

转让后利率算法（第二版）

基本概念部分

1.

年化收益率

：指用户购买理财，投资满一年所得收益率。如，100 投资一年，获得 10 收益，则年化利率为 $10 / 100 = 10\%$
2.

未结息天数

：指本金产生了利息，但是还没有把利息付给用户的天数
3.

计息基准

： $ACL / 365$ (以一年按照 365 天为基准，以实际计息天数计算利息)
4.

出让人

：发起债权转让的人，即卖债权的人
5.

受让人

：接受转让债权的人，即买债权的人

产品利率&实际利率

产品利率：理财产品的约定利率

实际利率：考虑复投因素之后的利率，该利率一般比产品利率高。

比如投资 10000 买一个理财产品，约定产品利率为 10%，该产品在半年年的时候，会进行一次回款，回款金额为 5000 以及这 5000 块钱在过去 6 个月所产生的利息，即 $5000 + 5000 * 10\% * 0.5$ （年）=5250。在年底的时候，再将剩余本金以及这部分本金在一年的利息进行回款，即 $5000 + 5000 * 10\% = 5500$ 。

从数据上看，这个用户共收入为 $5250 + 5500 - 10000 = 750$ ，实际利率只有 7.5%，并没有比产品利率 10%高，这是因为我们没有考虑复利因素。

如果这个用户，在半年年的时候，收到 5250，再继续投资一个半年期的 10%的产品，年底的时候，这部分资金，会变成 $5250 + 5250 * 10\% * 0.5$ （年）=5512.5。这时，实际利率 = $[(5512.5 + 5500) - 10000] / 10000 = 10.125\%$
这个 10.125%才是考虑进复投因素之后，产品的实际利率。

产品利率&实际利率 这 2 个字段，并不是专业术语，只是为了便于理解引入的关键字。

算法推导

一次还本付息类

一次还本付息是指，只在资产到期的时候，一次性退还所有本金与利息。

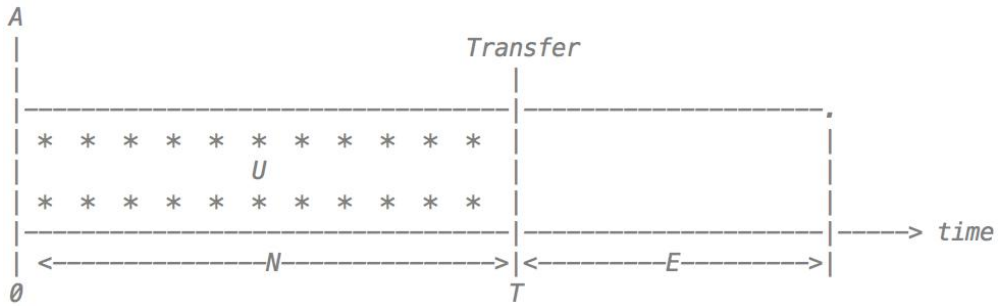


图 1

如图 1 所示，用户购买本金为 A，在债权产生了 N 天利息之后发起转让，此时，由于已经产生了一部分利息（即上图的 U），故受让人需要垫付这部分未结算利息给出让人，由于对于受让人来说，多出了这一部分垫付利息，所以对于购买后的债权，产生了一部分利率折损。

字段	含义
A	剩余债权本金
P	债权原始利率
E	转让时间 到 到期日的天数，即资产的剩余期限
U	起息日到转让日的总利息，即未结息利息
N	起息日到转让日的天数

设转让后利率为 X，则有

$$(U + A) * X * \frac{E}{365} = A * P * \frac{E}{365}$$

根据上图，又有

$$U = A * P * \frac{N}{365}$$

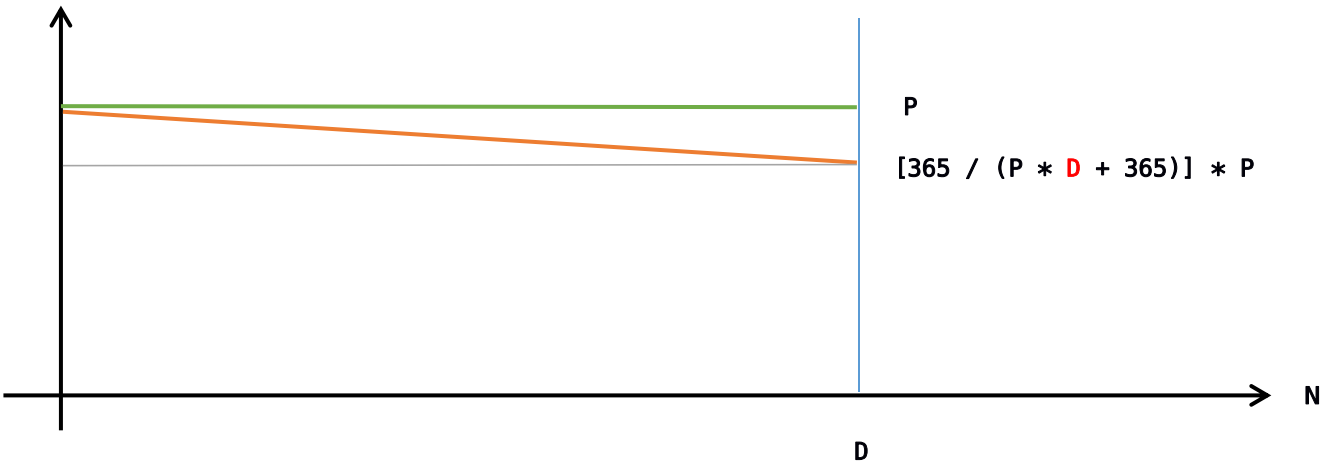
带入上面的公式，可以计算出

$$X = \frac{365}{P * N + 365} * P$$

根据这个公式可以看出转让后利率的变化规律

- 转让后利率只与转让之前的原始利率 P ，未结息天数 N ，计息基准有关。而与转让时的剩余金额，未付收益，剩余期限，还款期数等债权的具体金额属性无关
- 由于 $P*N>=0$ ，所以转让后利率 X 不会大于原始利率 P
- 随着出让人对债权的持有时间越来越长， N 的值会越来越大，从而转让后利率 X 越来越低，当 $N=D$ 时，达到利率最低值

综上可以得出，一次还本付息的转让后利率随着转让时间 N 的变化如下图所示：



等额本息

等额本息的还款方式，每月会偿还固定的本金+利息，其中每个月偿还的利息 = 这个月的持有的所有本金在这个月所产生的利息，也就是说，等额本息每一次还款的时候，也进行了一次结息操作，每一次还款都可以当作是一次利息的结算，当然也会顺带偿还一部分本金，由于偿还了这一部分本金，所以下一个月的持有本金就会降低，从而下个月需要偿还的利息也会降低。

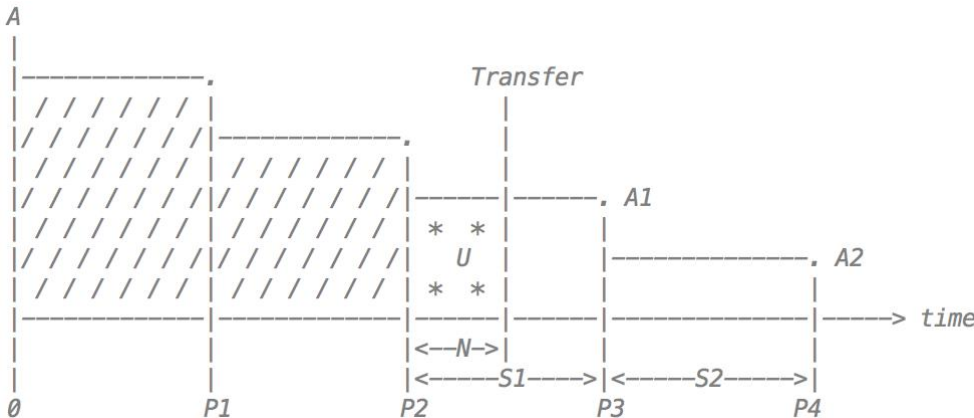


图 3

如图 3 所示

假设某一笔等额本息资产，需要分 4 期回款，分别是上图的 P1，P2，P3，P4

P1，P2 已经还款，在 P2～P3 计息了 N 天之后，发起转让。

由于前 2 期回款 P1，P2 在回款的时候，已经将资产在 P1，P2 产生的所有的利息一并还款给了用户，所以这笔资产就可以看成是一个从 P3 开始时购买的新资产，即只有 P3，P4 这 2 期回款的等额本息资产。

1. 第三期的垫付收益 U 对后续还款计划有哪些影响？

首先要弄清楚的一件事是，U 这一部分资金，对于受让人来说，是属于购买本金。但是这部分购买本金是在什么时候退出的？很明显是在第三期还款的时候，因为 U 本来就属于第三期要还的利息，所以单就第三期这一期来说，由于垫付收益 U 的存在，的确产生了利率的折损。但是，从第三期结束之后，对于受让人来说，其所持有的所有本金与出让人是完全一致的，所以之后的利率，并没有产生任何折损。

2. 如何计算等额本息转让后的利率？

从上面可以看出，等额本息转让后，当期的转让后利率是有折损的。但是在当期回款之后，对于后续的每一期利率来说，并没有任何折损。即在转让后的不同时间段，利率并不一致。就上面的问题，在 【转让日～P3 止息日】 这段时间，转让后利率 < P，而在 【P3 止息日～债权止息日】 这一段时间，转让后利率 = P。

根基经济学原理：决定利息的因素是**资金的实际占用时间**和**占用金额的大小**（当然也跟利率有关）。而对**本金退出的时间的处理**，会直接影响计算出的转让后的利率，对于等额本息，我们以当月还款时，垫付收益（对受让人来说是购买本金）退出的方式来计算转让后的利息。

所以我们可以根据原资产的数据，来计算出受让人实际得到的利息，再根据受让人所出的本金以及对应金额所占有的期限，来计算转让后的利率。各字段含义定义如下

字段	含义
An	第 n 期时剩余资产本金
Sn	第 n 期的总天数

P	资产原始利率
U	上一次结算利息到转让日的总利息，即未结息利息
N	上一次结算利息到转让日的天数

设转让后的利率为 X：

第一步
 计算受让人实际能得到多少利息

受让人第 1 个月实际得到的利息	$A_1 * P * \frac{S_1}{365} - A_1 * P * \frac{N}{365}$
受让人第 2 个实际月得到的利息	$A_2 * P * \frac{S_2}{365}$
受让人第 n 个实际月得到的利息	$A_n * P * \frac{S_n}{365}$

所以，受让人实际得到的利息为

$$\frac{P}{365} * [(\sum_1^n A_n * S_n) - A_1 * N]$$

第二步
 计算实际占用受让人本金的时间 以及 以转转让后的利率 X 来计算应该得到的利息是多少？

受让人第 1 个月应该得到的利息	$(U + A_1) * X * \frac{S_1 - N}{365} = A_1 * X * \frac{S_1}{365} - A_1 * X * \frac{N}{365} + U * X * \frac{S_1 - N}{365}$
受让人第 2 个月应该得到的利息	$A_2 * X * \frac{S_2}{365}$
受让人第 n 个月应该得到的利息	$A_n * X * \frac{S_n}{365}$

所以，以转让后的利率 X 来计算，受让人应该得到的利息为：

$$\frac{X}{365} * [(\sum_1^n A_n * S_n) - A_1 * N + U * (S_1 - N)]$$

由上述可以得出等式

$$\frac{X}{365} * [(\sum_1^n A_n * S_n) - A_1 * N + U * (S_1 - N)] = \frac{P}{365} * [(\sum_1^n A_n * S_n) - A_1 * N]$$

最终可以简化为：

$$X = \frac{(\sum_1^n A_n * S_n) - A_1 * N}{(\sum_1^n A_n * S_n) - A_1 * N + \frac{A_1 * P * N * (S_1 - N)}{365}} * P$$

设

$$Q = 365 * [(\sum_1^n A_n * S_n) - A_1 * N]$$

代入上述等式，有

$$X = \frac{Q}{Q + A_1 * P * N * (S_1 - N)} * P$$

从该公式中，可以看出：

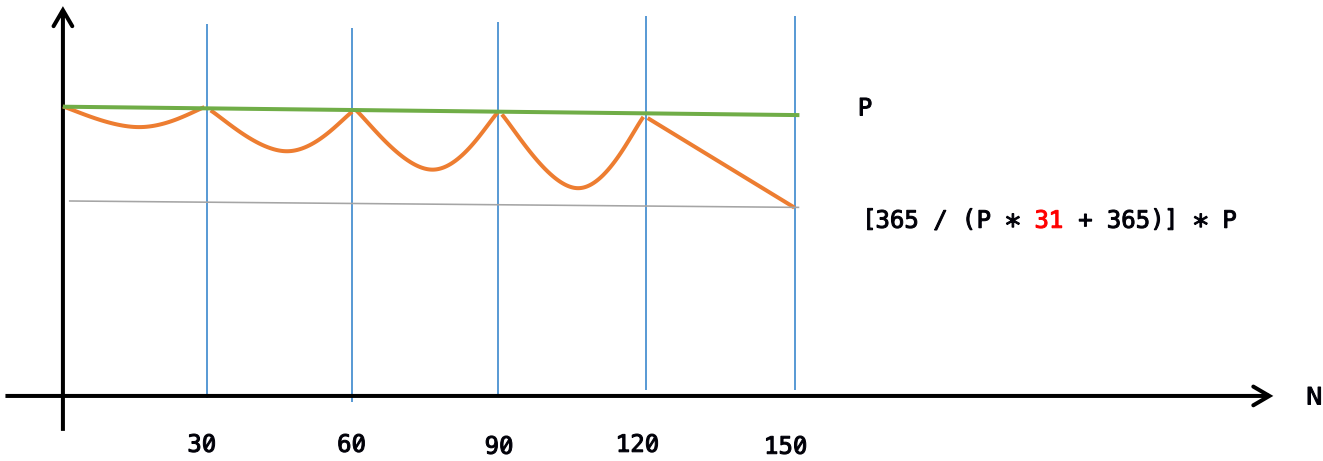
- 由于 N >= 0 ，所以转让后利率 X 永远 <= 转让之前利率 P
- 从分母部分可以看出是一个关于 N 的一元二次方程，在 N = 0 和 N = S1 时，等于原利率，在这之间，都是一个大于 0 的数，所以转让后的利率呈现出的是一个开口向上的抛物象，又由于等额本息每次回款操作相当于结息，N 的值会在每次还款之后被置为 0，所以，转让后的利率呈现出一个规律的波浪线。
- 如果在最后一个月的时候发起转让，此时情况又有所不同，此时由于只有一个月，所以有：

$$\sum_1^n A_n * S_n = A_1 * S_1$$

代入上式，最终可以得到

$$X = \frac{365}{P * N + 365} * P$$

可以明显看出，这跟一次还本付息是相同的，所以最后一个月呈现的是一个逐渐下降的趋势，故等额本息转让后利率随着转让时间 N 的变化情况如下图：



关于实际利率与产品利率：上述求解方式得到一个转让后利率，可以说是综合第一个月转让后利率与第一个月之后的利率而得出的一个均值，这个值比第一个月转让后利率要高，但是比其他月份的转让后利率要低。单从受让人的角度来说，第一月如果按照所有其所投入的资金与该均值利率来计算应该得到的利息的话，所得利息应该是大于第一个月的实际还款利息的，这里也可以理解为将第一个月少还的利息分摊了到了后续几个月的还款中。

实际上，对于等额本息还款方式来说，转让后，本就无法以一个精确的转让后利率数值，来描述后续每个月的转让后还款情况（转让当月与后续月份的转让后利率是不一致的），之所以这样求解，是为了能提供给用户一个具有参考价值的转让后利率，用以描述了用户购买转让产品后的实际收入情况。

每月结息类-月息宝（计算方式一）

每月结息类的债权，每月会进行一次利息的结算，将当月持有本金在当月所产生的利息还款给用户。

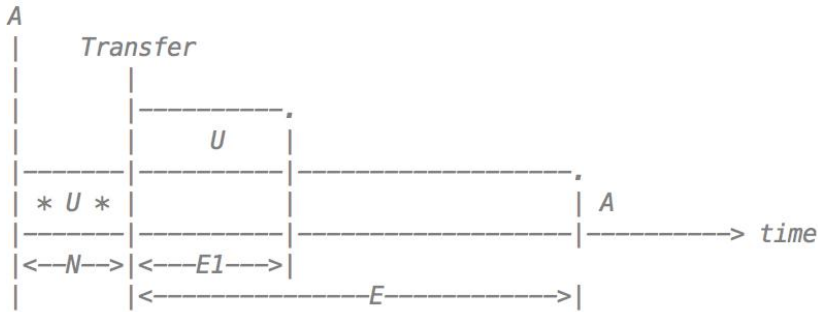


图 2

如图 2 所示，如果某一个每月结息类债权，已经计息了 N 天，对应有总额为 U 的未付收益，距离下一个结息日还有 E1 天，距离资产到期还有 E 天，此时转让出去之后，受让人的购买本金为 A+U，但是 U 这一部分在第一期到期之后会还款给用户（当月产生的收益在当月还款时兑付），转让当月还款之后，受让人剩余的持有本金为 A，之后受让人的剩余本金会一直与出让人转让之前的资产保持一致，同等额本息类似，第一期还款之前有利息折损，之后的利率与出让人保持一致。

上图 Transfer 时间点右边部分，y 轴展示的是受让人本金的变化情况，在第一期还款之前，受让人本金为 U+A，第一期还款完之后，垫付收益兑付给了受让人，之后本金与出让人一致，变为 A。

定义字段含义如下

字段	含义
A	剩余资产本金
P	资产原始利率
E	转让时间 到 到期日的天数，即资产的剩余期限
E1	转让时间 到 当期还款日的天数，即当期剩余天数
U	上一次结算利息到转让日的总利息，即未结息利息
N	上一次结算利息到转让日的天数

设转让后利率为 X，算法的推导与等额本息类似

第一步

计算受让人实际得到的利息

$$A * P * \frac{E}{365}$$

第二步

计算实际占用受让人本金的时间 以及 以转转让后的利率 X 来计算应该得到的利息是多少？

受让人当月应该得到的利息	$(A + A * P * \frac{N}{365}) * X * \frac{E_1}{365}$
受让人后续总利息	$A * X * \frac{E - E_1}{365}$

所以，总利息为

$$\frac{A * X}{365} * [\frac{P * N * E_1 + 365 * E}{365}]$$

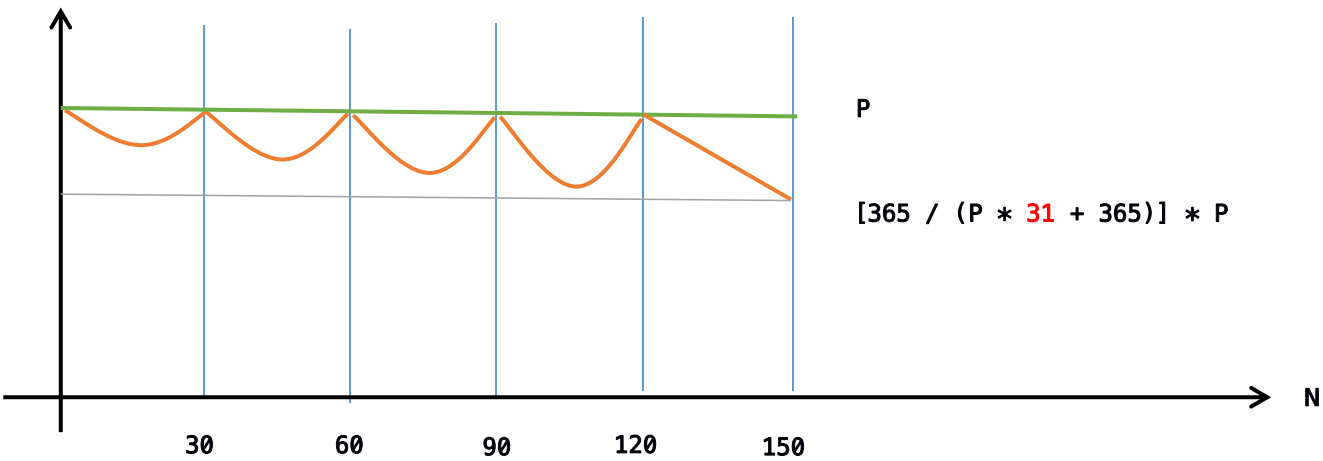
由上述可以得出等式

$$\frac{A * X}{365} * \left[\frac{P * N * E_1 + 365 * E}{365} \right] = A * P * \frac{E}{365}$$

最终可以简化为：

$$X = \frac{365 * E}{P * N * E_1 + 365 * E} * P$$

从该公式可以看到，随着 N 增大，E1 会逐渐减小，同等额本息还款算法类似，N 置被规律性的清 0，具体变化曲线如下。



关于月付息产品的说明：在计算转让后利率的时候，对本金退出时间的处理，会直接影响到转让后的利率，月付息类产品，在到期之前，是没有任何本金退出的，很多情况下，我们假设购买之后，债权到期之前没有任何本金退出，那么这种情况下，计算公式是与一次还本付息完全一致，此时，由于 N 值定期清 0，所以呈现出一个锯齿形，具体见计算方式二。

但是，此类转让产品，受让人垫付的利息部分，的确是在购买当期还款的时候，退还给了用户，所以该算法是以购买当期还款时退还这部分受让人本金的方式，来计算转让后的利率，同第二种计算方式方式相比，该算法计算出的转让后的利率要偏高一点。

每月结息类-月息宝（计算方式二）

该计算方式假设受让人垫付的收益并没有在当月结息的时候退出，则对于受让人购买转让来说，所有本金都在在最后一个月还款的时候退出。

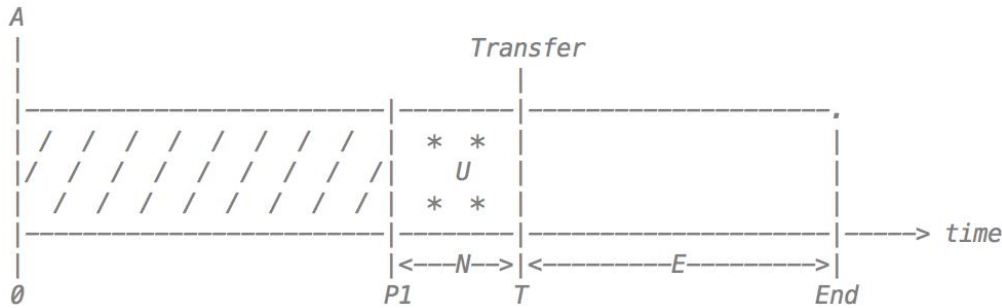


图 2

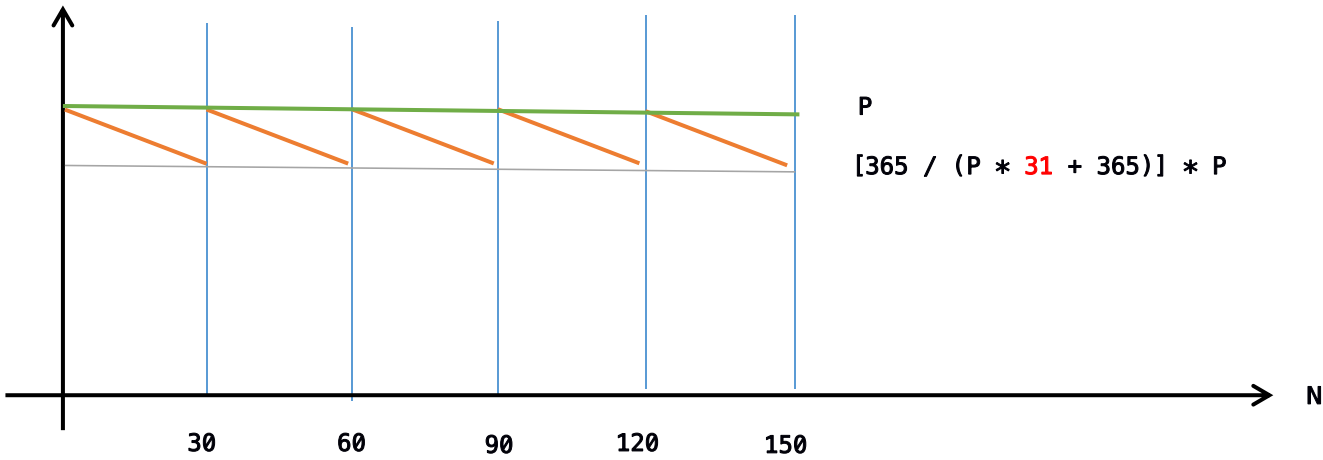
如图 2 所示，假设债权只有两期还款，第一期在 P1 时进行结息还款，第二期到资产到期结算所有剩余本息，在 P1 时，由于已经将债权在 P1 以前的所有利息进行了一次清算，所以在 P1 这个时间点，相当于一个期限只有 P1~P2，利率等于原利率的新债权。

字段	含义
A	剩余资产本金
P	资产原始利率
E	转让时间 到 到期日的天数，即资产的剩余期限
U	上一次结算利息到转让日的总利息，即未结息利息
N	上一次结算利息到转让日的天数

设转让后利率为 X，算法的推导与一次还本付息一致，最终有

$$X = \frac{365}{P * N + 365} * P$$

不过，对于每月付息类的资产来说，由于每次付息之后，N 的值会被重置为 0，根据上式可以看到，转让后利率在结息之后，又被还原为了资产的原始利率，这种现象是因为，如果在某次结息之后立即转让，此时对于受让人来说，是并没有垫付任何收益的，所以也没有任何利率折损，具体的转让后利率随着时间的变化情况如下图：



关于计算方式一 与 计算方式二 的一个说明
方式一是一个更为精确的转让后利率，是以实际的资金以及占用天数来计算转让后的利率，但是对于用户来说，可能无法理解购买当月的还款会退还垫付收益的这一个概念，所以线上此次修改，会采用方式二来计算每月结息类债权的转让后利率。

不定期部分提前退出类-农分期

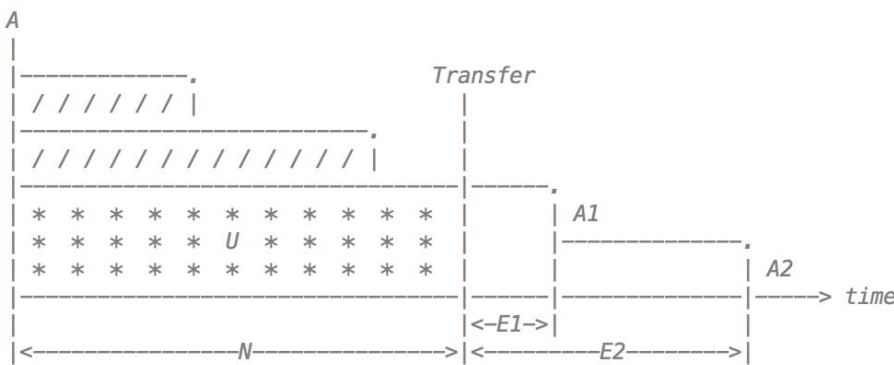
这类还款指的是购买之后，会不定时退出一部分本金，以及这部分本金在过去占有时间内产生的所有利息，比如购买了一笔 10000 元的债权，约定年化利率 10%，在持有半年的时候，还款 5000 元以及这部分资金在这半年所产生的利息 250 元，共 5250 元，剩下的 5000 元在年底还款，共 5000 本金以及这 5000 本金一年的利息，共 5500 元。
这一类还款方式，并不限制还款金额与还款时间，但是遵循一个原则，本金一旦退出，则这部分本金产生的所有收益也会跟着一起退出。

我们不从全局考虑转让后利率，只对某一份本金来计算转让后利率的话，一份本金的转让后利率计算方式是与一次还本付息一致的。即：

$$X = \frac{365}{P * N + 365} * P$$

可以看到转让后利率，与什么时候还款并无关系。

当然也可以用等额本息의推算方式来进行验证。



各字段含义定义如下

字段	含义
An	第 n 期还款时要退出的本金(注意不是持有中本金)
En	转让日到第 n 期还款日的天数(注意不是第 N 期的天数)
P	资产原始利率
U	未付利息
N	起息日到转让日的天数

第一步

计算受让人实际能得到多少利息

受让人第 1 个月实际得到的利息	$A_1 * P * \frac{E_1}{365}$
受让人第 2 个实际月得到的利息	$A_2 * P * \frac{E_2}{365}$
受让人第 n 个实际月得到的利息	$A_n * P * \frac{E_n}{365}$

所以，受让人实际得到的利息为

$$\frac{P}{365} * \sum_1^n A_n * E_n$$

第二步

计算实际占用受让人本金的时间 以及 以转转让后的利率 X 来计算应该得到的利息是多少？

受让人第 1 个月应该得到的利息	$(A_1 * P * \frac{N}{365} + A_1) * X * \frac{E_1}{365} = A_1 * X * \frac{E_1}{365} * (\frac{P * N + 365}{365})$
受让人第 2 个月应该得到的利息	$A_2 * X * \frac{E_2}{365} * (\frac{P * N + 365}{365})$
受让人第 n 个月应该得到的利息	$A_n * X * \frac{E_n}{365} * (\frac{P * N + 365}{365})$

所以，以转让后的利率 X 来计算，受让人应该得到的利息为：

$$\frac{X}{365} * (\frac{P * N + 365}{365}) * \sum_1^n A_n * E_n$$

由上述可以得出等式

$$\frac{X}{365} * (\frac{P * N + 365}{365}) * \sum_1^n A_n * E_n = \frac{P}{365} * \sum_1^n A_n * E_n$$

最终可以得到

$$X = \frac{365}{P * N + 365} * P$$

可以看到跟一次还本付息的计算方式是一致的。

关于第二版转让后利率算法的说明

第二版利率算法在做公式推导的时候，有意避开原资产的收益数据，这么做的原因是，对于原资产来说，在回款计划生成以及每日收益计算的时候，都会存在一些数据上的四舍五入，在一些极端场景下，如果采用资产当前数据来做转让后的利率计算，这些数据上的四舍五入会被放大很多倍，从而导致计算出的转让后利率与正确的结果存在较大偏差。

上述公式避开资产数据，这就导致了推导出的公式可以说是一个纯数学意义上的算法（等额本息比较特殊，无法避开资产本金字段）。这些公式忽略了资产收益以及回款计划上的误差，也就导致了与资产以及回款计划数据上的不一致的问题。

这两个问题互相矛盾，可以说无法同时解决，对于铜子系统来说，出现极端场景的情况非常常见，第一个问题带来的影响尤为突出，故选择该利率算法，来避免极端场景上出现不合理转让后利率的问题。