Лабораторна робота 5

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета роботи: вивчення алгоритмів чисельного інтегрування функції однієї змінної: квадратурних формул прямокутників, трапецій, Сімпсона.

Завдання: обчислити інтеграл за допомогою узагальнених квадратурних формул. Проаналізувати залежність величини похибки від кроку інтегрування.

Варіанти індивідуальних завдань

1. Обчислити інтеграл $I = \int_0^1 e^x \ln(1+x^2)dx$, використовуючи формули прямокутників, трапецій та Сімпсона з точностями $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Для вибору кроку використати принцип Рунге. Проаналізувати залежність величини кроку від методів і точності.

2. Обчислити інтеграл $I(a,b) = \int_0^4 \frac{\cos 2x}{1+ax+bx^3}dx$ при $\{a,b\} = \{1;1.3\}$, $\{1.2;\ 1.1\}$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.04$. За правилом Рунге знайти похибку отриманого значення.

3. Обчислити інтеграл $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{a+x}dx$ при $a = 0.1;0.2;...;1$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.01$. Верхню межу інтегрування обмежити із міркувань точності $\varepsilon \le 10^{-4}$.

4. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_{0.1}^x \frac{\ln t}{1-t^2}dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

5. Обчислити інтеграл $I = \int_0^1 \ln(\cos\frac{\pi x}{10}+1)dx$, використовуючи формули прямокутників, трапецій та Сімпсона з точностями $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Для вибору кроку використати принцип Рунге. Проаналізувати залежність величини кроку від методів і точності.

6. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_0^x \frac{t^2+1}{t^4+t^2+1} dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

7. Обчислити інтеграл $I(a) = \int_0^1 e^{ax}(1+x^2)\frac{\sin x}{x+2} dx$ при $a = 0.019;\ 0.127;\ 0.346; 0.417;\ 0.527;\ 0.696$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.001$.

8. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t-t^3} dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

9. Обчислити інтеграл $I(a) = \int_0^1 e^{ax}(1+x^2)\frac{\sin x}{x+2} dx$ при $a = 0.019;\ 0.127;\ 0.346; 0.417;\ 0.527;\ 0.696$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.001$.

10. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

11. Обчислити інтеграл $I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{a+x^2} dx$ при $a = 1; 2; ...; 10$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.01$. Верхню межу інтегрування обмежити із міркувань точності $\varepsilon \le 10^{-4}$.

12. Обчислити інтеграл $I(a) = \int_0^1 \frac{\cos x\, dx}{0.02x^3 + 3.12x^2 + 0.7a}$ при $a = 6.3;\ 6.4;\ ...;\ 7.4$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.005$. За правилом Рунге знайти похибку отриманого значення.

13. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln(1+t)} dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

14. Обчислити інтеграл $I = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2} \frac{\sin^2(xy)+1}{\ln(1+x^2y)+2} dx\,dy$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.01$.

15. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

16. Обчислити інтеграл $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} + \sin x}{a + x^4} \cdot e^{-x^2} dx$ при $a = 1;2;...;10$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.01$. Верхню межу інтегрування обмежити із міркувань точності $\varepsilon \le 10^{-4}$.

17. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_0^x (e^t - 1) \ln\frac{1}{t} dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

18. Обчислити інтеграл $I(t) = \int_0^1 e^{0.1x} (tx^2 + 1)^2 \frac{\sin(0.2x)}{x+2} dx$ при $t \in [0;1]$ з кроком $h_t = 0.1$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h_x = 0.01$. За правилом Рунге знайти похибку отриманого значення.

19. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x \in [0.5;1.5]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int_{0.5}^x \frac{\ln t}{t-1} dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

20. Обчислити інтеграл $I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t+1} e^t \left(\int_0^t \frac{\sin u}{u+2} du \right) dt$, користуючись формулою Сімпсона з кроками $h_t = 0.1$, $h_u = \frac{t}{20}$.

21. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x\in[0;1]$, з кроком $h_x = 0.1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

22. Обчислити інтеграл $I(b) = \int\limits_{1,6}^{b} \ln(1+\cos\frac{\pi t}{10})dt + \int\limits_{b}^{10} \sin(\cos\frac{\pi t}{20})dt$ при $b = 1.6;1.7;1.8;...;3.6$, користуючись формулою Сімпсона з кроком $h = 0.01$.

23. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{1,8}^{2} \ln(x\cdot tg\frac{x}{\sqrt{10}})dx$, використовуючи формули прямокутників, трапецій та Сімпсона з точностями $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Для вибору кроку використати принцип Рунге. Проаналізувати залежність величини кроку від методів і точності.

24. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x\in[0;\pi]$, з кроком $h_x = \frac{\pi}{10}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int\limits_0^x \sqrt{3+\cos t}\,dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

25. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^2 e^{0.1z}(z^2+1)\left(\int\limits_0^z \frac{\sin(0.2t)}{t+2}dt\right)dz$, користуючись формулою Сімпсона з кроками $h_z = 0.01$, $h_t = \frac{z}{100}$.

26. Обчислити значення функції $\phi(x)$, $x\in[0;\pi]$, з кроком $h_x = \frac{\pi}{10}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо $\phi(x) = \int\limits_0^x \frac{\cos t}{5-4\cos t}dt$. Точність оцінювати за допомогою принципу Рунге.

Контрольні запитання

1. Опишіть, як були отримані узагальнені квадратурні формули прямокутників, трапецій та Сімпсона.

2. Нехай підінтегральна функція – поліном. Який має бути його степінь, щоб результат інтегрування, отриманий за квадратурною формулою центральних прямокутників, мав нульову похибку? За формулою трапецій? За формулою Сімпсона?

3. Чи різняться відповіді на попереднє запитання в залежності від того, використовується проста чи узагальнена квадратурна формула?

4. Як зміниться похибка інтегрування, якщо замість методу центральних прямокутників з $n=10$ використати формулу трапецій з $n=10$? А формулу трапецій з $n=20$? (n - кількість відрізків інтегрування).

5. Чому вирази для оцінки похибок у формулах чисельного інтегрування мало придатні для практичної оцінки похибки?

6. Формула Рунге для обчислення похибки чисельного інтегрування має вигляд

$$I - I_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}.$$

Тут I_h, $I_{h/2}$ - значення інтегралу, знайдені за квадратурними формулами з кроками h та $h/2$ відповідно. Поясніть, що таке k у цьому виразі. Як зміниться формула для обчислення похибки інтегрування з кроком $h/3$?