

Записки за упражненията по Числени методи,  
СИ, ИС, II курс, зимен семестър, 2015/2016

Тихомир Иванов

9 януари 2016 г.

# Съдържание

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Въведение</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1 Какво представляват числените методи? . . . . .                                       | 3         |
| 1.2 Грешка. Източници на грешка. Представяне на числата в компютъра. . . . .              | 6         |
| <b>2 Интерполяция</b>   | <b>12</b> |
| 2.1 Идея на интерполяцията . . . . .  | 12        |
| 2.2 Интерполяционна задача на Лагранж . . . . .   | 14        |
| 2.3 Интерполяционна формула на Лагранж . . . . .  | 15        |
| 2.4 Интерполяционни базиси . . . . .  | 21        |
| 2.5 Разделени разлики. Интерполяционна формула на Нютон . . . . .                         | 21        |
| 2.6 Някои практически въпроси, свързани с интерполирането с алгебрични полиноми . . . . . | 24        |
| 2.7 Интерполяционна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли. . . . .            | 29        |
| 2.8 Интерполиране с обобщени полиноми. Интерполиране с тригонометрични полиноми. . . . .  | 31        |
| 2.9 Задачи за самостоятелна работа . . . . .  | 37        |
| <b>3 Приближения в линейни нормирани пространства.</b>                                    | <b>38</b> |
| 3.1 Метод на най-малките квадрати . . . . .   | 38        |
| 3.2 Норма и разстояние . . . . .  | 50        |
| 3.3 Задачи за самостоятелна работа . . . . .  | 54        |
| <b>4 Числено диференциране и интегриране</b>  | <b>55</b> |
| 4.1 Интерполяционни квадратурни формули . . . . .   | 55        |
| 4.2 Ортогонални полиноми . . . . .  | 62        |
| 4.3 Квадратурна формула на Гаус . . . . .   | 63        |

# Глава 1

## Въведение

### 1.1 Какво представляват числените методи?

Най-общо казано, числените методи са техники, чрез които математически задачи се представят във вид, в който могат да бъдат решени с помощта на аритметични операции. Въпреки че има много видове числени методи, те имат обща характеристика – изискват голям брой аритметични пресмятания. Ето защо тяхното прилагане става посредством имплементирането им в компютърни програми.

Обикновено числени методи включват **апроксимация** (т.е. приближение) на оригиналната математическа задача. Ето защо голяма част от тях можем да разглеждаме като техники за **приближеното решаване** на дадена математическа задача посредством аритметични операции.

В настоящия курс ще се занимаем с въпросите за приближаването на функции, приближеното пресмятане на производни и интеграли, приближеното на миране на корените на дадено уравнение.

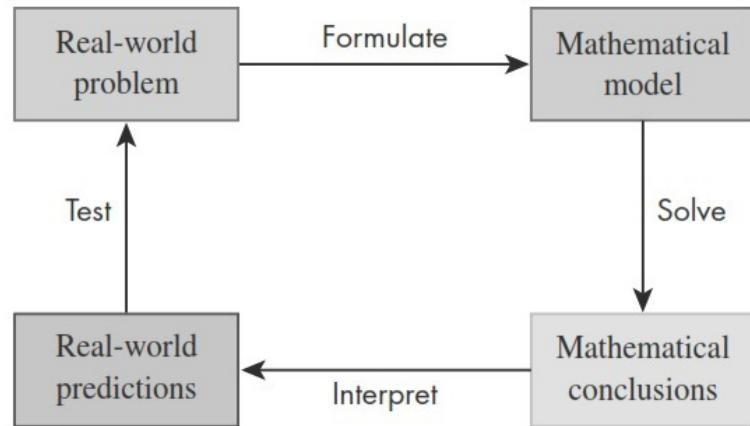
Преди да преминем към разглеждането на конкретни числени методи, нека разгледаме въпроса защо изобщо е необходимо тяхното използване. Математиката е езикът, на който се описват процесите от света около нас. За да изучим даден реален процес или да решим дадена практическа задача, ние трябва да определим кои са основните характеристики, които ги описват – това са някакви величини, които дават информация за съответния процес (например време, скорост, температура, сила, бързодействие на алгоритъм, компресия на данни и др.). Величините се измерват в дадени мерни единици, т.е. им се съпоставят някакви числени стойности. Изучавайки даден процес, ние искаме да изучим зависимостите между величините, които го описват, като за целта създаваме и изследваме математически модел на процеса.

Най-общо казано, **математически модел** е описание на някакъв реален процес или реална задача на езика на математиката. Често това става чрез функция или уравнение (или система от уравнения), много често – диференциално, свързващо величините, описващи процеса. Математическият модел обаче може да представлява и друг математически обект. Например, изследвайки една компютърна мрежа, може да се наложи решаването на задача от теория на графите.

Целта на математическото моделиране е да се опише даденият процес и по-добре да се разберат механизмите, които го обуславят, както и, евентуално,

да се направят компютърни симулации и/или предвиждания за бъдещото му поведение.

Често в литературата се дава следната схема, описваща методологията на математическото моделиране:



Да коментираме накратко етапите, описани в нея.

1. Имайки някаква реална задача, първото, което трябва да направим, е да **формулираме математически модел**, който да я описва. За целта трябва да определим основните величини, които характеризират процеса (от гледна точка на математиката – променливи и параметри), и да съставим математическата задача, която ги свързва (например диференциално уравнение, оптимизационна задача и др.). Важно е да се има предвид, че **всеки математически модел е една абстракция, идеализация на реалния процес**. В него трябва да има баланс – от една страна, моделът трябва достатъчно подробно да описва процеса, така че резултатите от него да бъдат полезни, но, от друга страна, трябва да е достатъчно прост, за да позволява математическо изследване. Всеки модел се базира на някакви допускания (абстракции), които позволяват опростяването на реалната ситуация. При създаването на математически модел използваме физически закони, обуславящи процеса, и математически техники, за да получим уравнения (или други обекти), свързващи променливите. В ситуации, когато не са известни физически закони, които да ни ръководят, може да е необходимо да се съберат данни от експерименти, на базата на които да се състави математическият модел.
2. Имайки предвид, че математическият модел на един процес представлява математическа задача, **вторият етап е да решим тази задача** и да получим математически заключения. **В настоящия курс ние ще разгледаме именно техники, които ще можем да използваме в този етап**. Важно е да се отбележи, че практическите задачи водят твърде често до математически задачи, които не могат да бъдат решени със стандартните аналитични техники. Както знаем, дори просто изглеждащи алгебрични уравнения като полиномиалните уравнения от пета и по-висока степен в общия случай не могат да бъдат решени точно. Същото се отнася

за повечето определени интеграли и др. Въпреки това обаче съществуват техники за тяхното **приближено решаване** и именно с такива ще се запознаем в курса по Числени методи.

3. След като сме решили (в някакъв смисъл) математическата задача, **следва да интерпретираме резултатите от гледна точка на реалния процес**.
4. Да обърнем внимание, че резултатите за реалния процес, които получихме, са следствие на математическия модел, а не на самия процес. От друга страна, казахме, че математическият модел е една абстракция на реалния процес, т.е. може и да не го описва достатъчно добре. Затова е необходимо да направим **проверка дали тези резултати съответстват на реалността**. Ако това е така, можем да считаме, че моделът ни е удачен. В противен случай се връщаме в началото и трябва да модифицираме модела така, че той да отразява действителността по-добре. С други думи, математическото моделиране е един **итеративен процес**.

Основни теми, които ще бъдат застъпени в курса, са:

1. Приближаване на функции – функциите са основен математически обект и затова ние ще посветим голяма част от курса именно на въпроса за тяхното приближаване.
2. Приближаване на производни – **производната на една функция описва скоростта на изменение на функцията в дадена точка**. Тя е основна характеристика на една функция. Затова ние ще се занимаем с въпроса за тяхното апроксимиране.
3. Приближаване на интеграли – интегрирането е основно действие в математиката. От друга страна, повечето интеграли не могат да бъдат решени точно. Ето защо методите за тяхното приближено пресмятане с достатъчно висока точност са от много голяма важност.
4. Приближено решаване на алгебрични уравнения.

В заключение да отбележим няколко причини за изучаването на числени методи:

- Числените методи са много мощни средства за решаването на реални задачи. С тяхна помощ е възможно решаването на големи системи уравнения, справянето с нелинейности и сложни геометрии, които са присъщи за задачите от практиката и към които често е невъзможно да се подходи аналитично.
- Често в практиката се налага използването на готови софтуерни продукти, чието действие се базира на дадени числени методи. Интелигентното използване на тези продукти изисква познаването на основната теория, обуславяща съответните числени методи.
- Невинаги готовите софтуерни продукти са достатъчни за решаването на дадена практическа задача. В тези случаи познаването на основната теория в областта на числените методи ни позволява проектирането и направата на собствени програми.

## 1.2 Грешка. Източници на грешка. Представяне на числата в компютъра.

Както отбелязахме, повечето численни методи включват някаква апроксимация. Ето защо разбирането на идеята за грешка е от много голяма важност за ефективното им използване. Нека първо дадем следните дефиниции:

**Дефиниция 1.** *Абсолютна грешка* наричаме разликата между точната и приближената стойност при дадена апроксимация:

$$\varepsilon_a := \text{exact value} - \text{approximation}.$$

**Дефиниция 2.** *Относителна грешка* дефинираме по следния начин:

$$\varepsilon_r := \frac{\text{exact value} - \text{approximation}}{\text{exact value}} = \frac{\varepsilon_a}{\text{exact value}}.$$

Основните източници на грешка при решаването на една практическа задача са следните:

- Математическият модел – както казахме, математическият модел сам по себе си е една апроксимация на реалността, с други думи самото му съставяне въвежда грешка по отношение на реалния процес.
- Грешка от численния метод – обикновено числените методи се базират на някаква апроксимация, т.е. въвеждат някаква грешка. Тъй като ние на практика не знаем точното решение на съответната математическа задача, обикновено е невъзможно да намерим каква е грешката при въпросната апроксимация. От друга страна, за да разберем дали даден числен метод е приложим, или не, ние трябва да знаем с каква точност той ще реши съответната задача. Затова се налага да се правят оценки на грешката, например да се намери някаква стойност, която тя със сигурност не надминава, или да се определи нейният порядък. Така, при изучаването на различните численни методи в настоящия курс, ние най-често ще се спирате на два основни момента:
  - описание на самия метод;
  - начини за оценка на грешката.
- Грешки от закръгляване – те са свързани с начина, по който числата се представят в компютъра. Ще се спрем по-подробно на този вид грешка в настоящия параграф.
- Грешки от входните данни – математическите модели обикновено зависят от някакви параметри, стойностите на които се определят чрез провеждането на експерименти, правенето на измервания. Дори и най-съвършената техника позволява измерване с определена точност, т.е. стойностите на измерените величини, с които работим, също носят определена грешка.

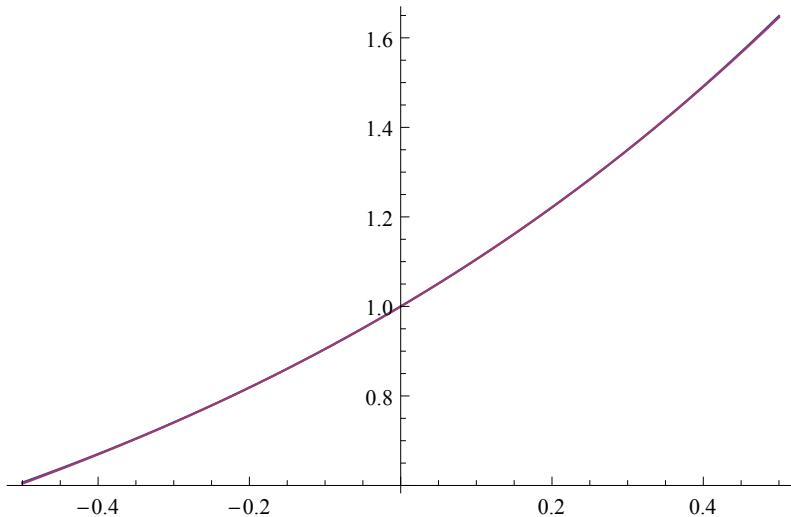
**Задача 1.** Постройте в една координатна система графиките на функциите

$$f(x) = e^x \text{ и } g(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.1667x^3$$

в интервала  $[-0.5, 0.5]$ . Постройте в същия интервал графиките на абсолютната и относителната грешка, които се получават при приближаването на  $f(x)$  с  $g(x)$ , като функции на  $x$ .

*Решение.* Първо построяваме съответните графики, използвайки СКА Mathematica:

```
Plot[{E^x, 1+x+0.5x^2+0.1667x^3}, {x, -0.5, 0.5}]
```

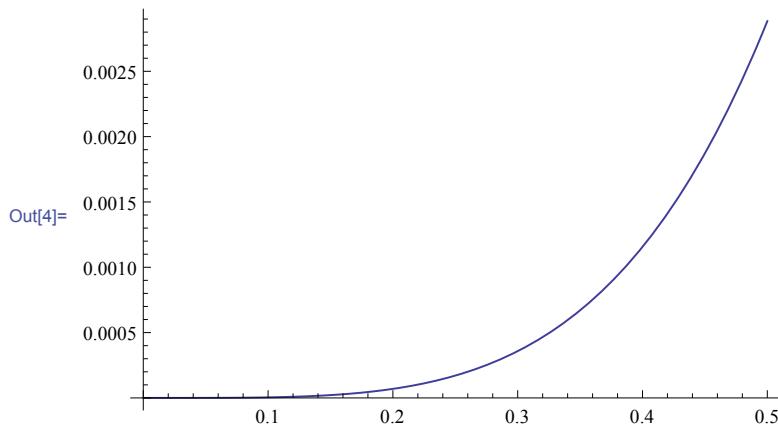


Визуално двете графики изглежда, че съвпадат. Това, което постигаме е, че експоненциалната функция, стойността на която не е лесно да се пресметне, сме приближили с алгебричен полином.

Абсолютната грешка, според Дефиниция 1, е

$$\varepsilon_a(x) = f(x) - g(x) = e^x - (1 + x + 0.5x^2 + 0.1667x^3).$$

```
In[4]:= Plot[E^x - 1 - x - 0.5x^2 - 0.1667x^3, {x, 0, 0.5}, PlotRange->All]
```

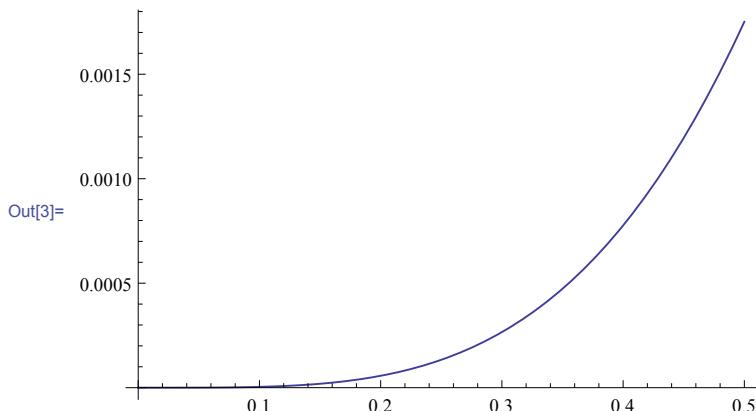


От графиката виждаме, че функцията  $g(x)$  приближава сравнително добре функцията  $f(x)$  в дадения интервал. Разбира се, дали точността на приближенietо е достатъчно добра, зависи от конкретния контекст, в който се разглежда задачата.

За относителната грешка, според Дефиниция 2, имаме

$$\varepsilon_r(x) = \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = \frac{e^x - (1 + x + 0.5x^2 + 0.1667x^3)}{e^x}.$$

```
In[3]:= Plot[(E^x - 1 - x - 0.5x^2 - 0.16667x^3)/E^x, {x, 0, 0.5}, PlotRange->All]
```



От последната графика виждаме, че относителната грешка в разглежданния интервал не надминава 0.2%.  $\square$

Сега ще се спрем на грешката от закръгляване. Причината за нея, както казахме, е начинът, по който числата се представят в компютъра. По-точно, ще се занимаем с т.нар. числа с плаваща точка (floating-point). При този подход числото се представя чрез дробна част, наречена **мантиса**, и цяло число, което се нарича **експонента** или характеристика по следния начин:

$$m.b^e,$$

където  $m$  е мантисата,  $b$  е основата на бройната система, в която работим (в компютъра  $b = 2$ ),  $e$  – експонентата. Например  $156.78 = 0.15678 \times 10^3$  е представянето във вид на число с плаваща точка на числото 156.78 в десетична бройна система. Да обърнем внимание, че обикновено дробната част се нормализира, така че първият знак след десетичната точка да бъде различен от нула.

Предимството на числата с плаваща точка е, че те позволяват представянето както на дроби, така и на много големи числа. От друга страна обаче, се появява т.нар. грешка от закръгляване, тъй като мантисата може да съдържа само краен брой значещи цифри. В компютъра, с  $t$ -битова дума могат да се представят най-много  $2^t$  различни реални числа. Очевидно има безброй много числа, които не могат да бъдат представени точно. За тяхното представяне се използва най-близкото число, което може да се представи точно. По този начин въвеждаме грешка от закръгляване. Нещо повече, тъй като има максимално (по абсолютна стойност) число, то при опит да запишем число, което има поголяма стойност, получаваме т.нар грешка “overflow”. Освен това, по аналогична причина, не можем да представяме много малки по абсолютна стойност числа (т.е. близки до нулата). Опитът за записването на такова число води до грешка “underflow”. Нека отбележим, че някои компютри заместват “underflow” с нула.

За да илюстрираме ефектите от грешките от закръгляване, нека разгледдаме един хипотетичен компютър, който използва десетична бройна система

и представя числата с плаваща точка чрез 1-цифрена експонента със знак и 3-цифрена мантиса.

Най-малкото положително число, което можем да представим в този компютър, е  $0.100 \times 10^{-9}$ , а следващото по големина число е  $0.101 \times 10^{-9}$ . Всяко друго число между тези две трябва да бъде апроксимирано. Това ни дава максимална грешка от закръгляване  $0.5 \times 10^{-12}$ .

Най-голямото число, което можем да представим, е  $0.999 \times 10^9$ , докато следващото по-малко число е  $0.998 \times 10^9$ , което дава максимална грешка  $0.5 \times 10^6$ .

Вижда се, че грешката съществено зависи от големината на числата, които априксимираме. Затова е по-смислено да говорим за относителната вместо за абсолютната грешка. Може да се покаже, че тя е под  $5 \times 10^{-3}$ , т.е. под 0.5%. Да разгледаме следния пример, който ще ни покаже защо относителната грешка е по-добрый показател за точността на приближението. Ясно е, че абсолютна грешка, равна на 1, при число от порядъка на  $10^8$  е, по принцип, много по-пренебрежима, отколкото грешка от 0.001 при число от порядъка на  $10^{-2}$ . Относителните грешки в този случай са съответно  $10^{-8}$  и 0.1.

Може да се покаже, че за относителната грешка е в сила

$$|\varepsilon_r| < 0.5 \times 10^{-p},$$

където  $p$  е броят значещи цифри в мантисата. За числа с двойна точност (double)  $p \approx 16$ , а с единична (float) –  $p \approx 7$

Като резултат от грешките от закръгляване, дори фундаменталните асоциативни и дистрибутивни закони на алгебрата може и да не са в сила при числени пресмятания. Да разгледаме следните примери:

- Асоциативност на събирането

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Нека  $a = 0.456 \times 10^{-2}$ ,  $b = 0.123 \times 10^0$ ,  $c = -0.128 \times 10^0$ . Тогава

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= 0.128 \times 10^0 - 0.128 \times 10^0 = 0, \\ a + (b + c) &= 0.456 \times 10^{-2} - 0.500 \times 10^{-2} = -0.440 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Очевидно първият резултат не е верен и причината за това е **събирането на голямо с малко число**. Можем да разгледаме и още по-показателен пример за този проблем – ако съберем  $0.100 \times 10^0$  с  $0.100 \times 10^{-3}$ , резултатът е  $0.100 \times 10^0$ , т.е. все едно не сме извършили събирането!

- Асоциативност на умножението

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

При стойности  $a = 10^{-6}$ ,  $b = 10^{-6}$ ,  $c = 10^8$  лявата страна на асоциативния закон дава верен резултат. При използване на дясната страна обаче, при изчисленията ще се получи “underflow”. Виждаме, че дори при работата с числа, които могат да бъдат представени точно, не сме застраховани от наличието на тази грешка. Следователно **действието на един алгоритъм може да зависи съществено от реда, в който се извършват операциите в него**.

Горните примери ни показват, че всяка аритметична операция, която извършваме, би могла да въведе грешка. Както казахме, числените методи се базират на голям брой аритметични операции, така че това е нещо, което не можем да пренебрегнем при тяхното използване.

За да илюстрираме ефекта на грешките от закръгляване, нека разгледаме следния пример.

**Задача 2.** Даден е алгебричният полином

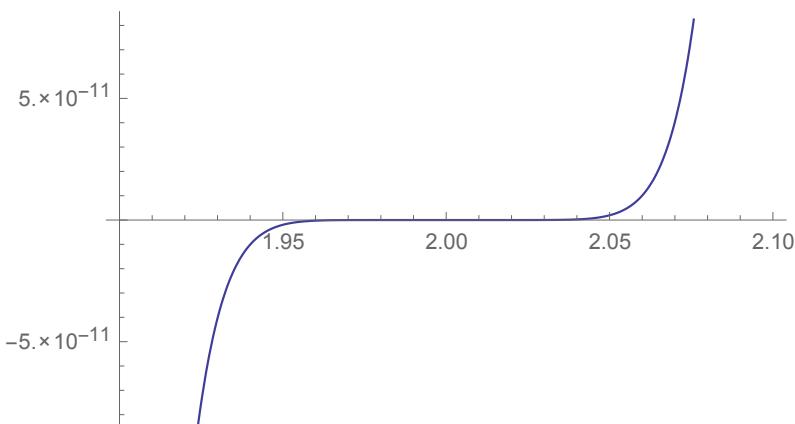
$$p(x) = (x-2)^9 = x^9 - 18x^8 + x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512.$$

Да се построи неговата графика, като за пресмятане на стойностите му в точката  $x$  се използва

a)  $p(x) = (x-2)^9$   
 б)  $p(x) = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512.$

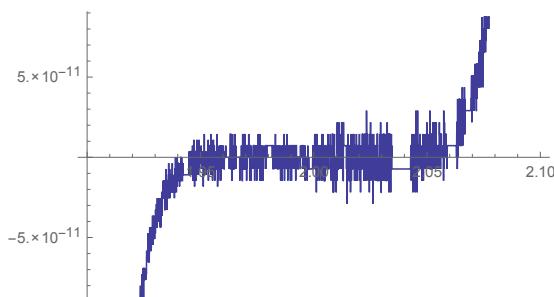
*Решение.* Решението на а) прилагаме по-долу.

```
f[x_]:= (x-2)^9
Plot[f[x],{x,1.9,2.1}]
```



За б) имаме.

```
p[x_]:= -512 + 2304 x - 4608 x^2 + 5376 x^3 - 4032 x^4 + 2016 x^5 - 672 x^6 + 144 x^7 - 18 x^8 + x^9
Plot[p[x],{x,1.9,2.1}]
```



Очевидно във втория случай резултатът е по-лош. Причината е в големия брой аритметични операции, които извършваме при него. Грешките от закръгляване водят до появилия се "шум".  $\square$

Вземайки предвид казаното дотук, **числените методи, които използваме трябва да са такива, че грешките от закръгляване да не водят до драстично изменение на резултата.** Такива методи се наричат **устойчиви.**

# Глава 2

## Интерполяция

### 2.1 Идея на интерполяцията

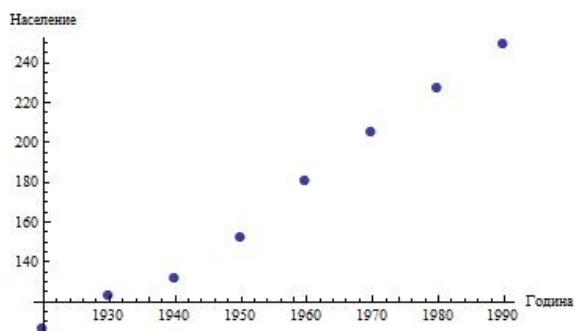
Изучавайки света около нас, ние искаме да намерим зависимости между различни величини. За да се изследва дадено явление или даден процес, е необходимо да се направят експерименти, които да дадат информация за него. След това данните от тези експерименти се използват, за да се създаде математически модел, който ги описва. Нека разгледаме следната задача.

**Задача 3.** В таблицата са дадени данни за населението на САЩ в млн. в периода 1920-1990.

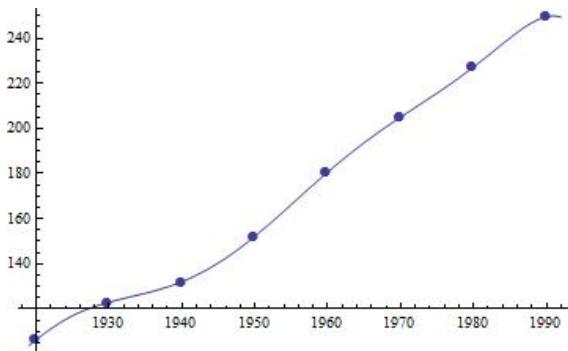
| Година    | 1920   | 1930   | 1940   | 1950   | 1960   | 1970   | 1980   | 1990   |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Население | 106.46 | 123.08 | 132.12 | 152.27 | 180.67 | 205.05 | 227.23 | 249.46 |

Да се намери функция, описваща изменението на населението през този период.

*Коментар по задачата.* В случая търсим зависимост между две величини, а резултатите от измерванията можем да интерпретираме геометрично като точки в равнината.



Тогава един възможен начин да опишем това явление е да намерим функция, чиято графика минава през дадените точки.



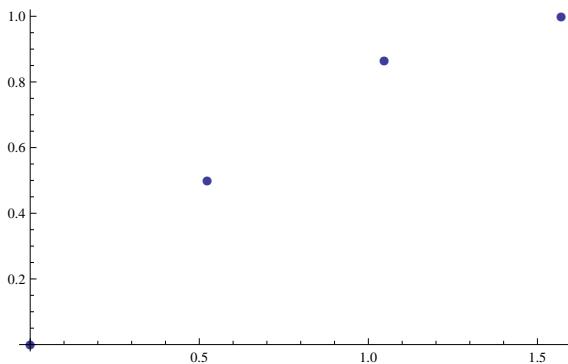
□

Намирането на функция, чиято графика минава през дадени точки, се нарича **интерполяция**.

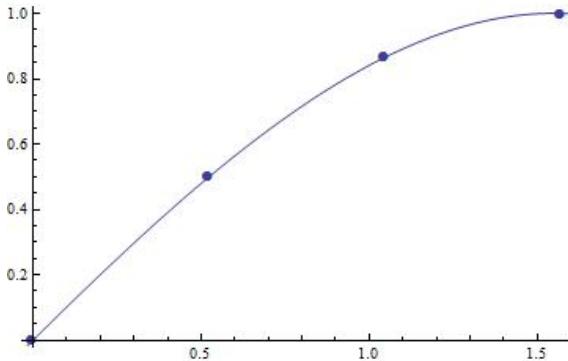
Нека сега разгледаме още една ситуация, в която ще използваме интерполяция. На практика често се налага да се намират стойностите в дадена точка на функции като  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$  и др. Както сами можем да се убедим, в общия случай това не изглежда тривиално. Един възможен подход ще илюстрираме със следващия пример.

**Задача 4.** Да се намери приближение на стойността на функцията  $f(x) = \sin x$  за  $x = \pi/5$ .

*Коментар по задачата.* Оказва се, че можем да сведем тази задача до аналогична на предходната. Стойността на функцията  $f(x) = \sin x$  ни е известна например за  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_3 = \frac{\pi}{2}$  (съответните стойности на  $f(x)$  в тези точки са  $0, 1/2, \sqrt{3}/2, 1$ ). Геометрично тази информация е представена на следващата фигура:



Тогава, ако намерим някаква функция  $g(x)$ , чиято графика да минава през тези точки (и чиято стойност в дадена точка може да бъде лесно пресметната!), ние ще имаме приближение на стойността на  $f(x)$ .



Така ние ще можем да намерим приблизително  $\sin \pi/5$ , като пресметнем  $g(\pi/5)$ . Тук възниква много важният въпрос колко точно ще бъде нашето приближение, т.e. колко ще се отличава неговата стойност от стойността на оригиналната функция. В настоящата глава ще коментираме и него.  $\square$

Изобщо казано, интерполяцията ни позволява да намерим приближение на дадена функция, използвайки стойностите ѝ в дадени точки.<sup>1</sup> И така, в настоящата глава ние ще търсим отговора на следните въпроси:

- Как да намерим функция, чиято графика минава през дадени точки?
- Как да оценим точността на приближението, което сме получили?

## 2.2 Интерполяционна задача на Лагранж

Алгебричните полиноми са функции, чиято стойност в дадена точка може да бъде пресметната лесно (един бърз алгоритъм за целта е например схемата на Хорнер). Ето защо те се явяват добър избор за решаване на задачата, която си поставихме. И така, ние ще търсим алгебричен полином, който минава през дадени точки. Нека сега формулираме точно поставената вече задача.

### Постановка на интерполяционната задача на Лагранж.

Нека  $x_0, x_1, \dots, x_n$  са дадени различни точки от реалната права (възли) и  $y_0, y_1, \dots, y_n$  са дадени реални числа (стойности). Искаме да построим полином  $P(x) \in \pi_n$  ( $\pi_n$  – класът от всички алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща  $n$ ) такъв, че

$$\left| \begin{array}{l} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \cdots \\ P(x_n) = y_n \end{array} \right. \quad (2.1)$$

**Винаги, когато формулираме една математическа задача, много съществен е въпросът за съществуване и единственост на решението.** От гледна точка на програмното реализиране на алгоритми за нейното решение например, е важно да знаем дали задачата винаги е решима и, ако не е, да можем да обработваме съответните изключения. В случая на интерполяционната задача на Лагранж е в сила следното твърдение.

---

<sup>1</sup>Както ще видим по-нататък, можем да наложим условия и върху стойностите на нейните производни, но засега ще разглеждаме ситуацията, когато сме наложили условия само върху стойностите на функцията.

**Твърдение 1.** Съществува, при това единствен полином  $P(x) \in \pi_n$ , удовлетворяващ интерполяционната задача на Лагранж за произволни възли и стойности.

Да отбележим още веднъж, че геометричната интерпретация на тази задача е следната – дадени са  $n + 1$  точки в равнината и търсим алгебричен полином от степен, ненадминаваща  $n$ , чиято графика минава през тези точки.

## 2.3 Интерполяционна формула на Лагранж

**Твърдение 2** (Интерполяционна формула на Лагранж). Полиномът, удовлетворяващ условията (2.1), се представя по формулата

$$P(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x)y_k,$$

където  $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$  са базисните полиноми на Лагранж. Те изпълняват условията

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{ако } k \neq i \\ 1, & \text{ако } k = i \end{cases}$$

и се задават с формулата

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Ще обясним смисъла на формулата чрез пример.

**Задача 5.** Като се използва интерполяционната формула на Лагранж, да се намери полином  $P(x) \in \pi_3$ , удовлетворяващ условията

$$P(1) = 2; P(2) = 9; P(4) = 41; P(6) = 97$$

*Решение.* Нека означим

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6;$$

$$y_0 = 2, y_1 = 9, y_2 = 41, y_3 = 97.$$

Първо ще построим базисните полиноми на Лагранж. За полинома  $l_0(x)$  искаме да се нулира във всички възли освен в  $x_0$ . В  $x_0$  стойността му трябва да бъде 1. Тогава имаме

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Действително, във възлите  $x_1, x_2, x_3$  съответно първият, вторият и третият множител в числителя става 0 и цялата дроб е 0. Във възела  $x_0$  получаваме

$$l_0(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = 1,$$

т.е. така дефинирианият полином  $l_0(x)$  изпълнява поставените му условия. Като заместим  $x_0, x_1, x_2, x_3$  с техните равни, получаваме окончателно за  $l_0(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-6)} = -\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{15}.$$

Аналогично имаме

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-4)(2-6)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{8}; \\ l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4-1)(4-2)(4-6)} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{12}; \\ l_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(6-1)(6-2)(6-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{40}. \end{aligned}$$

Тогава интерполяционният полином, удовлетворяващ задачата, може да бъде представен във вида

$$P(x) = l_0(x).y_0 + l_1(x).y_1 + l_2(x).y_2 + l_3(x).y_3.$$

За да се убедим в това, нека проверим какво се случва например в точката  $x = x_1$ . Имаме  $l_0(x_1) = l_2(x_1) = l_3(x_1) = 0$  и  $l_1(x_1) = 1$ . Тогава

$$P(x_1) = 0.y_0 + 1.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 = y_1.$$

Аналогично се вижда, че този полином удовлетворява интерполяционните условия и в другите възли.

И така, получихме

$$P(x) = l_0(x).2 + l_1(x).9 + l_2(x).41 + l_3(x).97.$$

След заместване и опростяване, получаваме окончателно

$$P(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

□

Оттук нататък с  $L_n(f; x)$  ще бележим интерполяционния полином от ред  $n$  за функцията  $f$ , а с  $\omega(x)$  ще бележим  $(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ , където  $x_0, x_1, \dots, x_n$  са дадени различни точки.

Дотук показвахме как можем да построим полином, чиято графика минава през дадени точки. Следващото твърдение дава отговор на въпроса как да оценим каква е точността на приближението, което се получава, когато заменим дадена непрекъсната функция с нейния интерполяционен полином.

**Твърдение 3.** Нека  $[a, b]$  е даден краен интервал и  $x_0, \dots, x_n$  са различни точки в него. Нека функцията  $f(x)$  има непрекъсната  $(n+1)$ -ва производна в този интервал. Тогава за всяко  $x \in [a, b]$  съществува точка  $\xi \in [a, b]$  такава, че

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

Вече сме готови да решим задача 4, която формулирахме в първия параграф и да видим как можем да оценим приближено стойността на дадена функция в някоя точка, използвайки интерполяция.

**Задача 6.** Да се намери приближено стойността на  $\sin \frac{\pi}{5}$  и да се даде оценка на грешката при апроксимация.

*Решение.* Очевидно оценяването на функцията  $f(x) = \sin x$  в дадена точка не е никак пристапка работа. Ето защо, вместо да работим с тази функция, ние ще намерим нейно приближение и ще работим с него. Да изберем първо възли, в които да интерполираме. Точки, в които стойността на  $\sin x$  ни е известна, са например  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_3 = \frac{\pi}{2}$  (съответните стойности на  $f(x)$  в тези точки са  $0, 1/2, \sqrt{3}/2, 1$ ). Ще намерим полинома  $L_3(f; x)$ , който интерполира функцията  $f(x)$  в тези точки. За целта първо намираме базисните полиноми на Лагранж:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{2})}{(0 - \frac{\pi}{6})(0 - \frac{\pi}{3})(0 - \frac{\pi}{2})}, \\ l_1(x) &= \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6} - 0)(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})}; \\ l_2(x) &= \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3} - 0)(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})}; \\ l_3(x) &= \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2} - 0)(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})}. \end{aligned}$$

Тогава получаваме

$$L_3(f; x) = l_0(x).0 + l_1(x).\frac{1}{2} + l_2(x).\frac{\sqrt{3}}{2} + l_3(x).1.$$

След кратки преобразования получаваме

$$L_3(x) \approx 1.02043x - 0.0654708x^2 - 0.113872x^3.$$

Сега вече можем да намерим стойността на полинома  $L_3(x)$  при  $x = \frac{\pi}{5}$ , тъй като тя ще бъде „близо” до истинската стойност на  $\sin \frac{\pi}{5}$ . Получаваме  $L_3\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0.587061$ .

Остана да дадем оценка за това колко „близо” всъщност е стойността, която ние сме намерили, до точната стойност. С други думи, искаме да дадем оценка за грешката

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left| f\left(\frac{\pi}{5}\right) - L_3\left(f; \frac{\pi}{5}\right) \right|.$$

От Твърдение 3 непосредствено следва, че

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} \left| \omega\left(\frac{\pi}{5}\right) \right|,$$

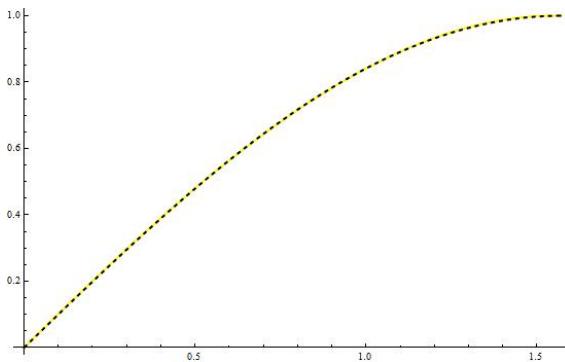
където  $\xi$  е число от интервала  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Имаме  $f^{(4)}(\xi) = \sin \xi$ . В интервала  $[0, \frac{\pi}{2}]$  функцията  $\sin x$  приема стойности между 0 и 1, т.e.  $|f^{(4)}(\xi)| \leq 1$ . Тогава

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) \leq \frac{1}{24} \left| \omega\left(\frac{\pi}{5}\right) \right| \approx 0.00108232.$$

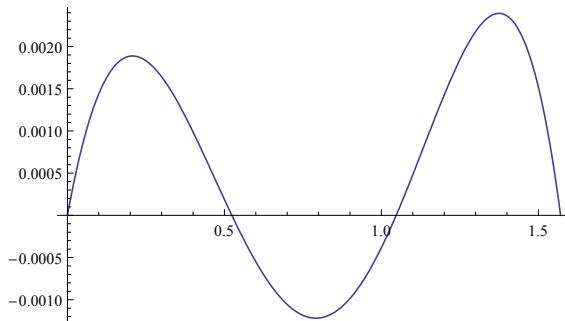
Окончателно получихме, че грешката по абсолютна стойност не надминава 0.0011. Ако сравним стойността, която ние получихме ( $0.587061$ ) със стойността, която Mathematica връща за  $\sin \frac{\pi}{5}$  ( $0.587785$ ), ще се убедим, че това действително е така. Обърнете внимание, че това е оценка отгоре за грешката, т.е. тя може и да е значително по-малка.

Да обърнем внимание и че можехме да намерим по-добро приближение на  $\sin \frac{\pi}{5}$ , ако бяхме подбрали интерполяционните възли по по-подходящ начин или бяхме взели повече възли.  $\square$

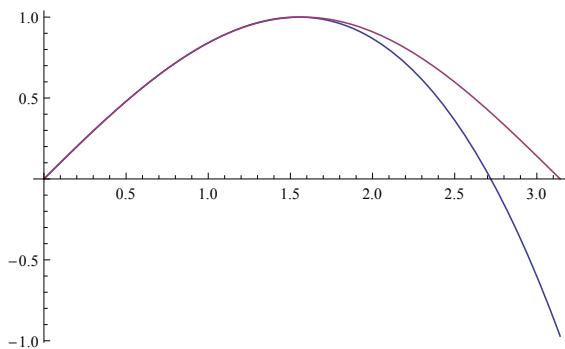
Нека коментираме още няколко неща, свързани с предходната задача. Да илюстрираме първо нейното решение графично – заместваме функцията  $\sin x$  (която на фигурата е с черната пунктирана линия) с интерполяционния полином от степен 3,  $L_3(f; x)$  (жълтата непрекъсната линия). Както виждаме, двете графики почти съвпадат в интервала на интерполяция  $[0, \pi/2]$ , което обосновава приближаването на  $\sin \frac{\pi}{5}$  с  $L_3(f; \frac{\pi}{5})$ .



Привеждаме и графиката на абсолютната грешка при приближаването на  $\sin x$  с  $L_3(f; x)$  в разглеждания интервал:



Нека сега разгледаме графиките на  $\sin x$  и  $L_3(f; x)$  в интервала  $[0, \pi]$ :

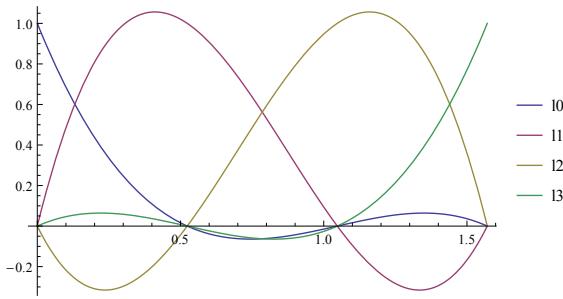


Както виждаме, извън границите на интерполяция двете графики сериозно се разминават.

**Дефиниция 3.** Когато използваме интерполяционния полином за приближаване на стойност в интервала, определен от интерполяционните възли, говорим за **интерполяция**. В противен случай говорим за **екстраполация**.

**При екстраполация не можем да разчитаме на това, че ще получим добро приближение.** Полиномът няма точки, за които да се „хване” и ето защо няма как да очакваме неговото поведение да следва това на приближаваната функция.

Нека сега разгледаме графиките на базисните полиноми на Лагранж, които намерихме в предходната задача:



Графиката добре илюстрира условието, което наложихме на базисните полиноми на Лагранж при тяхното дефиниране – всеки от тях има стойност 1 във възела, за който “отговаря” и 0 във всички останали възли.

**Дефиниция 4.** Нека са дадени точките  $x_0 < \dots < x_n$ . Казваме, че функциите  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$  образуват интерполяционен базис, ако

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ако } i \neq j, \\ 1 & \text{ако } i = j. \end{cases}$$

Ясно е, че ако  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$  образуват интерполяционен базис и във формулата на Лагранж заместим базисните полиноми  $l_i(x)$  с  $\varphi_i(x)$ , то получената функция  $\bar{\varphi}(x)$  ще изпълнява условията  $\bar{\varphi}(x_i) = y_i$ .

Нека сега разгледаме още един пример, показващ как се оценява грешката при приближаване на дадена функция с нейния интерполяционен полином.

**Задача 7.** Стойността на  $\ln 15.2$  е намерена приблизително по следния начин: взети са точните стойности на  $\ln 15$  и  $\ln 16$  и е използвана линейна интерполяция (построен е интерполяционният полином от първа степен за възлите  $x_0 = 15$  и  $x_1 = 16$ ). Нека с  $f$  и  $p$  са означени съответно точната и приближената стойност на  $\ln 15.2$ . Докажете, че

$$0 < f - p < 4 \cdot 10^{-4}$$

*Решение.* Нека  $f(t) = \ln t$ . Тогава грешката е

$$f - p = \frac{f''(\xi)}{2}(15.2 - 15)(15.2 - 16), \quad \xi \in (15, 16)$$

Тъй като  $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ , получаваме

$$f - p = -\frac{0,2.(-0,8)}{2\xi^2} = \frac{4}{50\xi^2}.$$

От една страна,  $x - y$  очевидно е положително. От друга, най-голямата стойност на грешката се достига, когато знаменателят е най-малък, т.е. при  $\xi = 15$ . Тогава имаме

$$0 < f - p < \frac{4}{50 \cdot 15^2} = \frac{4}{2 \cdot 3^2 \cdot 5^4} < \frac{4}{10^4}.$$

□

Понякога се интересуваме от максималната грешка, която се получва не в дадена точка, а в целия интервал, в който интерполираме.

**Задача 8.** Да се намери оценка на грешката, която се допуска при приближаването на функцията  $f(x) = 1/(1+x)$  в интервала  $[0, 1]$  с интерполяционния полином на Лагранж от първа степен с възли 0 и 1.

*Решение.* Имаме

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Тогава

$$|R(x)| = \frac{2}{2(\xi+1)^3} |(x-0)(x-1)| \leq |(x-0)(x-1)|.$$

В последното неравенство използвахме, че  $1/(\xi+1)^3$  достига своя максимум в интервала  $[0, 1]$  за  $\xi = 0$ . И така, за да намерим оценка отгоре на грешката  $|R(x)|$  в целия интервал, остана да видим колко най-много може да бъде стойността на  $|(x-0)(x-1)|$ . Ясно е, че максимумът на последната функция се достига за  $x = 1/2$  (парабола, която се нулира в 0 и 1 и следователно върхът ѝ е в  $1/2$ ), т.е. окончателно получаваме, че за всяко  $x \in [0, 1]$

$$R(x) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

□

**Твърдение 4.** Ако  $f(x)$  е полином от степен, ненадминаваща  $n$ , то  $f(x) \equiv L_n(f; x)$ .

Следващите две задачи са свързани с единствеността на интерполяционния полином и Твърдение 4, което е следствие от нея.

**Задача 9.** Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1.$$

*Решение.* Нека  $f(x) = 1 \in \pi_n, \forall n$ . Тогава от Твърдение 4 следва, че  $f(x) \equiv L_n(f; x)$ , но

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) \cdot f(x_k) = \sum_{k=0}^n l_k(x),$$

откъдето следва исканото равенство. □

**Задача 10.** Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^n x_k^m l_k(x) = x^m,$$

където  $m$  е естествено число, ненадминаващо  $n$ .

*Решение.* Нека  $f(x) = x^m \in \pi_n$ . Тогава от Твърдение 4 следва, че

$$f(x) \equiv L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n x_k^m l_k(x).$$

□

## 2.4 Интерполяционни базиси

## 2.5 Разделени разлики. Интерполяционна формула на Нютон

В настоящия параграф ще коментираме още един начин за построяване на интерполяционния полином на Лагранж – формулата на Нютон с разделени разлики.

**Дефиниция 5.** Нека  $x_0, x_1, \dots, x_n$  са дадени различни точки. **Разделената разлика** на функцията  $f(x)$  в точките  $x_0, \dots, x_n$  се бележи с  $f[x_0, \dots, x_n]$  и се дефинира индуктивно по следния начин:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

като приемаме, че  $f[x_i] := f(x_i)$  за всяка точка  $x_i$ .

**Твърдение 5** (Интерполяционна формула на Нютон). *Интерполяционният полином на Лагранж може да се представи чрез формулата*

$$L_n(f; x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

*Идея на доказателството.* Формулата на Нютон се основава на връзката между полинома  $L_n(f, x)$ , интерполиращ  $f(x)$  в точките  $x_0, \dots, x_n$ , и полинома  $L_{n-1}(f, x)$ , интерполиращ  $f(x)$  в точките  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . Да разгледаме разликата  $L_n(f, x) - L_{n-1}(f, x) \in \pi_n$ . Ясно е, че стойността на тази разлика е 0 за  $x = x_0, \dots, x_{n-1}$ , тъй като в тези точки и двата полинома съвпадат с  $f(x)$ . Тогава

$$L_n(f, x) - L_{n-1}(f, x) = C(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

т.e.

$$L_n(f, x) = C(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) + L_{n-1}(f, x).$$

Може да се покаже, че  $C = f[x_0, \dots, x_n]$ . Разсъждавайки индуктивно, можем да изразим  $L_{n-1}$  чрез  $L_{n-2}$  и т.н., с което получаваме формулата на Нютон. □

**Задача 11.** Като използвате интерполяционната формула на Нютон, намерете полинома  $P(x)$ , който интерполира функцията  $f(x) = \sqrt{x+3x^2-x+2}$  в точките  $0, 1, 4$ .

*Решение.* Нека първо систематизираме интерполяционните условия в таблица. За целта трябва да пресметнем стойността на  $f(x)$  в точките  $0, 1, 4$ . Получаваме

|        |   |   |    |
|--------|---|---|----|
| $x$    | 0 | 1 | 4  |
| $f(x)$ | 2 | 5 | 48 |

Използвайки интерполяционната формула на Нютон, получаваме представянето

$$L_2(f; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Тогава трябва да пресметнем разделените разлики, участващи във формулата. Удобно е тези пресмятания да се систематизират в следната таблица:

| Възли     | Ред 0         | Ред 1                        | Ред 2   |
|-----------|---------------|------------------------------|---|
| $x_0 = 0$ | $f[x_0] = 2$  | $f[x_0, x_1] = 3$            | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$ |
| $x_1 = 1$ | $f[x_1] = 5$  | $f[x_1, x_2] = \frac{43}{3}$ |   |
| $x_2 = 4$ | $f[x_2] = 48$ |                              |   |

Коефициентите, необходими ни за формулата на Нютон, се намират в първия ред на така получената таблица. Получаваме

$$L_2(f; x) = 2 + 3(x - 0) + \frac{17}{6}(x - 0)(x - 1) = 2 + 3x + \frac{17}{6}x^2 - \frac{17}{6}x = 2 + \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}x^2$$

□

**Задача 12.** Точките

|     |    |   |    |    |    |     |
|-----|----|---|----|----|----|-----|
| $x$ | -2 | 1 | 4  | -1 | 3  | -4  |
| $y$ | -1 | 2 | 59 | 4  | 24 | -53 |

лежат на полином. Определете степента на този полином.

*Решение.* От единствеността на интерполяционния полином и прилагайки формулата на Нютон, получаваме  $P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^5 f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$ . Както в предишната задача правим таблица с необходимите разделини разлики (обърнете внимание, че не е необходимо възлите да бъдат в нарастващ ред):

| Възли      | Ред 0          | Ред 1              | Ред 2                   | Ред 3                       | 4 | 5 |
|------------|----------------|--------------------|-------------------------|-----------------------------|---|---|
| $x_0 = -2$ | $f[x_0] = -1$  | $f[x_0, x_1] = 1$  | $f[x_0, x_1, x_2] = 3$  | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$ | 0 | 0 |
| $x_1 = 1$  | $f[x_1] = 2$   | $f[x_1, x_2] = 19$ | $f[x_1, x_2, x_3] = 4$  | $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 1$ | 0 |   |
| $x_2 = 4$  | $f[x_2] = 59$  | $f[x_2, x_3] = 11$ | $f[x_2, x_3, x_4] = 6$  | $f[x_2, x_3, x_4, x_5] = 1$ |   |   |
| $x_3 = -1$ | $f[x_3] = 4$   | $f[x_3, x_4] = 5$  | $f[x_3, x_4, x_5] = -2$ |                             |   |   |
| $x_4 = 3$  | $f[x_4] = 24$  | $f[x_4, x_5] = 11$ |                         |                             |   |   |
| $x_5 = -4$ | $f[x_5] = -53$ |                    |                         |                             |   |   |

Коефициентите във формулата на Нютон лежат на първия ред и тогава последният ненулев член е  $f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ . Следователно полиномът е от трета степен. □

Нека сега коментираме накратко въпроса **зашо са необходими различни формули за решаване на една и съща задача**.

Имплементирайки даден алгоритъм, основен е въпросът за неговото бързодействие. Именно тук се появява разликата между различните формули. В зависимост от това каква конкретна практическа задача искаме да решим, ще искаме различни неща от съответния алгоритъм.

- Често на практика, когато искаме да апроксимираме стойността на дадена функция в точката  $x$ , като са известни стойностите в точките  $x_0, x_1, \dots$ , се построява редица от полиноми – първо, полином  $p_1(x)$  от първа степен през двете най-близки точки, след това – полином  $p_2(x)$  от втора степен през вече използвани две точки и следващата по отдалеченост и т.н. Това се прави, докато две съседни приближения дадат един и същ (с точност до някаква допустима грешка) резултат. След като сме получили един и същи резултат по два различни начина, можем да считаме, че този резултат е достоверен. За построяването на такава редица от полиноми е явно преимуществото на формулата на Нютон, тъй като, за да добавим нов възел, е достатъчно да добавим един ред в таблицата с разделени разлики и един член в сумата, описваща полинома. С други думи, можем да използваме вече направените изчисления. По формулата на Лагранж би ни се наложило да направим всички изчисления отначало, тъй като базисните полиноми зависят от възлите.
- Понякога искаме да построим полиноми с различни стойности, но еднакви възли. Например в биологията, когато се правят експерименти за развитието на една популация от микроорганизми, се следва експериментален протокол. Измервания се правят във фиксирали моменти от време. Тогава, ако искаме да сравним развитието на две популации, ще трябва да построим полиноми с едни и същи възли (фиксираните моменти от време), но различни стойности (численостите на различните популации в дадените моменти от време). Когато искаме да построим различни интерполяционни полиноми, които имат обаче еднакви възли, по-удачно ще бъде да използваме формулата на Лагранж. След като възлите не се променят, базисните полиноми остават същите и трябва само да сметнем линейната им комбинация с новите стойности. Формулата на Нютон в този случай не е удобно да се използва, тъй като, сменяйки стойностите, трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало (да отбележим още веднъж, че базата на рекурсията зависи от стойностите на приближаваната функция).
- В случаите, когато възлите са на равни разстояния един от друг, могат да се използват формулите на Нютон с крайни разлики. По формулата на Лагранж полиномът се представя във вида

$$\sum_{i=0}^n y_i \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

Имаме  $n + 1$  събирами, като за всяко трябва да се извършат от порядъка на  $n$  операции, т.е. сложността е  $O(n^2)$ . Формулата на Нютон за

интерполиране напред (вж. учебника) представя полинома във вида

$$\sum_{i=0}^n \binom{t}{i} \Delta^i f_0,$$

т.е. се извършват  $O(n)$  операции. Тази формула обаче не е приложима в общия случай, а само при равнотдалечени възли

С други думи, различните формули ни предоставят различни инструменти, които ни позволяват да изберем подходящото средство за всеки конкретен случай.

## 2.6 Някои практически въпроси, свързани с интерполирането с алгебрични полиноми

Числените методи, както казахме, включват голям брой аритметични пресмятания. Затова тяхното прилагане става посредством имплементирането им в компютърни програми. Нека сега дефинираме функция в Mathematica, която намира автоматично полинома на Лагранж по формулата на Нютон. Тъй като в Mathematica индексацията в списъците започва от 1, нека означим интерполяционните възли с  $x_1, \dots, x_{n+1}$ . Тогава интерполяционната формула на Нютон ще изглежда така:

$$L_n(f; x) = f[x_1] + \sum_{k=2}^{n+1} f[x_1, \dots, x_k] (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}).$$

Ясно е, че за да имплементираме формулата на Нютон, трябва да можем да пресмятаме разделени разлики. Вземайки предвид това, ще дефинираме следните функции:

- `dividedDiff[nodes_, values_]` – изчислява разделената разлика на функция със стойности `values` в точките `nodes` (`nodes` и `values` се задават като списъци);
- `newtonPoly[nodes_, values_, x_]` – намира интерполяционния полином на Лагранж, построен за възли `nodes` и стойности `values`.

```

dividedDiff[nodes_, values_] := (
  If[Length[nodes] == 1,
    values[[1]],
    (dividedDiff[nodes[[2 ;; Length[nodes]]], values[[2 ;; Length[nodes]]]] -
     dividedDiff[nodes[[1 ;; Length[nodes] - 1]], values[[1 ;; Length[nodes] - 1]]]) /
    (nodes[[Length[nodes]]] - nodes[[1]]))
  )
newtonPoly[nodes_, values_, x_] := (
  poly = 0;
  product = 1;
  For[i = 1, i <= Length[nodes], i++,
    poly += dividedDiff[nodes[[1 ;; i]], values[[1 ;; i]]] * product;
    product *= x - nodes[[i]]
  ];
  poly // Expand
)

```

Сега, използвайки дефинираните функции, ще разгледаме някои особености на интерполирането с алгебрични полиноми, които трябва да се имат предвид, когато приближаваме дадена функция или моделираме дадено явление. Ще започнем с една дефиниция.

**Дефиниция 6.** Когато използваме интерполяционния полином за приближаване на стойност в интервала, определен от интерполяционните възли, говорим за **интерполяция**. В противен случай говорим за **екстраполация**.

**Задача 13.** В таблицата са дадени данни за населението на САЩ в периода 1920-1990. Да се построи полином от седма степен, интерполиращ таблицата. Да се даде приближение на населението през 1952, 1974, 2000 година и да се сравни с действителните стойности – съответно 157 млн., 214 млн., 281.42 млн.

|           |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Година    | 1920   | 1930   | 1940   | 1950   | 1960   | 1970   | 1980   | 1990   |
| Население | 106.46 | 123.08 | 132.12 | 152.27 | 180.67 | 205.05 | 227.23 | 249.46 |

*Решение.* Ще използваме програмата в Mathematica, която предложихме в началото на настоящия параграф.

```

In[18]:= nodes = Range[1920, 1990, 10];
values = {106.46, 123.08, 132.12, 152.27, 180.67, 205.05, 227.23, 249.46};
p[x_] := newtonPoly[nodes, values, x];
p[1952]
p[1974]
p[2000]

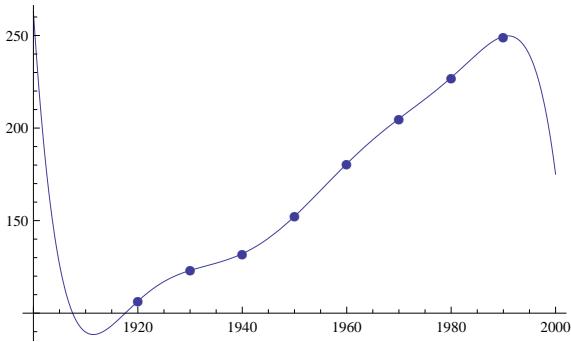
Out[21]= 157.728
Out[22]= 213.511
Out[23]= 175.08

```

Получихме следните приближения:

- През 1952 година – 157.728 млн. (в действителност 157 млн.)
- През 1974 година – 213.511 млн. (в действителност 214 млн.)
- През 2000 година – 175.08 млн. (в действителност 281,42 млн.)

В първите два случая приближението е добро и относителната грешка е малка. В третия обаче полученият с интерполяционния полином резултат няма нищо общо с действителността. Отново виждаме, че при екстраполация не можем да разчитаме на добри резултати. Обърнете внимание как в границите на интерполяция (между 1920 и 1990) поведението му добре моделира нарастването на населението, а извън тях това не е така.



□

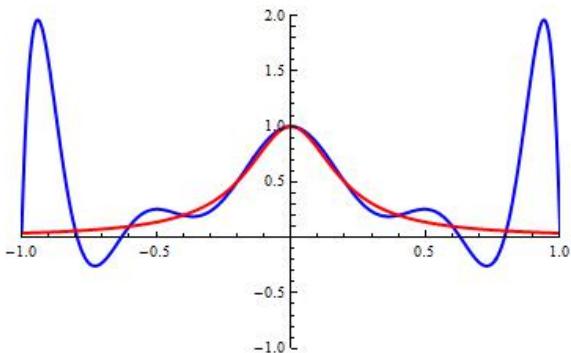
Със следващата задача ще покажем, че, противно на интуицията, често при налагане на повече интерполяционни условия (съответно използвайки полиноми от по-висока степен) получаваме по-лошо приближение. Това е така, защото полиномите от по-висока степен имат „по-лошо“ поведение – появяват се осцилации.

**Задача 14.** Да се приближи функцията<sup>2</sup>  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  в интервала, като се намерят интерполяционните полиноми от степени 10 и 4 при равноотдалечени възли в интервала.

Да се построят графиките на абсолютните грешки в двата случая.

*Решение.* Първо да намерим полинома от десета степен.

```
In[85]:= f[x_] := 1/(1 + 25 x^2)
nodes = Range[-1, 1, 0.2];
values = Table[f[x], {x, -1, 1, 0.2}];
p[x_] = newtonPoly[nodes, values, x]
Plot[{p[x], f[x]}, {x, -1, 1},
PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Red, Thick}}, PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 2}}]
```



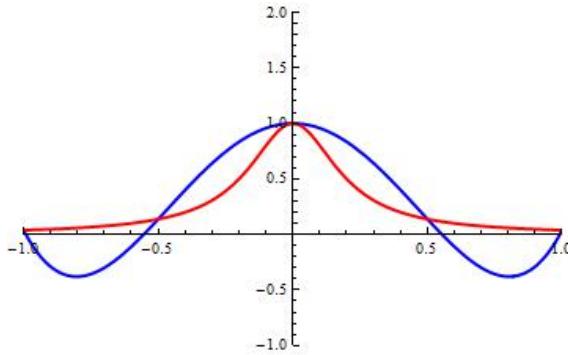

---

<sup>2</sup>Това е т.нар. функция на Рунге, носеща името на Карл Рунге – немски математик, забелязкал особеността при интерполиране с полиноми от висока степен, която коментираме. Тази особеност е известна в литературата като „феномен на Рунге“.

При интерполиране с полиноми от висока степен можем да очакваме наличието на осцилации. Между възлите на интерполяция поведението на интерполяционния полином е „лошо“ - виждате как в двата края на интервала грешката при апроксимация е много голяма.

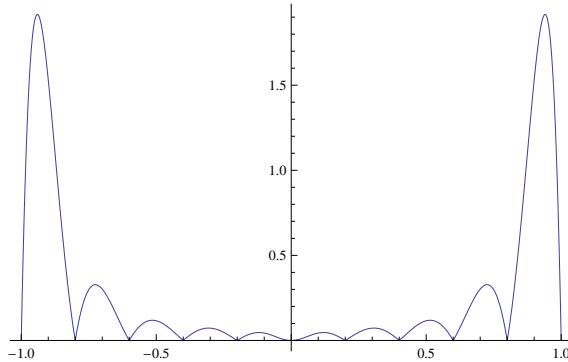
Приближението (като цяло) е по - добро с полинома от по - ниска степен:

```
In[91]:= f[x_] := 1/(1 + 25 x^2)
nodes = Range[-1, 1, 0.5];
values = Table[f[x], {x, -1, 1, 0.5}];
p4[x_] = newtonPoly[nodes, values, x]
Plot[{p4[x], f[x]}, {x, -1, 1},
PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Red, Thick}}, PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 2}}]
```



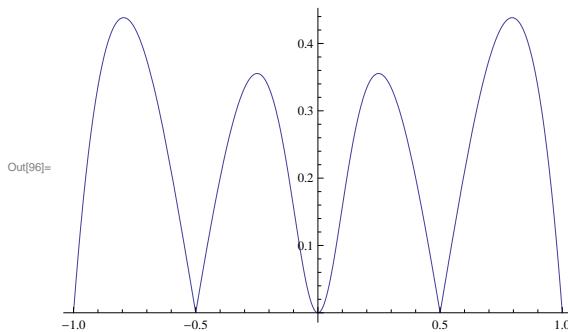
Нека сега построим графиките на абсолютните грешки при апроксимацията с полиномите от десета и четвърта степен. За полинома от десета степен получаваме следната графика:

```
In[90]:= Plot[Abs[f[x] - p[x]], {x, -1, 1}, PlotRange -> All]
```



За полинома от четвърта степен имаме:

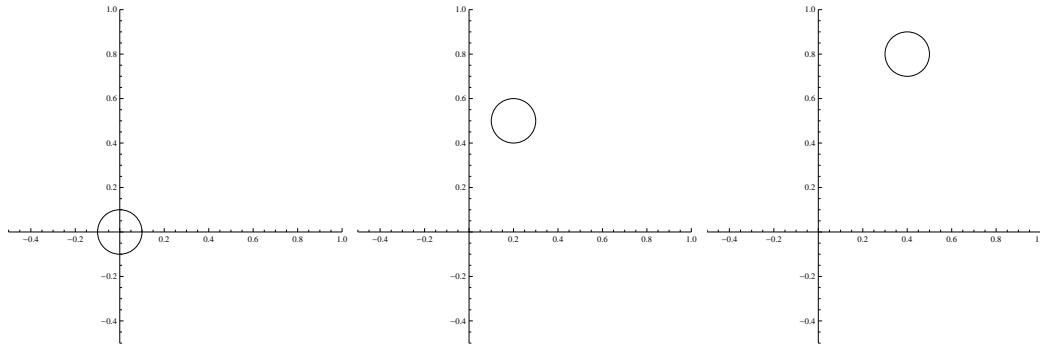
```
In[96]:= Plot[Abs[f[x] - p4[x]], {x, -1, 1}, PlotRange -> All]
```



Вижда се, че и в двата случая грешката в средата на интервала е по-малка отколкото в краищата. Това особено добре си личи за полинома от десета степен. Затова е добре, когато интерполираме, възлите да са подбрани така, че точката, в която искаме да намерим приближената стойност, да е близо до средата на интервала.  $\square$

Нека сега видим как можем да направим една простишка анимация.

**Задача 15.** Дадени са три сцени:



Да се направи анимация на базата на тези три сцени

*Решение.* Можем да намерим функция, която описва траекторията на центъра на окръжността. За целта можем да построим полином от втора степен (зашпото имаме три точки), който минава през точките  $(0,0)$ ,  $(0.2,0.5)$ ,  $(0.4,0.8)$  (това е центърът на окръжността на трите сцени). Решавайки тази интерполяционна задача, можем да рисуваме окръжността през достатъчно малки интервали от време с център върху тази парабола и така ще получим анимирано движение на окръжността.

```
p[x_] = newtonPoly[{0, 0.2, 0.4}, {0, 0.5, 0.8}, x];
Animate[Graphics[Circle[{x, p[x]}, 0.1], Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {{-0.5, 1}, {-0.5, 1}}],
{x, 0, 0.4, 0.01}]
```

$\square$

**Задача 16.** Проведени са експерименти, за да се определи бързодействието на един алгоритъм за сортиране в зависимост от броя елементи. Резултатите са представени в следната таблица:

| бр.е/ти ( $x \cdot 1000$ ) | 10        | 20      | 50      | 100      | 150        | 200     | 250      |
|----------------------------|-----------|---------|---------|----------|------------|---------|----------|
| време, сек                 | 0.1639275 | 0.53282 | 3.00007 | 11.20784 | 26.7486723 | 47.3297 | 76.80605 |

Да се определи колко най-много елемента могат да се сортират за не повече от 30сек.

*Решение.* Нека с  $x$  означим броя елементи. Ще използваме **обратна интерполяция**. Т.е. ще построим интерполяционния полином  $f(x)$ , съответстващ на таблицата, и ще намерим стойността на  $x$ , за която  $f(x) = 30$ . От проведените експерименти е ясно, че търсената стойност за  $x$  ще е между 150 и 200 хил. Нека построим интерполяционния полином от трета степен с възли 100, 150, 200, 250 и стойности – 11.20784, 26.7486723, 47.3297, 76.80605. По този начин

точката, в която искаме да апроксимираме стойността, ще има по два възела от двете си страни.

```
p[x_] = newtonPoly[{100, 150, 200, 250},
{11.20784, 26.7486723, 47.3297, 76.80605}, x];
Solve[p[x] == 30, x]

Out[103]= { {x → 47.4033 - 243.128 i}, {x → 47.4033 + 243.128 i}, {x → 159.083}}
```

Получаваме  $x \approx 159.083$ . Следователно за под 30 сек. можем да сортираме масив с приблизително 159 хил. елемента.  $\square$

## 2.7 Интерполяционна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли.

Освен да налагаме условия върху стойността на функцията, можем да налагаме условия и върху стойностите на нейните производни в дадени точки. Това ни позволява по-добре да „контролираме“ нейното поведение. Ние сега ще разгледаме интерполяционната задача на Ермит.

**Постановка на задачата.** Нека

$$x_0, \dots, x_n$$

са дадени различни точки от реалната права (възли). Нека

$$\nu_0, \dots, \nu_n$$

са цели положителни числа (кратности) и

$$\{y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойности. Нека

$$N := \nu_0 + \dots + \nu_n - 1.$$

Интерполяционната задача на Ермит е да се построи полином  $P$  от степен  $N$ , който удовлетворява условията

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1.$$

С други думи, за всеки възел  $x_k$  налагаме условия за стойността на функцията и първите  $\nu_k - 1$  производни (или общо толкова условия колкото е кратността на всеки възел) в съответния възел. По този начин имаме общо  $\nu_0 + \dots + \nu_n$  условия, които могат да определят еднозначно коефициентите на полином от степен  $N := \nu_0 + \dots + \nu_n - 1$ .

**Твърдение 6.** *Задачата на Ермит има, при това единствено решение при всеки избор на интерполяционни възли, кратности и стойности.*

Оказва се, че за да намерим интерполяционния полином на Ермит, можем да използваме отново формулата на Нютон. Единствената разлика е, че трябва да обобщим понятието за разделени разлики така, че да можем да пресмятаме разделени разлики с кратни възли.

**Твърдение 7.** Нека  $f \in C^{(k)}[a, b]$ . Тогава за произволни точки  $x_0 \leq \dots \leq x_n$  е в сила рекурентната връзка

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & \text{ако } x_0 < x_n \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & \text{ако } x_0 = x_n. \end{cases}$$

**Задача 17.** Да се построи полином, удовлетворяващ интерполяционните условия

|    |    |   |    |    |
|----|----|---|----|----|
| 0  | 0  | 1 | 1  | 1  |
| -1 | -2 | 0 | 10 | 40 |

*Решение.* Казано с други думи, трябва да построим полином  $P(x) \in \pi_4$  такъв, че

$$P(0) = -1, P'(0) = -2, P(1) = 0, P'(1) = 10, P''(1) = 40.$$

Ще го построим, използвайки формулата на Нютон. За целта трябва първо да пресметнем необходимите ни разделени разлики. Там, където пресмятаме разделена разлика, в която всички възли са равни, ще отбелязваме с  $^*$  ( $f[., ., .]^*$ ), за да обръщаме внимание на този факт.

| Възли     | Ред 0         | Ред 1                | Ред 2                     | Ред 3                        | Ред 4 |
|-----------|---------------|----------------------|---------------------------|------------------------------|-------|
| $x_0 = 0$ | $f[x_0] = -1$ | $f[x_0, x_1]^* = -2$ | $f[x_0, x_1, x_2] = 3$    | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 6$  |       |
| $x_1 = 0$ | $f[x_1] = -1$ | $f[x_1, x_2] = 1$    | $f[x_1, x_2, x_3] = 9$    | $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 11$ |       |
| $x_2 = 1$ | $f[x_2] = 0$  | $f[x_2, x_3]^* = 10$ | $f[x_2, x_3, x_4]^* = 20$ |                              |       |
| $x_3 = 1$ | $f[x_3] = 0$  | $f[x_3, x_4]^* = 10$ |                           |                              |       |
| $x_4 = 1$ | $f[x_4] = 0$  |                      |                           |                              |       |

Обърнете внимание как е попълнена първата колона.  $f[x_1]$  е равно на -1 а не на -2, тъй като  $f[x_1] = f[0] = f(0)$ . По същата причина  $f[x_3] = f[x_4] = 0$ .

Сега кофициентите лежат в първия ред. Получаваме

$$\begin{aligned} P(x) = & -1 + (-2)(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) + 6(x - 0)(x - 1)(x - 2) \\ & + 5(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 5x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

□

**Задача 18.** Да се построи полиномът, интерполиращ таблицата

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| 0 | 0 | 0 | 1  |
| 1 | 0 | 2 | -1 |

*Решение.* Имаме

| Възли     | Ред 0         | Ред 1                              | Ред 2                                   | Ред 3                        |
|-----------|---------------|------------------------------------|---|------------------------------|
| $x_0 = 0$ | $f[x_0] = 1$  | $f[x_0, x_1]^* = \frac{0}{1!} = 0$ | $f[x_0, x_1, x_2]^* = \frac{2}{2!} = 1$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -3$ |
| $x_1 = 0$ | $f[x_1] = 1$  | $f[x_1, x_2]^* = \frac{0}{1!} = 0$ | $f[x_1, x_2, x_3] = -2$                 |                              |
| $x_2 = 0$ | $f[x_2] = 1$  | $f[x_2, x_3] = -2$                 |   |                              |
| $x_3 = 1$ | $f[x_3] = -1$ |                                    |   |                              |

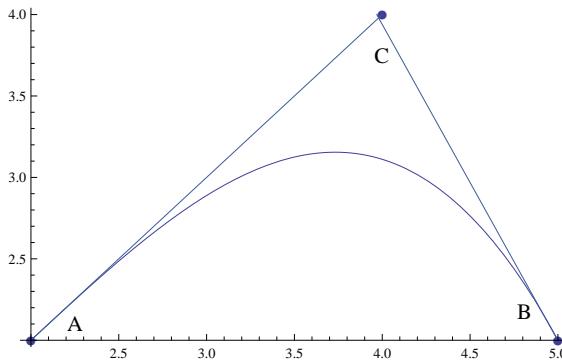
Получаваме

$$P(x) = 1 + 0.(x - 0) + 1(x - 0)(x - 0) + (-3)(x - 0)(x - 0)(x - 0) = 1 + x^2 - 3x^3.$$

□

В софтуера за графичен дизайн една от базовите функционалности, които трябва да бъдат реализирани, е изобразяването на криви. Да разгледаме един простиčък начин как може да стане това. За да илюстрираме това, за което става въпрос, нека използваме програмата Paint, която е достъпна за всеки. За да построим крива, първо трябва да провлачим мишката между две точки, нека ги наречем  $A$  и  $B$  (построявайки отсечка), и след това да кликнем с нея някъде (например в точка  $C$ ), за да определим „кривината” ѝ. Както можете да се уверите, оказва се, че през точка  $C$  минават допирателните към кривата в точките  $A$  и  $B$ . Да видим как може да бъде реализирано това.

От гледна точка на математиката, информацията, която имаме, са координатите на 3 точки в равнината. Нека ги означим с  $A = (x_0, y_0)$ ,  $B = (x_1, y_1)$  и  $C = (x_2, y_2)$ . Задачата ни е да построим крива, която минава през точките  $A$  и  $B$ , а допирателните към нея в точките  $A$  и  $B$  минават през точката  $C$ .



За да опишем кривата, нека я разгледаме като графика на някакъв кубичен полином

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Тогава можем да пресметнем производната на  $p(x)$  в точките  $x_0$  и  $x_1$  (геометрично, това е тангенсът на ъгъла, който допирателната сключва с абсцисната ос). Съответните стойности са  $p'(x_0) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$  и  $p'(x_1) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ . Сега вече имаме стойностите на функцията и на първите производни в  $x_0$  и  $x_1$ . Намирането на полинома при тези данни е интерполяционната задача на Ермит. Решавайки я, имаме функция, която описва кривата и която можем да изобразим на екрана. Разбира се, на практика кривите се описват с много разнообразни функции и условията, които се налагат върху тях, могат да бъдат различни.

## 2.8 Интерполиране с обобщени полиноми. Интерполиране с тригонометрични полиноми.

Дотук разглеждахме задачата за намиране на алгебричен полином, чиято графика минава през дадени точки. По-общо въпросът за апроксимиране на дадена функция може да се разглежда така. Дадена е функцията  $f$  и искаме да

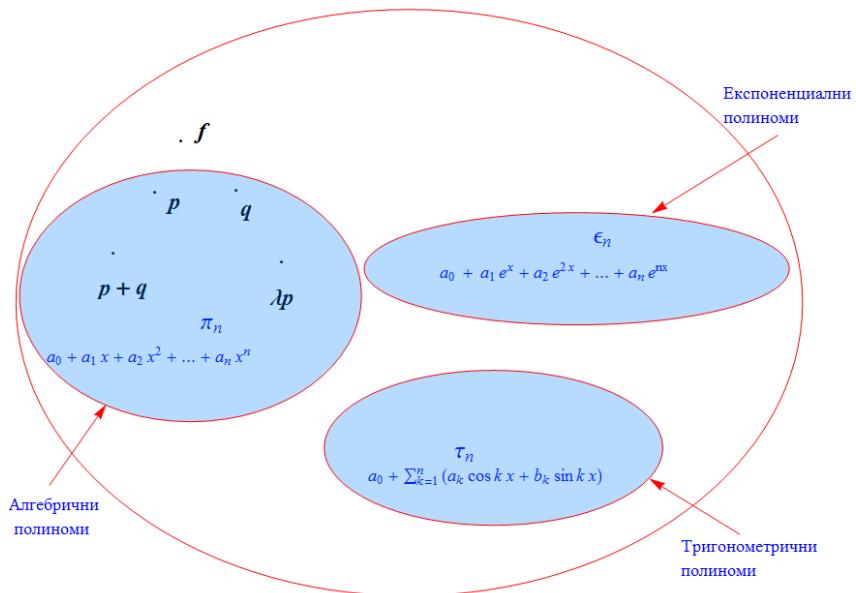
намерим функция  $g$  от определен вид, която я приближава (например като я интерполира в дадени възли). Досега ние търсихме функцията  $g$  във вид на алгебричен полином, ненадминаващ дадена степен, т.е. я търсихме в множеството  $\pi_n$ .

**Множеството от алгебрични полиноми  $\pi_n$  е линейно пространство,** тъй като, ако  $p, q \in \pi_n$ , то

$$p + q \in \pi_n, \quad \lambda p \in \pi_n$$

за кое да е число  $\lambda$ . Казано с други думи, можем да събираме два полинома или да умножаваме полином с число и това, което получаваме, е също полином от степен, ненадминаваща  $n$ . Най-простият базис в линейното пространство  $\pi_n$  е  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  и следователно  $\pi_n$  е **крайномерно пространство**, тъй като се поражда от краен брой базисни функции.

Разбира се, вместо да търсим “най-доброто” (в някакъв смисъл) приближение на  $f$  във вид на алгебричен полином, т.е. в пространството  $\pi_n$ , можем да търсим друга по вид функция, т.е. от друго линейно пространство, която да е “близо” до  $f$  (вж. фигураната по-долу). Например, ако имаме функция  $f$ , която расте много бързо, бихме могли да я приближаваме с експоненциален полином, т.е. с функция от линейното пространство, породено от базиса  $\{1, e^x, \dots, e^{nx}\}$ . Ако имаме периодична функция  $f$  или периодично явление, можем да използваме пространството от тригонометрични полиноми (определен че от базиса  $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ ). Изобщо, имайки дадена функция, можем да търсим приближението ѝ във вид, който е най-удобен, т.е. отговаря на свойствата на оригиналната функция. Нека отбележим все пак, че **на практика най-често се използват алгебрични полиноми**, тъй като имат редица хубави свойства – лесно се намира стойността им в дадена точка, лесно се диференцират, интегрират и т.н.



**Дефиниция 7.** Нека  $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  образуват базис на дадено крайномерно линейно пространство. Тогава линейната комбинация

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$$

наричаме **обобщен полином** по системата  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ .

**Забележка.** Обобщените полиноми са обобщение на алгебричните полиноми. В случая, когато базисът ни е  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ , обобщените полиноми са всъщност алгебрични полиноми.

**Забележка.** Всяко крайномерно линейно пространство има краен базис  $\{\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ . Следователно функциите в него представляват обобщени полиноми по дадения базис. **Обобщените полиноми представляват най-общия вид на функции от кое да е крайномерно линейно пространство.**

Предимството на това да работим в крайномерни пространства е, че знаем вида на функциите в тях. Ако търсим обобщен полином от вида

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x),$$

единствените неизвестни са коефициентите в него. Нека са дадени точките  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ . За да намерим обобщения полином  $\varphi(x)$ , който минава през тях, трябва да решим линейната система  $\varphi(x_0) = y_0, \dots, \varphi(x_n) = y_n$ , т.е.

$$\begin{aligned} a_0\varphi_0(x_0) + \dots + a_n\varphi_n(x_0) &= y_0, \\ a_0\varphi_0(x_1) + \dots + a_n\varphi_n(x_1) &= y_1, \\ \dots & \\ a_0\varphi_0(x_n) + \dots + a_n\varphi_n(x_n) &= y_n. \end{aligned}$$

**Задача 1.** В таблицата са дадени данни за развитието на бактериална популация.

| t,h            | 1 | 2  | 3   | 4    | 5     |
|----------------|---|----|-----|------|-------|
| клетки (x1000) | 1 | 12 | 110 | 1037 | 12218 |

Да се намери подходяща функция, която интерполира дадените данни.

**Решение.** Дадените данни предполагат да търсим функцията в линейно пространство от бързо растящи функции, например експоненциални. Имаме 5 дадени точки, следователно ще изберем 5 базисни функции. Нека това са  $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ . Общият вид на функциите в линейното пространство, породено от този базис, е

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + a_3 e^{3x} + a_4 e^{4x}.$$

Ще определим коефициентите така, че

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 12, \varphi(3) = 110, \varphi(4) = 1037, \varphi(5) = 12218,$$

като решим съответната линейна система.

```
In[1]:= φ[x_] := a0 + a1 Ex + a2 E2x + a3 E3x + a4 E4x
sol = NSolve[
  {φ[1] == 1, φ[2] == 12, φ[3] == 110, φ[4] == 1037, φ[5] == 12218}, {a0, a1, a2, a3, a4}]
Out[2]= {a0 → 0.10506, a1 → -0.382376, a2 → 0.25728, a3 → 0.00165052, a4 → 2.4983 × 10-6}
```

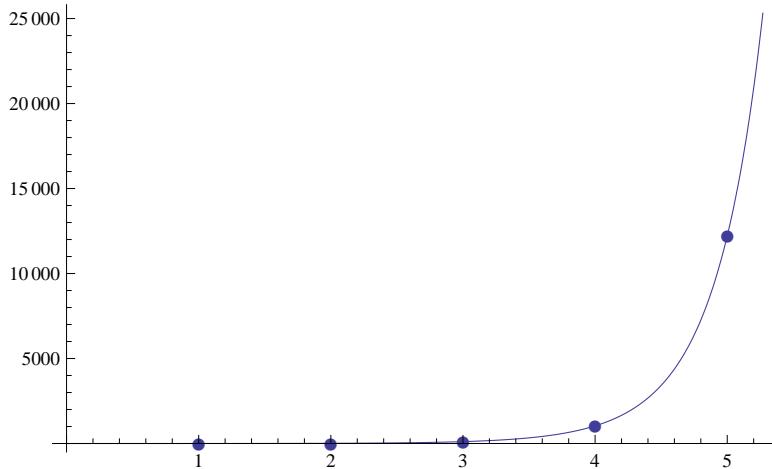
Замествайки коефициентите, получаваме следното.

```

 $\phi[x_] = \phi[x] /. \text{sol}[[1]]$ 
 $\text{plot1} = \text{Plot}[\phi[x], \{x, 0, 6\}];$ 
 $\text{plot2} =$ 
 $\text{ListPlot}[\{\{1, 1\}, \{2, 12\}, \{3, 110\}, \{4, 1037\}, \{5, 12218\}\}, \text{PlotMarkers} \rightarrow \bullet];$ 
 $\text{show}[\text{plot1}, \text{plot2}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$ 

```

$$0.10506 - 0.382376 e^x + 0.25728 e^{2x} + 0.00165052 e^{3x} + 2.4983 \times 10^{-6} e^{4x}$$



□

Много важен частен случай на обобщени полиноми са т.нр. тригонометрични полиноми.

**Дефиниция 8.** *Обобщените полиноми по системата*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\},$$

*които имат вида*

$$\tau_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

*наричаме тригонометрични полиноми от ред n.*

**Твърдение 8.** *Нека  $\alpha \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$ . Тогава за всяка функция f, определена в точките  $\{x_i\}_0^{2n}$  съществува единствен тригонометричен полином  $\tau_n$  от ред n такъв, че*

$$\tau_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, 2n.$$

Тъй като тригонометричните полиноми са очевидно  $2\pi$ -периодични функции, те се явяват удобен апарат за моделиране на периодични явления. Нека разгледаме следния пример:

**Задача 19.** Да се намери приближено функция  $f(x)$ , която моделира број часове слънчева светлина. Променливата  $x$  е денят от годината.

*Решение.* Първо, да отбележим, че за да има смисъл да приближаваме една функция с тригонометричен полином, тази функция трябва да бъде  $2\pi$ -периодична. Ясно е, че периодът на разглежданото явление е 365 дни. Тогава ще направим линейната смяна

$$t = \frac{2\pi}{365}x.$$

В термините на новата променлива функцията  $\bar{f}(t)$  е  $2\pi$ -периодична. Нека използваме следните данни

|              |   |                 |                  |                  |                   |
|--------------|---|-----------------|------------------|------------------|-------------------|
| $t$          | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
| $\bar{f}(t)$ | 9 | 11.1            | 14.9             | 12.9             | 9                 |

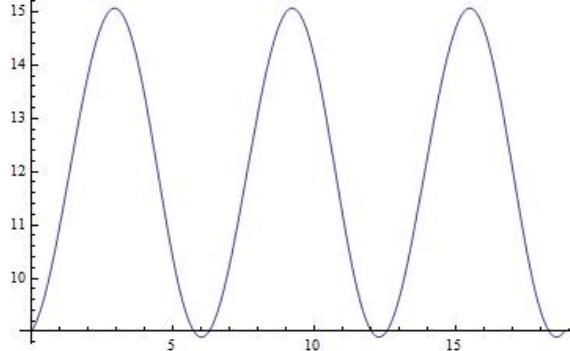
Тези 5 данни могат да определят еднозначно 5 коефициента и следователно можем да построим върху тях тригонометричен полином от ред 2. Търсим го във вида

$$\tau_2(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t.$$

Решаваме системата, която се задава от условията в таблицата, относно коефициентите, и получаваме приблизително

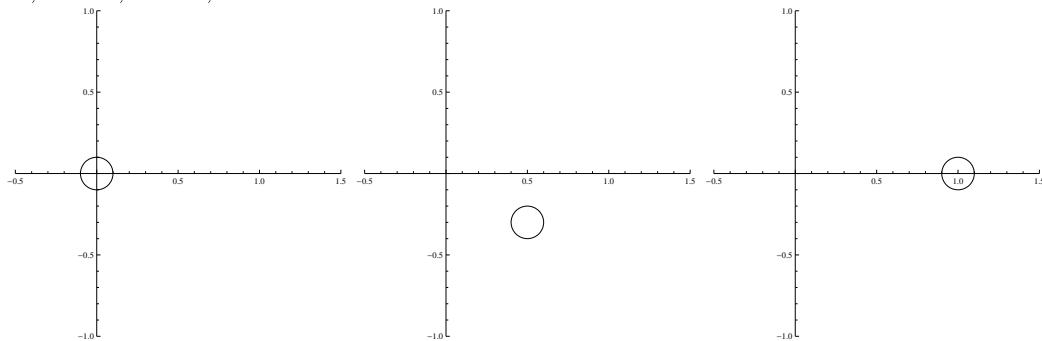
$$\tau_2(t) = 11.975 - 3.00477 \cos t + 0.0297749 \cos 2t + 0.695577 \sin t + 0.0460581 \sin 2t.$$

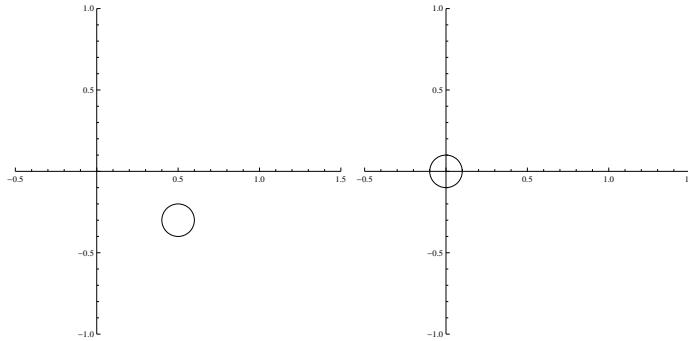
За да добием по-добра представа за характера на разглежданото явление нека изрисуваме графиката му:



От графиката виждаме как периодично денят се увеличава и намалява.  $\square$

Да разгледаме движението на махало. Нека в моментите от време  $t = 0, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$  положенията на махалото са съответно:





Очевидно тези позиции описват един пълен период на движението. Нека означим координатите на центъра с  $(x(t), y(t))$ . Ще моделираме изменението на  $x$ -координатата и  $y$ -координатата като функции на времето, интерполирайки данните, които имаме, с тригонометрични полиноми от ред 2. За целта е необходимо първо да направим смяна на независимата променлива

$$\bar{t} = \frac{\pi}{2}t,$$

за да може периодът на движението да се описва с интервала  $[0, 2\pi]$ . Тъй като, според Твърдение 8 възлите на интерполяция трябва да лежат в интервала  $[0, 2\pi)$ , нека приемем за последната позиция, че е измерена в момента от време  $\bar{t} = 2\pi - 0.01$ , за да можем да определим еднозначно интерполяционните полиноми. И така данните, които имаме, можем да систематизираме в следната таблица:

|           |   |         |       |          |               |
|-----------|---|---------|-------|----------|---------------|
| $t$       | 0 | 1       | 2     | 3        | 4             |
| $\bar{t}$ | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi - 0.01$ |
| $x(t)$    | 0 | 0.5     | 1     | 0.5      | 0             |
| $y(t)$    | 0 | -0.4    | 0     | -0.4     | 0             |

Тъй като имаме по 5 интерполяционни условия, можем да определим еднозначно 5 коефициента, т.e. тригонометрични полиноми от втори ред. Търсим ги във вида:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t + a_3 \cos 2t + a_4 \sin 2t$$

$$y(t) = b_0 + b_1 \cos t + b_2 \sin t + b_3 \cos 2t + b_4 \sin 2t$$

За да определим коефициентите, решаваме системата, определена от интерполяционните условия.

```

xCoord[t_] := a0 + a1Cos[t] + a2Sin[t] + a3Cos[2t] + a4Sin[2t]
yCoord[t_] := b0 + b1Cos[t] + b2Sin[t] + b3Cos[2t] + b4Sin[2t]
xSol = Solve[{xCoord[0] == 0, xCoord[Pi/2] == 0.5, xCoord[Pi] == 1,
               xCoord[3Pi/2] == 0.5, xCoord[2Pi - 0.01] == 0}, Table[a[i], {i, 0, 4}]];
ySol = Solve[{yCoord[0] == 0, yCoord[Pi/2] == -0.4, yCoord[Pi] == 0,
               yCoord[3Pi/2] == -0.4, yCoord[2Pi - 0.01] == 0}, Table[b[i], {i, 0, 4}]];
xCoord[t_] = xCoord[t]/.xSol[[1]];
yCoord[t_] = yCoord[t]/.ySol[[1]];

```

Сега вече сме готови да анимираме движението на махалото:

```

Animate[Graphics[{Disk[{xCoord[t], yCoord[t]}, 0.1], Line[{{0.5, 0.5},
               {xCoord[t], yCoord[t]}}]}, Axes -> True, AxesOrigin -> {0.5, 0.5},
               PlotRange -> {{-0.5, 1.5}, {-1.3, 1}}], {t, 0, 100, 0.001}]

```

## 2.9 Задачи за самостоятелна работа

**Задача 20.** Да се построи интерполяционният полином на Лагранж за таблицата

|        |   |     |   |     |
|--------|---|-----|---|-----|
| $x$    | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 |
| $f(x)$ | 1 | 2   | 3 | 4   |

- а) по метода на неопределените коефициенти;
- б) с формулата на Лагранж

**Задача 21.** Да се намери приближено  $f(x) = e^x$  за  $x = 0.15$ , като се използва таблицата

|        |   |         |        |         |
|--------|---|---------|--------|---------|
| $x$    | 0 | 0.1     | 0.2    | 0.3     |
| $f(x)$ | 1 | 1.10517 | 1.2214 | 1.34986 |

и да се даде оценка на грешката при интерполиране.

**Задача 22.** Като използвате интерполяционната формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома от възможно най-ниска степен, който удовлетворява условията:

|     |    |   |    |    |   |
|-----|----|---|----|----|---|
| $x$ | -3 | 2 | -1 | 3  | 1 |
| $y$ | 0  | 5 | -4 | 12 | 0 |

**Задача 23.** Вземайки предвид данните

|        |   |   |     |   |   |   |
|--------|---|---|-----|---|---|---|
| $x$    | 1 | 2 | 2.5 | 3 | 4 | 5 |
| $f(x)$ | 0 | 5 | 6.5 | 7 | 3 | 1 |

пресметнете  $f(3.4)$ , като използвате последователно интерполяционни полиноми от степени 1, 2, 3. За целта избирайте последователността от интерполяционни възли от таблицата така, че да получите възможно най-добра точност.

*Упътване.* Като вземем предвид представянето на грешката, което знаем

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x),$$

ясно е, че най-добрата възможна точност ще получим, когато възлите са максимално близо до точката 3.4, в която търсим стойността на  $f$ . Така например ако искаме да построим полином от първа степен, трябва да вземем точките  $x_0 = 3$  и  $x_1 = 4$ .

**Задача 24.** Да се намери полиномът, интерполиращ таблицата

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
| 0 | 1 | 2  | 2  | 2  |
| 1 | 4 | 23 | 37 | 50 |

**Задача 25.** Намерете полинома, удовлетворяващ следните интерполяционни условия:

$$P(0) = 8, \quad P(1) = 9, \quad P'(1) = 2, \quad P(2) = 12, \quad P'(2) = 4.$$

**Задача 26.** Да се даде оценка на грешката, която се получава в дадена точка от интервала  $[0, 1]$ , когато интерполираме функцията  $f(x) = e^x$  във възлите  $x_0 = 0$  и  $x_1 = 1$ , съответно с кратности 3 и 1.

# Глава 3

## Приближения в линейни нормирани пространства.

### 3.1 Метод на най-малките квадрати

Дотук разгледахме различни начини за решаване на следната задача:

Дадени са точките  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ . Търсим функция, чиято графика минава точно през тези точки. Както отбеляхме, една възможна интерпретация на тази задача, от гледна точка на практиката, е че са направени краен брой измервания (експерименти) при изследването на дадено явление и търсим функция, която да моделира явлението, като отговаря на тези емпирични резултати. И с най-съвършената техника обаче има някаква допустима грешка при правенето на тези измервания. В много случаи тази грешка не може да бъде пренебрегната. Тогава какъв би бил смисълът да намерим функция, която да минава през тези точки, след като дори самите те не са „на мястото си”? Друг проблем, който видяхме при интерполяцията е, че често полиномите от висока степен имат „лошо” поведение, т.е. може да имаме проблеми при моделирането на явление, за което искаме да приближим голямо количество данни.

Оказва се, че можем да постъпим и по друг начин – да търсим функция, която следва поведението на данните (без задължително да съвпада с тях в която и да е точка) и която е „близо” до тези данни.

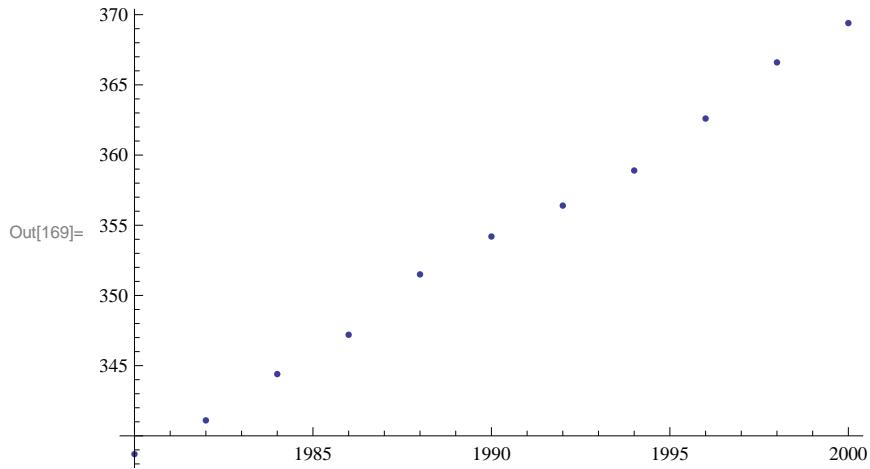
Преди да коментираме самия метод, нека разгледаме няколко реални процеси и да коментираме каква функция е подходяща, за да ги опише (на база на данните, които имаме).

- В таблицата са дадени данни за това как нивото на въглеродния диоксид в атмосферата се е изменяло в периода 1980 – 2000.

| Год.   | 1980  | 1982  | 1984  | 1986  | 1988  | 1990  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $CO_2$ | 338.7 | 341.1 | 344.4 | 347.2 | 351.5 | 354.2 |

| Год.   | 1992  | 1994  | 1996  | 1998  | 2000  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $CO_2$ | 356.4 | 358.9 | 362.6 | 366.6 | 369.4 |

```
In[169]:= ListPlot[{{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4},  
{1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 354.2}, {1992, 356.4},  
{1994, 358.9}, {1996, 362.6}, {1998, 366.6}, {2000, 369.4}}]
```

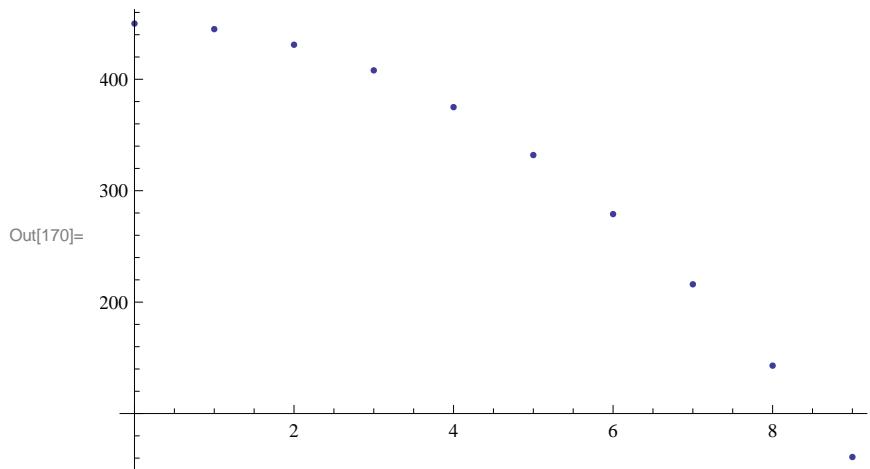


Графиката ни показва, че би било удачно да моделираме разглежданото явление с линейна функция. С други думи, ще търсим приближението във вида  $f(x) = ax + b$ .

- Топка е пусната от височина 450m. Нейната височина е измервана през интервали от 1 сек.

| $t, sec$ | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9  |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| $h, m$   | 450 | 445 | 431 | 408 | 375 | 332 | 279 | 216 | 143 | 61 |

```
In[170]:= ListPlot[{{0, 450}, {1, 445}, {2, 431}, {3, 408},
{4, 375}, {5, 332}, {6, 279}, {7, 216}, {8, 143}, {9, 61}}]
```

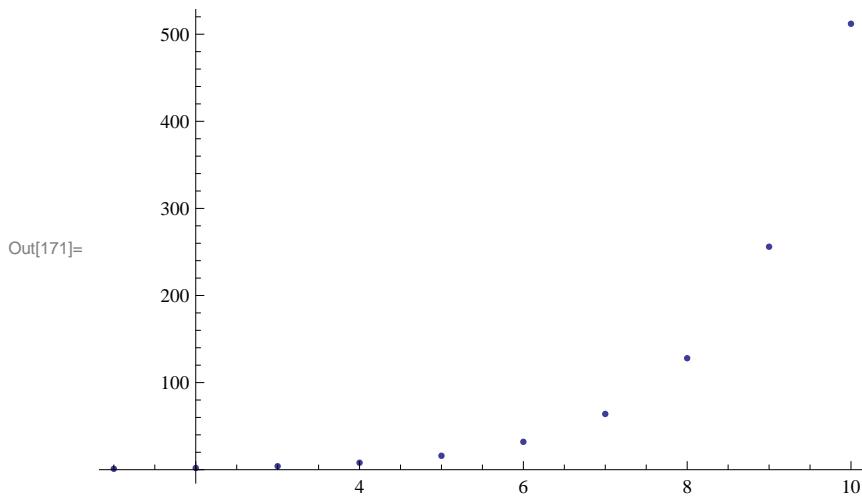


Тук точките изглеждат върху парабола. Затова ще търсим функцията, моделираща процеса, във вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

- Разглеждаме делението на клетки, в зависимост от момента  $t$

| $t$    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8   | 9   | 10  |
|--------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|
| клетки | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |

```
In[171]:= ListPlot[{{1, 1}, {2, 2}, {3, 4}, {4, 8},
{5, 16}, {6, 32}, {7, 64}, {8, 128}, {9, 256}, {10, 512}}]
```



Тук, на база на експерименталните данни, следва да търсим експоненциална зависимост. Ще търсим функцията във вида  $f(x) = ae^{bx}$ .

Ще оставим тези 3 процеса за малко и ще се върнем към тях, след като първо изясним метода, по който ще търсим съответните функции. И така, от горните примери е ясно, че след като сме избрали вида на функцията, с която ще приближаваме, трябва да определим параметрите в нея (например коефициентите на квадратния тричлен във втория пример) така, че функцията да се окаже възможно „най-близо” до данните, които приближаваме. Първото, което трябва да направим, е вече да формализираме понятието „близо”.

Нека точките, които искаме да приближим, имат координати

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

а  $f(x)$  е функция, с която ги приближаваме. Да означим с  $e_i$  грешката, т.e. разликата между действителната и приближената стойност в точката  $x_i$

$$e_i := f(x_i) - y_i.$$

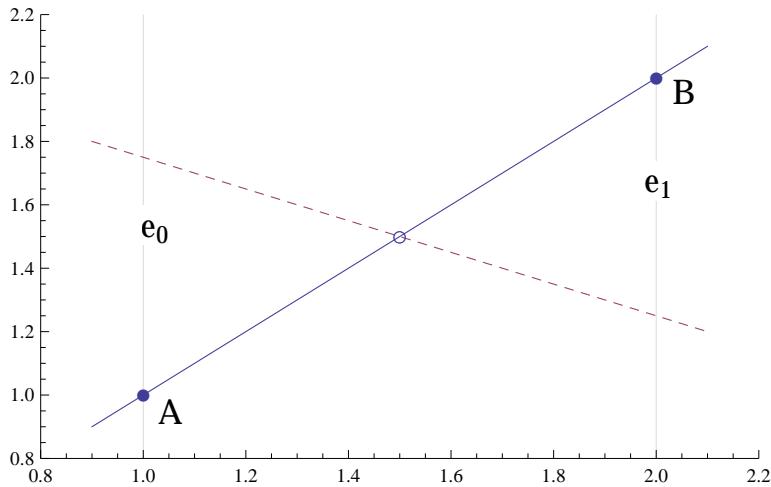
Да разгледаме някои възможни (но, по една или друга причина, неудачни) начини за да дефинираме понятието „най-близо”:

- Първата очевидна идея е да търсим функцията  $f(x)$  така, че сумата от всички грешки да е възможно най-малка, т.e. да е възможно най-малко

$$\sum_{i=0}^n e_i.$$

Да разгледаме обаче следния пример (вж. фигурата). Имаме две точки в равнината  $A = (x_0, y_0)$ ,  $B = (x_1, y_1)$ . Търсим линейна функция, която да е „най-близо” до тях. Очевидно, това би следвало да е правата, която минава през тези две точки. Но, ако вземем произволна друга права, която минава през средата на отсечката  $AB$ , за нея също ще е изпълнено  $e_0 + e_1 = 0$ , тъй като в точките  $A$  и  $B$  грешките ще имат една и съща абсолютна стойност и ще са различни по знак. С други думи, всяка такава права ще

удовлетворява условието  $\sum_{i=0}^n e_i$  да е минимално.



- Възможен начин да избегнем проблема е да не позволим грешките да бъдат с различни знаци, т.е. да ги вземаме по модул и да поставим условието функцията  $f(x)$  да е избрана така, че

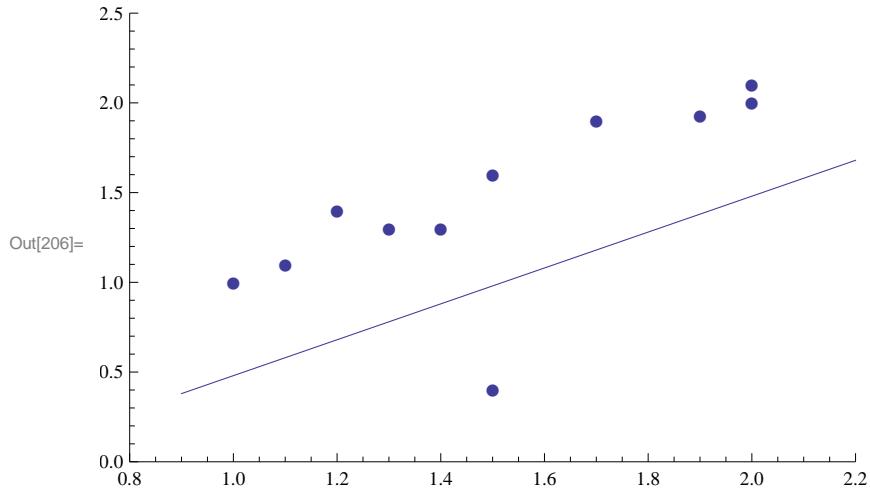
$$\sum_{i=0}^n |e_i|$$

да е минимално. Оказва се обаче, че и при това условие (макар и напълно логично и удовлетворително) в общия случай не можем да намерим единствена функция, която да го изпълнява.

- Можем да подберем функцията  $f(x)$  така, че да е най-малка максималната грешка, т.е. да е най-малко

$$\max_{i=0}^n e_i.$$

Да вземем обаче следния пример:



Всички точки, с изключение на една, лежат приблизително на права, но тази „странична“ точка, която вероятно е резултат от шум или грешка в измерванията, има в някакъв смисъл същото влияние върху избора на правата, както всички останали, взети заедно.

И така, след като показвахме някои неудачни начини, сега вече да се концентрираме върху същността на **метода на най-малките квадрати**. Търсим функцията  $f(x)$  така, че

$$\sum_{i=0}^n e_i^2$$

да е възможно най-малко. Освен, че решава проблема с наличието на различни знаци при сумирането на грешките, оказва се, че този подход води и до единствено решение.

Задачата за минимизиране на тази сума може да се интерпретира и по друг начин. Нека означим с  $y$  и  $F$  съответно векторите с елементи точните и приближените стойности

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \\ F = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Тогава  $e = F - y$  ще бъде векторът с грешките

$$e = (e_0, e_1, \dots, e_n).$$

За него имаме

$$|e| = \sqrt{e_0^2 + e_1^2 + \dots + e_n^2},$$

т.е. задачата за минимизиране на сумата

$$\sum_{i=0}^n e_i^2$$

можем да разглеждаме и като минимизиране на дължината на вектора на грешката.

Следващата стъпка е да покажем как точно ще намерим функцията  $f(x)$  така, че тази сума да е възможно най-малка. Ще го покажем с пример

**Задача 27.** Да се намери линейна функция, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

|       |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_i$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 |

*Решение.* От условието следва, че ще търсим функцията във вида  $f(x) = ax + b$ . Трябва да определим параметрите  $a$  и  $b$  така, че

$$\sum_{i=0}^4 e_i^2 = \sum_{i=0}^4 (f(x_i) - y_i)^2$$

да е възможно най-малко. Имаме

$$f(0) = b; \quad f(1) = a + b; \quad f(2) = 2a + b; \quad f(3) = 3a + b; \quad f(4) = 4a + b.$$

Тогава

$$\sum_{i=0}^4 e_i^2 = (b - 1)^2 + (a + b - 2)^2 + (2a + b - 1)^2 + (3a + b - 0)^2 + (4a + b - 4)^2.$$

Разглеждаме този израз като функция на двете променливи  $a$  и  $b$  (нека я назначим с  $\Phi(a, b)$ ). Необходимо условие тази функция да има минимум в дадена точка е първите частни производни по отношение на всеки параметър да са нули. Получаваме системата

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

По този начин получаваме система с толкова уравнения, колкото са и параметрите в задачата. Решаваме я и еднозначно определяме  $a$  и  $b$ .

$$\begin{cases} 2(a + b - 2) + 2(2a + b - 1).2 + 2(3a + b).3 + 2(4a + b - 4).4 = 0 \\ 2(b - 1) + 2(a + b - 2) + 2(2a + b - 1) + 2(3a + b) + 2(4a + b - 4) = 0 \end{cases}$$

Окончателно имаме  $a = \frac{2}{5}$ ,  $b = \frac{4}{5}$ . Така получихме търсената функция във вида

$$f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}.$$

□

**Задача 28.** По метода на най-малките квадрати да се намери парабола, която приближава таблицата

|       |    |    |    |    |   |   |
|-------|----|----|----|----|---|---|
| $x_i$ | -2 | -1 | 0  | 1  | 2 | 3 |
| $y_i$ | -4 | 15 | -9 | 10 | 7 | 6 |

*Решение.* Търсим функцията във вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Трябва да минимираме сумата

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 e_i^2 &= (f(-2) - (-4))^2 + (f(-1) - 15)^2 + (f(0) - (-9))^2 + (f(1) - 10)^2 \\ &\quad + (f(2) - 7)^2 + (f(3) - 6)^2 \\ &= (4a - 2b + c + 4)^2 + (a - b + c - 15)^2 + (c + 9)^2 + (a + b + c - 10)^2 \\ &\quad + (4a + 2b + c - 7)^2 + (9a + 3b + c - 6)^2 = \Phi(a, b, c) \end{aligned}$$

За да бъде минимална тази сума коефициентите  $a$ ,  $b$ ,  $c$  трябва да са такива, че да удовлетворяват системата

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Нека решим тази система с помощта на системата Mathematica:

```
In[5]:= Φ[a_, b_, c_] := (4 a - 2 b + c + 4)^2 + (a - b + c - 15)^2 +
(c + 9)^2 + (a + b + c - 10)^2 + (4 a + 2 b + c - 7)^2 + (9 a + 3 b + c - 6)^2
Solve[{∂aΦ[a, b, c] == 0, ∂bΦ[a, b, c] == 0, ∂cΦ[a, b, c] == 0}, {a, b, c}]
```

```
Out[6]= {{a → -2/7, b → 11/7, c → 30/7}}
```

Тогава получихме окончателно

$$f(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \frac{11}{7}x + \frac{30}{7}$$

□

И така, след като изяснихме самия метод, нека се върнем към трите модела, които разгледахме.

**Задача 29.** Да се намери подходяща функция, която моделира изменението на нивото на въглероден диоксид в атмосферата (вж. таблицата на стр. 38).

*Решение.* Казахме, че ще търсим приближението във вида  $f(x) = ax + b$ . За да определим коефициентите  $a$  и  $b$ , трябва да решим системата

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{cases},$$

където

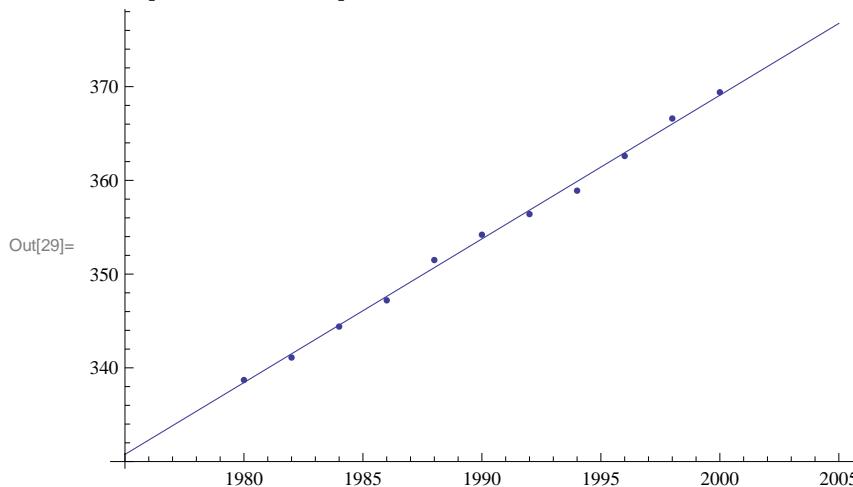
$$\Phi(a, b) = \sum_{i=0}^{10} (f(x_i) - y_i)^2.$$

Нека направим това в Mathematica:

```
In[19]:= f[x_] := a x + b
Φ[a_, b_] := (f[1980] - 338.7)^2 + (f[1982] - 341.4)^2 +
(f[1984] - 344.4)^2 + (f[1986] - 347.2)^2 + (f[1988] - 351.5)^2 +
(f[1990] - 354.2)^2 + (f[1992] - 356.4)^2 + (f[1994] - 358.9)^2 +
(f[1996] - 362.6)^2 + (f[1998] - 366.6)^2 + (f[2000] - 369.4)^2
coeffs = Solve[{∂a Φ[a, b] == 0, ∂b Φ[a, b] == 0}, {a, b}]
Out[21]= { {a → 1.53273, b → -2696.37} }
```

Да илюстрираме графично:

```
In[27]:= plot1 = ListPlot[{{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4},
{1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 354.2}, {1992, 356.4},
{1994, 358.9}, {1996, 362.6}, {1998, 366.6}, {2000, 369.4}}];
plot2 = Plot[f[x] /. coeffs[[1]], {x, 1975, 2005}];
Show[plot1, plot2]
```



□

Преди да се концентрираме върху третия модел ще коментираме една техника, която е полезна в определени ситуации. (не е правено на упражнения)

Нека търсим приближението във вида  $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ . Очевидно в този случай системата уравнения, която ще получим за параметрите  $a$  и  $b$  ще бъде нелинейна. Разбира се, можем да я решаваме в този вид, но можем да подходим и по друг начин. Имаме

$$y_i \approx f(x_i) = \alpha e^{\beta x_i}$$

Тогава, логаритмувайки двете страни, получаваме

$$\ln y_i \approx \ln \alpha + \beta x_i$$

и сега отново определяме коефициентите така, че да минимизират

$$\sum_{i=0}^n e_i,$$

но за  $e_i$  вземаме  $\ln y_i - (\ln \alpha + \beta x_i)$  (т.е. минимизираме  $\sum_{i=0}^n (\ln y_i - \ln f(x_i))^2$ ).

Полагайки  $\ln \alpha = c$ , получената система ще е линейна спрямо  $c$  и  $\beta$ . След като намерим  $c$ , връщайки се в полагането, имаме  $\alpha = e^c$ . Ще илюстрираме тази техника с пример след малко, но първо да видим още една подобна ситуация:

Търсим приближението във вида

$$f(x) = \frac{\alpha x}{\beta + x}.$$

С други думи, имаме

$$y_i \approx \frac{\alpha x_i}{\beta + x_i}$$

Вземаме реципрочните стойности на двете страни и имаме

$$\frac{1}{y_i} \approx \frac{\beta}{\alpha} x_i + \frac{1}{\alpha}.$$

Дефинираме

$$e_i := \frac{1}{y_i} - \left( \frac{\beta}{\alpha} x_i + \frac{1}{\alpha} \right),$$

полагаме  $\frac{\beta}{\alpha} = A$  и  $\frac{1}{\alpha} = B$  и получената система ще бъде линейна спрямо  $A$  и  $B$ .

След тези предварителни сведения вече сме готови да моделираме и третия пример от началото на параграфа (за деленето на клетките).

**Задача 30** (не е правено на упражнения). Да се намери функция от вида  $f(x) = Ae^{Bx}$ , която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата от стр. 39

*Решение.* От графиката на таблицата видяхме, че е удачно да търсим приближението във вида

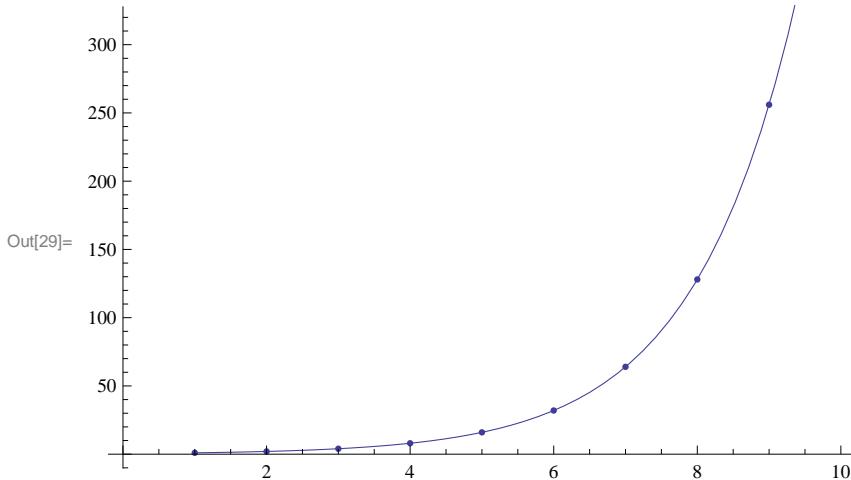
$$f(x) = ae^{bx}$$

Както казахме, ще минимизираме сумата от квадратите на  $f(x_i) - y_i$ , а на  $\ln f(x_i) - \ln y_i$ , т.e. на разликата от логаритмите на приближената и точната стойност. С други думи, искаме да определим коефициентите  $a$  и  $b$  така, че

$$\sum (f(x_i) - (c + bx_i))^2,$$

където  $c = \ln a$ , да е възможно най-малко.

```
In[30]:= g[x_] := c + b x
Phi[c_, b_] := (g[1] - Log[1])^2 + (g[2] - Log[2])^2 + (g[3] - Log[3])^2 +
(g[4] - Log[8])^2 + (g[5] - Log[16])^2 + (g[6] - Log[32])^2 +
(g[7] - Log[64])^2 + (g[8] - Log[128])^2 + (g[9] - Log[256])^2 +
(g[10] - Log[512])^2
coeffs = NSolve[{∂c Φ[c, b] == 0, ∂b Φ[c, b] == 0}, {c, b}]
f[x_] := E^c * E^(b x)
plot1 = ListPlot[{{1, 1}, {2, 2}, {3, 4}, {4, 8},
{5, 16}, {6, 32}, {7, 64}, {8, 128}, {9, 256}, {10, 512}}];
plot2 = Plot[f[x] /. coeffs[[1]], {x, 1, 10}];
Show[plot1, plot2]
Out[25]= {{c → -0.693147, b → 0.693147}}
```



□

Нека сега разгледаме в общ вид задачата за приближаване на точките

$$(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)$$

с алгебрични полиноми. Т.e. ще търсим приближението във вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Функцията, която трябва да минимизираме, има вида

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^s (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^s (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n - y_i)^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0 \end{array} \right.$$

За да определим коефициентите на полинома, трябва да решим системата. След като диференцираме и разделим двете страни на всяко уравнение на 2, получаваме

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n - y_i) &= 0 \\ \sum_{i=0}^s [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n - y_i) x_i] &= 0 \\ \dots & \\ \sum_{i=0}^s [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n - y_i) x_i^n] &= 0 \end{aligned}$$

Записана в матричен вид, тази система изглежда така:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} \sum_{i=0}^s 1 & \sum_{i=0}^s x_i & \sum_{i=0}^s x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^s x_i^n \\ \sum_{i=0}^s x_i & \sum_{i=0}^s x_i^2 & \sum_{i=0}^s x_i^3 & \cdots & \sum_{i=0}^s x_i^{n+1} \\ \sum_{i=0}^s x_i^2 & \sum_{i=0}^s x_i^3 & \sum_{i=0}^s x_i^4 & \cdots & \sum_{i=0}^s x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^s x_i^n & \sum_{i=0}^s x_i^{n+1} & \sum_{i=0}^s x_i^{n+2} & \cdots & \sum_{i=0}^s x_i^{2n} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^s y_i \\ \sum_{i=0}^s x_i y_i \\ \sum_{i=0}^s x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^s x_i^n y_i \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Нека означим матрицата на системата с  $X$ , вектор-стълба с коефициентите с  $a$  и вектор-стълба с десните страни с  $y$ . Тогава системата добива вида

$$Xa = y$$

и получаваме коефициентите по формулата

$$a = X^{-1}y.$$

Вземайки предвид матричното представяне на системата уравнения, нека отново приближим данните от задача 27:

**Задача 31.** По метода на най-малките квадрати да се намери полином от първа степен, който приближава точките

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 |

*Решение.* Търсим приближенето във вида  $f(x) = a_0 + a_1 x$ . Вземайки предвид (3.1), получаваме матричното уравнение

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}}_X \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}}_y$$

Сега имаме  $c = A^{-1}y$ . Решаваме в Mathematica:

```
In[4]:= X = {{5, 10}, {10, 30}};
y = {{8}, {20}};
a = Inverse[X].y // MatrixForm
```

Out[6]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Окончателно получихме  $f(x) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}x$ . □

Да дадем още един пример.

**Задача 32.** Да се намери параболата, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

|     |    |    |    |   |   |   |    |
|-----|----|----|----|---|---|---|----|
| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  |
| $y$ | 7  | 4  | -1 | 1 | 5 | 6 | 13 |

*Решение.* Търсим приближението във вида  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Ще работим отново в Mathematica:

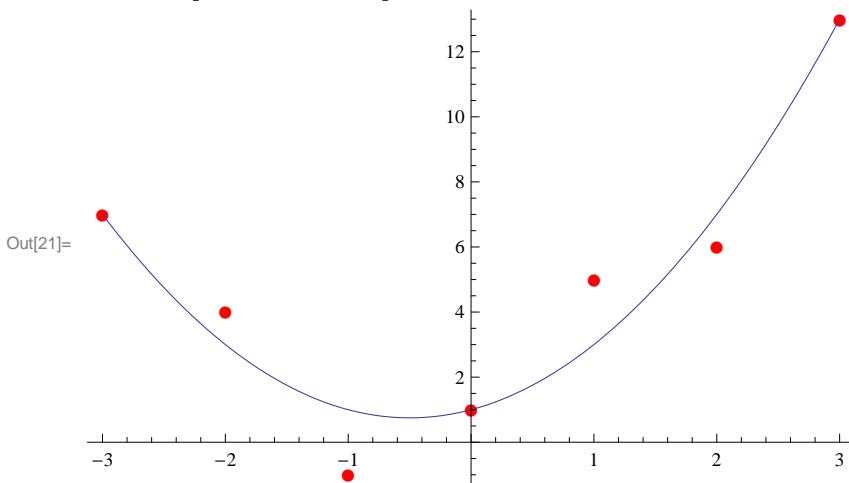
```
In[22]:= Do[xi = i - 4, {i, 1, 7}];
y1 = 7; y2 = 4; y3 = -1; y4 = 1; y5 = 5; y6 = 6; y7 = 13;
X = {{7, Sum[xi, {i, 1, 7}], Sum[xi^2, {i, 1, 7}], Sum[xi^3, {i, 1, 7}], Sum[xi^4, {i, 1, 7}]}, {Sum[yi, {i, 1, 7}], Sum[xi yi, {i, 1, 7}], Sum[xi^2 yi, {i, 1, 7}]};
Y = {{Sum[yi, {i, 1, 7}], Sum[xi yi, {i, 1, 7}], Sum[xi^2 yi, {i, 1, 7}]}};
a = Inverse[X].Y // MatrixForm
```

Out[12]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Така получихме, че  $f(x) = 1 + x + x^2$ . Нека илюстрираме графично, като изчертаем графиката на полинома и точките в една координатна система:

```
In[19]:= plot1 = ListPlot[Table[{xi, yi}, {i, 1, 7}], PlotStyle -> Red, PlotMarkers -> ●];
plot2 = Plot[x^2 + x + 1, {x, -3, 3}];
Show[plot1, plot2]
```



□

Сега ще покажем как можем да използваме метода на най-малките квадрати, за да решаваме преопределени системи. С други думи ще търсим възможно най-доброто решение (в смисъл, който ще дефинираме по-долу) за система, която има повече уравнения, отколкото неизвестни.

**Задача 33.** Да се реши преопределената система

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

*Решение.* Отново ще приложим същата идея, която приложиме и по-горе – търсим приближеното решение  $(\bar{x}, \bar{y})$  така, че

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = \sum e_i^2$$

да е минимално. Тук с  $e_i$  сме означили грешката, която се получава в  $i$ -тото уравнение, т.е. разликата между стойностите на лявата и дясната страна.

Получаваме

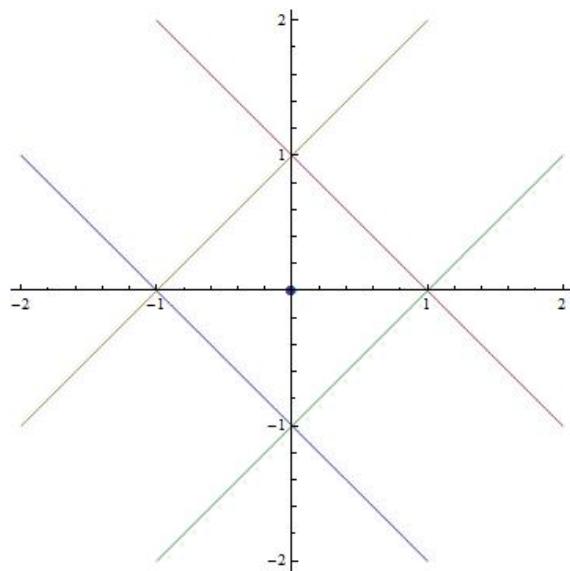
$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x} - \bar{y} - 1)^2 + (\bar{x} + \bar{y} - 1)^2 + (\bar{x} + \bar{y} + 1)^2 + (\bar{x} - \bar{y} + 1)^2$$

Необходимото условие да има функцията  $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$  минимум е

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} = 0 \end{cases}$$

Решаваме тази система и получаваме окончателно  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ .

Нека видим геометричния смисъл на така полученото решение. Всяко едно от уравненията определя една права. Тогава търсим такава точка, която да е възможно най-близо до всички тези прости. Очевидно това е точно центърът на квадрата, заключен между правите:



□

## 3.2 Норма и разстояние

В предишния параграф разглеждахме въпроса за намиране на функция, която минава “близо” до дадени точки, без задължително да минава през тях. За тази цел въведохме критерий, който да оценява количествено колко “близо” е дадена функция до точките. Изобщо казано, е необходимо да имаме начини да оценим колко “близо” са две функции една до друга. Две фундаментални понятия в математиката, които отговарят на тази необходимост, са понятията разстояние и норма.

**Дефиниция 9.** Нека  $F$  е дадено линейно пространство. Казваме, че в  $F$  е въведена **норма**, ако на всеки елемент  $f$  от  $F$  е съпоставено число  $\|f\|$  (наречено **норма на  $f$** ), като при това са удовлетворени условията

- 1)  $\|f\| \geq 0$  (равенство се достига т.с.т.к.  $f = 0$ );
- 2)  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ ,  $\forall \lambda$ ;
- 3)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ,  $\forall f, g \in F$ .

**Дефиниция 10.** Нека  $F$  е дадено линейно пространство. Казваме, че в  $F$  е въведено **разстояние**, ако на всеки два елемента  $f, g \in F$  съпоставяме число  $\rho(f, g)$ , което удовлетворява следните изисквания:

- 1)  $\rho(f, g) \geq 0$ , като равенство се достига т.с.т.к.  $f = g$ ;
- 2)  $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ ;
- 3)  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ ,  $\forall f, g, h \in F$ .

*Забележка.* Понятията норма и разстояние са естествени обобщения съответно на разстоянието на дадена точка от нулата и разстоянието между две точки в геометричния смисъл.

*Забележка.* Всяка норма поражда разстояние. Т.е. ако имаме нормата  $\|\cdot\|$  в  $F$ , то можем да дефинираме разстояние между два елемента в  $F$ , като нормата на разликата им ( $\|f - g\|$ ). Не е трудно да се провери, че така дефинираното разстояние удовлетворява условията от Дефиниция 10.

Ще разгледаме две често използвани на практика норми и породените от тях разстояния.

**Дефиниция 11.** Нека разглеждаме  $C[a, b]$  – множеството от всички непрекъснати в интервала  $[a, b]$  функции. В него дефинираме **равномерна норма** по следния начин:

$$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Тя поражда **равномерното разстояние**:

$$\rho(f, g) := \|f - g\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

*Забележка.* Тъй като функциите  $f$  и  $g$  са непрекъснати, то според Теоремата на Вайерщрас в затворения интервал  $[a, b]$  максимумът се достига.

**Задача 34.** Да се намерят равномерните норми в интервала  $[0, 1]$  на функциите  $f(x) = x$  и  $g(x) = x^2$  и равномерното разстояние между тях в същия интервал.

*Решение.* Прилагаме дефиницията

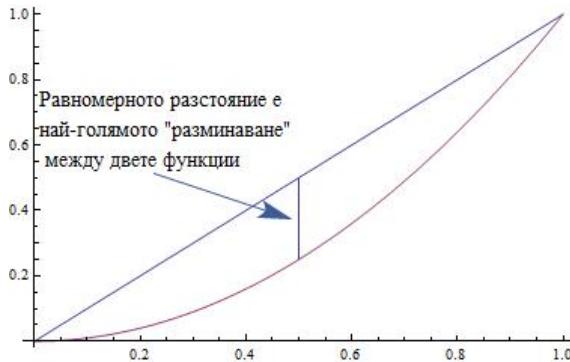
$$\|f\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |x| = 1$$

$$\|g\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |x^2| = 1$$

Равномерното разстояние между двете функции е

$$\|f - g\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |x - x^2| = \frac{1}{4}.$$

Да отбележим, че последният екстремум се достига при  $x = \frac{1}{2}$  (върхът на параболата). Геометричният смисъл на равномерното разстояние между  $f(x)$  и  $g(x)$  е илюстриран на следващата фигура. Това е най-голямата (по абсолютна стойност) разлика между стойностите на двете функции в интервала.



□

**Дефиниция 12.** Разглеждаме пространството  $L_2[a, b]$  от всички функции с интегруем квадрат в интервала  $[a, b]$ . В него въвеждаме нормата

$$\|f\|_{L_2[a,b]} := \left\{ \int_a^b \mu(x) f^2(x) dx \right\}^{1/2}.$$

Ще я наричаме **средноквадратична норма** с тегло  $\mu(x)$  в интервала  $[a, b]$ .  
Тя поражда **средноквадратично разстояние**:

$$\rho(f, g) := \|f - g\|_{L_2[a,b]} = \left\{ \int_a^b \mu(x) (f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{1/2}$$

Забележска. Дължината на вектора  $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  в  $\mathbb{R}^n$  е

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$$

(по-точно Евклидовата му норма). Тогава средноквадратичното разстояние се явява аналог на дължината на вектора, където сумата е заменена с интеграл.

**Задача 35.** Да се намери средноквадратичното разстояние с тегло  $\mu(x) = 1$  между функциите  $f(x) = x$  и  $g(x) = x^2$  в интервала  $[0, 1]$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}\|f - g\|_{L_2[0,1]} &= \left\{ \int_0^1 (x - x^2)^2 dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{30}}\end{aligned}$$

□

*Забележка.* Ако сравним средноквадратичното разстояние между  $f(x)$  и  $g(x)$  в дадения интервал с равномерното разстояние между същите функции, което намерихме в Задача 34, ще видим, че средноквадратичното разстояние е по-малко. Това, разбира се, е естествено, тъй като равномерното разстояние дава максимума на разликата между двете функции, докато средноквадратичното в някакъв смисъл усреднява разликите във всички точки.

Да разгледаме отново зад. 14, в която приближихме функцията на Рунге с полиноми от 4-та и 10-та степен. Гледайки графиките, интуитивно казахме, че приближението с полинома от 10-та степен е “по-лошо”. Сега обаче имаме средство, с помощта на което можем да сравним приближението в двата случая.

**Задача 36.** Дадена е функцията

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Тя е апроксимирана с полиномите

$$p_4(x) = 1 - 4.22719x^2 + 3.31565x^4$$

и

$$p_{10}(x) = 1 - 16.8552x^2 + 123.36x^4 - 381.434x^6 + 494.91x^8 - 220.942x^{10}.$$

Да се намерят и сравнят равномерните и средноквадратичните разстояния в интервала  $[-1, 1]$  между  $f$  и двета полинома.

*Решение.* Да намерим първо равномерните разстояния в двата случая:

```
In[11]:= f[x_] := 1/(1 + 25 x^2)
p4[x_] := 1 - 4.27719 x^2 + 3.31565 x^4
p10[x_] := 1 - 16.8552 x^2 + 123.36 x^4 - 381.434 x^6 + 494.91 x^8 - 220.942 x^10
In[5]:= Maximize[{Abs[f[x] - p4[x]], -1 ≤ x ≤ 1}, x]
Out[5]= {0.438357, {x → -0.79475}}
In[6]:= Maximize[{Abs[f[x] - p10[x]], -1 ≤ x ≤ 1}, x]
Out[6]= {1.91566, {x → -0.940219}}
```

И така, равномерните разстояния са съответно  $\|f - p_4\|_{C[-1,1]} = 0.438357$  и  $\|f - p_{10}\|_{C[-1,1]} = 1.91566$ . Второто е значително по-голямо. Разбира се, до този

извод бихме могли да стигнем и гледайки графиките на полиномите и функцията в двата случая, тъй като равномерното разстояние е най-голямата грешка, взета по абсолютна стойност, в дадения интервал.

Да сравним сега средноквадратичните разстояния, които вземат предвид грешките, получени при апроксимацията във всяка точка от интервала.

```
In[14]:= Sqrt[Integrate[(f[x] - p4[x])2, {x, -1, 1}]]
```

```
Out[14]= 0.394831
```

```
In[15]:= Sqrt[Integrate[(f[x] - p10[x])2, {x, -1, 1}]]
```

```
Out[15]= 0.820905
```

Виждаме, че и в този случай разстоянието е по-голямо при полинома от десета степен.  $\square$

Средноквадратичното разстояние (като и кое да е друго разстояние) ни дава критерий за това колко “близо” са две функции една до друга. Нека е дадена функцията  $f$ . Можем да използваме този критерий, за да намерим функция от определен клас, например алгебричен полином, която да приближава  $f$  възможно най-добре (т.е. да е възможно “най-близо”) в смисъла на този критерий. Да разгледаме следния пример.

**Задача 37.** Да се намери полиномът на най-добро средноквадратично приближение от втора степен в интервала  $[0, 1.5]$  за функцията  $f(x) = e^x$  при тегло  $\mu(x) = 1$ .

*Решение.* Търсим полинома във вида  $g(x) = ax^2 + bx + c$ . Искаме да определим коефициентите така, че средноквадратичното разстояние между  $f$  и  $g$  да е възможно най-малко. Имаме

$$\|f - g\|_{L_2[0,1]} = \left\{ \int_0^{1.5} (f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Искаме това разстояние да е минимално и следователно търсим минимума на

$$\Phi(a, b, c) = \int_0^{1.5} (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Условията за това са

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Решаваме тази система с Mathematica:

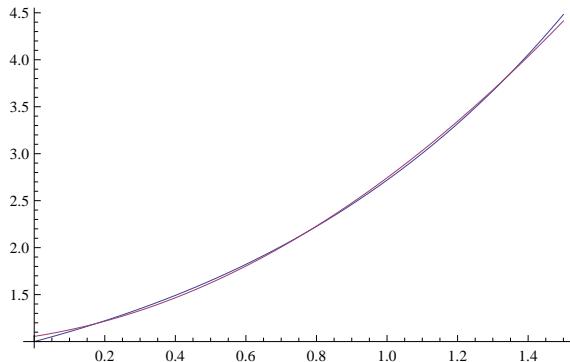
```
In[35]:= f[x_] := E^x
p[x_] := a x2 + b x + c
Φ[a_, b_, c_] := Integrate[(f[x] - p[x])2, {x, 0, 1.5}]
coeffs = NSolve[ $\partial_a \Phi[a, b, c] = 0 \&& \partial_b \Phi[a, b, c] = 0 \&& \partial_c \Phi[a, b, c] = 0$ , {a, b, c}]

Out[38]= { {a \rightarrow 1.1017, b \rightarrow 0.58595, c \rightarrow 1.05539} }
```

Тогава полиномът на най-добро средноквадратично приближение е

$$g(x) \approx 1.1017x^2 + 0.58595x + 1.05539.$$

На следващата фигура апроксимацията е илюстрирана геометрично:



### 3.3 Задачи за самостоятелна работа

**Задача 38.** Топка е пусната от височина  $450m$ . Височината, на която се намира, е измервана през интервали от 1 сек.

|          |     |     |     |     |     |     |     |     |     |    |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| $t, sec$ | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9  |
| $h, m$   | 450 | 445 | 431 | 408 | 375 | 332 | 279 | 216 | 143 | 61 |

По метода на най-малките квадрати да се намери квадратната функция, която описва падането на топката.

**Задача 39.** Да се намери подходяща функция, приближаваща таблицата

|     |   |   |   |   |    |
|-----|---|---|---|---|----|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| $y$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 32 |

**Задача 40.** Да се реши преопределената система

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0.2 \\ x + 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

**Задача 41.** Да се реши преопределената система

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y + z = 3 \\ x - 4y + z = 4 \\ x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

**Задача 42.** Да се намери полином от втора степен на най-добро средноквадратично приближение в интервала  $[0, \frac{\pi}{2}]$  при тегло  $\mu(x) = 1$  за функцията  $f(x) = \sin x$ . Да се илюстрира графично.

# Глава 4

## Числено диференциране и интегриране

### 4.1 Интерполяционни квадратурни формули

Важен клас от числени методи са тези за приближено намиране на определени интеграли. Ясно е, че голяма част от интегралите не могат да бъдат решени точно. Ето защо от изключителна важност е да се намерят начини, по които стойността на съответните интеграли да може да се намира с достатъчно добра точност.

Първият начин, който ще разгледаме са т. нар. интерполяционни квадратурни формули:

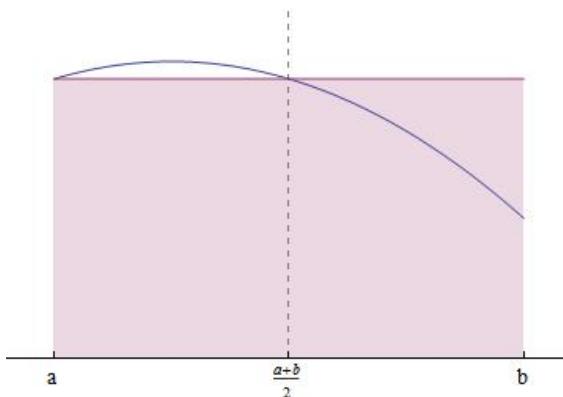
- Квадратурна формула на правоъгълниците

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Грешката при приближаване е

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3, \quad \xi \in (a, b)$$

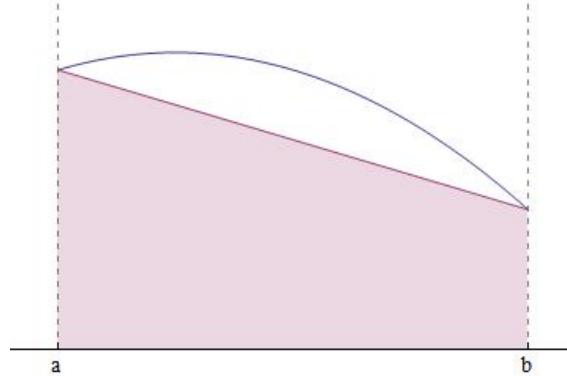
Геометричният смисъл на тази формула е следният – вместо лицето на криволинейния трапец, заключен под графиката на функцията  $f(x)$ , намираме лицето на правоъгълника със страни  $b-a$  и  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .



- Квадратурна формула на трапеците

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$



- Квадратурна формула на Симпсън

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5$$

Ще изведем квадратурната формула на трапеците, за да покажем как става това. За другите формули нещата стоят по подобен начин.

Търсим приближение за

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Тогава можем да заместим функцията  $f(x)$  с интерполяционния ѝ полином от степен 1 за възлите  $x_0 = a$  и  $x_1 = b$  и тогава ще имаме

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(f; x)dx.$$

Получаваме

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_1(f; x)dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b) + \frac{x-b}{a-b} \cdot f(a) \right) dx \\ &= \frac{f(b)}{b-a} \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b - \frac{f(a)}{b-a} \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{f(b)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} - \frac{f(a)}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \end{aligned}$$

Аналогично могат да се изведат и формулите на правоъгълниците и Симпсън, като функцията  $f(x)$  се апроксимира съответно с  $L_0(f; x)$  във възела  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  и  $L_2(f; x)$  във възлите  $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ .

**Задача 43.** Да се намери приближено стойността на

$$I = \int_{0.5}^1 x^6 dx$$

и да се даде оценка на грешката (по абсолютна стойност)  $R$ , като се използва формулата на:

- а) правоъгълниците;
- б) трапеците;
- в) Симпсън.

Да се сравни с точната стойност  $\frac{127}{896} \approx 0.141741$ .

*Решение.* Да означим  $f(x) := x^6$ . Във всеки от трите случая първо ще дадем оценка на грешката, а след това и ще намерим съответните приближения на  $I$ . Имаме:

- а) За грешката имаме

$$R = \left| \frac{f''(\xi)}{24} (b-a)^3 \right| = \frac{30 |\xi^4|}{24} \cdot 0.5^3 \leq \frac{30}{24} \cdot 0.125 = 0.15625$$

При оценяването на грешката използвахме, че  $\xi \in (0.5, 1)$ . Сега получаваме

$$I \approx 0.5 f(0.75) \approx 0.0889893.$$

Действителната грешка е приблизително 0.05, което е в съответствие с оценката, която дадохме.

- б) За оценка на грешката получаваме

$$R = \left| -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)^3 \right| = \frac{30 |\xi^4|}{12} \cdot 0.5^3 \leq \frac{30}{12} \cdot 0.125 = 0.3125.$$

За приближението получаваме

$$I \approx 0.5 \frac{f(0.5) + f(1)}{2} \approx 0.253906.$$

Действителната грешка е приблизително 0.11.

- в) За оценката на грешката имаме

$$R = \left| -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b-a)^5 \right| = \frac{360 |\xi^2|}{2880} \cdot 0.5^5 \leq \frac{360}{2880} \cdot 0.03125 = 0.00390625.$$

$$I \approx \frac{0.5}{6} (f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) \approx 0.143962$$

В действителност грешката е приблизително 0.0022.

□

Обикновено, с цел да се постигне по-добра точност, се използват т.нр. съставни квадратурни формули. Нека търсим приближение за

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Разделяме интервала  $[a, b]$  на  $n$  равни подинтервала с дължина  $h = \frac{b-a}{n}$ . Нека вземем точките  $\{x_i = a + ih\}_{i=0}^n$ . Тогава

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

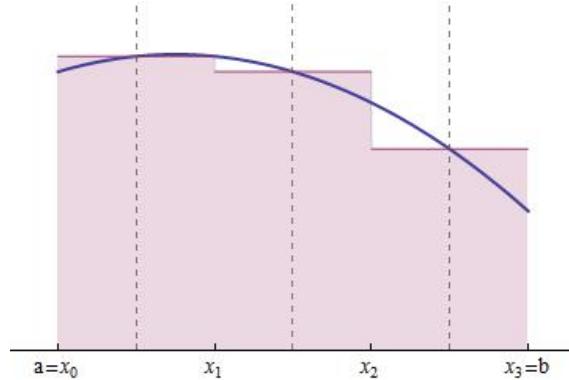
Сега, прилагайки към всеки от подинтервалите една от квадратурните формули (на правоъгълниците, на трапеците, на Симпсън), получаваме съответно:

- **Съставна квадратурна формула на правоъгълниците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

За грешката може да се покаже, че

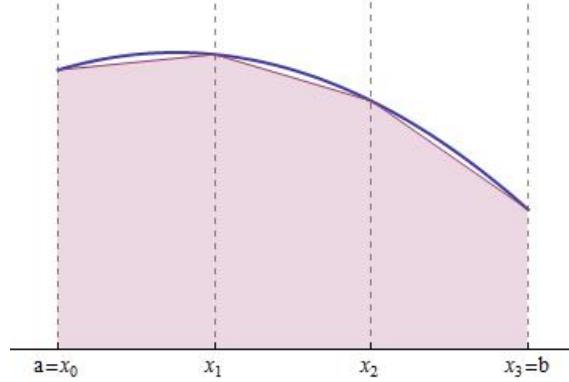
$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi).$$



- **Съставна квадратурна формула на трапеците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$



• Съставна квадратурна формула на Симпсън

$$I(f) = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n \left[ f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi)$$

**Задача 44.** Да се намери  $n$  така, че  $n$ -тата съставна квадратурна формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсън) да приближава

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

с грешка, не по-голяма от  $\epsilon = 0.00001$ . Да се намери това приближение.

*Решение.* а) По формулата на правоъгълниците имаме за представянето на грешката

$$R_{rect} = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{24n^2}.$$

Диференцираме  $f(x)$  и получаваме

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$f''(x)$  е намаляваща (и положителна) в интервала  $[0, 1]$  (проверете, че  $f'''(x) < 0$  в този интервал) и тогава достига максималната си по модул стойност в този интервал за  $x = 0$ . Тогава

$$R_{rect} = \frac{2}{24n^2(1+\xi)^3} \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Искаме грешката да е по-малка от  $\epsilon$  и тогава

$$\frac{1}{12n^2} \leq 10^{-5} \iff n^2 \geq \frac{10^5}{12}$$

Следователно  $n$  трябва да е поне 92. Обърнете внимание, че това е най-малката стойност на  $n$ , която гарантира грешка, по-малка от  $\epsilon$ . Възможно е достатъчно добро приближение да се получи и за значително по-малки стойности на  $n$ .

Сега да намерим самото приближение за  $I$ .

```

In[1]:= f[x_] := 1/(1+x)
h = 1./92;
nodes = Table[i h, {i, 0, 92}];
i = 1/92 Sum[f[(nodes[[i-1]] + nodes[[i]])/2], {i, 2, 93}]
Out[4]= 0.693143

```

Ако сравним така намереното приближение с това, което дава Mathematica като резултат (0.693147), ще видим, че резултатът е действително точен до петия знак след десетичната запетая.

- б) Приближението по формулата на трапеците можете да направите самостоятелно за упражнение.

в)  $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$ . Тогава за представянето на грешката, използвайки формулата на Симпсън, имаме

$$R_{simp} \leq \frac{24}{2880n^4} \Rightarrow \frac{24}{2880n^4} \leq 10^{-5},$$

т.е.  $n \geq 6$ . Намираме приближената стойност за  $I$ :

```

f[x_] := 1/(1+x)
h = 1./6;
nodes = Table[j h, {j, 0, 6}];
i = 1/(6*6) Sum((f[nodes[[j-1]]] +
4 f[(nodes[[j-1]] + nodes[[j]])/2] + f[nodes[[j]]]), {j, 2, 7})
Out[16]= 0.693149

```

□

### **Практически метод за приближено пресмятане на интеграли с определена точност**(Не е правено на упражнения)

На практика в много случаи е невъзможно (или много трудно) да се даде оценка на грешката, използвайки формулата, както направихме в задача 44. Тогава може да се използва следната идея. Нека търсим приближена стойност на интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

с точност, не по-лоша от някакво отнапред зададено  $\epsilon$ . Ще използваме например съставната квадратурна формула на Симпсън. Последователно намираме приближения по формулата, като разделяме интервала  $[a, b]$  на  $2, 3, \dots$  подинтервала. Правим това, докато две последователни приближения, които сме намерили, се различават помежду си с не повече от  $\epsilon$ . Тогава можем да считаме, че сме намерили  $I$  с близка до желаната точност. Нека дадем пример, като разгледаме отново същия интеграл, както и в задача 44.

**Задача 45.** Като използвате описания по-горе метод, намерете приближено стойността на

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Алгоритъмът да приключва, когато разликата между приближенията в две съседни итерации стане по-малка от  $10^{-10}$  или докато броят на итерациите стане 1000.

*Решение.* Ще реализираме описания по-горе алгоритъм в Mathematica:

```

 $\epsilon = 10^{-10};$ 
 $f[x_] := \frac{1}{1+x}$ 
 $n = 2;$ 
 $h = \frac{1}{n};$ 
Do[xi = i h, {i, 0, n}];
IAprox1 =  $\frac{1}{6 * n} \sum_{j=1}^n \left( f[x_{j-1}] + 4 f\left[\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right] + f[x_j] \right) // N;$ 
Do[
  n++;
  h =  $\frac{1}{n};$ 
  Do[xi = i h, {i, 0, n}];
  IAprox2 =  $\frac{1}{6 * n} \sum_{j=1}^n \left( f[x_{j-1}] + 4 f\left[\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right] + f[x_j] \right);$ 
  If[Abs[IAprox1 - IAprox2] <  $\epsilon$ , Break[]];
  IAprox1 = IAprox2
, {1000}
]
Print["I~=", N[IAprox2, 10]]
Print["Iterations:", n]

I~0.6931471814
Iterations:39

```

□

За упражнение можете да реализирате този алгоритъм за формулите на правоъгълниците и трапеците. Направете числени експерименти и сравнете броя итерации, необходими при всяка от формулите, за да се постигне желаната точност.

Да обърнем внимание, че разгледаната идея може да се използва за широк клас задачи, а не само за приближеното пресмятане на интеграли (например по формулата на Нютон можем да построяваме полиноми с нарастващи степени, докато приближението на функция в дадена точка стане достатъчно добро).

## 4.2 Ортогонални полиноми

**Дефиниция 13.** Казваме, че функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  са **ортогонални** в  $[a, b]$  с тегло  $\mu(x)$ , ако  $(f, g) = 0$ . Тук с  $(f, g)$  сме означили скаларното произведение на функциите  $f$  и  $g$

$$(f, g) = \int_a^b \mu(x)f(x)g(x)dx.$$

**Дефиниция 14.** Казваме, че  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$  е (краѝна или безкраѝна) редица от ортогонални полиноми в  $[a, b]$  с тегло  $\mu(x)$ , ако

- 1)  $P_i \in \pi_i, \quad \forall i,$
- 2)  $(P_i, P_i) \neq 0, \quad \forall i,$
- 3)  $(P_i, P_j) = 0, \quad \forall i \neq j.$

**Задача 46.** Да се докаже, че функциите  $f(x) = 1$  и  $g(x) = \cos x$  са ортогонални в  $[0, \pi]$  с тегло  $\mu(x) = 1$ .

*Решение.* Казано с други думи, трябва да докажем, че

$$\int_0^\pi \mu(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

Имаме

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

и следователно функциите действително са ортогонални с тегло  $\mu(x) = 1$  в  $[0, \pi]$ .  $\square$

**Задача 47.** Да се докаже, че функциите  $x$  и  $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  са ортогонални в  $[-1, 1]$  с тегло  $\mu(x) = 1$ .

*Решение.*

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(3x^3 - x)dx = \frac{1}{2} \left( 3 \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = 0$$

$\square$

**Задача 48.** Да се намерят първите 3 ортогонални полинома  $(P_0, P_1, P_2)$  в интервала  $[0, 1]$  и тегло  $\mu(x) = x$  със старши коефициент 1.

*Решение.* Според условие 1) от Дефиниция 14,  $P_0 \in \pi_0$ , т.e.  $P_0$  е константа и тъй като искаме старшият коефициент на търсените полиноми да бъде 1, то

$$P_0(x) \equiv 1.$$

Пак вземайки предвид условие 1 на дефиницията, заключаваме, че  $P_1$  трябва да бъде полином от  $\pi_1$  и затова го търсим във вида  $P_1(x) = x + a$  (старшият коефициент искаме да бъде 1). Неизвестният свободен член  $a$  ще намерим, като

имаме предвид, че  $P_0$  и  $P_1$  трябва да са ортогонални в  $[0, 1]$  с тегло  $\mu(x) = x$ , т.e.

$$\int_0^1 x \cdot 1 \cdot (x + a) dx = 0 \iff \left( \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 0 \iff \frac{1}{3} + \frac{a}{2} = 0 \iff a = -\frac{2}{3}.$$

Така получихме, че

$$P_1(x) = x - \frac{2}{3}.$$

Аналогично постъпваме и за да намерим  $P_2$ . Търсим го във вида  $P_2(x) = x^2 + bx + c$ . Имаме

$$\begin{cases} \int_0^1 x(x^2 + bx + c) dx = 0 \\ \int_0^1 x \left( x - \frac{1}{2} \right) (x^2 + bx + c) dx = 0 \end{cases}$$

Решаваме тази система например с Mathematica:

$$\text{In[2]:= } \text{Solve}\left[\left\{\text{Integrate}\left[x \left(x^2 + b x + c\right), \{x, 0, 1\}\right] = 0, \text{Integrate}\left[x \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + b x + c\right), \{x, 0, 1\}\right] = 0\right\}, \{b, c\}\right]$$

Получаваме,  $b = -\frac{6}{5}$ ,  $c = \frac{3}{10}$ . Тогава

$$P_2 = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}.$$

Лесно се проверява и че са изпълнени условията  $(P_i, P_i) \neq 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ .  $\square$

### 4.3 Квадратурна формула на Гаус

**Дефиниция 15.** Казваме, че една квадратурна формула има **алгебрическа степен на точност** (ACT)  $m$ , ако тя е точна за всички алгебрични полиноми от степен  $\leq m$  и съществува полином от степен  $m+1$ , за който тя не е точна.

Да разгледаме квадратурната формула в общия вид

$$\int_a^b \mu(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (4.1)$$

където  $\mu(x)$  е дадено тегло, дефинирано в  $[a, b]$ , точките  $\{x_k\}_{k=1}^n$  ( $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ ) са възлите на квадратурната формула, а  $\{A_k\}_{k=1}^n$  са реални числа – коефициентите на квадратурната формула. Искаме да определим възлите и коефициентите така, че съответната квадратурна формула да има възможно най-висока ACT. Тази формула се нарича **квадратурна формула на Гаус**. Построяването ѝ се основава на следното

**Твърдение 9.** При всяко естествено число  $n$  съществува единствена квадратурна формула от вида (4.1) с ACT  $2n - 1$  (и нито една с по-голяма ACT). Възлите  $\{x_k\}_{k=1}^n$  на тази квадратурна формула са нулите на полинома от степен  $n$ , ортогонален в  $[a, b]$  с тегло  $\mu(x)$  на всички алгебрични полиноми от степен  $n - 1$ .

Първо ще покажем как можем да изведем формулите при тегло  $\mu(x) = 1$  по метода на неопределените коефициенти. С други думи, ще изведем формули за приближеното пресмятане на

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx.$$

Тези формули са известни като формули на Гаус-Лъжандър. Обърнете внимание, че обикновено те се задават за приближено интегриране в граници от -1 до 1. Произволен интеграл в граници от  $a$  до  $b$  може да се пресметне, като се направи линейна смяна. Ще покажем как става това.

**Задача 49.** Да се намери по метода на неопределените коефициенти формулата на Гаус-Лъжандър с два възела.

*Решение.* Търсим приближението във вида

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

Неизвестните параметри, които подлежат на определяне са  $A_1, A_2, x_1, x_2$ . Съгласно Твърдение 9, формулата трябва да има АСТ 3, т.e. да е точна за всички полиноми от  $\pi_3$ . Ще вземем най-простия базис  $\{1, x, x^2, x^3\}$  и получаваме системата

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 1.dx = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1 \\ \int_{-1}^1 x.dx = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 \\ \int_{-1}^1 x^2.dx = A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 \\ \int_{-1}^1 x^3.dx = A_1 \cdot x_1^3 + A_2 \cdot x_2^3 \end{cases}$$

Решаваме тази система, вземайки предвид, че  $x_1 < x_2$ :

```
In[5]:= Solve[  
  {A1 + A2 == Integrate[1, {x, -1, 1}],  
   A1 x1 + A2 x2 == Integrate[x, {x, -1, 1}],  
   A1 x1^2 + A2 x2^2 == Integrate[x^2, {x, -1, 1}],  
   A1 x1^3 + A2 x2^3 == Integrate[x^3, {x, -1, 1}],  
   x1 < x2}, {A1, A2, x1, x2}]  
  
Out[5]= {A1 -> 1, A2 -> 1, x1 -> -1/(-1 + Sqrt[3]), x2 -> 1/(1 + Sqrt[3])}
```

Така, търсената формула има вида

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

□

Аналогично могат да се изведат и формули с повече възли. Ще дадем някои формули в следната таблица, като укажем възлите и коефициентите за всяка от тях.

| Брой възли | Коефициенти  | Възли  | ACT |
|------------|--|--|-----|
| 1          | $A_1 = 2$  | $x_1 = 0$  | 1   |
| 2          | $A_1 = 1$<br>$A_2 = 1$   | $x_1 = -1/\sqrt{3}$<br>$x_2 = 1/\sqrt{3}$  | 3   |
| 3          | $A_1 = 5/9$<br>$A_2 = 8/9$<br>$A_3 = 5/9$  | $x_1 = -\sqrt{3}/5$<br>$x_2 = 0$<br>$x_3 = \sqrt{3}/5$   | 5   |
| 4          | $A_1 = (18 - \sqrt{30})/36$<br>$A_2 = (18 + \sqrt{30})/36$<br>$A_3 = (18 + \sqrt{30})/36$<br>$A_4 = (18 - \sqrt{30})/36$ | $x_1 = -\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$<br>$x_2 = -\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$<br>$x_3 = \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$<br>$x_4 = \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$ | 7   |

За да интегрираме в произволни граници, т.е. за да намерим приближено стойността на

$$\int_a^b f(x)dx,$$

първо трябва да направим **смяна на променливата**:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

**Задача 50.** Да се пресметне приближено стойността на

$$\int_0^{0.8} f(x)dx,$$

където

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5,$$

като се използват формулите на Гаус-Лъжандър с 2 и 3 възела. Да се сравни с точната стойност (1.640533). Да се сравни със стойността, която се получава по формулите на трапеците и Симпсън.

*Решение.* За да можем да приложим формулите на Гаус-Лъжандър, трябва да интегрираме в граници от -1 до 1. Следователно първо трябва да направим смяна на променливата. Полагаме

$$x = 0.4 + 0.4t$$

Тогава интегралът добива вида

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 & [0.2 + 25(0.4 + 0.4t) - 200(0.4 + 0.4t)^2 + 675(0.4 + 0.4t)^3 \\ & - 900(0.4 + 0.4t)^4 + 400(0.4 + 0.4t)^5] \times 0.4dt \end{aligned}$$

Нека означим подинтегралната функция с  $\varphi(t)$ .

Двуточкова формула на Гаус-Лъжандър. Получаваме

$$I \approx \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

```
In[8]:= φ[t_] := (0.2 + 25 (0.4 + 0.4 t) - 200 (0.4 + 0.4 t)^2 +
  675 (0.4 + 0.4 t)^3 - 900 (0.4 + 0.4 t)^4 + 400 (0.4 + 0.4 t)^5) 0.4
φ[-1/√3] + φ[1/√3]

Out[9]= 1.82258
```

Триточкова формула на Гаус-Лъжандър. Имаме

$$I \approx \frac{5}{9}φ(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}φ(0) + \frac{5}{9}φ(\sqrt{3/5}).$$

```
In[18]:= φ[t_] := (0.2 + 25 (0.4 + 0.4 t) - 200 (0.4 + 0.4 t)^2 +
  675 (0.4 + 0.4 t)^3 - 900 (0.4 + 0.4 t)^4 + 400 (0.4 + 0.4 t)^5) 0.4
NumberForm[5/9 φ[-Sqrt[3/5]] + 8/9 φ[0] + 5/9 φ[Sqrt[3/5]], 7]

Out[19]//NumberForm=
1.640533
```

Формула на трапеците. Можем да приложим формулата на трапеците директно към интеграла, както е зададен в условието (в граници от 0 до 0.8). Получаваме

$$I \approx \frac{0.8}{2}(f(0) + f(0.8))$$

```
In[50]:= f[x_] := 0.2 + 25 x - 200 x^2 + 675 x^3 - 900 x^4 + 400 x^5
          0.8
          — (f[0] + f[0.8])
          2

Out[51]= 0.1728
```

Формула на Симпсън.

$$I \approx \frac{0.8}{6}(f(0) + 4f(0.4) + f(0.8))$$

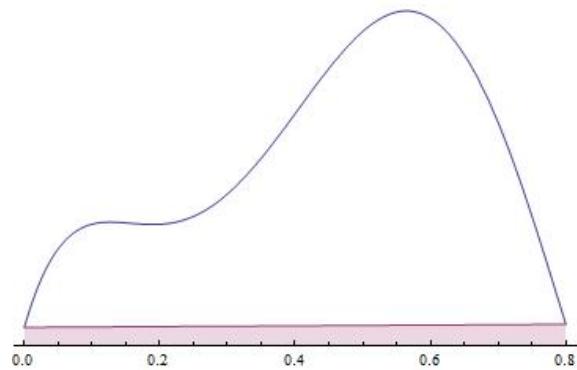
```
In[46]:= f[x_] := 0.2 + 25 x - 200 x^2 + 675 x^3 - 900 x^4 + 400 x^5
          0.8
          — (f[0] + 4 f[0.4] + f[0.8])
          6

Out[47]= 1.36747
```

Да обобщим получените резултати

| Формула        | ACT | Резултат | Грешка(по модул) |
|----------------|-----|----------|------------------|
| на трапеците   | 1   | 0.1728   | 1.468            |
| на Симпсън     | 3   | 1.36747  | 0.27             |
| Гаус(2 възела) | 3   | 1.82258  | 0.182            |
| Гаус(3 възела) | 5   | 1.640533 | 0.0              |

Резултатите в таблицата показват, че ACT е важен критерий за точността на квадратурните формули. Формулите на Симпсън и двуточковата формула на Гаус-Лъжандър са с една и съща ACT и дават приблизително еднаква грешка. Предимството на формулата на Гаус обаче е, че функцията се оценява само в 2 точки, а по формулата на Симпсън – 3. Триточковата формула на Гаус е точна за всички полиноми от  $\pi_5$  и затова няма грешка при приближаването на  $f(x)$ . Поучително е да се види и графично защо формулата на трапеците дава толкова голяма грешка в този случай:



□