

Кортежи и списъци

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, 2017/18 г.

14 декември 2017 г. – 4 януари 2018 г.

Кортежи (tuples)

Кортежите са наредени n -торки от данни от произволен тип.

- **Примери:** $(1, 2)$, $(3.5, 'A', \text{False})$,
 $((\text{"square"}, (\sim 2)), 1.0)$
- Тип кортеж от n елемента: (t_1, t_2, \dots, t_n)
- Стойности: наредени n -торки от вида (x_1, x_2, \dots, x_n) , където x_i е от тип t_i
- Позволяват “пакетиране” на няколко стойности в една
- Операции за наредени двойки:
 - $(,) :: a \rightarrow b \rightarrow (a, b)$ — конструиране на наредена двойка
 - `fst` $:: (a, b) \rightarrow a$ — първа компонента на наредена двойка
 - `snd` $:: (a, b) \rightarrow b$ — втора компонента на наредена двойка

Потребителски типове

- Типът (`String`, `Int`) може да означава:
 - име и ЕГН на човек
 - продукт с описание и количество
 - сонет на Шекспир и поредният му номер
- Удобно е да именуваме типовете, за да означаваме смисъла им
- `type` <конструктор> = <тип>
 - конструкторите са идентификатори, започващи с главна буква
- Примери:
 - `type Student = (String, Int, Double)`
 - `type Point = (Double, Double)`
 - `type Triangle = (Point, Point, Point)`
 - `type Translation = Point -> Point`
 - `type Vector = Point`
 - `addVectors :: Vector -> Vector -> Vector`
 - `addVectors v1 v2 = (fst v1 + fst v2, snd v1 + snd v2)`

Особености на кортежите

- `fst` $(1,2,3) \rightarrow$ **Грешка!**
 - `fst` и `snd` работят само над наредени двойки!
- $((a,b),c) \neq (a,(b,c)) \neq (a,b,c)$
- Няма специален тип кортеж от един елемент...
- ...но има тип “празен кортеж” $()$ с единствен елемент $()$
 - в други езици такъв тип се нарича `unit`
 - използва се за означаване на липса на информация

Образци на кортежи

Образец на кортеж е конструкция от вида (p_1, p_2, \dots, p_n) .

Пасва на всеки кортеж от точно n елемента (x_1, x_2, \dots, x_n) , за който образецът p_i пасва на елемента x_i .

- `addVectors (x1, y1) (x2, y2) = (x1 + x2, y1 + y2)`
- `fst (x, _) = x`
- `snd (_, y) = y`
- `getFN :: Student -> Int`
- `getFN (_, fn, _) = fn`
- образците на кортежи могат да се използват за “разглобяване” на кортежи при дефиниция
- `(x,y) = (3.5, 7.8)`
- `let (_, fn, grade) = student in (fn, min (grade + 1) 6)`

Именувани образци

- намиране на студент с по-висока оценка

```
betterStudent (name1, fn1, grade1) (name2, fn2, grade2)  
  | grade1 > grade2 = (name1, fn1, grade1)  
  | otherwise      = (name2, fn2, grade2)
```

- ами ако имаме 10 полета?
- удобно е да използваме **именувани образци**
- <име>@<образец>

```
betterStudent s1@(_, _, grade1) s2@(_, _, grade2)  
  | grade1 > grade2 = s1  
  | otherwise      = s2
```

Списъци

Дефиниция

- ❶ Празният списък $[]$ е списък от тип $[a]$
 - ❷ Ако h е елемент от тип a и t е списък от тип $[a]$ то $(h : t)$ е списък от тип $[a]$
 - h — глава на списъка
 - t — опашка на списъка
-
- списъкът е последователност с **произволна дължина** от елементи от **еднакъв тип**
 - $(:)$:: $a \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ е **дясноасоциативна** бинарна операция
 - $(1:(2:(3:(4:[])))) = 1:2:3:4:[] \neq (((((1:2):3):4):[]))$
 - $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ е по-удобен запис за $a_1:(a_2:\dots(a_n:[])\dots)$
 - $[1,2,3,4] = 1:[2,3,4] = 1:2:[3,4] = 1:2:3:[4] = 1:2:3:4:[]$

Примери

- $[False] :: [Bool]$
- $["Иван", 4.5] :: \perp$
- $[1]:2 :: \perp$
- $[[1,2],[3],[4,5,6]] :: [[Int]]$
- $([1,2],[3],[4,5,6]) :: ([Int],[Int],[Int])$
- $[(1,2),(3),(4,5,6)] :: \perp$
- $((1,2),(3),(4,5,6)) :: ((Int,Int),Int,(Int,Int,Int))$
- $[[[]]] :: [[a]]$
- $[]:[] :: [[a]]$
- $[1]:[[]] :: [[Int]]$
- $[]:[1] :: \perp$
- $[[1,2,3],[]] :: [[Int]]$
- $[[1,2,3],[[]]] :: \perp$
- $[1,2,3]:[4,5,6]:[[]] :: [[Int]]$

Низове

- В Haskell низовете са представени като списъци от символи
- `type String = [Char]`
- Всички операции над списъци важат и над низове
- **Примери:**
 - `['H', 'e', 'l', 'l', 'o'] = "Hello"`
 - `'H': 'e': 'l': 'l': 'o': [] = "Hello"`
 - `'H': 'e': "llo" = "Hello"`
 - `"" = [] :: [Char]`
 - `[[1,2,3], ""] :: ⊥`
 - `["12", ['3'], []] :: [String]`

Основни функции за списъци

- `head :: [a] -> a` — връща главата на (непразен) списък
 - `head [[1,2],[3,4]]` \rightarrow `[1,2]`
 - `head []` \rightarrow **Грешка!**
- `tail :: [a] -> [a]` — връща опашката на (непразен) списък
 - `tail [[1,2],[3,4]]` \rightarrow `[[3,4]]`
 - `tail []` \rightarrow **Грешка!**
- `null :: [a] -> Bool` — проверява дали списък е празен
- `length :: [a] -> Int` — дължина на списък

Генератори на списъци

Можем да генерираме списъци от последователни елементи

- $[a..b] \rightarrow [a, a+1, a+2, \dots, b]$
- Пример: $[1..5] \rightarrow [1, 2, 3, 4, 5]$
- Пример: $['a'..'e'] \rightarrow \text{"abcde"}$
- Синтактична захар за `enumFromTo from to`
- $[a, a + \Delta x .. b] \rightarrow [a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, b']$, където b' е най-голямото число $\leq b$, за което $b' = a + k\Delta x$
- Пример: $[1, 4..15] \rightarrow [1, 4, 7, 10, 13]$
- Пример: $['a', 'e'..'z'] \rightarrow \text{"aeimquy"}$
- Синтактична захар за `enumFromThenTo from then to`

Рекурсивни функции над списъци

- $(++) :: [a] \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ — слепва два списъка
 - $[1..3] ++ [5..7] \rightarrow [1,2,3,5,6,7]$
- $a ++ b = \text{if null } a \text{ then } b \text{ else head } a : \text{tail } a ++ b$
- $\text{reverse} :: [a] \rightarrow [a]$ — обръща списък
 - $\text{reverse } [1..5] \rightarrow [5,4,3,2,1]$

```
reverse a
| null a      = a
| otherwise = reverse (tail a) ++ [head a]
```

- $(!!) :: [a] \rightarrow \text{Int} \rightarrow a$ — елемент с пореден номер (от 0)
 - $\text{"Haskell"} !! 2 \rightarrow \text{'s'}$
- $\text{elem} :: \text{Eq } a \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow \text{Bool}$ — проверка за принадлежност на елемент към списък
 - $3 \text{ 'elem' } [1..5] \rightarrow \text{True}$

Образци и списъци

Много удобно е да използваме образци на списъци:

- $p_h:p_t$ — пасва на всеки непразен списък l , за който:
 - образецът p_h пасва на главата на l
 - образецът p_t пасва на опашката на l
- **Внимание:** обикновено слагаме скоби $(h:t)$, понеже операцията $:$ е с много нисък приоритет
- $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ — пасва на всеки списък от точно n елемента $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, за който образецът p_i пасва на елемента x_i
- **Примери:**
 - `head (h:_) = h`
 - `tail (_,t) = t`
 - `null [] = True`
 - `null _ = False`
 - `length [] = 0`
 - `length (_,t) = 1 + length t`

Случаи по образци (case)

- `case` <израз> `of` { <образец> `->` <израз> }⁺
- `case` <израз> `of` <образец₁> `->` <израз₁>
...
 <образец_n> `->` <израз_n>
- ако <израз> пасва на <образец₁>, връща <израз₁>, иначе:
- ...
- ако <израз> пасва на <образец_n>, връща <израз_n>, иначе:
- **Грешка!**
- Използването на образци в дефиниции всъщност е синтактична захар за конструкцията `case`!
- `case` може да се използва навсякъде, където се очаква израз

Полиморфни функции

Функциите `head`, `tail`, `null`, `length`, `reverse` и операциите `++` и `!!` са **полиморфни**

- работят над списъци с елементи от произволен тип `[t]`
- `t` се нарича **типова променлива**
- свойството се нарича **параметричен типов полиморфизъм**
- подобно на шаблоните в C++
- да не се бърка с **подтипов полиморфизъм**, реализиран с виртуални функции!
- `[]` е **полиморфна константа**

Класове от типове (typeclasses)

Функцията `elem` има специални изисквания към типа на елементите на списъка: трябва да могат да бъдат сравнявани с `==` или `/=`

- `elem :: Eq t => t -> [t] -> Bool`
- `Eq` е **клас от типове**
- `Eq` е класът на тези типове, за които има операции `==` и `/=`
 - можем да си мислим за класовете от типове като за “интерфейси”
- `Eq t` наричаме **класово ограничение** за типа `t` (class constraint)
- множеството от всички класови ограничения наричаме **контекст**
- **инстанция** на клас от типове наричаме всеки тип, за който са реализирани операциите зададени в класа
- инстанции на `Eq` са:
 - `Bool`, `Char`, всички числови типове (`Int`, `Integer`, `Float`, `Double`)
 - списъчните типове `[t]`, за които `t` е инстанция на `Eq`
 - кортежните типове `(t1, ..., tn)`, за които `ti` са инстанции на `Eq`

Стандартни класове

Някои от по-често използваните класове на Haskell:

- **Eq** — типове с равенство
- **Ord** — типове с (линейна) наредба
 - операциите `==`, `/=`, `>=`, `<=`, `<`, `>`
 - специалната функция `compare`, която сравнява два елемента и връща `LT`, `GT` или `EQ` в зависимост от резултата
 - функциите `min` и `max`
- **Show** — типове, чиито елементи могат да бъдат извеждани в низ
 - функция `show :: a -> String`
- **Read** — типове, чиито елементи могат да бъдат въвеждани от низ
 - функция `read :: String -> a`
- **Num** — числови типове
- **Integral** — целочислени типове
- **Floating** — типове с плаваща запетая
- **числата в Haskell са полиморфни константи!**

Отделяне на списъци (list comprehension)

Отделянето на списъци е удобен начин за дефиниране на нови списъци чрез използване на дадени такива

- [<израз> | <генератор> {, <генератор>} {, <условие>}]
- <генератор> е от вида <образец> <- <израз>, където
 - <израз> е от тип списък [a]
 - <образец> пасва на елементи от тип a
- <условие> е произволен израз от тип Bool
- За всеки от елементите генериран от <генератор>, които удовлетворяват **всички** <условие>, пресмята <израз> и натрупва резултатите в списък

Примери за отделяне на списъци

- `[2 * x | x <- [1..5]]` \longrightarrow `[2,4,6,8,10]`
- `[x^2 | x <- [1..10], odd x]` \longrightarrow `[1,9,25,49,81]`
- `[fn | (_, fn, grade) <- students, grade >= 2]`
- `[x^2 + y^2 | (x, y) <- vectors, x >= 0, y >= 0]`
- Ако имаме повече от един генератор, се генерират всички възможни комбинации от елементи (декартово произведение)
- `[x++(' ':y) | x<-["green","blue"],y<-["sky","grass"]]`
 \longrightarrow `["green sky","green grass","blue sky","blue grass"]`
- `[(x,y) | x <- [1,2,3], y <- [5,6,7], x + y <= 8]`
 \longrightarrow `[(1,5),(1,6),(1,7),(2,5),(2,6),(3,5)]`
- **Задача.** Да се генерират всички Питагорови тройки в даден интервал.

Отрязване на списъци

- `init :: [a] -> [a]` — списъка без последния му елемент
 - `init [1..5] → [1,2,3,4]`
- `last :: [a] -> a` — последния елемент на списъка
 - `last "Haskell" → l`
- `take :: Int -> [a] -> [a]` — първите n елемента на списък
 - `take 4 "Hello, world!" → "Hell"`
- `drop :: Int -> [a] -> [a]` — списъка без първите n елемента
 - `drop 2 [1,3..10] → [5,7,9]`
- `splitAt :: Int -> [a] -> ([a],[a])`
 - `splitAt n l = (take n l, drop n l)`

Агрегиращи функции

- `maximum :: Ord a => [a] -> a` — максимален елемент
- `minimum :: Ord a => [a] -> a` — минимален елемент
- `sum :: Num a => [a] -> a` — сума на списък от числа
- `product :: Num a => [a] -> a` — произведение на списък от числа
- `and :: [Bool] -> Bool` — конюнкция на булеви стойности
- `or :: [Bool] -> Bool` — дизюнкция на булеви стойности
- `concat :: [[a]] -> [a]` — конкатенация на списък от списъци
- **Примери:**
 - `[(sum 1, product 1) | 1 <- 11, maximum 1 == 2*minimum 1]`
 - `and [or [mod x k == 0 | x <- row] | row <- matrix]`

λ-функции

- $\backslash \{ \langle \text{параметър} \rangle \}^+ \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $\backslash \langle \text{параметър}_1 \rangle \dots \langle \text{параметър}_n \rangle \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- анонимна функция с n параметъра
- всеки $\langle \text{параметър}_i \rangle$ всъщност е образец
- параметрите са видими само в рамките на $\langle \text{тяло} \rangle$
- **Примери:**
 - $\text{id} = \backslash x \rightarrow x$
 - $\text{const} = \backslash x y \rightarrow x$
 - $(\backslash x \rightarrow 2 * x + 1) 3 \rightarrow 7$
 - $(\backslash x 1 \rightarrow 1 ++ [x]) 4 [1..3] \rightarrow [1,2,3,4]$
 - $(\backslash (x,y) \rightarrow x^2 + y) (3,5) \rightarrow 14$
 - $(\backslash f x \rightarrow f (f x)) (*3) 4 \rightarrow 36$
- отсичането на операции може да се изрази чрез λ-функции:
 - $(\langle \text{операция} \rangle \langle \text{израз} \rangle) = \backslash x \rightarrow x \langle \text{операция} \rangle \langle \text{израз} \rangle$
 - $(\langle \text{израз} \rangle \langle \text{операция} \rangle) = \backslash x \rightarrow \langle \text{израз} \rangle \langle \text{операция} \rangle x$

Свойства на λ -функциите

- $\lambda x_1 x_2 \dots x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff \lambda x_1 \rightarrow \lambda x_2 \rightarrow \dots \lambda x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $f x = \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f = \lambda x \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $f x y = \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f x = \lambda y \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f = \lambda x y \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $f x_1 \dots x_n = \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff f x_1 \dots x_{n-1} = \lambda x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
 $\iff \dots$
 $\iff f = \lambda x_1 \dots x_n \rightarrow \langle \text{тяло} \rangle$
- $\lambda x y \rightarrow f x y$
 $\iff \lambda x \rightarrow f x$
 $\iff f$

Трансформация (map)

- `map :: (a -> b) -> [a] -> [b]`
- `map f l = [f x | x <- l]`
- `map _ [] = []`
- `map f (x:xs) = f x : map f xs`
- **Примери:**
 - `map (^2) [1,2,3] → [1,4,9]`
 - `map (!!1) [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] → [2,5,8]`
 - `map sum [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] → [6,15,24]`
 - `map ("a "++) ["cat","dog","pig"]`
`→ ["a cat","a dog","a pig"]`
 - `map (\f -> f 2) [(^2),(1+),(*3)] → [4,3,6]`

Филтриране (filter)

- `filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`
- `filter p l = [x | x <- l, p x]`
- `filter _ [] = []`
`filter p (x:xs)`
`| p x = x : rest`
`| otherwise = rest`
`where rest = filter p xs`
- **Примери:**
 - `filter odd [1..5] → [1,3,5]`
 - `filter (\f -> f 2 > 3) [(^2),(+1),(*3)] → [(^2),(*3)]`
 - `map (filter even) [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]`
`→ [[2],[4,6],[8]]`
 - `map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)])`
`[[-2,1,0],[1,4,-1],[0,0,1]]`
`→ [[[-2],[0],[1]],[[-1],[1,4]],[[0,0],[1]]]`

Отделяне на списъци с `map` и `filter`

Отделянето на списъци е синтактична захар за `map` и `filter`

- [<израз> | <образец> <- <списък>, <условие>]
 \longleftrightarrow
`map` (\<образец> -> <израз>)
 (`filter` (\<образец> -> <условие>) <списък>)
- [<образец> | <образец> <- <списък>, <условие₁>, <условие₂>]
 \longleftrightarrow
`filter` (\<образец> -> <условие₂>)
 (`filter` (\<образец> -> <условие₁>) <списък>)
- [<израз> | <образец₁> <- <списък₁>, <образец₂> <- <списък₂>]
 \longleftrightarrow
`concat` (`map` (\<образец₁> ->
 `map` (\<образец₂> -> <израз>) <списък₂>)
 <списък₁>)

Дясно свиване (foldr)

- `foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b`
- `foldr op nv [x1, x2, ..., xn] =`
`x1 'op' (x2 'op' ... (xn 'op' nv) ...)`
- `foldr _ nv [] = nv`
`foldr op nv (x:xs) = x 'op' foldr op nv xs`
- **Примери:**
 - `sum = foldr (+) 0`
 - `product = foldr (*) 1`
 - `concat = foldr (++) []`
 - `and = foldr (&&) True`
 - `or = foldr (||) False`
 - `map f = foldr (\x r -> f x : r) []`
 - `filter p = foldr (\x r -> (if p x then (x:) else id) r)`
`[]`

Ляво свиване (foldl)

- `foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b`
- `foldl op nv [x1, x2, ..., xn] =`
`(... ((nv 'op' x1) 'op' x2) ...) 'op' xn`
- `foldl _ nv [] = nv`
`foldl op nv (x:xs) = foldl op (nv 'op' x) xs`
- **Пример:**
 - `flip f x y = f y x`
 - `reverse = foldl (flip (:)) []`

Свиване на непразни списъци (`foldr1` и `foldl1`)

- `foldr1` :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
- `foldr1` op nv $[x_1, x_2, \dots, x_n] =$
 $x_1 \text{ 'op' } (x_2 \text{ 'op' } \dots (x_{n-1} \text{ 'op' } x_n) \dots)$
- `foldr1` _ [x] = x
`foldr1` op (x:xs) = x 'op' `foldr1` op xs
- `foldl1` :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
- `foldl1` op nv $[x_1, x_2, \dots, x_n] =$
 $(\dots ((x_1 \text{ 'op' } x_2) \dots) \text{ 'op' } x_n$
- `foldl1` op (x:xs) = `foldl` op x xs
- **Примери:**
 - `maximum` = `foldr1` max
 - `minimum` = `foldr1` min
 - `last` = `foldl1` (_ x -> x)

Сканиране на списъци (`scanl`, `scanr`)

`scanr` и `scanl` връщат историята на пресмятането на `foldr` и `foldl`

- `scanr` :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> [b]
- `scanr` op nv $[x_1, x_2, \dots, x_n] =$
 $[x_1 \text{ 'op' } (x_2 \text{ 'op' } \dots (x_n \text{ 'op' } nv) \dots),$
 $x_2 \text{ 'op' } (\dots (x_n \text{ 'op' } nv) \dots),$
 \dots
 $x_n \text{ 'op' } nv,$
 $nv]$
- `scanl` :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> [b]
- `scanl` op nv $[x_1, x_2, \dots, x_n] =$
 $[nv,$
 $nv \text{ 'op' } x_1,$
 $(nv \text{ 'op' } x_1) \text{ 'op' } x_2,$
 \dots
 $(\dots ((nv \text{ 'op' } x_1) \text{ 'op' } x_2) \dots) \text{ 'op' } x_n]$

Съшиване на списъци (zip, zipWith)

- **zip** :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
 - **zip** [x₁, x₂, ..., x_n] [y₁, y₂, ..., y_n] → [(x₁, y₁), (x₂, y₂), ..., (x_n, y_n)]
 - ако единият списък е по-къс, спира когато свърши той
- **unzip** :: [(a,b)] -> ([a], [b])
 - разделя списък от двойки на два списъка с равна дължина
 - **unzip** [(x₁,y₁), (x₂,y₂), ..., (x_n,y_n)] → ([x₁, x₂, ..., x_n], [y₁, y₂, ..., y_n])
- **zipWith** :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
 - съшива два списъка с дадена бинарна операция
 - **zipWith** op [x₁, x₂, ..., x_n] [y₁, y₂, ..., y_n] → [x₁ 'op' y₁, x₂ 'op' y₂, ..., x_n 'op' y_n]
- **Примери:**
 - **zip** [1..3] [5..10] → [(1,5), (2,6), (3,7)]
 - **zipWith** (*) [1..3] [5..10] → [5,12,21]
 - **zip** = **zipWith** (,)
 - **unzip** = **foldr** (\(x,y) (xs,ys) -> (x:xs,y:ys)) ([], [])

Разбивания на списъци

- `takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`
 - връща първите елементи на списъка, за които е вярно условието
 - `takeWhile p = foldr (\x r -> if p x then x:r else []) []`
 - `takeWhile (<0) [-3..3] → [-3,-2,-1]`
- `dropWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`
 - премахва първите елементи на списъка, за които е вярно условието
 - `dropWhile (<0) [-3..3] → [0,1,2,3]`
- `span :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])`
 - `span p l = (takeWhile p l, dropWhile p l)`
 - `span (<0) [-3..3] → ([-3,-2,-1], [0,1,2,3])`
- `break :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])`
 - `break p l = (takeWhile q l, dropWhile q l)`
 where `q x = not (p x)`
 - `break (>0) [-3..3] → ([-3,-2,-1,0], [1,2,3])`

Логически квантори (any, all)

- `any :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool`
 - проверява дали предикатът е изпълнен за **някой** елемент от списъка
 - `any p l = or (map p l)`
 - `elem x = any (==x)`
- `all :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool`
 - проверява дали предикатът е изпълнен за **всички** елементи на списъка
 - `all p l = and (map p l)`
 - `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`