Астрофизика и задача N тел

Интегрирование уравнения движения методом Рунге-Кутты

Пусть нам заданы **N** тел. У каждого известны:

1. масса
2. начальное положение
3. начальная скорость

Запишем **II закон Ньютона** для каждого тела. Мы умеем решить задачу Коши для ОДУ. Т.е. уравнения вида:

```
dX
-- = f(X, t)
dt
```

Где **X** является вектором. Поэтому, переходя в **4N-мерное пространство**, получаем вот такую систему ОДУ:

$$\begin{cases} m_i \int_0^t d\vec{v}_i = G m_i \int_0^t \sum_{j \neq i} \frac{m_j\left(\vec{r}_i - \vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^3} dt \\ \int_0^t d\vec{r}_i = \int_0^t \vec{v}_i dt \end{cases}$$

$$\vec{v}_i(0) = \vec{v}_{0i}$$

$$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{0i}$$

Теперь нам необходимо получить достаточно точное решение. Воспользуемся методом **Рунге-Кутты**.

Имеем рекуррентную формулу на каждую следующую точку 4N-мерного пространства в сетке.

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(x_n, \mathbf{y}_n\right),$$
$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right),$$
$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right),$$
$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{k}_3\right).$$

где h — величина шага сетки по x.

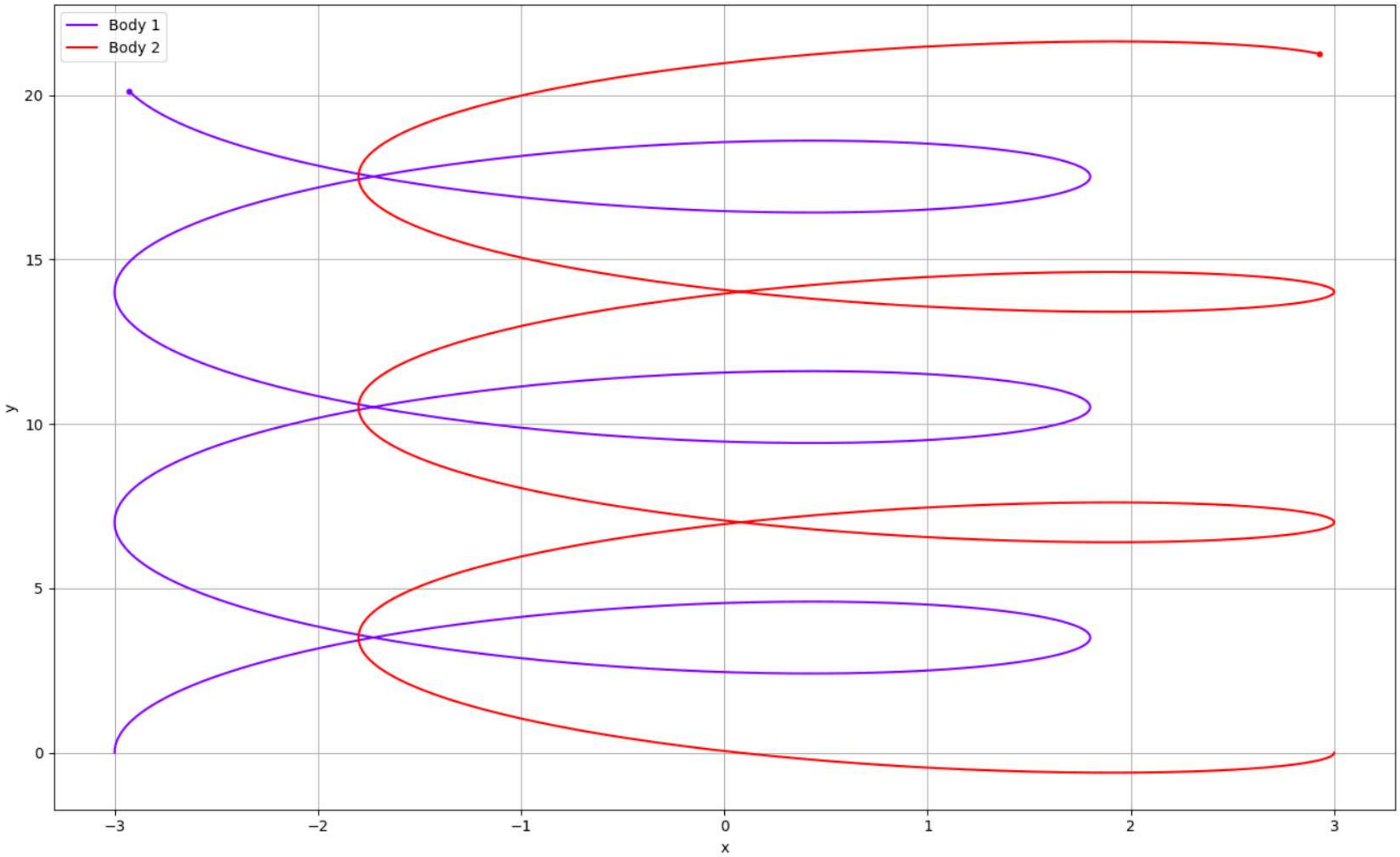
Отметим так же, что данный метод имеет 4-ый порядок точности, что позволяет немного сэкономить на вычислительной мощности. Однако, погрешность зависит от максимума второй производной интегрируемой функции ОДУ. Так как функция обратна пропорциональна расстоянию до тела, то при сближении двух тел точность будет очень сильно снижаться. Что выражается в резких отталкиваниях объектов друг от друга на бесконечность. При этом будут нарушены любые аналитические закономерности, в частности, тело может покинуть потенциальную яму, что в идеальных условиях было бы невозможно.

Задача 2-ух тел

Как известно, в задаче двух тел центр масс двигается поступательно, а тела относительно центра масс двигаются по эллиптической орбите.

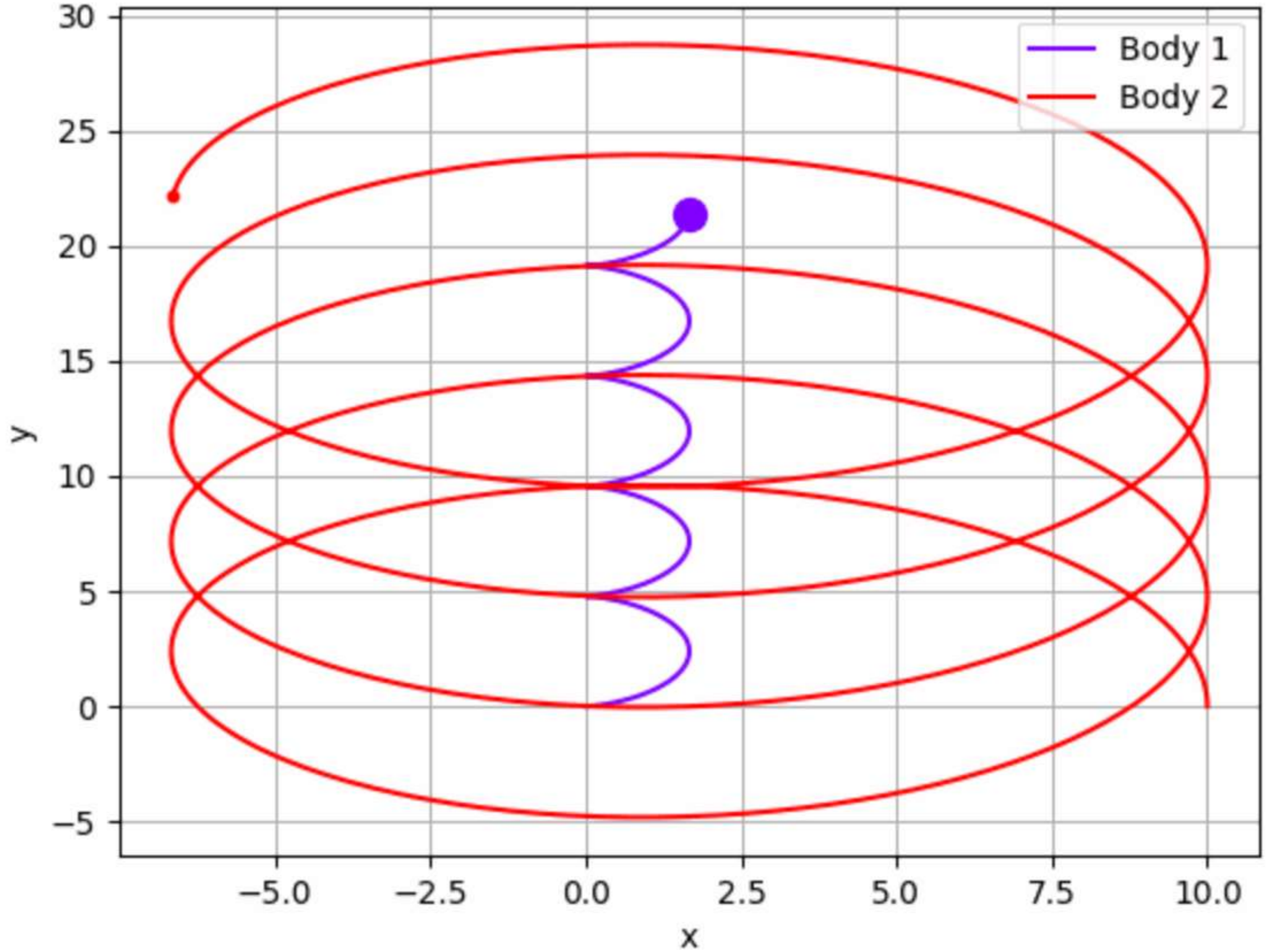
Пример 1

Два тела с одинаковыми массами



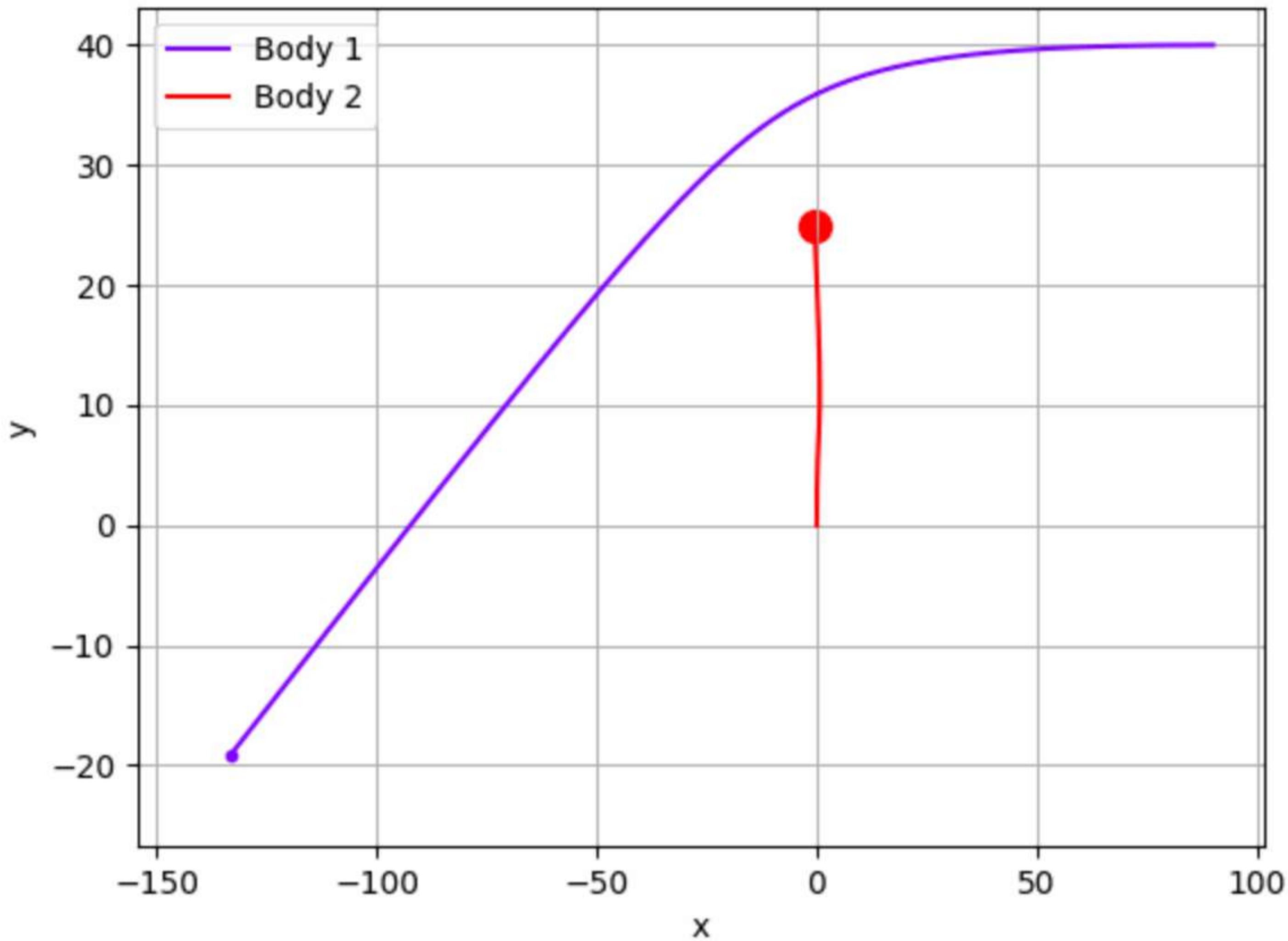
Пример 2

Одно из тел в десять раз тяжелее другого



В данном случае скорость легкого тела соответствовала первой космической, относительно второго тела. Поэтому оно двигается по орбите. В следующем примере будет иначе.

Пример 3



Здесь наблюдается параболическое движение. Т.к. начальная скорость первого тела больше второй космической.

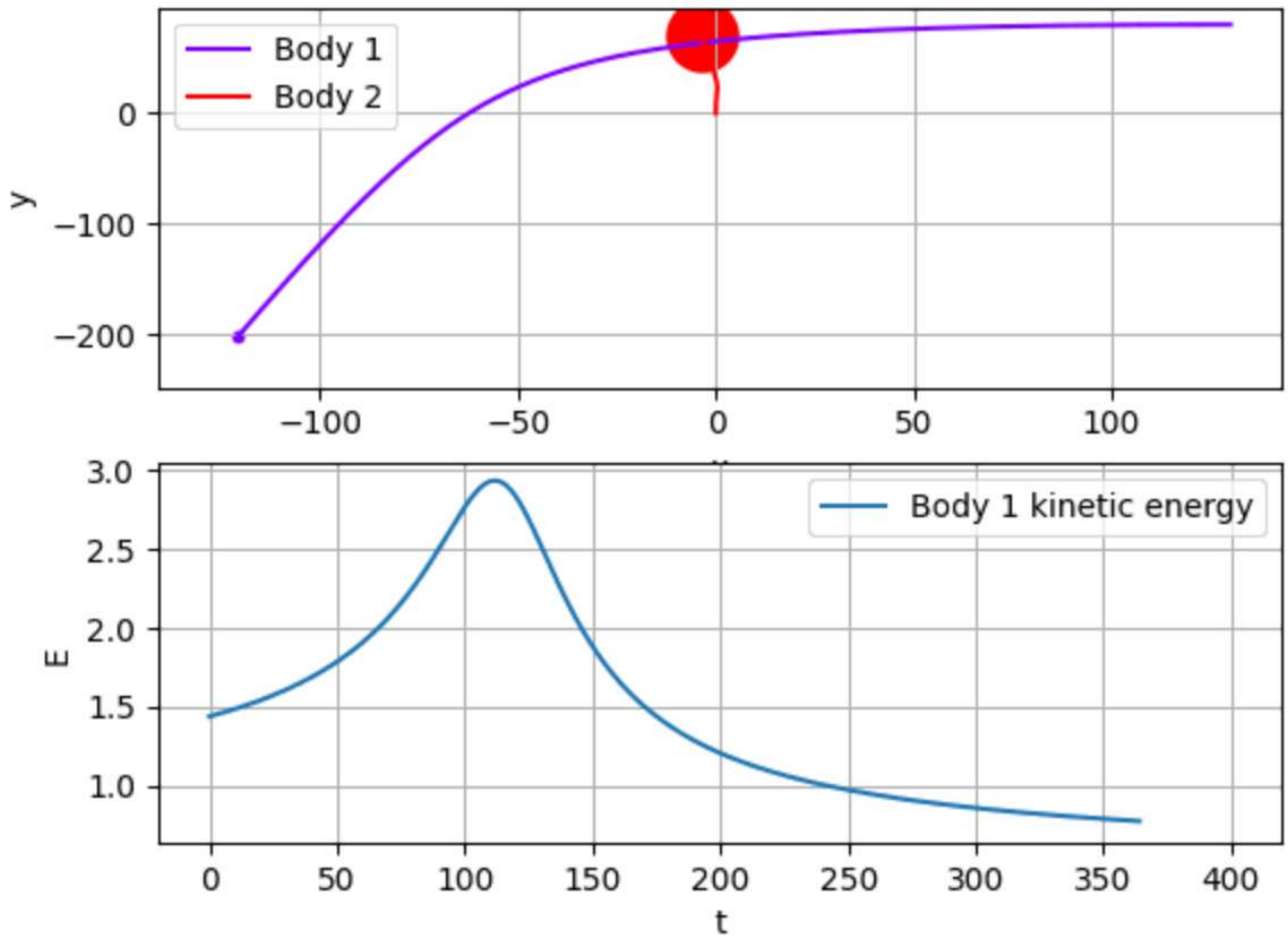
Гравитационный маневр

В предыдущем примере можно заметить, что скорость легкого тела после пролета мимо тяжелого тела изменилась. При этом никаких других сил в расчете не было. Т.е. использую сторонние космические тела мы можем изменять скорость выбранного тела, если направить его на параболическую орбиту вокруг тяжелого тела. В этом и заключается смысл гравитационного маневра.

Рассмотрим несколько примеров, причем в этот раз будет отслеживать изменение кинетической энергии исследуемого тела.

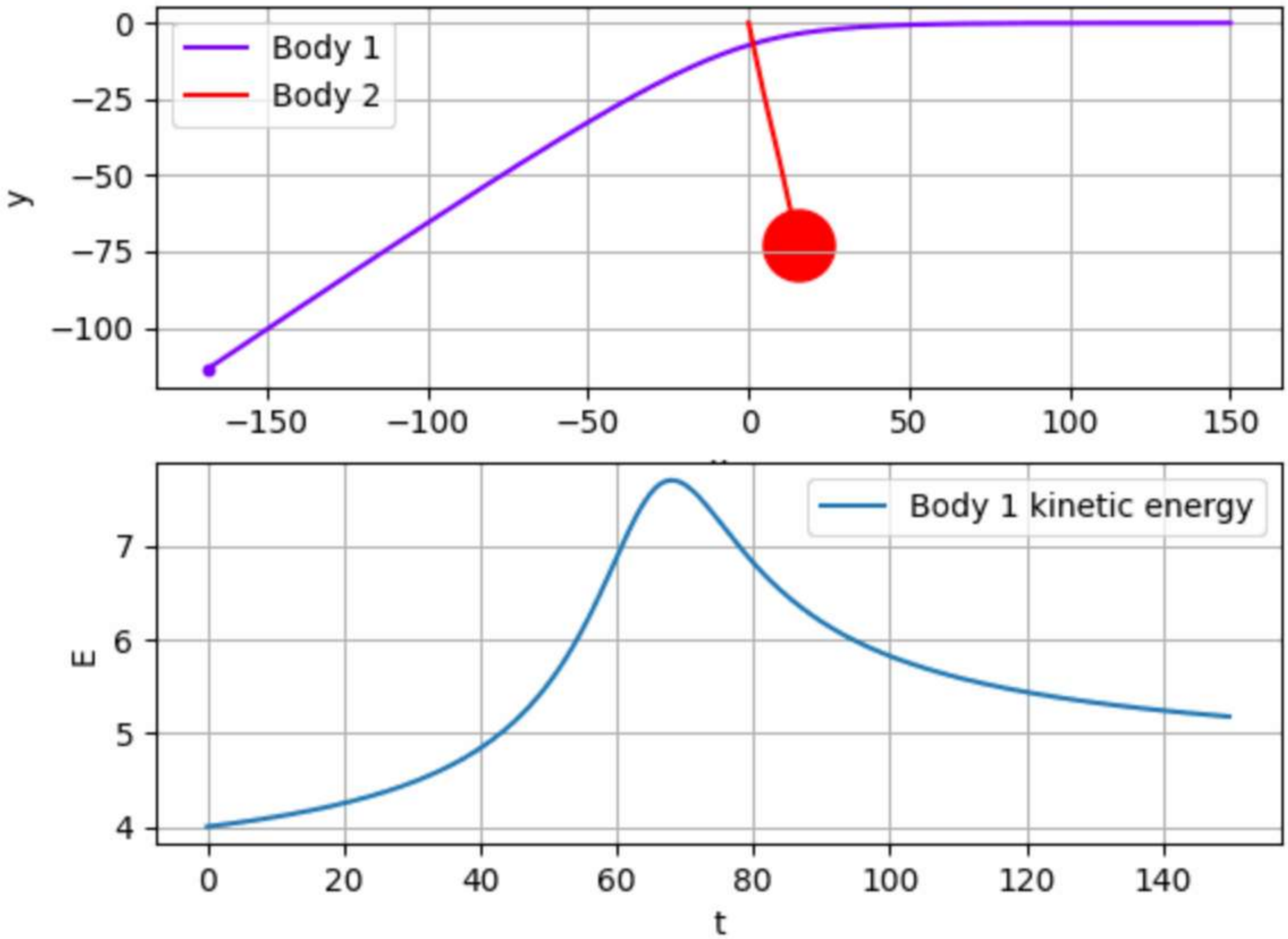
Пример 4

Пример гравитационного замедления.



Пример 5

Пример гравитационного ускорения.



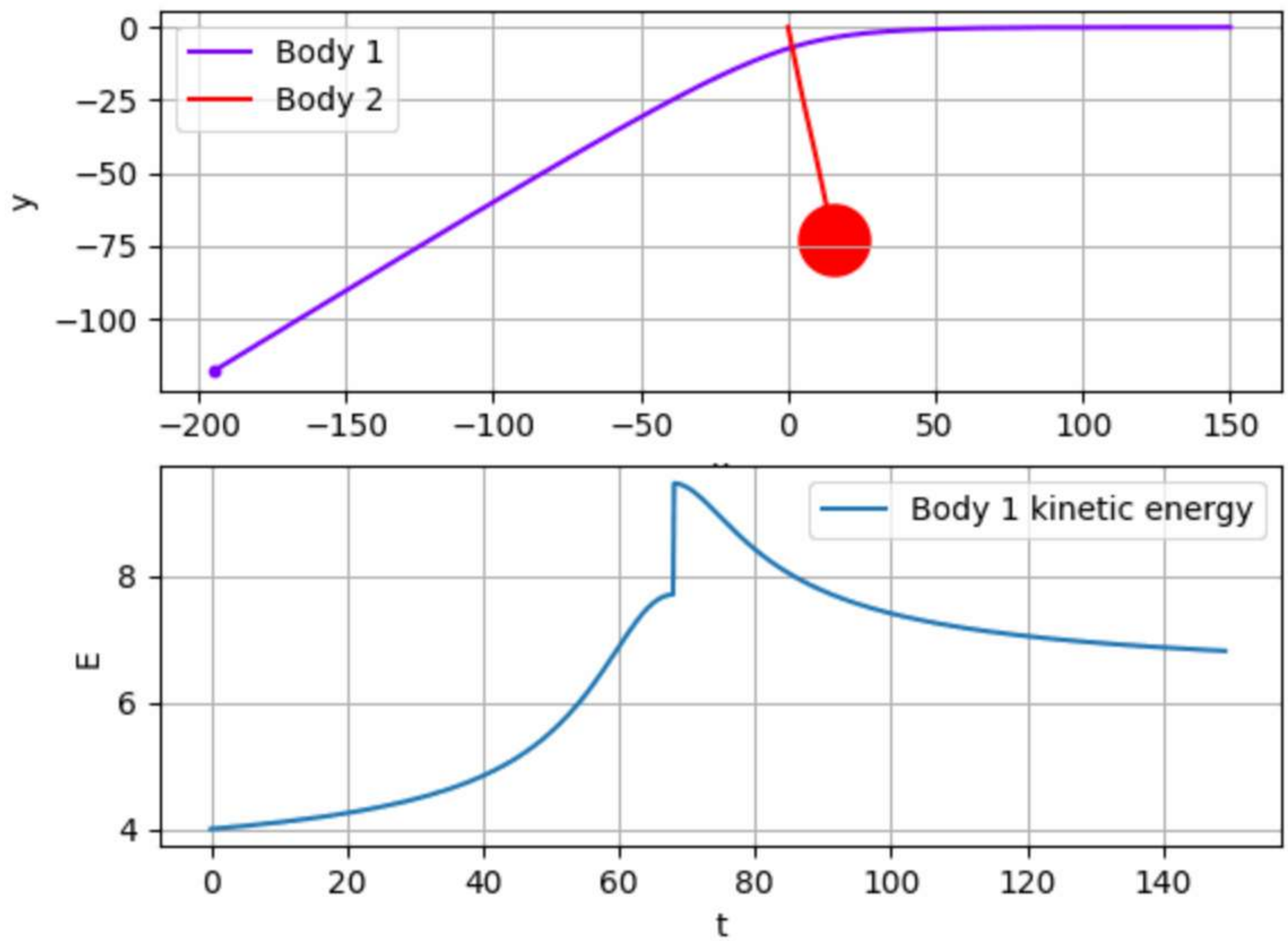
Эффект Оберта

Можно заметить, что ракетный двигатель, движущийся с высокой скоростью, совершает больше полезной работы, чем такой же двигатель, движущийся медленно. т.к. работа силы - это:

```
A = F * dr = F * dr/dt * dt = F * V * dt
```

Следовательно, эффективность силы будет больше, если скорость будет больше В этом заключается эффект Оберта. Будем скачкообразно добавлять скорость и посмотрим, что получится.

Пример 6



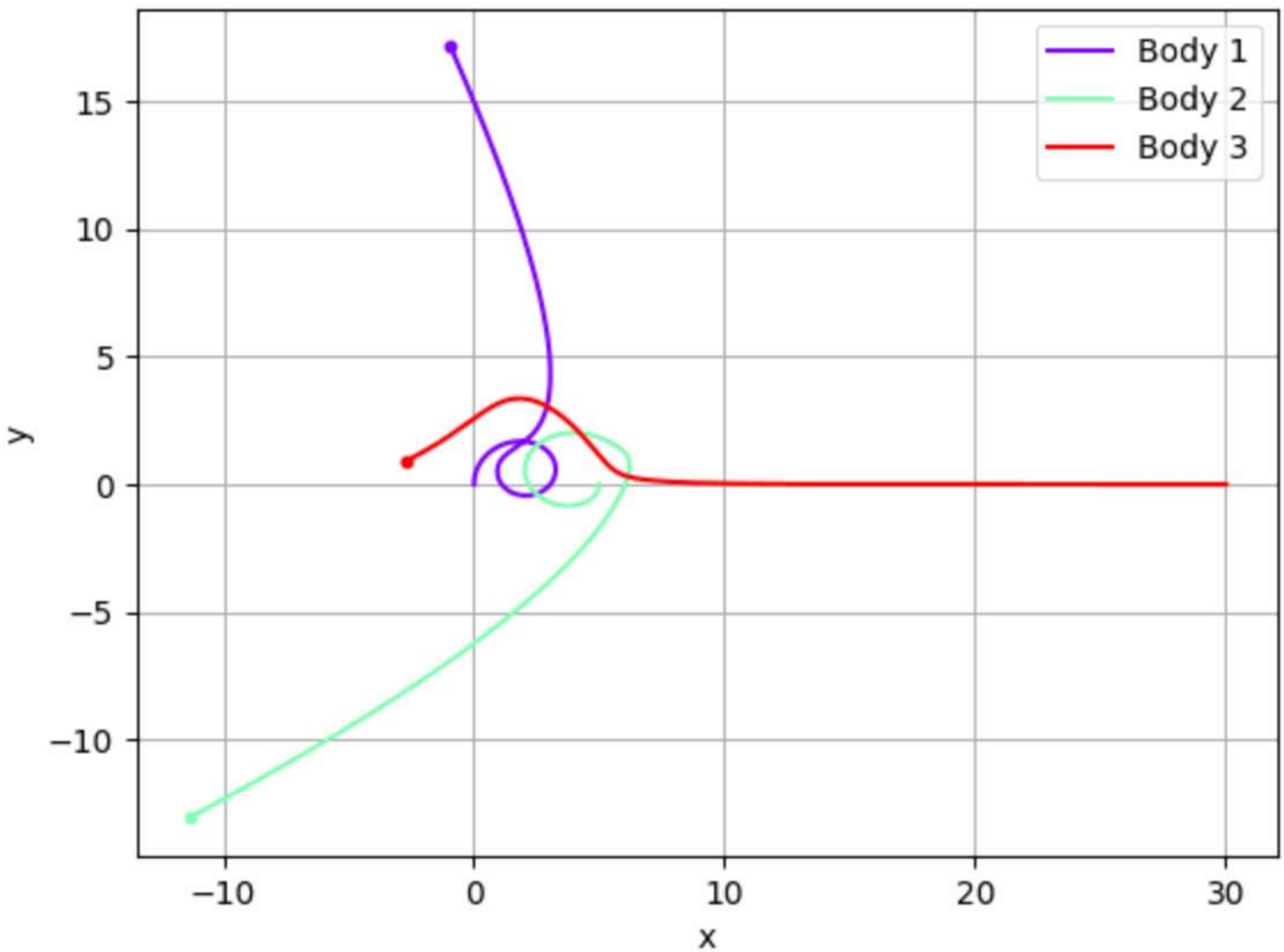
Видно, что наиболее выгодно включать двигатель в перицентре параболической орбиты.

Задача 3-х тел

Возьмем три тела и сразу рассмотрим несколько примеров.

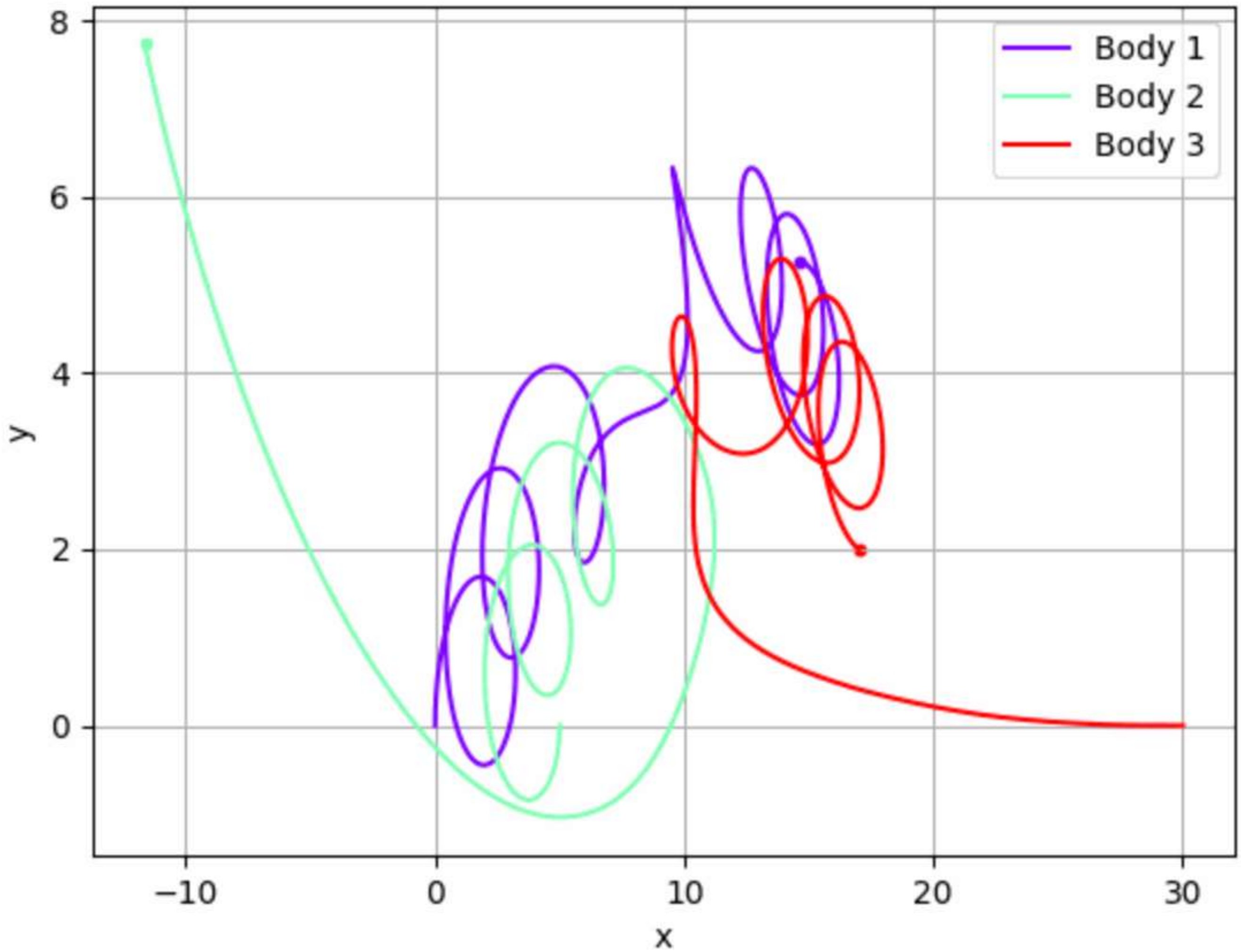
Пример 7

Два тела изначально двигались по эллиптической орбите, но прилет третьего все сломал, в результате все три двигаются в бесконечность отдельно.



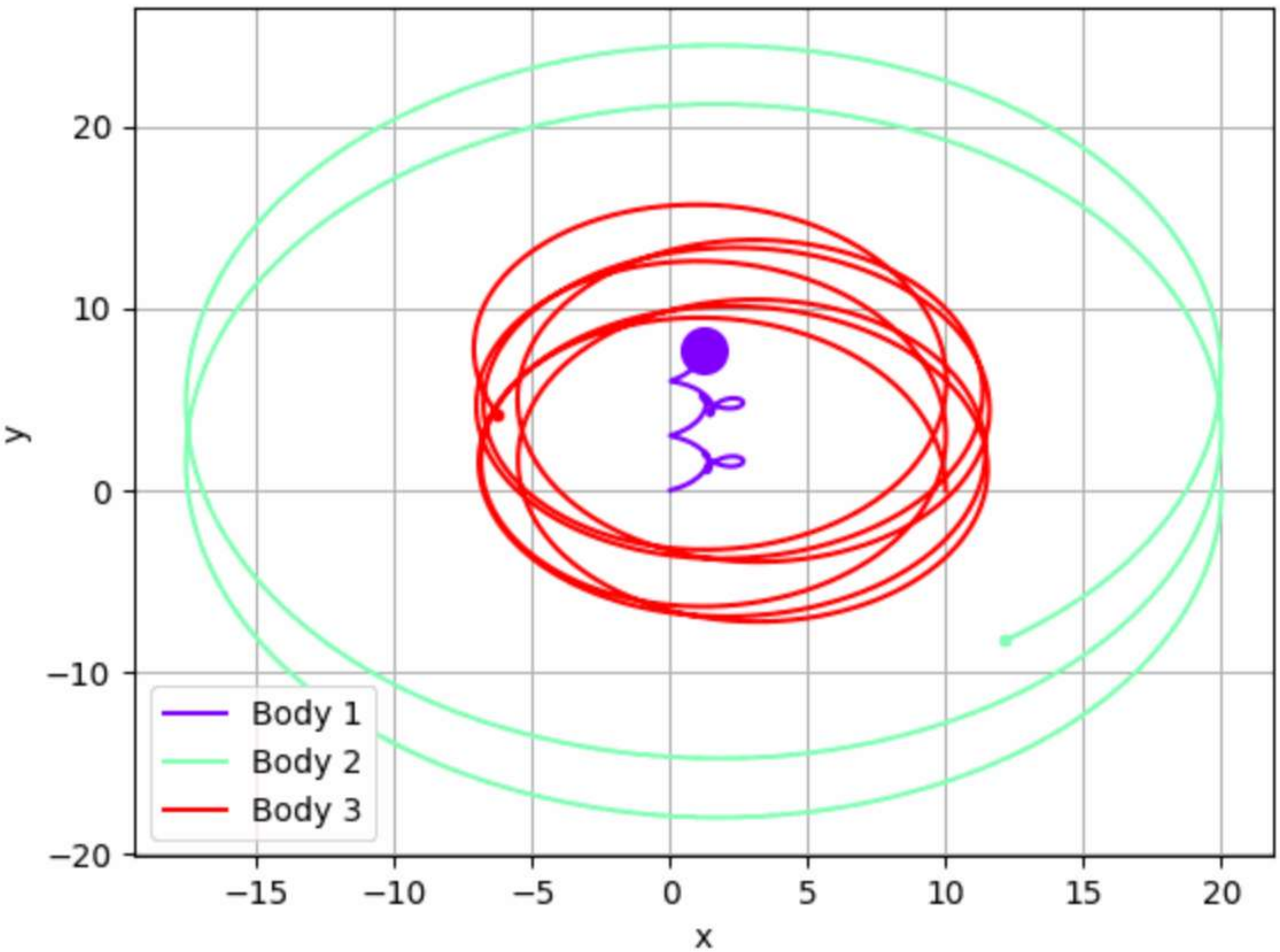
Пример 8

Два тела изначально двигались по эллиптической орбите, но прилет третьего заставил одно тело улететь на бесконечность, а два других образовали новую эллиптическую орбиту.
Этакий "любовный" треугольник.



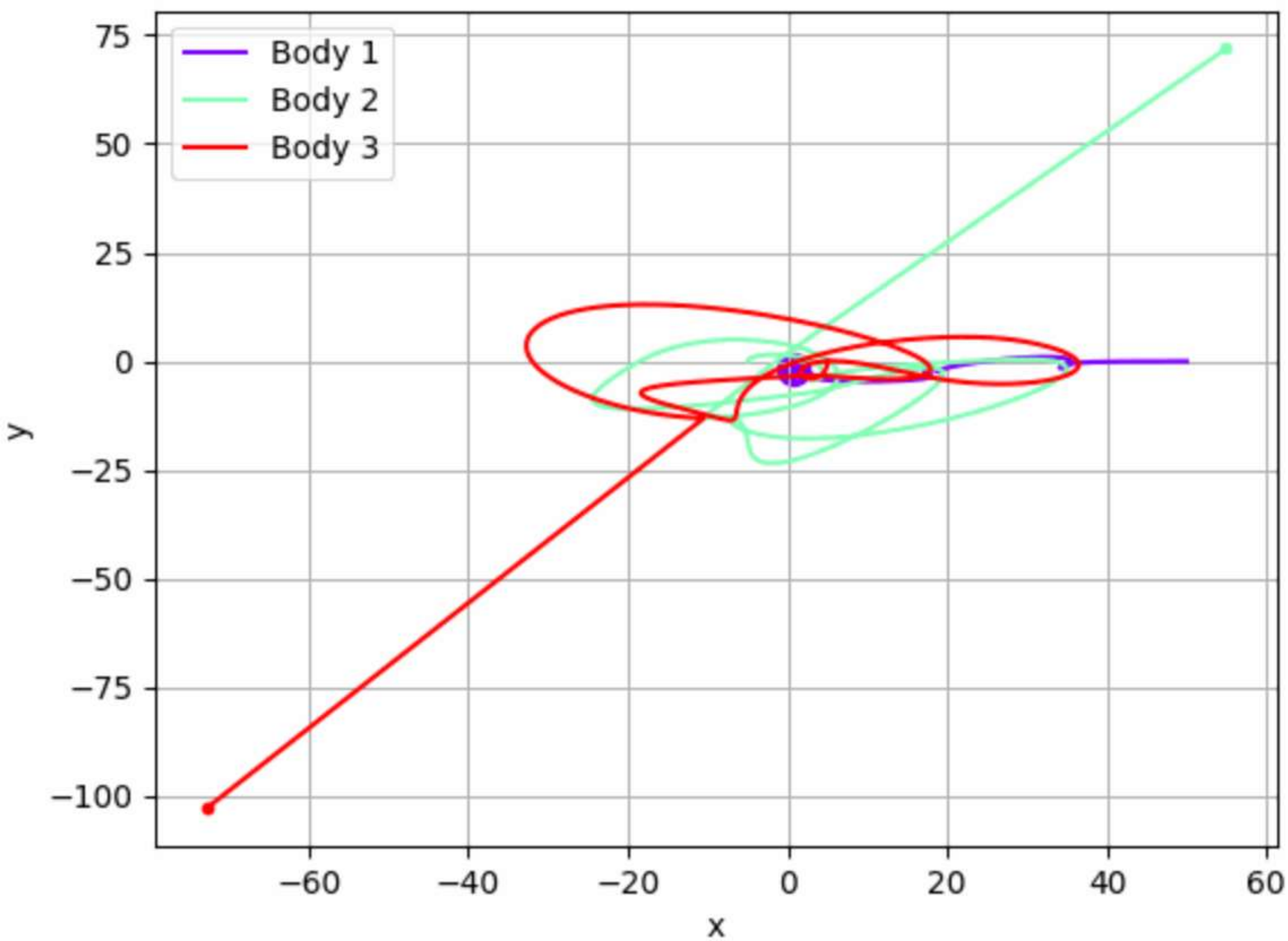
Пример 9

Здесь в центре располагается массивное тело. Вокруг него по эллиптическим орбитам летают два других легких тела.



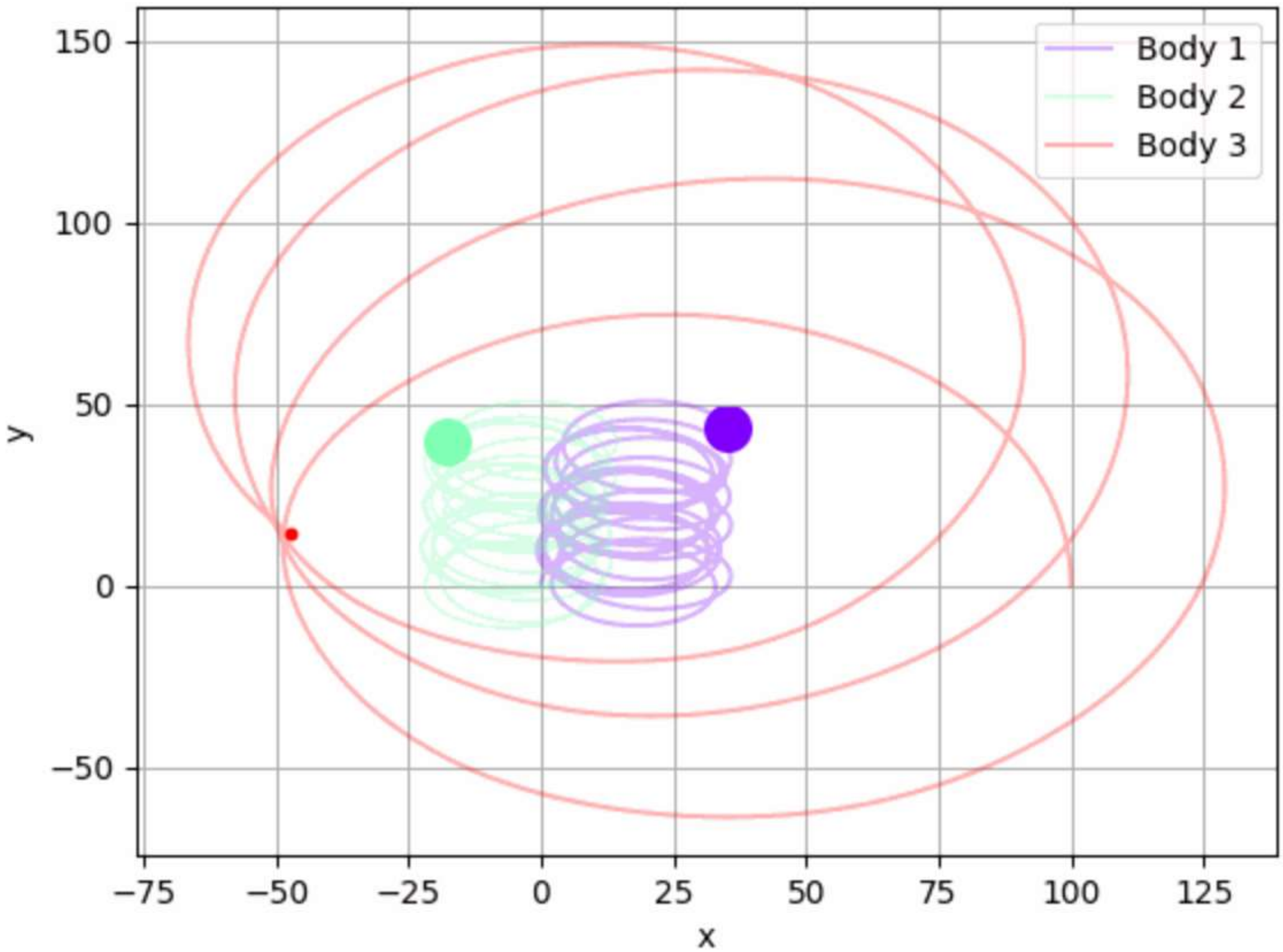
Пример 10

Взаимодействие двух легких тел с одним тяжелым.



Пример 11

Этот моделирует поведение **двойной звезды**.

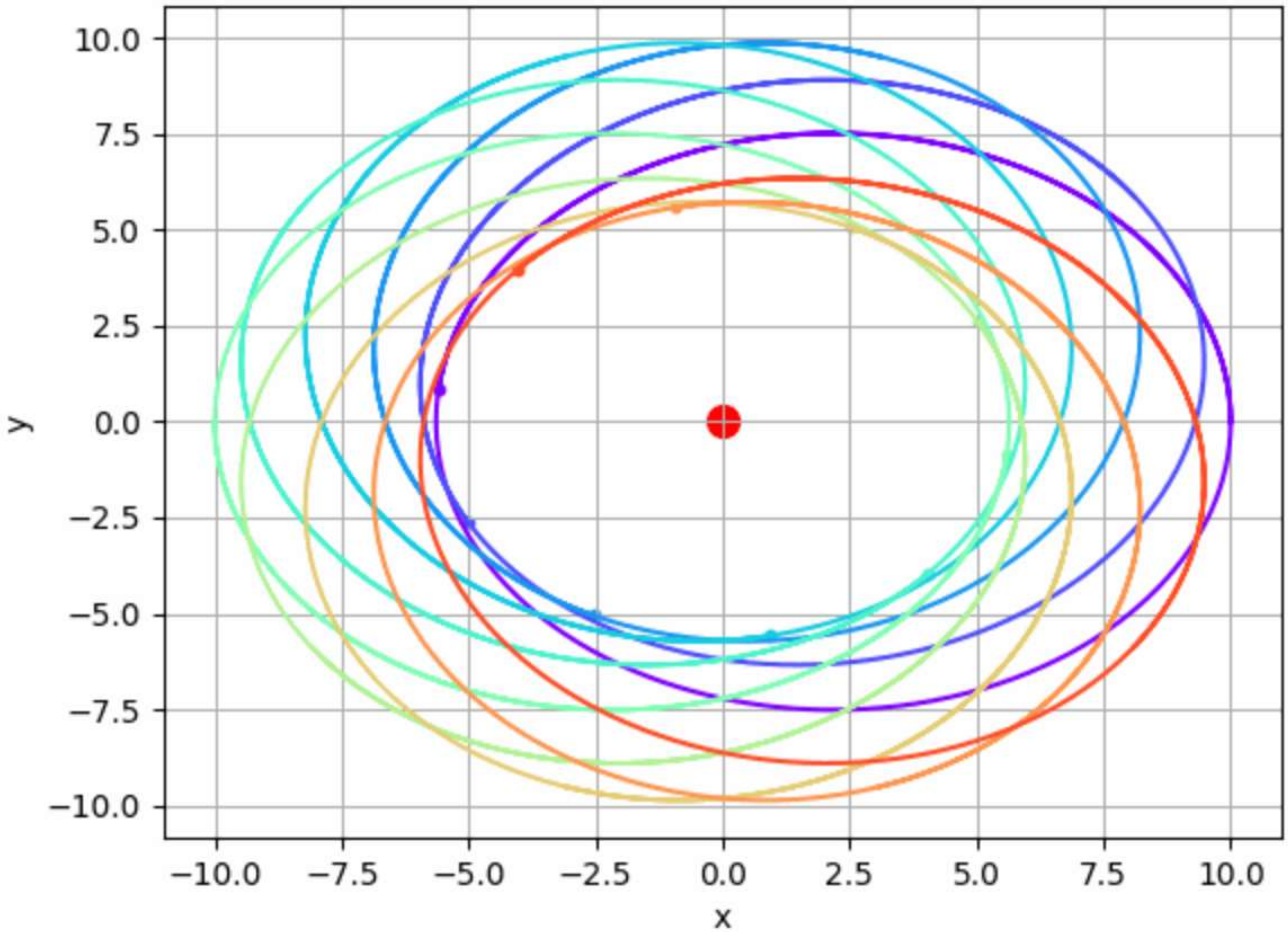


Приближенная модель солнечной системы

Теперь посмотрим, что будет если тел будет порядка 10. Попробуем создать солнечную систему с 9 планетами и 1 тяжелой звездой в центре.

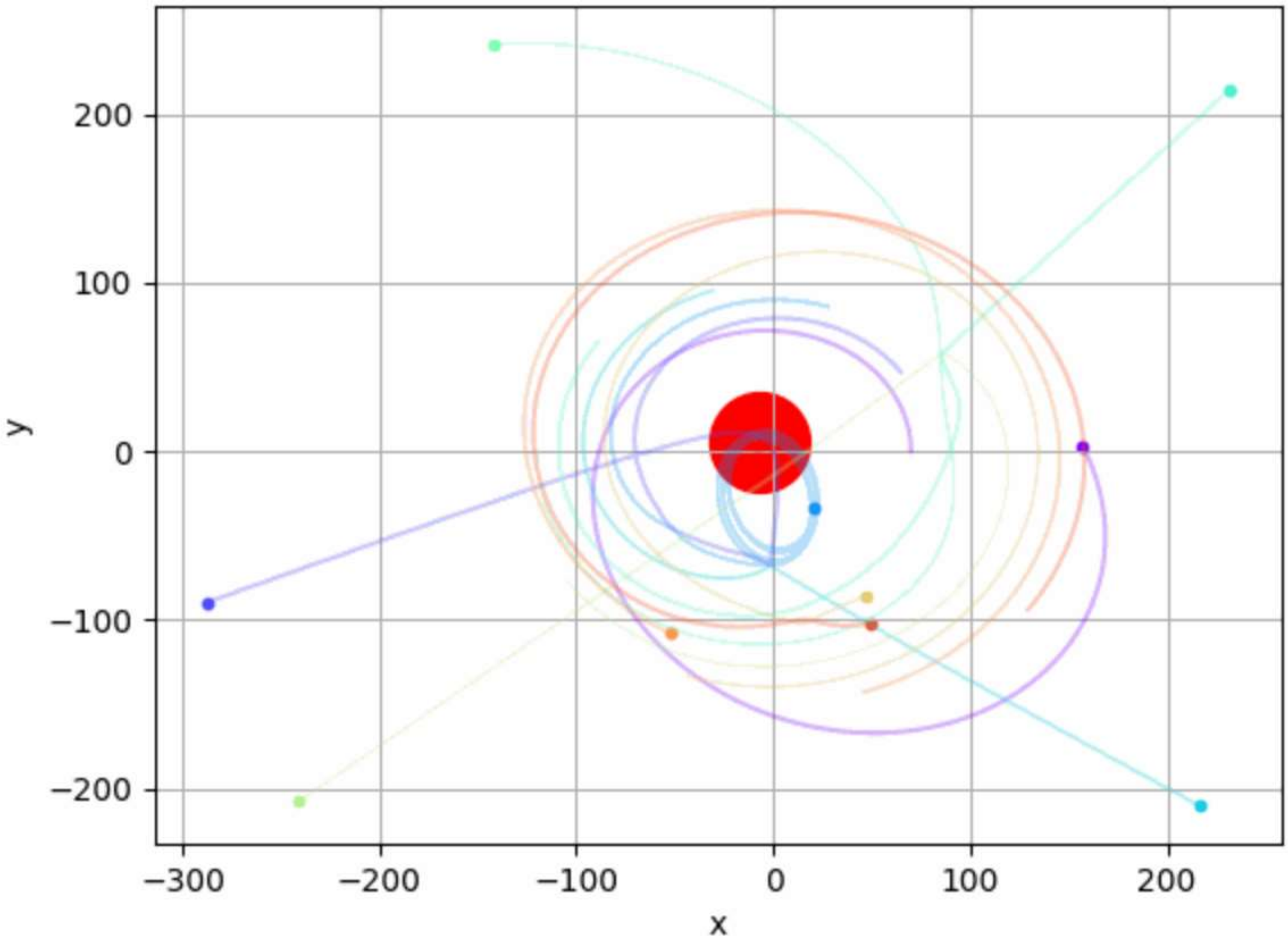
Пример 12

Это абсолютно симметричное движение в псевдо-солнечной системе.



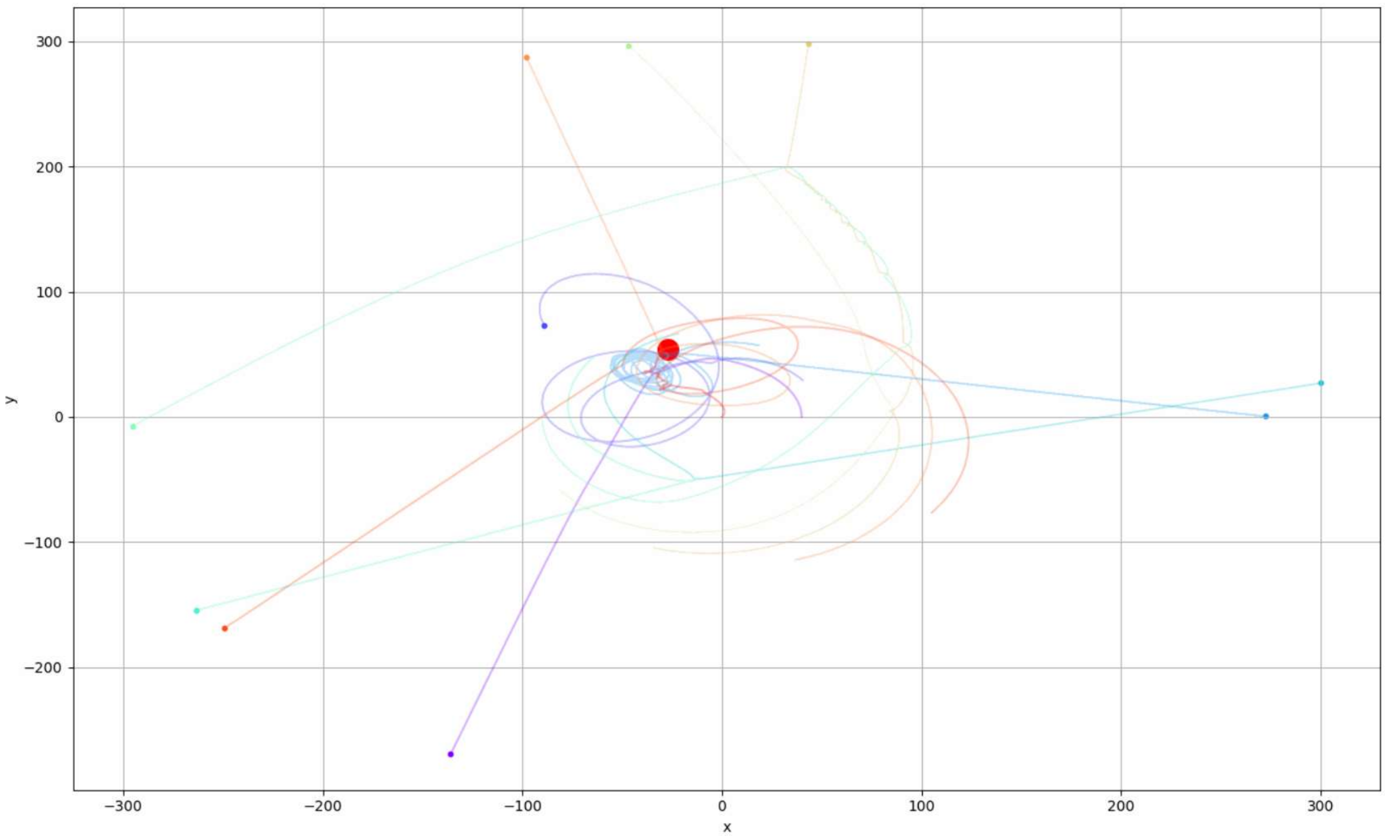
Пример 13

Рассмотрим хаос в псевдо-солнечной системе.



Пример 14

Еще один пример хаоса. В итоге псевдо-солнечная система полностью рассыпалась.


300
200
100
0
−100
−200
y
−300
−200
−100
0
100
200
300
x