Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 7
"Решение краевой задачи для ОДУ 2 порядка"
дисциплина "Численные методы"
Метод конечных разностей 2 порядка

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Мелко Т. А.
Преподаватель Козлов К.Н.

15 июня 2024 г.

Содержание

Формулировка задачи и ее формализация

Формализация задачи:

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \\ y(a) = y_a, \\ y'(a) = y'_a, \end{cases} \tag{1}$$

Требуется найти функцию $y(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $y(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

2. $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям

$$y(a) = y_a, \quad y'(a) = y'_a.$$

Постановка задачи:

$y'' + 4xy' + (4x^2 + 3)y = e^{(-x^2)}, (0, 1)$ Точное решение: $y = e^{(-x^2)}$ Исследовать: полученное решение с точным, фактическую погрешность от заданной точности, фактическую ошибку от фиксированного шага

Алгоритмы методов и условия их применимости

Алгоритм метода

Разделить интервал $[a, b]$ на N равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{N}$ Определить точки сетки $x_i = a + ih$, где $i = 0, 1, \ldots, N$ Инициализировать массивы A и B размерности $(N+1) \times (N+1)$ и $N + 1$ соответственно

Установить начальные условия: $A[0, 0] \leftarrow 1$ $B[0] \leftarrow y_a$

$i = 1$ to $N-1$ $A[i, i-1] \leftarrow -\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}$ $A[i, i] \leftarrow \frac{2}{h^2} + q(x_i)$ $A[i, i+1] \leftarrow -\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}$ $B[i] \leftarrow f(x_i)$

Учитываем производное начальное условие: $A[N, N] \leftarrow 1$ $A[N, N-1] \leftarrow -2h \cdot y'_a - 1$ $B[N] \leftarrow 0$

Решить систему линейных уравнений методом Томаса для трехдиагональной матрицы $A\mathbf{y} = \mathbf{B}$ для $\mathbf{y}$

Тестовый пример для задачи с детальными расчетами

$y'' + 4xy' + (4x^2+3)y = e^{-x^2}$ $(0,1)$ $y = e^{-x^2}$

Сетка $0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ $h = 0,25$ $\alpha_1 = 0$ $\beta_1 = 0$

ГУ $\begin{cases} y_0 = A \\ y_n = B \end{cases}$ $\quad A = 1$, $B = 0,37$

$i=1$ $\left(1 - \frac{1}{8}\right) y_0 - \left(2 - \frac{1}{16} 3,25\right) y_1 + \left(1 + \frac{1}{8}\right) y_2 = \frac{1}{16} 0,94$

$i=2$ $\left(1 - \frac{2}{8}\right) y_1 - \left(2 - \frac{1}{16} 4\right) y_2 + \left(1 + \frac{1}{8} 2\right) y_3 = \frac{1}{16} 0,78$

$i=3$ $\left(1 - \frac{3}{8}\right) y_2 - \left(2 - \frac{1}{16} 5,25\right) y_3 + \left(1 + \frac{1}{8} 3\right) y_4 = \frac{1}{16} 0,57$

Решив эту систему получим:

$y_1 = 0,95$ $y_2 = 0,79$ $y_3 = 0,58$

err = [0; 0,011; 0,011; 0,1; 0]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1{,}8 & 1{,}125 & 0 & -0{,}815 \\ 0{,}75 & -1{,}75 & 1{,}25 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}625 & -1{,}67 & -0{,}47 \end{array}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{-1{,}125}{-1{,}8} = 0{,}625 \quad \beta_1 = \frac{-0{,}815}{-1{,}8} = 0{,}45$$

$$\alpha_2 = \frac{-1{,}25}{-1{,}75+0{,}75\cdot 0{,}625} = 0{,}97 \quad \beta_2 = \frac{0{,}05-0{,}75\cdot 0{,}45}{-1{,}75+0{,}75\cdot 0{,}625} = 0{,}22$$

$$\alpha_3 = 0 \quad \beta_3 = \frac{-0{,}47-0{,}625\cdot 0{,}22}{-1{,}67+0{,}625\cdot 0{,}97} = 0{,}57$$

$$y_3 = 0{,}57$$

$$y_2 = \alpha_2 \cdot y_3 + \beta_2 = 0{,}97\cdot 0{,}57 + 0{,}22 = 0{,}77$$

$$y_1 = \alpha_1 \cdot y_2 + \beta_1 = 0{,}\overset{625}{\cancel{45}}\cdot 0{,}77 + 0{,}45 = 0{,}93$$

$$y_1^* = 0{,}93 \quad y_2^* = 0{,}77 \quad y_3^* = 0{,}57$$

$err = [0, 0{,}09; 0{,}008; 0{,}01; 0]$

Подготовка контрольных тестов и модульная структура программы

Контрольные тесты

Для исследования будем использовать метод МКР 2 порядка для функции $y'' + 4xy' + (4x^2 + 3)y = e^{(-x^2)}, (0, 1)$ Точное решение: $y = e^{(-x^2)}$. Для исследования точности будет брать ϵ от 10^-1 до 10^-7.

Модульная структура программы

double df - возвращает значение исследуемой функции

double f - возвращает значение точного решения

double** FDM - применяет метод конечных разностей 2 порядка

Численный анализ решения

Графики функций

Рассмотрим график 1 точного и численного решения для двух фиксированных значений шага на отрезке

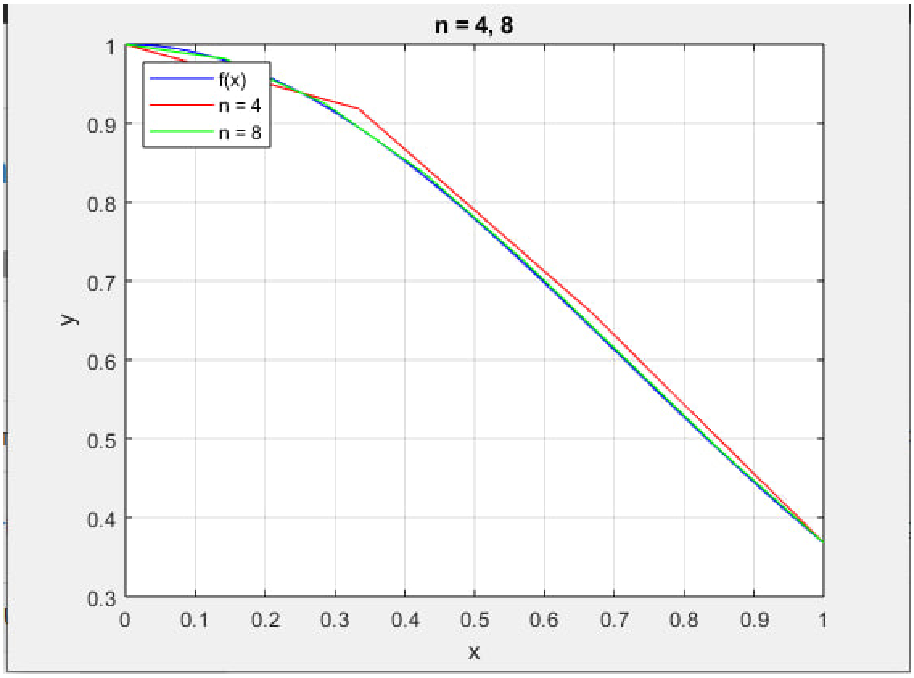

Рис. 1: Фиксированное значение шага

Рассмотрим график 2 ошибки на отрезке для полученных решений.

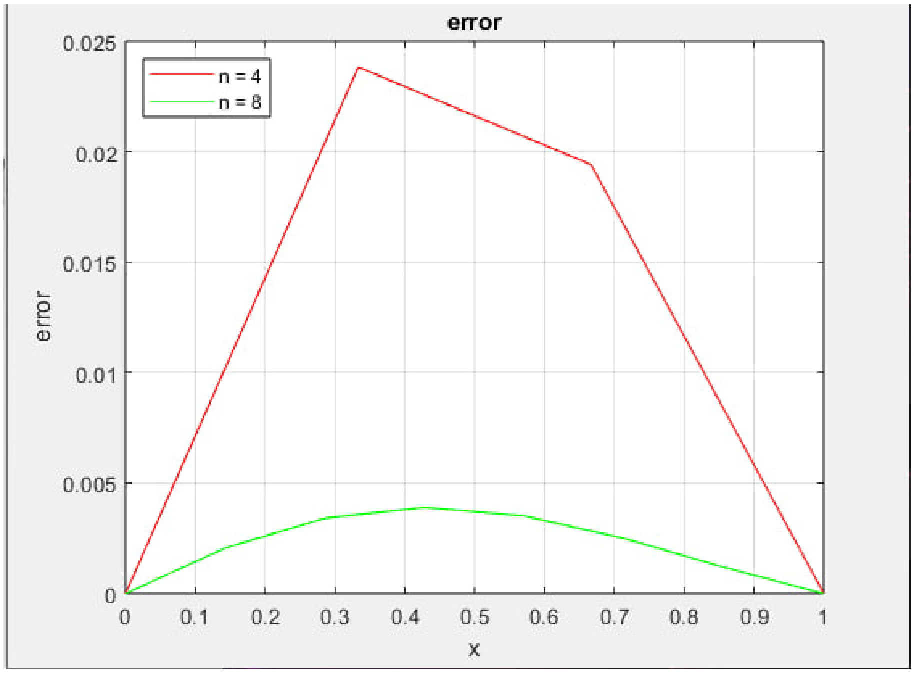

Рис. 2: Ошибка для фиксированных значений шагов

Рассмотрим график 3 ошибки по отрезку для точности 0.0001.

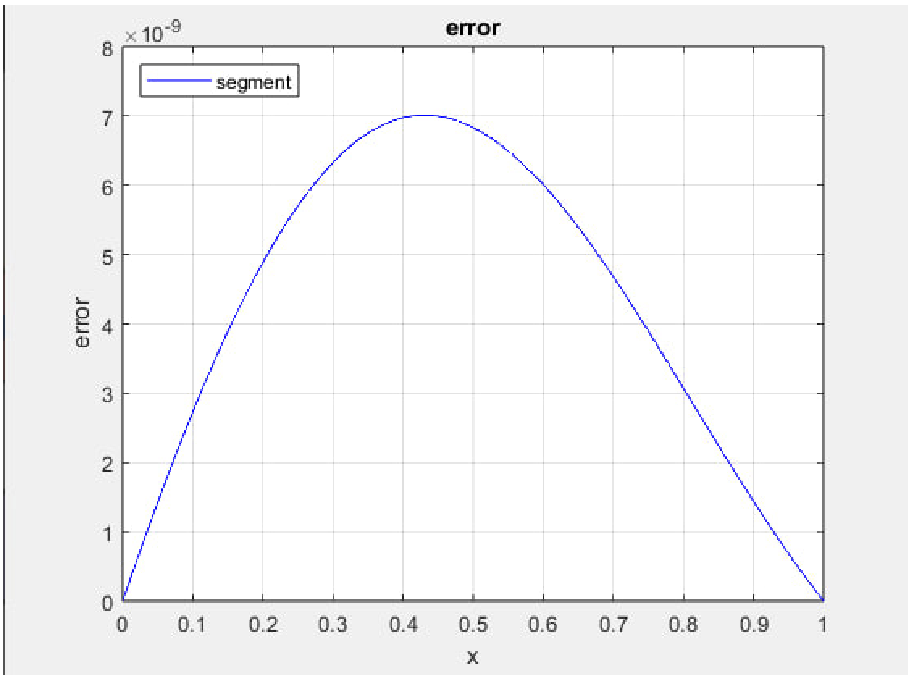

Рис. 3: Изменение шага по отрезку

Рассмотрим график 4 зависимости фактической погрешности от заданной точности.

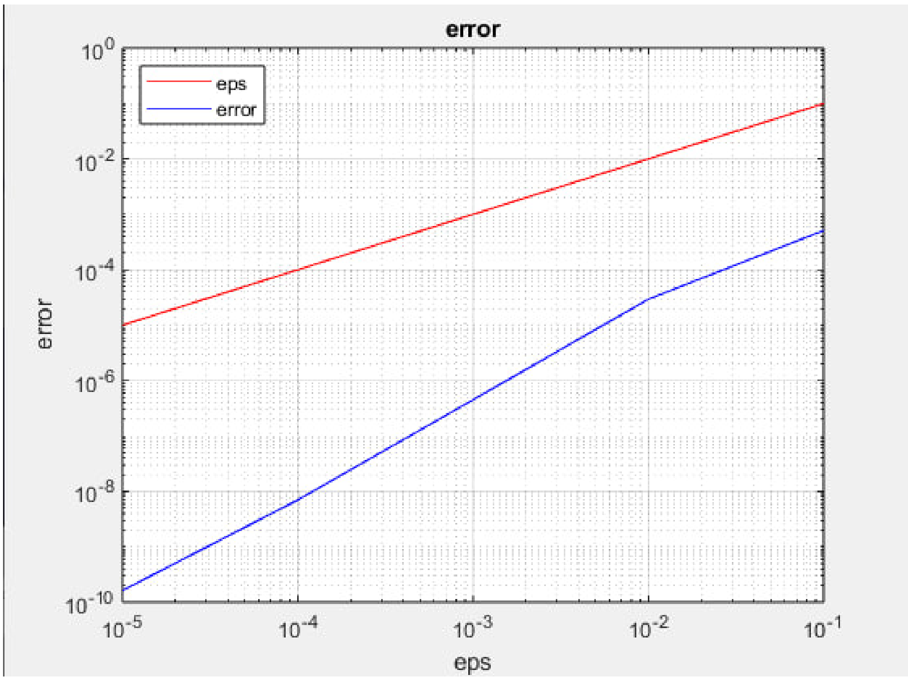

Рис. 4: Фактическая ошибка от точности

Общие выводы

1. Фактическая ошибка метода Метода конечных разностей 2-го порядка соответствует заданной точности. Это подтверждает высокую точность метода для численного решения дифференциальных уравнений.