**Лабораторна робота 3**

# РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ЯКОБІ ТА ГАУСА – ЗЕЙДЕЛЯ

**Мета роботи:** вивчення алгоритмів для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь ітераційними методами Якобі та Гауса – Зейделя

**Завдання:** з'ясувати факт збіжності чи розбіжності ітераційних процесів Якобі та Зейделя. У випадку збіжності знайти розв'язок СЛАР з точністю 0.0001 та перевірити його, підставляючи в СЛАР отримані розв'язки і обраховуючи нев'язки. Визначити порядок збіжності ітераційного процесу.

## Вимоги до виконання роботи

**1**. Складіть програму для розв'язання СЛАР методом Якобі.

**2.** Доповніть програму лічильником числа ітерацій та проміжним друком $k$, $\mathbf{x}^{(k)}$ та загальної похибки наближення $\delta_k = \max_i \left\{ \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \right\}$ після кожної ітерації ($k$ - номер ітерації). Результати повинні мати вигляд охайної таблиці.

**3.** Іноді ітераційний процес може розбігатися. З метою гарантованого завершення програми навіть у випадку незбіжності до розв'язку, запровадьте в програмі обмеження на максимальну кількість ітерацій. Передбачте виведення відповідного повідомлення про незбіжність ітераційного процесу.

**4.** Зведіть систему $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ вашого варіанту до вигляду, необхідного для ітерацій.

**5.** Отримайте розв'язок системи з вашого варіанту з точністю 0.0001, ***попередньо оцінивши*** число необхідних для цього кроків. Порівняйте кількість витрачених для отримання розв'язку ітерацій з її попередньою оцінкою.

**6.** Для перевірки отриманого результату обчисліть і надрукуйте вектор нев'язок $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$.

**7.** Дослідіть, як похибки поточного наближення до розв’язку залежать від номера ітерації. Побудуйте графік залежності $\lg\delta_k$ від $k$ і на його основі з’ясуйте порядок збіжності методу.

**8.** Модифікуйте вашу програму для реалізації методу Гауса – Зейделя . Розв’яжіть задачу вашого варіанту та порівняйте розв’язок СЛАР і кількість здійснених ітерацій з отриманими раніше результатами методу Якобі.

**9.** З’ясуйте порядок збіжності методу Гауса – Зейделя.

## Варіанти індивідуальних завдань

**1.** $$\begin{cases} 2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1; \\ 3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7; \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8. \end{cases}$$

**2.** $$\begin{cases} 1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7; \\ 2.1x_1 + 3.4x_2 + 1.8x_3 = 1.1; \\ 4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8. \end{cases}$$

**3.** $$\begin{cases} 3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2; \\ 1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1; \\ 7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6. \end{cases}$$

**4.** $$\begin{cases} 9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8; \\ 3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7; \\ 4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8. \end{cases}$$

**5.** $$\begin{cases} 3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 0.8; \\ 4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7; \\ 2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2. \end{cases}$$

**6.** $$\begin{cases} 7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 10.1; \\ 3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7; \\ 2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8. \end{cases}$$

**7.** $$\begin{cases} 3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5; \\ 0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24; \\ 1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3. \end{cases}$$

**8.** $$\begin{cases} 5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5; \\ 4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7; \\ 3.4x_1 + 2.4x_2 + 7.4x_3 = 1.9. \end{cases}$$

**9.** $$\begin{cases} 3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8; \\ 2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4; \\ 1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6. \end{cases}$$

**10.** $$\begin{cases} 5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9; \\ 3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4; \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2. \end{cases}$$

**11.** $$\begin{cases} 2.7x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5; \\ 4.5x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6; \\ 5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.14. \end{cases}$$

**12.** $$\begin{cases} 4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4x_3 = 2.5; \\ 3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5; \\ 0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4. \end{cases}$$

**13.** $\begin{cases} 3.8x_1 + 6.7x_2 - 1.2x_3 = 5.2; \\ 6.4x_1 + 1.3x_2 - 2.7x_3 = 3.8; \\ 2.4x_1 - 4.5x_2 + 3.5x_3 = -0.6. \end{cases}$

**14.** $\begin{cases} 5.4x_1 - 6.2x_2 - 0.5x_3 = 6.5; \\ 3.4x_1 + 2.3x_2 + 0.8x_3 = -0.8; \\ 2.4x_1 - 1.1x_2 + 3.8x_3 = 1.8. \end{cases}$

**15.** $\begin{cases} 7.8x_1 + 5.3x_2 + 4.8x_3 = 1.8; \\ 3.3x_1 + 1.1x_2 + 1.8x_3 = 2.3; \\ 4.5x_1 + 3.3x_2 + 2.8x_3 = 3.4. \end{cases}$

**16.** $\begin{cases} 3.8x_1 + 4.1x_2 - 2.3x_3 = 4.8; \\ -2.1x_1 + 3.9x_2 - 5.8x_3 = 3.3; \\ 1.8x_1 + 1.1x_2 - 2.1x_3 = 5.8. \end{cases}$

**17.** $\begin{cases} 1.7x_1 - 2.2x_2 + 3.0x_3 = 1.8; \\ 2.1x_1 + 1.9x_2 - 2.3x_3 = 2.8; \\ 4.2x_1 + 3.9x_2 - 3.1x_3 = 5.1. \end{cases}$

**18.** $\begin{cases} 2.8x_1 + 3.8x_2 - 3.2x_3 = 4.5; \\ 2.5x_1 - 2.8x_2 + 3.3x_3 = 7.1; \\ 6.5x_1 - 7.1x_2 + 4.8x_3 = 6.3. \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} 3.3x_1 + 3.7x_2 + 4.2x_3 = 5.8; \\ 2.7x_1 + 2.3x_2 - 2.9x_3 = 6.1; \\ 4.1x_1 + 4.8x_2 - 5.0x_3 = 7.0. \end{cases}$

**20.** $\begin{cases} 7.1x_1 + 6.8x_2 + 6.1x_3 = 7.0; \\ 5.0x_1 + 4.8x_2 + 5.3x_3 = 6.1; \\ 8.2x_1 + 7.8x_2 + 7.1x_3 = 5.8. \end{cases}$

**21.** $\begin{cases} 3.7x_1 + 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.0; \\ 4.1x_1 + 4.5x_2 - 4.8x_3 = 4.9; \\ -2.1x_1 - 3.7x_2 + 1.8x_3 = 2.7. \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} 4.1x_1 + 5.2x_2 - 5.8x_3 = 7.0; \\ 7.8x_1 + 5.3x_2 - 6.3x_3 = 5.8; \\ 3.8x_1 - 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.3. \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} 3.7x_1 - 2.3x_2 + 4.5x_3 = 2.4; \\ 2.5x_1 + 4.7x_2 - 7.8x_3 = 3.5; \\ 1.6x_1 + 5.3x_2 + 1.3x_3 = -2.4. \end{cases}$

**24.** $\begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5; \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 2.7; \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3. \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} 1.5x_1 + 2.3x_2 - 3.7x_3 = 4.5; \\ 2.8x_1 + 4.2x_2 + 5.8x_3 = -3.2; \\ 1.2x_1 + 7.3x_2 - 2.3x_3 = 5.6. \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} 0.9x_1 + 2.7x_2 - 3.8x_3 = 2.4; \\ 2.5x_1 + 5.8x_2 - 0.5x_3 = 3.5; \\ 4.5x_1 - 2.1x_2 + 3.2x_3 = -1.2. \end{cases}$ **.**

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

**1.** Сформулюйте достатні умови та критерій збіжності методів Якобі та Зейделя.

**2.** Покажіть, що ітераційна формула методу простих ітерацій може бути записана в термінах нев’язок k-го наближення $\mathbf{r}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}$ як

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} \ , \ i = \overline{1,n} \, .$$

Запропонуйте також аналогічний запис для формули ітерацій Гауса - Зейделя.

**3.** Які з норм вектора можливо і доцільно використовувати в умовах закінчення ітерацій?

**4.** Яке початкове наближення розв’язку доцільно використати, щоб попередньо оцінити кількість необхідних для розв’язання системи ітерацій?