Модел на средите и изчислителни процеси

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, 2017/18 г.

19–26 октомври 2017 г.

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- Символите могат да има различни оценки в различни среди.
- При стартиране Scheme по подразбиране работи в **глобалната среда**.
- В глобалната среда са дефинирани символи за стандартни операции и функции.

Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` ⟶ Грешка!
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` ⟶ 8
- `(define (f x) (* x r))`
- `(f 3)` ⟶ 15
- `(f r)` ⟶ 25

E

a : 8

r : 5

f : Параметри : x
Тяло : (* x r)
Среда : **E**

Функции и среди

- Всяка функция `f` пази указател към средата **E**, в която е дефинирана.
- При извикване на `f`:
  - създава се нова среда $\mathbf{E_1}$, която разширява **E**
  - в $\mathbf{E_1}$ всеки символ означаващ формален параметър се свързва с оценката на фактическия параметър
  - тялото на f се оценява в $\mathbf{E_1}$

Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя "родителска среда", която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда **E**
    - първо се търси оценката му в **E**
    - ако символът не е дефиниран в **E**, се преминава към родителската среда
    - при достигане на най-горната среда, ако символът не е дефиниран и в нея се извежда съобщение за грешка

Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`
- **{E}** `(f a)`

  ↓

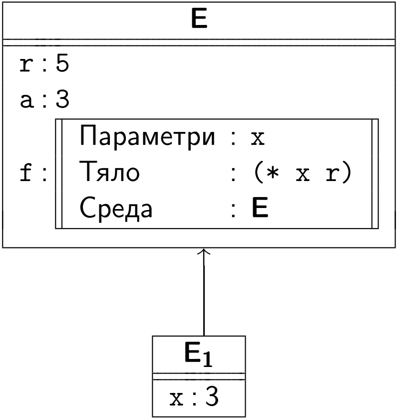
  {E} `(f 3)`

  ↓

  {E$_1$} `(* x r)`

  ↓

  15



E

r : 5

a : 3

f : Параметри : x

Тяло : `(* x r)`

Среда : **E**

E$_1$

x : 3

Какво е рекурсия?

Какво е рекурсия?

Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

Рекурсивна функция: дефинира се чрез себе си

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \qquad \textbf{(база)} \\ n \cdot (n-1)!, & \text{при } n > 0. \qquad \textbf{(стъпка)} \end{cases}$$

- Дава се отговор на най-простата задача (база, дъно)
- Показва се как сложна задача се свежда към една или няколко по-прости задачи от същия вид (стъпка)

Рекурсивни уравнения

Какво означава “да дефинираме функция чрез себе си”?

Да разгледаме *рекурсивното уравнение*, в което F е неизвестно:

$$F(n) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot F(n-1), & \text{при } n > 0. \end{cases}}_{\Gamma(F)(n)}$$

$n!$ е “най-малкото” решение на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

*Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (**най-малка неподвижна точка на** Γ). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща f чрез Γ.*

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Кое е **най-малкото решение** на уравнението $F(x) = 1 + F(x-1)$?

`(define (f x) (+ 1 (f (- x 1))))`

`(f 0)` $\longrightarrow$?

f е “празната функция”, т.е. $\mathrm{dom}(f) = \emptyset$.

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.
Нека `(define (f x) Γ[f])` е рекурсивно дефинирана функция.
Коя е математическата функция f, която се пресмята от `f`?

Денотационна семантика
f е най-малката неподвижна точка на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Операционна семантика
Разглеждаме редицата от последователни оценки на комбинации
`(f a)` $\rightarrow$ `Γ[f][x` $\mapsto$ `a]` $\rightarrow \ldots$
Ако стигнем до елемент `b`, който не е комбинация, то $f(a) := b$.

Функциите в Scheme имат дуален, но еквивалентен смисъл:

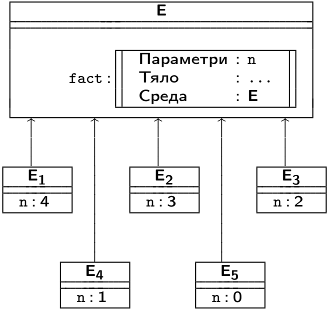
- решения на рекурсивни уравнения
- изчислителни процеси, генериращи се при оценка

Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
↓
(* 4 (* 3 2))
↓
(* 4 6)
↓
24
```

Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}	`(fact 4)`
{E$_1$}	`(* 4 (fact 3))`
{E$_2$}	`(* 4 (* 3 (fact 2)))`
{E$_3$}	`(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))`
{E$_4$}	`(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))`
{E$_4$}	`(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))`
{E$_3$}	`(* 4 (* 3 (* 2 1)))`
{E$_2$}	`(* 4 (* 3 2))`
{E$_1$}	`(* 4 6)`
{E}	24



Линеен рекурсивен процес

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {
  int r = 1;
  for(int i = 1; i <= n; i++)
    r *= i;
  return r;
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))

(define (fact n)
  (for n 1 1))
```

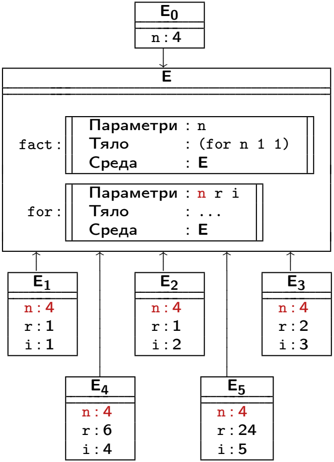
Оценка на итеративен факториел

```
   (fact 4)
       ↓
  (for 4 1 1)
       ↓
  (for 4 1 2)
       ↓
  (for 4 2 3)
       ↓
  (for 4 6 4)
       ↓
 (for 4 24 5)
       ↓
      24
```

Линеен итеративен процес

Оценка на итеративен факториел със среди

$\{\mathbf{E}\}$	`(fact 4)`
$\{\mathbf{E}_0\}$	`(for 4 1 1)`
$\{\mathbf{E}_1\}$	`(for 4 1 2)`
$\{\mathbf{E}_2\}$	`(for 4 2 3)`
$\{\mathbf{E}_3\}$	`(for 4 6 4)`
$\{\mathbf{E}_4\}$	`(for 4 24 5)`
$\{\mathbf{E}_5\}$	24



Рекурсивен и итеративен процес

```
(fact 4)
   ↓
(* 4 (fact 3))
   ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
   ↓
(* 4 (* 3 2))
   ↓
(* 4 6)
   ↓
24
```

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

```
(fact 4)
   ↓
(for 4 1 1)
   ↓
(for 4 1 2)
   ↓
(for 4 2 3)
   ↓
(for 4 6 4)
   ↓
(for 4 24 5)
   ↓
24
```

```
(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))

(define (fact n)
  (for n 1 1))
```

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли
- В Scheme опашковата рекурсия по стандарт се интерпретира като цикъл
    - т.е. не се заделя памет за всяко рекурсивно извикване

Рекурсивен и итеративен процес

```
(fact 4)
   ↓
(* 4 (fact 3))
   ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
   ↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
   ↓
(* 4 (* 3 2))
   ↓
(* 4 6)
   ↓
24
```

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

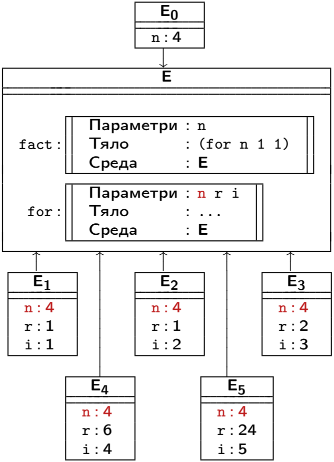
```
(fact 4)
   ↓
(for 4 1 1)
   ↓
(for 4 1 2)
   ↓
(for 4 2 3)
   ↓
(for 4 6 4)
   ↓
(for 4 24 5)
   ↓
24
```

```
(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))

(define (fact n)
  (for n 1 1))
```

Оценка на итеративен факториел със среди

{E}	`(fact 4)`
	↓
{E$_0$}	`(for 4 1 1)`
	↓
{E$_1$}	`(for 4 1 2)`
	↓
{E$_2$}	`(for 4 2 3)`
	↓
{E$_3$}	`(for 4 6 4)`
	↓
{E$_4$}	`(for 4 24 5)`
	↓
{E$_5$}	24



E$_0$
n : 4

E
fact : Параметри : n
Тяло : (for n 1 1)
Среда : **E**
for : Параметри : n r i
Тяло : ...
Среда : **E**

E$_1$
n : 4
r : 1
i : 1

E$_2$
n : 4
r : 1
i : 2

E$_3$
n : 4
r : 2
i : 3

E$_4$
n : 4
r : 6
i : 4

E$_5$
n : 4
r : 24
i : 5

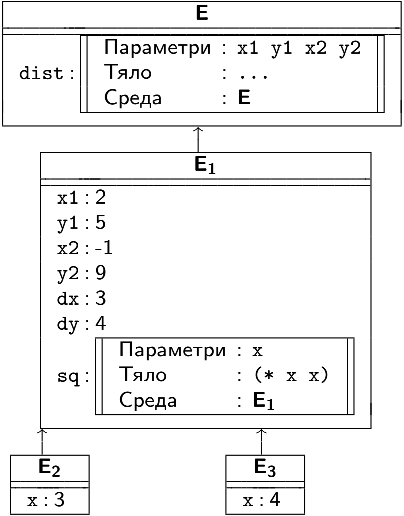
Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър}) {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на <функция> първо се оценяват всички <дефиниция> и след това се оценява <тяло>
- Вложените дефиниции се оценяват и записват в средата, която се **оценява** функцията, а не в средата, в която е **дефинирана**
- **Пример:**

```scheme
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (define dx (- x2 x1))
  (define dy (- y2 y1))
  (define (sq x) (* x x))
  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
```

Оценка на вложени функции

$\{\mathbf{E}\}$	`(dist 2 5 -1 9)`
	↓
$\{\mathbf{E}_1\}$	`(define dx (- x2 x1))`
$\{\mathbf{E}_1\}$	`(define dy (- y2 y1))`
$\{\mathbf{E}_1\}$	`(define (sq x) (* x x))`
$\{\mathbf{E}_1\}$	`(sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))`
	↓
$\{\mathbf{E}_2\}$	`(sqrt (+ (* x x) (sq dy)))`
	↓
$\{\mathbf{E}_3\}$	`(sqrt (+ 9 (* x x)))`
	↓
$\{\mathbf{E}_1\}$	`(sqrt (+ 9 16))`
	↓
$\{\mathbf{E}_1\}$	`(sqrt 25)`
	↓
$\{\mathbf{E}_1\}$	`5`



E

dist : Параметри : `x1 y1 x2 y2`; Тяло : `...`; Среда : **E**

$\mathbf{E}_1$

`x1` : 2

`y1` : 5

`x2` : -1

`y2` : 9

`dx` : 3

`dy` : 4

sq : Параметри : `x`; Тяло : `(* x x)`; Среда : $\mathbf{E}_1$

$\mathbf{E}_2$

`x` : 3

$\mathbf{E}_3$

`x` : 4

Вложена помощна итеративна функция

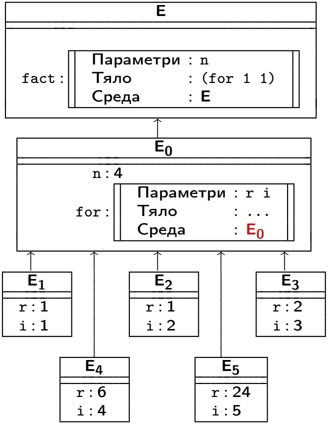
При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

```
(define (fact n)
  (define (for r i)
    (if (<= i n)
        (for (* r i) (+ i 1))
        r))
  (for 1 1))
```

Вложените дефиниции "виждат" символите на обхващащите им дефиниции.

Оценка на итеративен факториел с вложена функция

{**E**}	`(fact 4)`
	↓
{$\mathbf{E}_0$}	`(for 1 1)`
	↓
{$\mathbf{E}_1$}	`(for 1 2)`
	↓
{$\mathbf{E}_2$}	`(for 2 3)`
	↓
{$\mathbf{E}_3$}	`(for 6 4)`
	↓
{$\mathbf{E}_4$}	`(for 24 5)`
	↓
{$\mathbf{E}_5$}	24



E

`fact` : Параметри : `n`
Тяло : `(for 1 1)`
Среда : **E**

$\mathbf{E}_0$

`n` : 4

`for` : Параметри : `r i`
Тяло : `...`
Среда : $\mathbf{E}_0$

$\mathbf{E}_1$: `r` : 1, `i` : 1

$\mathbf{E}_2$: `r` : 1, `i` : 2

$\mathbf{E}_3$: `r` : 2, `i` : 3

$\mathbf{E}_4$: `r` : 6, `i` : 4

$\mathbf{E}_5$: `r` : 24, `i` : 5

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- (let (($<$символ$_1$$>$ $<$израз$_1$$>$)

  ($<$символ$_2$$>$ $<$израз$_2$$>$)

  ...

  ($<$символ$_n$$>$ $<$израз$_n$$>$))

  $<$тяло$>$)
- При оценка на `let` в среда **E**:
  - Създава се нова среда **E$_1$** разширение на текущата среда **E**
  - Оценката на $<$израз$_1$$>$ в **E** се свързва със $<$символ$_1$$>$ в **E$_1$**
  - Оценката на $<$израз$_2$$>$ в **E** се свързва със $<$символ$_2$$>$ в **E$_1$**
  - ...
  - Оценката на $<$израз$_n$$>$ в **E** се свързва със $<$символ$_n$$>$ в **E$_1$**
  - Връща се оценката на $<$тяло$>$ в средата **E$_1$**
- `let` няма странични ефекти върху средата!
  - за разлика от `define`

Пример за let

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))

(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let ((a (dist x1 y1 x2 y2))
        (b (dist x2 y2 x3 y3))
        (c (dist x3 y3 x1 y1))
        (p (/ (+ a b c) 2)))
   (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

Оценка на `let`

{E} `(dist 2 5 -1 9)`

↓

{E₁}

```
(let ((dx (- x2 x1))
      (dy (- y2 y1)))
  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
```

↓

{E₂} `(sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))`

↓

{E₃} `(sqrt (+ (* x x) (sq dy)))`

↓

{E₄} `(sqrt (+ 9 (* x x)))`

↓

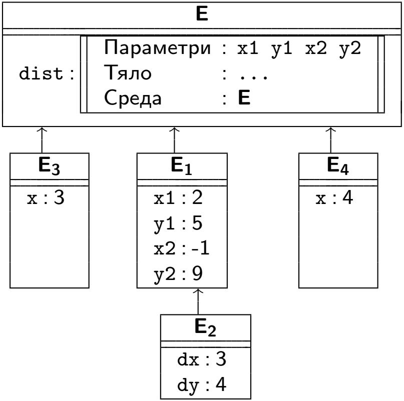
{E₂} `(sqrt (+ 9 16))`

↓

{E₂} `(sqrt 25)`

↓

{E₂} `5`



E

dist : Параметри : x1 y1 x2 y2
Тяло : ...
Среда : **E**

E₃
x : 3

E₁
x1 : 2
y1 : 5
x2 : -1
y2 : 9

E₄
x : 4

E₂
dx : 3
dy : 4

Специална форма let*

- (let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)
- (let* ((<символ$_1$> <израз$_1$>)
    (<символ$_2$> <израз$_2$>)
    ...
    (<символ$_n$> <израз$_n$>))
  <тяло>)
- При оценка на `let*` в среда **E**:
  - Създава се нова среда **E$_1$** разширение на текущата среда **E**
  - Оценката на <израз$_1$> в **E** се свързва със <символ$_1$> в **E$_1$**
  - Създава се нова среда **E$_2$** разширение на текущата среда **E$_1$**
  - Оценката на <израз$_2$> в **E$_1$** се свързва със <символ$_2$> в **E$_2$**
  - ...
  - Създава се нова среда **E$_n$** разширение на текущата среда **E$_{n-1}$**
  - Оценката на <израз$_n$> в **E$_{n-1}$** се свързва със <символ$_n$> в **E$_n$**
  - Връща се оценката на <тяло> в средата **E$_n$**

Пример за let*

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1))
         (p (/ (+ a b c) 2)))
   (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((p (/ (+ a b c) 2))
         (a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1)))
   (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

Оценка на let*

{E} `(dist 2 5 -1 9)`

↓

{E_1}
```
(let* ((dx (- x2 x1))
       (dy (- y2 y1)))
  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
```

↓

{E_3} `(sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))`

↓

{E_4} `(sqrt (+ (* x x) (sq dy)))`

↓

{E_5} `(sqrt (+ 9 (* x x)))`

↓

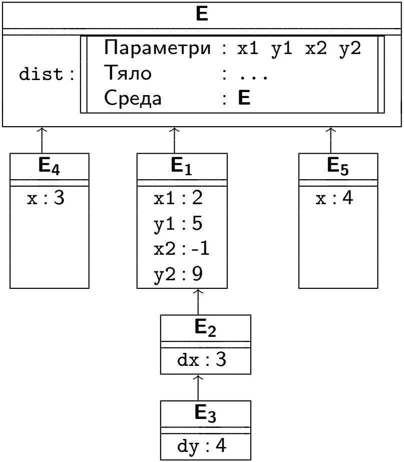
{E_3} `(sqrt (+ 9 16))`

↓

{E_3} `(sqrt 25)`

↓

{E_3} `5`



E

dist : Параметри : x1 y1 x2 y2
Тяло : ...
Среда : **E**

E_4
x : 3

E_1
x1 : 2
y1 : 5
x2 : -1
y2 : 9

E_5
x : 4

E_2
dx : 3

E_3
dy : 4

Степенуване

Функцията x^n може да се дефинира по следния начин:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

```
(define (pow x n)
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (pow x (- n))))
        (else (* x (pow x (- n 1))))))
```

Оценка на степенуване

```
(pow 2 6)
↓
(* 2 (pow 2 5))
↓
(* 2 (* 2 (pow 2 4)))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 8)))
↓
(* 2 (* 2 16))
↓
(* 2 32)
↓
64
```

Линеен рекурсивен процес

Бързо степенуване

Алтернативна дефиниция на x^n:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ (x^{\frac{n}{2}})^2, & \text{ако } n > 0, n \text{ — четно}, \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0, n \text{ — нечетно}. \end{cases}$$

```
(define (qpow x n)
  (define (sqr x) (* x x))
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (qpow x (- n))))
        ((even? n) (sqr (qpow x (quotient n 2))))
        (else (* x (qpow x (- n 1))))))
```

Оценка на бързо степенуване

```
(qpow 2 6)
↓
(sqr (qpow 2 3))
↓
(sqr (* 2 (qpow 2 2)))
↓
(sqr (* 2 (sqr (qpow 2 1))))
↓
(sqr (* 2 (sqr (* 2 (qpow 2 0)))))
↓
(sqr (* 2 (sqr (* 2 1))))
↓
(sqr (* 2 (sqr 2)))
↓
(sqr (* 2 4))
↓
(sqr 8)
↓
64
```

Логаритмичен рекурсивен процес

Числа на Фибоначи

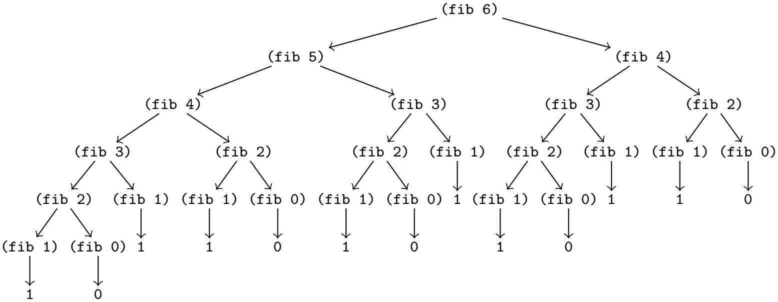
$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

```
(define (fib n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fib (- n 1)) (fib (- n 2))))))
```

$f_{40} =?$

Дървовидна рекурсия



(fib 6)

(fib 5) (fib 4)

(fib 4) (fib 3) (fib 3) (fib 2)

(fib 3) (fib 2) (fib 2) (fib 1) (fib 2) (fib 1) (fib 1) (fib 0)

(fib 2) (fib 1) (fib 1) (fib 0) (fib 1) (fib 0) 1 (fib 1) (fib 0) 1 1 0

(fib 1) (fib 0) 1 1 0 1 0 1 0

1 0

Дървовиден рекурсивен процес

Как да оптимизираме?

Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

За реализацията са нужни странични ефекти.

Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.

Нужно е да помним само последните две числа!

```
(define (fib n)
  (define (iter i fi fi-1)
    (if (= i n) fi
        (iter (+ i 1) (+ fi fi-1) fi)))
  (if (= n 0) 0
      (iter 1 1 0)))
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
    (fib 7)
       ↓
 (iter 1 1 0)
       ↓
 (iter 2 1 1)
       ↓
 (iter 3 2 1)
       ↓
 (iter 4 3 2)
       ↓
 (iter 5 5 3)
       ↓
 (iter 6 8 5)
       ↓
(iter 7 13 8)
       ↓
      13
```