⟶ let xs=filter isPrime [6..1000]; n=1 in xs !! (n-1)
⟶ (\(y:_) 0 -> y) (filter isPrime [6..1000]) 0
```

Оценяване в Haskell: пример 2

$\longrightarrow$ ...`(\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs else filter p zs) isPrime [6..1000]`...

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [6..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (6:[7..1000])...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [6..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (6:[7..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [6..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (6:[7..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if False then z:filter p zs else filter p zs...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [6..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (6:[7..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if False then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [7..1000]...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [6..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (6:[7..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if False then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [7..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (7:[8..1000])...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

```
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [6..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (6:[7..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in
   if False then z:filter p zs else filter p zs...
⟶ ...(\p (z:zs) ->    if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) isPrime [7..1000]...
⟶ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                      else filter p zs) (7:[8..1000])...
⟶ ...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in
   if p z then z:filter p zs else filter p zs...
```

Оценяване в Haskell: пример 2

$\longrightarrow$ `...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in`
`if True then z:filter p zs else filter p zs ...`

Оценяване в Haskell: пример 2

$\longrightarrow$ `...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in`

`if True then z:filter p zs else filter p zs ...`

$\longrightarrow$ `(\(y:_) 0 -> y) (7:filter isPrime [8..1000]) 0`

Оценяване в Haskell: пример 2

$\longrightarrow$ `...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in`
`if True then z:filter p zs else filter p zs ...`
$\longrightarrow$ `(\(y:_) 0 -> y) (7:filter isPrime [8..1000]) 0`
$\longrightarrow$ `let y=7 in y`

Оценяване в Haskell: пример 2

$\longrightarrow$ `...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in`
`if True then z:filter p zs else filter p zs ...`
$\longrightarrow$ `(\(y:_) 0 -> y) (7:filter isPrime [8..1000]) 0`
$\longrightarrow$ `let y=7 in y`
$\longrightarrow$ `7`

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където
    - `x` е обещание за глава

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където
  - `x` е обещание за глава
  - `xs` е обещание за опашка

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където
  - `x` е обещание за глава
  - `xs` е обещание за опашка
- списъците в Haskell всъщност са потоци!

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където
  - `x` е обещание за глава
  - `xs` е обещание за опашка
- списъците в Haskell всъщност са потоци!
- можем да работим с безкрайни списъци

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където
  - `x` е обещание за глава
  - `xs` е обещание за опашка
- списъците в Haskell всъщност са потоци!
- можем да работим с безкрайни списъци
  - `ones = 1 : ones`

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където
  - `x` е обещание за глава
  - `xs` е обещание за опашка
- списъците в Haskell всъщност са потоци!
- можем да работим с безкрайни списъци
  - `ones = 1 : ones`
  - `length ones` $\longrightarrow$ `...`

Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност, `x:xs = (:) x xs`, където
  - `x` е обещание за глава
  - `xs` е обещание за опашка
- списъците в Haskell всъщност са потоци!
- можем да работим с безкрайни списъци
  - `ones = 1 : ones`
  - `length ones` ⟶ `...`
  - `take 5 ones` ⟶ `[1,1,1,1,1]`

Генериране на безкрайни списъци

- $[a..] \rightarrow [a, a+1, a+2, \ldots]$
- **Примери:**
  - `nats = [0..]`
  - `take 5 [0..]` ⟶ `[0,1,2,3,4]`
  - `take 26 ['a'..]` ⟶ `"abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"`
- Синтактична захар за `enumFrom from`

Генериране на безкрайни списъци

- $[a..] \to [a, a+1, a+2, \ldots]$
- **Примери:**
  - `nats = [0..]`
  - `take 5 [0..]` $\longrightarrow$ `[0,1,2,3,4]`
  - `take 26 ['a'..]` $\longrightarrow$ `"abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"`
- Синтактична захар за `enumFrom from`
- $[a, a+\Delta x\ ..] \to [a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \ldots,]$
- **Примери:**
  - `evens = [0,2..]`
  - `take 5 evens` $\longrightarrow$ `[0,2,4,6,8]`
  - `take 7 ['a','e'..]` $\longrightarrow$ `"aeimquy"`
- Синтактична захар за `enumFromThen from then`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3]` $\longrightarrow$ `[1,2,3,1,2,3,...]`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3]` $\longrightarrow$ `[1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle l = l ++ cycle l`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3]` $\longrightarrow$ `[1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle l = l ++ cycle l`
  - създава безкраен списък повтаряйки подадения (краен) списък

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3]` ⟶ `[1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle l = l ++ cycle l`
  - създава безкраен списък повтаряйки подадения (краен) списък
- `iterate :: (a -> a) -> a -> [a]`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3]` ⟶ `[1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle l = l ++ cycle l`
  - създава безкраен списък повтаряйки подадения (краен) списък
- `iterate :: (a -> a) -> a -> [a]`
  - `iterate f z` създава безкрайния списък `[z,f(z),f(f(z)),...]`

Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3]` $\longrightarrow$ `[1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle l = l ++ cycle l`
  - създава безкраен списък повтаряйки подадения (краен) списък
- `iterate :: (a -> a) -> a -> [a]`
  - `iterate f z` създава безкрайния списък `[z,f(z),f(f(z)),...]`
  - `iterate f z = z : iterate f (f z)`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = ?`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = ?`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = ?`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = [ (x,y) | x <- [0..], y <- [0..x - 1] ]`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = [ (x,y) | x <- [0..], y <- [0..x - 1] ]`
- `pythagoreanTriples = ?`

Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = [ (x,y) | x <- [0..], y <- [0..x - 1] ]`
- ```
  pythagoreanTriples =   [ (a,b,c) |  c <- [1..],
                                      b <- [1..c-1],
                                      a <- [1..b-1],
                                      a^2 + b^2 == c^2 ]
  ```
  ```

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`

$\boxed{1}$ 2 4 8 16 ...

$*$ 2

2 4 8 16 32

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x ‘mod‘ k > 0) [1..]`

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- ``notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]``
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` $\longrightarrow$?

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x ‘mod‘ k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` $\longrightarrow$ ...

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` $\longrightarrow$ ...
  - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` ⟶ ...
  - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` ⟶ ...
  - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets` ⟶ `[[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` ⟶ ...
  - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets` ⟶ `[[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets)` ⟶ ?

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` ⟶ ...
  - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets` ⟶ `[[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets)` ⟶ `[3,2,1,6,5]`

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` $\longrightarrow$ ...
  - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets` $\longrightarrow$ `[[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets)` $\longrightarrow$ `[3,2,1,6,5]`
  - `take 5 (foldl (++) [] triplets)` $\longrightarrow$?

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` ⟶ ...
  - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets` ⟶ `[[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets)` ⟶ `[3,2,1,6,5]`
  - `take 5 (foldl (++) [] triplets)` ⟶ ...

Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..]` ⟶ ...
    - Внимание: `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
    - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
    - `take 3 triplets` ⟶ `[[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
    - `take 5 (foldr (++) [] triplets)` ⟶ `[3,2,1,6,5]`
    - `take 5 (foldl (++) [] triplets)` ⟶ ...
    - `foldl` не може да работи с безкрайни списъци!

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`

Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\texttt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \texttt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\mathtt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \mathtt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \mathtt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията $ е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
    - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\mathtt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \mathtt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \mathtt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$
- **Примери:**

Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\mathtt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \mathtt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \mathtt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$
- **Примери:**
  - `head (tail (take 5 (drop 7 l)))`

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията $ е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\mathtt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \mathtt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \mathtt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$
- **Примери:**
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ l`

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\mathtt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \mathtt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \mathtt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$
- **Примери:**
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ l`
  - `sum (map (^2) (filter odd [1..10]))`

Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\mathtt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \mathtt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \mathtt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$
- **Примери:**
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ l`
  - `sum $ map (^2) $ filter odd $ [1..10]`

Апликация

- Операцията "апликация" се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\texttt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \texttt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \texttt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \texttt{x}$
- **Примери:**
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ l`
  - `sum $ map (^2) $ filter odd $ [1..10]`
  - `map ($2) [(+2),(3^),(*5)]` $\longrightarrow$?

Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с `f $ x = f x`
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията `$` е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\ldots((\mathtt{f}\ x_1)\ x_2)\ \ldots x_n) = \mathtt{f}\ x_1\ x_2\ \ldots x_n$
- $f_1\ (f_2\ \ldots(f_n\ \mathtt{x})\ldots) = f_1\ \$\ f_2\ \$\ \ldots\$\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$
- **Примери:**
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ l`
  - `sum $ map (^2) $ filter odd $ [1..10]`
  - `map ($2) [(+2),(3^),(*5)]` $\longrightarrow$ `[4,9,10]`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 ... `(`f_n `x)`...`)` $=$ f_1 `.` f_2 `. ... .` f_n `$ x`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 ... `(`f_n `x)`...`)` = f_1 `.` f_2 `. ... .` f_n `$ x`
- **Примери:**

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 `...(`f_n `x)...)` $=$ f_1 `.` f_2 `. ... .` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m l = take m (drop n l)`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 …`(`f_n `x)`…`)` = f_1 `.` f_2 `.` … `.` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 `...` `(`f_n `x)...)` $=$ f_1 `.` f_2 `. ... .` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares l = sum (map (^2) (filter odd l))`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 ... `(`f_n `x)`...`)` $=$ f_1 `.` f_2 `. ... .` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1\ (f_2 \ldots (f_n\ \texttt{x})\ldots) = f_1\ .\ f_2\ .\ \ldots\ .\ f_n\ \$\ \texttt{x}$
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`

$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x)))$

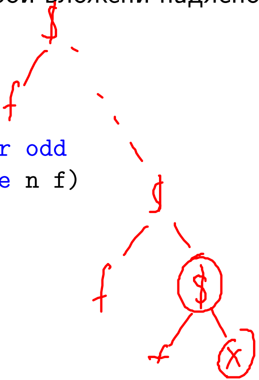
$\underbrace{f\ \$\ f\ \$\ f\ \$\ \ldots}_{n}\ \$\ x$

Композиция

$f \cdot f \cdot \ldots \cdot f$

- `(f . g) x = f (g x)` — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 … `(`f_n `x)`…`)` $=$ f_1 `.` f_2 `.` … `.` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`

$\underbrace{[f, \ldots, f]}_{n}$



Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1\ (f_2 \ldots (f_n\ \mathtt{x}) \ldots) = f_1\ .\ f_2\ .\ \ldots\ .\ f_n\ \$\ \mathtt{x}$
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - $\mathtt{repeated\ n\ f} = \underbrace{\mathtt{foldr\ (.)\ id}}_{g}\ (\underbrace{\mathtt{replicate\ n}}_{h}\ \mathtt{f})$

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 … `(`f_n `x)`…`)` = f_1 `.` f_2 `. … .` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция "композиция"
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 `...(`f_n `x)...)` $= f_1$ `.` f_2 `. ... .` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`
  - `repeated n = foldr (.) id . replicate n`

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 ... `(`f_n `x)`...`)` = f_1 `.` f_2 `.` ... `.` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`
  - `repeated n = foldr (.) id . replicate n`
  - `repeated n = (foldr (.) id .) (replicate n)`

    f g

Композиция

- `(f . g) x = f (g x)` — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- f_1 `(`f_2 `...(`f_n `x)...)` $=$ f_1 `.` f_2 `. ... .` f_n `$ x`
- **Примери:**
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`
  - `repeated n = foldr (.) id . replicate n`
  - `repeated n = (foldr (.) id .) (replicate n)`
  - `repeated = (foldr (.) id .) . replicate`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите $ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите $ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите $ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите $ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Пример 2:

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Пример 2:

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) ll`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите $ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.
Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Пример 2:

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) ll`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

filter f x

('filter' x)

f 'filter' x

flip filter x

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Пример 2:

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) ll`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0),(==0),(>0)])`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Пример 2:

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) ll`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> flip map [(<0),(==0),(>0)] (flip filter x))`

g h

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите $ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Пример 2:

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) ll`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> flip map [(<0),(==0),(>0)] (flip filter x))`
- `split3 = map (flip map [(<0),(==0),(>0)] . flip filter)`

Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите $ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

Пример 1:

- `g l = filter (\f -> f 2 > 3) l`
- `g = filter (\f -> (f $ 2) > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

Пример 2:

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) ll`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> flip map [(<0),(==0),(>0)] (flip filter x))`
- `split3 = map (flip map [(<0),(==0),(>0)] . flip filter)`
- `split3 = map $ flip map [(<0),(==0),(>0)] . flip filter`

Безточково (point-free) програмиране

$\forall r \, \exists x \;\; x \nmid k$

Пример 3:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r) m`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 3:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 3:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> mod k x > 0))`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 3:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> mod k x > 0))`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 3:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> mod k x > 0))`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (any ((>0) . (mod k)))`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 3:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> mod k x > 0))`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (any ((>0) . (mod k)))`
- $\texttt{checkMatrix k = }\underbrace{\texttt{all}}_{f}\ \texttt{(}\underbrace{\texttt{any}}_{g}\ \underbrace{\texttt{(((>0) .)}}_{h}\ \texttt{(}\underbrace{\texttt{mod}}_{s}\ \texttt{k)))}$

Безточково (point-free) програмиране

Пример 3:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> mod k x > 0))`
- `checkMatrix k = all (any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (any ((>0) . (mod k)))`
- `checkMatrix k = all (any (((>0) .) (mod k)))`
- `checkMatrix = all . any . ((>0) .) . mod`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
  - `join f = ap f id`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
    - `join f = ap f id`
    - `join = (`ap` id)`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
  - `join f = ap f id`
  - ``join = (`ap` id)``
- `(f >>= g) x = g (f x) x`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
    - `join f = ap f id`
    - ``join = (`ap` id)``
- `(f >>= g) x = g (f x) x`
    - `g =<< f = f >>= g`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
  - `join f = ap f id`
  - ``join = (`ap` id)``
- `(f >>= g) x = g (f x) x`
  - `g =<< f = f >>= g`
  - `f >>= g = ap (flip g) f`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
  - `join f = ap f id`
  - ``join = (`ap` id)``
- `(f >>= g) x = g (f x) x`
  - `g =<< f = f >>= g`
  - `f >>= g = ap (flip g) f`
- `liftM2 f g h x = f (g x) (h x)`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от Control.Monad:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
  - `join f = ap f id`
  - ``join = (`ap` id)``
- `(f >>= g) x = g (f x) x`
  - `g =<< f = f >>= g`
  - `f >>= g = ap (flip g) f`
- `liftM2 f g h x = f (g x) (h x)`
  - `ap f = liftM2 f id`

Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още следните функции от `Control.Monad`:

- `curry f x y = f (x,y)`
- `uncurry f (x,y) = f x y`
- `join f x = f x x`
- `ap f g x = f x (g x)`
    - `join f = ap f id`
    - ``join = (`ap` id)``
- `(f >>= g) x = g (f x) x`
    - `g =<< f = f >>= g`
    - `f >>= g = ap (flip g) f`
- `liftM2 f g h x = f (g x) (h x)`
    - `ap f = liftM2 f id`
    - ``ap = (`liftM2` id)``

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- $\texttt{sorted l = all }\underbrace{\texttt{(uncurry (<=))}}_{f}\ \underbrace{\texttt{(ap zip tail}}_{g}\texttt{ l)}$

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`
- `sorted = all (uncurry (>=)) . (zip =<< tail)`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`
- `sorted = all (uncurry (>=)) . (zip =<< tail)`

Пример 5:

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`
- `sorted = all (uncurry (>=)) . (zip =<< tail)`

Пример 5:

- `minsAndMaxs m = map (\r -> (minimum r, maximum r)) m`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`
- `sorted = all (uncurry (>=)) . (zip =<< tail)`

Пример 5:

- `minsAndMaxs m = map (\r -> (minimum r, maximum r)) m`
- `minsAndMaxs = map (\r -> (minimum r, maximum r))`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`
- `sorted = all (uncurry (>=)) . (zip =<< tail)`

Пример 5:

- `minsAndMaxs m = map (\r -> (minimum r, maximum r)) m`
- `minsAndMaxs = map (\r -> (minimum r, maximum r))`
- `minsAndMaxs = map (\r -> (,) (minimum r) (maximum r))`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`
- `sorted = all (uncurry (>=)) . (zip =<< tail)`

Пример 5:

- `minsAndMaxs m = map (\r -> (minimum r, maximum r)) m`
- `minsAndMaxs = map (\r -> (minimum r, maximum r))`
- `minsAndMaxs = map (\r -> (,) (minimum r) (maximum r))`
- `minsAndMaxs = map (liftM2 (,) minimum maximum)`

Безточково (point-free) програмиране

Пример 4:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) (ap zip tail l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (ap zip tail l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . ap zip tail`
- `sorted = all (uncurry (>=)) . (zip =<< tail)`

Пример 5:

- `minsAndMaxs m = map (\r -> (minimum r, maximum r)) m`
- `minsAndMaxs = map (\r -> (minimum r, maximum r))`
- `minsAndMaxs = map (\r -> (,) (minimum r) (maximum r))`
- `minsAndMaxs = map (liftM2 (,) minimum maximum)`
- `minsAndMaxs = map $ liftM2 (,) minimum maximum`

Разходване на памет при лениво оценяване

Лениво оценяване може да доведе до голям разход на памет.

Разходване на памет при лениво оценяване

Лениво оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`

Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$?

Разходване на памет при лениво оценяване

Лenивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет

Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация

Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ ...

Разходване на памет при лениво оценяване

Лениво оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ ...

В Haskell:

Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ ...

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`

Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ ...

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`
- `f 0` $\longrightarrow$?

Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` ⟶ забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)` ⟶ `(f 1)` ⟶ `(f 0)` ⟶ `(f 1)` ⟶ ...

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`
- `f 0` ⟶ забива с изтичане на памет!

Разходване на памет при лениво оценяване

Лнивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ `(f 0)` $\longrightarrow$ `(f 1)` $\longrightarrow$ ...

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`
- `f 0` $\longrightarrow$ забива с изтичане на памет!
- `f 0` $\longrightarrow$ `f (1-0)` $\longrightarrow$ `f (1-(1-0))` $\longrightarrow$ `f (1-(1-(1-0)))`... $\longrightarrow$

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ `2`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` $\xrightarrow{\hspace{12em}}$ 2

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0` $\longrightarrow$?

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет!

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0` ⟶ забива, но не изразходва памет!
- `f $! x = seq x (f x)`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
    - `second x y = y`
    - `second [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
    - `seq [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
    - `f x = seq x (f (1-x))`
    - `f 0` ⟶ забива, но не изразходва памет!
- `f $! x = seq x $ f x`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` $\xrightarrow{\hspace{10cm}}$ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет!
- `f $! x = seq x $ f x`
  - първо оценява `x` и след това прилага `f` над оценката на `x`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0` ⟶ забива, но не изразходва памет!
- `f $! x = seq x $ f x`
  - първо оценява `x` и след това прилага `f` над оценката на `x`
  - прилага `f` над `x` със стриктно оценяване

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` $\longrightarrow$ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0` $\longrightarrow$ забива, но не изразходва памет!
- `f $! x = seq x $ f x`
  - първо оценява `x` и след това прилага `f` над оценката на `x`
  - прилага `f` над `x` със стриктно оценяване
  - `f x = f $! (1-x)`

Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- **Примери:**
  - `second x y = y`
  - `second [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `seq [1..10^10^10] 2` ⟶ 2
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0` ⟶ забива, но не изразходва памет!
- `f $! x = seq x $ f x`
  - първо оценява `x` и след това прилага `f` над оценката на `x`
  - прилага `f` над `x` със стриктно оценяване
  - `f x = f $! (1-x)`
  - `($!) = ap seq`

Изразходване на памет при foldl

```
foldl (+) 0 [1..4]
```

Изразходване на памет при foldl

```
     foldl (+) 0 [1..4]
⟶   foldl (+) (0 + 1) [2..4]
```

Изразходване на памет при foldl

```
    foldl (+) 0 [1..4]
⟶  foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶  foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
```

Изразходване на памет при foldl

$$
\begin{array}{ll}
 & \texttt{foldl (+) 0 [1..4]} \\
\longrightarrow & \texttt{foldl (+) (0 + 1) [2..4]} \\
\longrightarrow & \texttt{foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]} \\
\longrightarrow & \texttt{foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]}
\end{array}
$$

Изразходване на памет при foldl

```
    foldl (+) 0 [1..4]
⟶  foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶  foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
⟶  foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
⟶  foldl (+) ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) []
```

Изразходване на памет при foldl

```
   foldl (+) 0 [1..4]
⟶ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
⟶ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
⟶ foldl (+) ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) []
⟶ ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
```

Изразходване на памет при foldl

```
   foldl (+) 0 [1..4]
⟶ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
⟶ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
⟶ foldl (+) ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) []
⟶ ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
⟶ (((1 + 2) + 3) + 4)
```

Изразходване на памет при foldl

```
   foldl (+) 0 [1..4]
⟶ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
⟶ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
⟶ foldl (+) ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) []
⟶ ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
⟶ (((1 + 2) + 3) + 4)
⟶ ((3 + 3) + 4)
```

Изразходване на памет при foldl

```
     foldl (+) 0 [1..4]
⟶   foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶   foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
⟶   foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
⟶   foldl (+) ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) []
⟶   ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
⟶   (((1 + 2) + 3) + 4)
⟶   ((3 + 3) + 4)
⟶   (6 + 4)
```

Изразходване на памет при foldl

```
   foldl (+) 0 [1..4]
⟶ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
⟶ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
⟶ foldl (+) ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) []
⟶ ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
⟶ (((1 + 2) + 3) + 4)
⟶ ((3 + 3) + 4)
⟶ (6 + 4)
⟶ 10
```

Изразходване на памет при foldl

```
      foldl (+) 0 [1..4]
⟶    foldl (+) (0 + 1) [2..4]
⟶    foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
⟶    foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
⟶    foldl (+) ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) []
⟶    ((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
⟶    (((1 + 2) + 3) + 4)
⟶    ((3 + 3) + 4)
⟶    (6 + 4)
⟶    10
```

Проблем: Изразходва памет при оценяване, понеже отлага изчисления!

Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
foldl' (+) 0 [1..4]
```

Стриктен вариант на foldl

```
foldl’ _ nv [] = nv
foldl’ op nv (x:xs) = (foldl’ op $! op nv x) xs
```

```
     foldl’ (+) 0 [1..4]
⟶   foldl’ (+) 1 [2..4]
```

Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
      foldl' (+) 0 [1..4]
 ⟶   foldl' (+) 1 [2..4]
 ⟶   foldl' (+) 3 [3..4]
```

Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
     foldl' (+) 0 [1..4]
 ⟶  foldl' (+) 1 [2..4]
 ⟶  foldl' (+) 3 [3..4]
 ⟶  foldl' (+) 6 [4..4]
```

Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
    foldl' (+) 0 [1..4]
⟶  foldl' (+) 1 [2..4]
⟶  foldl' (+) 3 [3..4]
⟶  foldl' (+) 6 [4..4]
⟶  foldl' (+) 10 []
```

Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
      foldl' (+) 0 [1..4]
 ⟶   foldl' (+) 1 [2..4]
 ⟶   foldl' (+) 3 [3..4]
 ⟶   foldl' (+) 6 [4..4]
 ⟶   foldl' (+) 10 []
 ⟶   10
```