Лабораторна робота № 1

Розв’язання нелінійних рівнянь.

Метод поділу навпіл (бісекції). Метод Ньютона.

Мета роботи: вивчення алгоритмів для розв’язання нелінійних рівнянь методами бісекції та Ньютона.

Завдання: знайти корені рівняння $f\left(x\right)=0$ методами бісекції та Ньютона. Визначити порядки збіжності методів.

Вимоги до виконання роботи:

1. складіть програму, що реалізує алгоритм розв’язання рівняння $f\left(x\right)=0$ методом бісекції. Фрагмент програми, що власне розв’язує рівняння, оформіть у вигляді окремої процедури.
2. Корені рівняння відокремте графічно і уточніть один з них вказаним методом з точністю до $\varepsilon=10^{-4}$. Результат виведіть на екран.
3. Введіть у програму проміжний друк номера ітерацій k, а також значень a_k, x_k, b_k, $\left|b_k-a_k\right|$, $f\left(x_k\right)$ на кожній ітерації. Виведені результати повинні мати вигляд охайної таблиці.
4. Дослідіть, як похибки поточного наближення до кореня $\Delta_B^{(k)}=\left|b_k-a_k\right|$ залежать від номера ітерації. Побудуйте графік залежності $\lg\Delta_B^{(k)}$ від k і на його основі переконайтеся, що порядок збіжності методу бісекції дорівнює 1.
5. Знайдіть решту коренів рівняння $f\left(x\right)=0$.
6. Введіть у програму процедуру для реалізації методу Ньютона.
7. Додайте у рядок проміжного друку вашої програми виведення значення $\Delta_N^{(k)}=\left|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right|$, що характеризує досягнуту точність поточного наближення.
8. Знайдіть один або декілька коренів вашого рівняння за допомогою методу Ньютона з точністю $\varepsilon=10^{-4}$ і виведіть результат на екран. Порівняйте результати зі значеннями, знайденими методом бісекції.
9. Дослідіть, як похибки поточного наближення до кореня $\Delta_N^{(k)}$ залежать від номера ітерації. Побудуйте графік залежності $\lg\Delta_N^{(k)}$ від k і на його основі

з’ясуйте порядок збіжності методу Ньютона. Порівняйте порядки збіжності обох методів.

Контрольні запитання

1. Чому у методі бісекції кількість ітерацій, необхідна для відшукання кореня рівняння з точністю ε приблизно дорівнює $n \sim \log_2\left(|b-a|/\varepsilon\right)$?
2. Як обирається початковий відрізок у методі бісекції?
3. Як поведе себе метод бісекції, якщо припущення, що функція на відрізку є неперервною і змінює знак рівно один раз, невірне?
4. Якою буде достатня умова збіжності методу Ньютона, якщо розглядати його як модифікацію метода простих ітерацій?
5. Як обирається початкове наближення кореня у методі Ньютона?

Варіанти індивідуальних завдань

1. $x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.

2. $2x - \ln x - 4 = 0$.

3. $10\ln x = x^3 - 3$.

4. $x\,thx = 1$.

5. $x^2 - \sin 5x = 0$.

6. $ctgx = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2}$.

7. $e^x + e^{-3x} - 4 = 0$.

8. $\cos x \cdot chx = 1$.

9. $\ln\dfrac{x+1}{x-1} = 2x$.

10. $x^2 - \sin 5x = 0$.

11. $x + x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4} = 5$.

12. $1.8x^2 - \sin 10x = 0$.

13. $3x - \cos x - 1 = 0$.

14. $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$.

15. $x - \cos\left(\dfrac{0.7854 - x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right) = 0$.

16. $x + e^x = 0$.

17. $4x - 7\sin x = 0$.

18. $x = \sin x + 0,25$.

19. $2^x = 4x$.

20. $\cos x = x$.

21. $x^3 - 3x^2 - 12x - 10 = 0$.

22. $10x = e^{-x}$.

23. $x^x + 5x = 1000$.

24. $x + \lg x = 0.5$.

25. $x\ln x = 18$.