概率密度函数在光线追踪中的应用

林一凡

2023 年 7 月 24 日

1　概率密度函数

1.1　定义

在一维情况下，设样本取值在区间 $[x', x)$ 内的概率为 $q(x', x)$ ，定义离散密度函数为 $p(x', x) = \frac{q(x', x)}{x - x'}$ ，且满足

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) p(x_{i-1}, x_i) = 1$$

当分划趋于无穷细时，得到概率密度函数 $f(x)$ ，满足

$$\int p(x) dx = 1$$

1.2　一维函数积分

对于给定可积函数 $f(x), x \in [l, r], f(x) > 0$ ，求 $\int_l^r f(x) dx$ 。由于对函数求积分等于求函数图象和 x 轴之间部分的面积，一种可行的做法是在 $[l, r]$ 上等概率随机选 n 个点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ，令

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (r - l) f(x_i)$$

则当 n 趋于无穷时，S 趋于我们要求的面积。

事实上在 $[l, r]$ 上等概率随机选点相当于用概率密度函数 $p(x) = \frac{1}{r-l}$ 进行选点。一般地，如果选择其他概率密度函数 $p(x)$ $(\int_l^r p(x) = 1,\ p(x) > 0)$ 进行选点，则 $\frac{f(x)}{p(x)}$ 的期望值仍等于 $\int_l^r f(x) dx$ 。若用该概率密度函数 $p(x)$

选 n 个点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ，令

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

则 $S \to \int_l^r f(x)dx \quad (n \to \infty)$ 。

若 $\forall x \in [l, r], \ \frac{f(x)}{p(x)} = C$ （由于 $\int_l^r p(x) = 1$ ，故 $\int_l^r f(x) = C$ ，即 C 为要求的积分值)，则无论随机得到的 x 为何值，S 始终为常数。直观上如果选择的概率密度函数 $p(x)$ 越接近 $\frac{f(x)}{C}$ ，则 $\frac{f(x)}{p(x)}$ 越接近常数 C ，S 收敛得也就越快。

1.3 概率密度函数的线性叠加

假设 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 均为 $[l, r]$ 上的概率密度函数，若 $k_1 + k_2 = 1$，则 $p(x) = k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x)$ 也为 $[l, r]$ 上的概率密度函数。

2 光线追踪

2.1 问题背景

在光源较小、光线相对较暗的情况下，往往会出现较多噪点，虽然可以通过提高采样次数来去除噪点，但会引起渲染效率的降低。

考虑到生成图像中某一像素的颜色是将各个方向的反射光线进行叠加，本质上是对这些光线进行了求和（积分），产生噪点的原因是我们选用的采样方式与期望得到的值偏差过大，得到的颜色收敛速度较慢，导致需要用更多的采样频率来消除噪点。

由于光线追踪的漫反射过程与随机选点求积分的过程类似，可以考虑用一个更好的概率密度函数来加快收敛速度。可以认为光线更强的方向对应的函数 f 值更大，一个自然的想法是令光线更强的方向对应的概率密度函数更大，由此可以设计出合适的概率密度函数对采样过程进行优化。

2.2 针对光源的概率密度函数

最直接的想法是针对光源（或者其他可能相对较亮的物体）进行采样。定义概率密度函数 $light_{pdf}(direction)$ 为反射光线只射向光源的概率密度函数。

例如对于平面光源，对该光源进行均匀采样，设光源面积为 0 ，则在光源表面的概率密度函数恒为 $\frac{1}{A}$ 。如果将光源投影到单位球面上，考虑光源上的一块小面积 dA ，在以 P 为球心的单位球上的投影为 $d\omega$ ，设光源平面法线与 dA 和 P 连线的夹角为 α 则有

$$d\omega = \frac{\cos\alpha}{distance^2(p,q)}dA$$

由于对 $d\omega$ 和 dA 的取样概率应该相等，因此

$$p(direction)\frac{\cos\alpha}{distance^2(p,q)}dA = \frac{1}{A}dA$$

故

$$p(direction) = \frac{distance^2(p,q)}{Acos\alpha}$$

又例如球体光源，对球面进行均匀采样。首先生成单位向量与 z 轴的夹角 θ ，则关于 θ 的概率密度函数为 $2\pi C\sin\theta$ 。设 r_2 为 $[0,1]$ 上随机生成的实数，则可设 θ 满足

$$r_2 = \int_0^\theta 2\pi C\sin t dt = 2\pi C(1-cos\theta)$$

故

$$\cos\theta = 1 - \frac{r_2}{2\pi C}$$

当 $r_2 = 1$ 时可以得到 θ_{max} ，则

$$C = \frac{1}{2\pi(1-\cos\theta_{max})}$$

故

$$\cos\theta = 1 + r_2(\cos\theta_{max} - 1)$$

然后可以在 $[0,1]$ 上随机生成 r_1 ，令 $\phi = 2\pi r_1$ 则

$$z = \cos\theta = 1 + r_2(\cos\theta_{max} - 1)$$

$$x = \cos\phi\sin\theta = \cos(2\pi r_1)\sqrt{1-z^2}$$

$$y = \sin\phi\sin\theta = \sin(2\pi r_1)\sqrt{1-z^2}$$

对于 θ_{max} ，对于从 $\mathbf{p}$ 点发出光线与光源球体相切的情形，设光源球体球心为 $\mathbf{c}$ ，满足

$$\cos\theta_{max} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{length^2(\mathbf{c}-\mathbf{p})}}$$

对于该光源球面的概率密度函数为 $1/solid\_angle$ ，其中

$$solid_angle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{max}} \sin\theta = 2\pi(1-\cos\theta_{max})$$

2.3 混合概率密度函数

由于只针对光源的概率密度函数可能存在某些方面的概率密度为 0，但实际上这些方向仍然存在反射光线，因此只使用针对光源的概率密度函数是不正确的。一种解决方法是将一般的反射概率密度函数与针对光源的概率密度函数结合起来。

令

$$\mathrm{mixture}_{\mathrm{pdf}}(direction) = \frac{1}{2}\mathrm{reflection}_{\mathrm{pdf}}(direction) + \frac{1}{2}\mathrm{light}_{\mathrm{pdf}}(direction)$$

其中 $\mathrm{light}_{\mathrm{pdf}}$ 为针对光源的概率密度函数，$\mathrm{reflection}_{\mathrm{pdf}}$ 为一般的反射概率密度函数。

例如取 $\mathrm{reflection}_{\mathrm{pdf}}(direction) = cos\theta/\pi$，单位向量与 z 轴夹角为 θ ，取 $[0,1]$ 上的随机值 r_2 ，设

$$r_2 = \int_0^{\theta} 2\pi\frac{\cos t}{\pi}\sin t = 1-\cos^2\theta$$

则

$$\cos\theta = \sqrt{1-r_2}$$

然后可以在 $[0,1]$ 上随机生成 r_1 ，令 $\phi = 2\pi r_1$

$$z = \cos\theta = \sqrt{1-r_2}$$

$$x = \cos\phi\sin\theta = \cos(2\pi r_1)\sqrt{1-z^2} = \cos(2\pi r_1)\sqrt{r_2}$$

$$y = \sin\phi\sin\theta = \sin(2\pi r_1)\sqrt{1-z^2} = \sin(2\pi r_1)\sqrt{r_2}$$

对于相对任意方向的概率密度函数，可以通过坐标变换实现。

通过以上方式，我们找到了相对合适的概率密度函数。

此外，还应注意某些材料（如金属、玻璃等）光路相对固定，不应使用概率密度函数，在类的设计时应该特判。