# Корректность статического анализа

Статические анализаторы пытаются автоматически установить некоторые свойства программ без их выполнения.

Статические анализаторы можно использовать по-разному, например:

– для поиска ошибок, допускаемых программистами;
– в качестве верификаторов, гарантирующих соответствие программы определенным свойствам.

При поиске ошибок анализ должен быть точным (слишком большое количество ложных срабатываний делает инструмент непригодным), однако не ожидается и не предоставляется гарантия обнаружения всех ошибок определенного класса. С другой стороны, при верификации программ *корректность анализа* имеет первостепенное значение: если анализатор не выдает предупреждений, программа должна быть свободна от класса отслеживаемых анализатором ошибок.

Наша задача – разработать корректный статический анализатор для простого императивного языка программирования. Для этого мы будем использовать абстрактную интерпретацию, а доказательство корректности будем проводить с помощью Rocq.

## Абстрактная интерпретация на примере

Абстрактная интерпретация – это способ корректной аппроксимации семантики языка программирования, широко применяемый в статическом анализе. Необходимость аппроксимации объясняется неразрешимостью анализа семантических свойств программ[1]. При аппроксимации:

– конкретные значения переменных заменяются абстрактными;
– конкретная семантика заменяется на семантику, работающую с этими абстрактными значениями.

Например, рассмотрим следующую простую программу:

```
if x > 0 then
  y := x + 1
else
  y := 1
x := x / y
```

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Rice's_theorem

Добавим к программе аннотации, в которых показано ее состояние. На рисунке 1.а приведены конкретные значения переменных для случая, когда выполнение программы начинается в состоянии, где $x = 10, y = 0$. На рисунке 1.б конкретные значения заменяются интервалами, что позволяет перейти от одного конкретного выполнения программы к абстрактному выполнению программы на всех возможных значениях переменных.

```
{ x = 10, y = 0 }
if x > 0 then
  { x = 10, y = 1 }
  y := x + 1
  { x = 10, y = 11 }
else
  { − }
  y := 1
  { − }
{ x = 10, y = 11 }
x := x / y
{ x = 0, y = 11 }
```

```
{ x ∈ [−∞, +∞], y ∈ [−∞, +∞] }
if x > 0 then
  { x ∈ [1, +∞], y ∈ [−∞, +∞] }
  y := x + 1
  { x ∈ [1, +∞], y ∈ [2, +∞] }
else
  { x ∈ [−∞, 0], y ∈ [−∞, +∞] }
  y := 1
  { x ∈ [−∞, 0], y ∈ [1, 1] }
{ x ∈ [−∞, +∞], y ∈ [1, +∞] }
x := x / y
{ x ∈ [−∞, +∞], y ∈ [1, +∞] }
```

Рис. 1: Выполнение программы а) на конкретных значениях, б) на абстрактных значениях.

Перед выполнением операции деления на абстрактных значениях мы видим, что переменная $y \in [1, +\infty]$ и не может принимать нулевое значение. Полученная аппроксимация является корректной, т.к. абстрактные значения содержат все возможные конкретные значения. Это позволяет утверждать, что выполнение операции не приводит к ошибке деления на 0 для любого конкретного выполнения программы.

# Корректность абстрактной интерпретации

Перейдем от наглядных примеров к формальным определениям.

*Абстрактные значения* должны обладать:

- структурой решетки;
- отображением конкретизации, связывающим абстрактные значения с конкретными;
- абстрактными операциями, соответствующими конкретным операциям языка программирования.

*Решеткой* называется частично упорядоченное множество, в котором любое конечное подмножество обладает точной верхней и точной нижней гранями.

*Отображением конкретизации* называется монотонное отображение $\gamma : A \to \mathcal{P}C$ из абстрактного домена в подмножества значений конкретного.

*Абстрактное состояние* – это конечное отображение переменных в абстрактные значения.

**Задание 1**. Определите операции решетки на абстрактных состояниях с помощью операций решетки на абстрактных значениях. Затем покажите, что на абстрактном состоянии

существует отображение конкретизации, которое можно определить с помощью отображения конкретизации на абстрактных значениях (в файле `AbsInt.v` закончите определения `astateLatticeOp` и `astateConcretization`).

Структура решетки на абстрактных состояниях позволяет задать абстрактную семантику. В частности, существование точной верхней грани позволяет определить семантику условного оператора, а существование неподвижной точки у монотонного отображения на решетке – семантику циклического оператора:

$$\begin{aligned}
[\![\text{skip}]\!](S) &= S \\
[\![x := e]\!](S) &= S[x \mapsto [\![e]\!](S)] \\
[\![c_1; c_2]\!](S) &= [\![c_2]\!]([\![c_1]\!](S)) \\
[\![\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2]\!](S) &= [\![c_1]\!](S) \vee [\![c_2]\!](S) \\
[\![\text{while } e \text{ do } c]\!](S) &= \text{postfixpoint of } (F(X) = S \vee [\![c]\!](X))
\end{aligned}$$

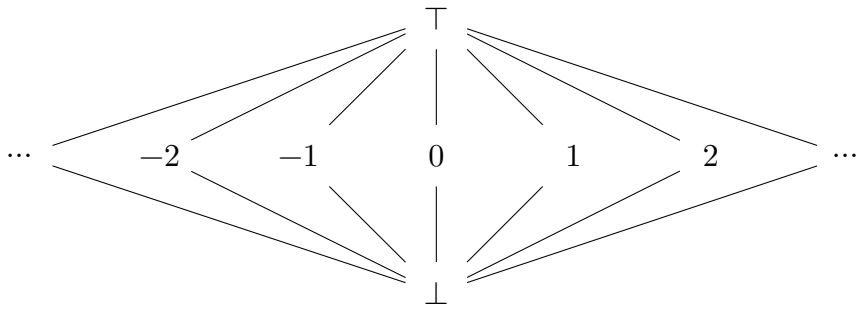
**Задание 2**. Докажите корректность абстрактной интерпретации: абстрактная семантика команд аппроксимирует конкретную семантику (в файле `AbsInt.v` закончите доказательство теоремы `aceval_sound`; для этого сначала нужно доказать корректность определения неподвижной точки, лемма `postfixpoint_sound`, и корректность определения абстрактной семантики выражений, лемма `aeval_sound`).

# Применение: распространение констант и интервалы

Чтобы теперь воспользоваться полученным абстрактным интерпретатором, необходимо определить абстрактный домен, на котором он будет работать. Рассмотрим задачу распространения констант (constant propagation), возникающую при компиляции программ. Этот вариант статического анализа определяет, имеет ли переменная заведомо постоянное значение, и передает его в места использования данной переменной, например, для выполнения дальнейшей свертки констант, уменьшающей избыточные вычисления. Например, статический анализ следующей программы показывает, что $y = 12$, а $z = 11$:

```
x := 1; y := 10; z := x + y;
if x > 0 then
  y := x + z; x := 0
else
  y := 12
```

В качестве абстрактного домена для распространения констант используются целые числа, к которым добавляются $\top$ и $\bot$, а структура решетки имеет следующий вид:




**Задание 3**. Реализуйте абстрактный домен для задачи распространения констант (в файле `AbsInt.v` закончите определения `flatZLatticeOp`, `flatZConcretization` и `flatZAbsValue`).

Другим распространенным примером абстрактного домена является домен интервалов. С его помощью можно отследить широкий класс ошибок, например, деление на 0, переполнение и т.п. Статический анализ для приведенной выше программы показывает, что $x \in [0, 1], y \in [12, 12], z \in [11, 11]$, и тем самым добавляет дополнительную информацию о значении $x$.

**Задание 4**. Реализуйте абстрактный домен интервалов (в файле `AbsInt.v` закончите определения `IntervalLatticeOp`, `IntervalConcretization` и `IntervalAbsValue`).

# Анализ условий

Рассмотрим следующую программу:

```
x := 0;
while x < 10 do
  x := x + 1
```

Текущий анализ с помощью домена интервалов показывает, что $x \in [-\infty, \infty]$. Но после выхода из цикла должно выполняться $x \in [10, \infty]$. Эта неточность объясняется тем, что текущий вариант абстрактной интерпретации не проводит анализ условий в ветвлениях и циклах. Например, при анализе ветвлений абстрактно интерпретируются обе ветви условного оператора, и полученные результаты объединяются:

$$[\![\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2]\!](S) = [\![c_1]\!](S) \vee [\![c_2]\!](S)$$

Можно улучшить результаты анализа, если добавить информацию о результате абстрактной интерпретации условия в каждую из ветвей, например:

$$[\![\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2]\!](S) = [\![c_1]\!](\text{assume\_true}(e, S)) \vee [\![c_2]\!](\text{assume\_false}(e, S)),$$

где assume_true$(e, S)$ возвращает абстрактное состояние $S' \leqslant S$, в котором условие $e$ истинно, а assume_false$(e, S)$ возвращает $S' \leqslant S$, в котором $e$ ложно.

Аналогичное улучшение можно применить к анализу условий циклов:

$$[\![\text{while } e \text{ do } c]\!](S) = \text{assume\_false}(e, \text{postfixpoint of } (F(X) = S \vee [\![c]\!](\text{assume\_true}(e, X))))$$

**Задание 5**. Реализуйте анализ условий, докажите его корректность и проведите анализ приведенных программ с помощью доменов распространения констант и интервалов (создайте файл `AbsIntCond.v`, скопировав файл `AbsInt.v`, внесите необходимые изменения).